ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ГАШЕНИИ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ СПУТНИКА И СВОЙСТВЕ ТЕНЗОРА ИНЕРЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

С.А.Мирер

Институт прикладной математики
им. М.В.Келдыша РАН

mirer@keldysh.ru

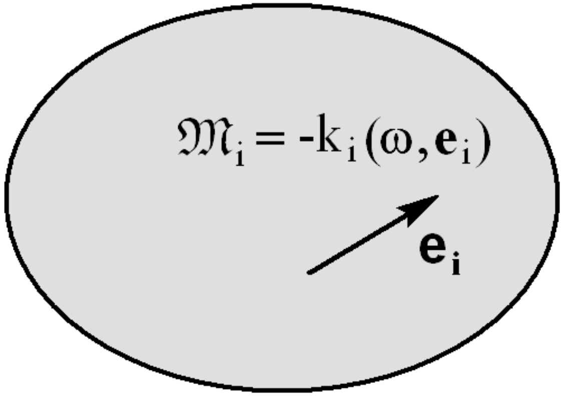
Задача о модельном демпфировании

При решении задачи об оптимальном демпфировании угловой скорости космического аппарата потребовалось проанализировать специфические функции элементов тензора инерции твердого тела. В результате были доказаны некоторые общие экстремальные соотношения.

В частности, оказалось, что произведение моментов инерции тела относительно трех ортогональных осей минимально, когда они являются главными центральными осями инерции.

Задача о модельном демпфировании

- Рассматривается задача оптимального гашения малой угловой скорости твердого тела.
- По трем произвольно ориентированным осям установлены устройства, вырабатывающие управляющие моменты, пропорциональные проекциям угловой скорости тела на эти оси.



К.В. ЛУКАНИН, В.А. САРЫЧЕВ. **Модельная задача о быстродействии и точности системы гравитационной стабилизации спутников.** ***Препринт ИПМ АН СССР, 1971, №47.***

Задача о модельном демпфировании

Движение тела относительно центра масс описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{M}$$

где $\quad \mathbf{M} = \mathcal{M}_1 \mathbf{e}_1 + \mathcal{M}_2 \mathbf{e}_2 + \mathcal{M}_3 \mathbf{e}_3 \;, \quad \mathcal{M}_i = -k_i \;\; \boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}_i$

или в проекциях на главные оси инерции тела ($\mathbf{E}_i$)

$$I_1 \dot{\omega}_1 + \;\; I_3 - I_2 \;\; \omega_2 \omega_3 + \sum k_i \;\; \boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}_i \quad \mathbf{e}_i, \mathbf{E}_1 \;\; = 0$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 + \;\; I_1 - I_3 \;\; \omega_3 \omega_1 + \sum k_i \;\; \boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}_i \quad \mathbf{e}_i, \mathbf{E}_2 \;\; = 0$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 + \;\; I_2 - I_1 \;\; \omega_1 \omega_2 + \sum k_i \;\; \boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}_i \quad \mathbf{e}_i, \mathbf{E}_3 \;\; = 0$$

$\mathbf{I} = \mathrm{diag} \;\; I_1, I_2, I_3 \;\; ; \; k_i$ - коэффициенты усиления моментных устройств.

Известно, что систему, в которой моментные устройства установлены по трем произвольным осям, можно свести к системе, в которой эти оси являются взаимно перпендикулярными. Далее считаем, что орты $\mathbf{e}_i$ образуют правую тройку взаимно ортогональных векторов.

Задача о модельном демпфировании

Уравнения движения приводятся к виду

$$I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 + \sum m_{1i}\omega_i = 0$$

$$I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_3\omega_1 + \sum m_{2i}\omega_i = 0$$

$$I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 + \sum m_{3i}\omega_i = 0$$

где $m_{is} = \sum_{j=1}^{3} k_j a_{js} a_{ji}$ - элементы симметричной матрицы.

Рассматривается решение

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0.$$

Для того, чтобы его можно было использовать в качестве рабочего режима, необходимо не только гарантировать асимптотическую устойчивость, но и выбрать значения параметров системы, при которых собственные колебания затухают достаточно быстро.

Скорость демпфирования оценивается величиной степени устойчивости ξ.

Задача о модельном демпфировании

Характеристическое уравнение линеаризованной системы

$$I_1 I_2 I_3 p^3 + \;\; \bar{k}_1 J_1 L_1 + \bar{k}_2 J_2 L_2 + \bar{k}_3 J_3 L_3 \;\; p^2 +$$

$$+ \;\; \bar{k}_1 \bar{k}_2 + \bar{k}_2 \bar{k}_3 + \bar{k}_3 \bar{k}_1 \;\; J_1 J_2 J_3 p + \bar{k}_1 \bar{k}_2 \bar{k}_3 J_1 J_2 J_3 = 0,$$

где

$$J_i = I_1 a_{i1}^2 + I_2 a_{i2}^2 + I_3 a_{i3}^2,$$

$$L_i = I_2 I_3 a_{i1}^2 + I_3 I_1 a_{i2}^2 + I_1 I_2 a_{i3}^2,$$

$$\bar{k}_i = k_i / J_i \,.$$

J_i - момент инерции тела относительно $\mathbf{e}_i$ - характеризует меру инертности тела при воздействии на него управляющего момента по этой оси. Отсюда ясно, что чем больше J_i, тем больше должен быть и соответствующий момент M_i.

Задача о модельном демпфировании

Выберем коэффициенты усиления моментных устройств так, чтобы

$$k_1/J_1 = k_2/J_2 = k_3/J_3\,, \quad \text{т.е.} \quad \bar{k}_1 = \bar{k}_2 = \bar{k}_2 = k\,.$$

Тогда характеристическое уравнение принимает вид

$$I_1 I_2 I_3 p^3 + k\ \ J_1 L_1 + J_2 L_2 + J_3 L_3\ \ p^2 +\ \ 3p + k\ \ k^2 J_1 J_2 J_3 = 0.$$

Предположим, ξ_{max} достигается при таких значениях параметров, когда все корни действительны и равны между собой. Тогда выполняются соотношения

(1) $\quad J_1 J_2 J_3 = I_1 I_2 I_3\,,$

(2) $\quad J_1 L_1 + J_2 L_2 + J_3 L_3 = 3 I_1 I_2 I_3\,,$

(3) $\quad k = \xi\,.$

Из (3) следует, что k надо брать как можно больше. Что касается (1) и (2), то можно доказать, что эти равенства имеют место только в случае «параллельности» осей демпфирования и главных центральных осей инерции тела (при этом порядок соответствия осей несущественен).

Задача о модельном демпфировании

Таким образом, при рассмотрении конкретной прикладной задачи возникает необходимость анализа специфических функций элементов тензора инерции твердого тела

$$\boxed{J_1 J_2 J_3}$$

$$\boxed{J_1 L_1 + J_2 L_2 + J_3 L_3}$$

$$J_i = I_1 a_{i1}^2 + I_2 a_{i2}^2 + I_3 a_{i3}^2, \quad L_i = I_2 I_3 a_{i1}^2 + I_3 I_1 a_{i2}^2 + I_1 I_2 a_{i3}^2$$

В результате такого анализа удалось доказать некоторые экстремальные соотношения для произвольного твердого тела.

Рассматривается твердое тело с главными центральными моментами инерции I_1, I_2, I_3 .

$Ox_1x_2x_3$ - система координат с осями вдоль главных центральных осей инерции;

$Oy_1y_2y_3$ - связанная система, ее ориентация относительно $Ox_1x_2x_3$ определяется ортогональной матрицей $\mathbf{A} = \left\| a_{ij} \right\|$,

$$a_{ij} = \cos \; Oy_i, Ox_j \; .$$

$J_i = \sum_{k=1}^{3} I_k a_{ik}^2$ - момент инерции тела относительно оси Oy_i

Экстремальные соотношения

Теорема:

Для любого твердого тела выполняются неравенства

$$\boxed{I_1 I_2 I_3 \le J_1 J_2 J_3 \le \left(\frac{I_1 + I_2 + I_3}{3}\right)^3},$$

причем правое равенство достигается только при коллинеарности осей Ox_i и Oy_j (порядок соответствия произвольный), а левое равенство имеет место при $J_1 = J_2 = J_3$.

Экстремальные соотношения

Сначала докажем правую часть неравенства $\boxed{J_1 J_2 J_3 \le \left(\dfrac{I_1 + I_2 + I_3}{3}\right)^3}$.

Обозначим $c = (I_1 + I_2 + I_3)/3$. С учетом $J_1 + J_2 + J_3 = I_1 + I_2 + I_3 = 3c$ имеем

$$J_1 J_2 J_3 = J_2 \cdot \frac{1}{4}\left[(J_1 + J_3)^2 - (J_1 - J_3)^2\right] \le \frac{1}{4} J_2 (3c - J_2)^2 \quad \text{(равенство при } J_1 = J_3\text{).}$$

Теперь рассмотрим функцию $f(J_2) = \dfrac{1}{4} J_2 (3c - J_2)^2$.

Принимая во внимание, что f определена на отрезке $[0, 3c/2]$, и

$$\frac{df}{dJ_2} = \frac{3}{4}(3c - J_2)(c - J_2), \qquad \frac{d^2 f}{dJ_2^2} = \frac{3}{2}(J_2 - 2c),$$

приходим к выводу, что $\max f$ имеет место при $J_2 = c$,

т.е. $\max(J_1 J_2 J_3) = c^3$ достигается при $J_1 = J_2 = J_3 = c$.

Экстремальные соотношения

Покажем, что найденный максимум действительно достигается, т.е. можно так подобрать элементы матрицы a_{ij}, чтобы

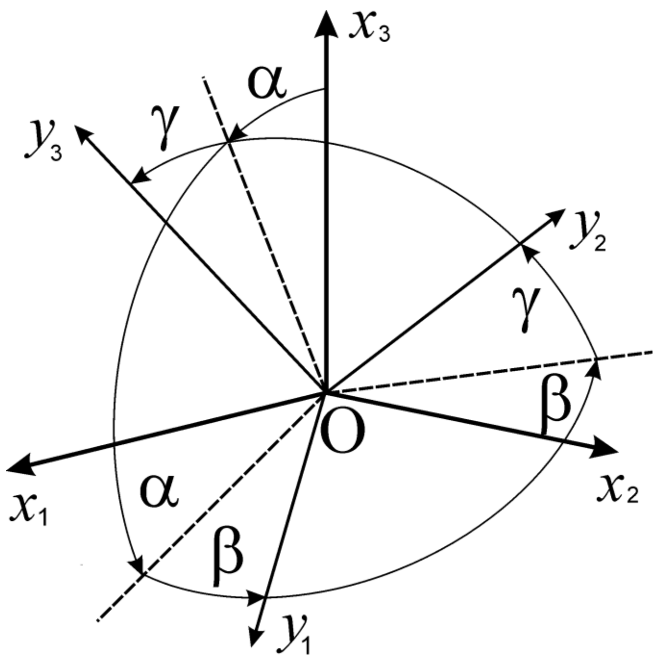
$$J_i = \sum_{k=1}^{3} I_k a_{ik}^2 = c, \quad i = 1, 2, 3.$$

Заметим, что a_{ij} также удовлетворяют условиям ортогональности

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 1,$$
$$a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 = 1,$$
$$a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} = 0.$$

Не разрешая систему, покажем существование хотя бы одного решения.

Положение системы координат $Oy_1y_2y_3$ относительно $Ox_1x_2x_3$ определим углами α, β, γ. Тогда условия ортогональности выполняются автоматически.



$$
\begin{aligned}
a_{11} &= \cos\alpha\cos\beta,\\
a_{12} &= \sin\alpha\sin\gamma - \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma,\\
a_{13} &= \sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma,\\
a_{21} &= \sin\beta,\\
a_{22} &= \cos\beta\cos\gamma,\\
a_{23} &= -\cos\beta\sin\gamma,\\
a_{31} &= -\sin\alpha\cos\beta,\\
a_{32} &= \cos\alpha\sin\gamma + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma,\\
a_{33} &= \cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma
\end{aligned}
$$

Условие

$$J_2 = I_1a_{21}^2 + I_2a_{22}^2 + I_3a_{23}^2 = c$$

выполнено, например, при $a_{21}^2 = a_{22}^2 = a_{23}^2 = 1/3 \Rightarrow \sin^2\beta = 1/3$, $\sin^2\gamma = 1/2$.

Экстремальные соотношения

Пусть для определенности

$$\sin\beta = 1/\sqrt{3}, \quad \sin\gamma = 1/\sqrt{2}, \quad \cos\gamma = 1/\sqrt{2}.$$

Тогда

$$a_{11}^2 = \frac{1}{3}\ 1+\cos 2\alpha\ \ ,$$

$$a_{12}^2 = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2}\cos 2\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha\right), \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tg}\,2\alpha = \sqrt{3}\,\frac{I_1 - c}{I_2 - I_3}$$

$$a_{13}^2 = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2}\cos 2\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha\right)$$

Заметим, что это выражение теряет смысл при $I_2 = I_3$. Однако, в этом случае $\cos 2\alpha = 0$, откуда, в частности, $\alpha = \pi/4$.

Экстремальные соотношения

Таким образом, показано, что для произвольного твердого тела всегда можно так выбрать направления осей системы координат $Oy_1y_2y_3$, что все осевые моменты инерции окажутся одинаковыми, т.е.

$$J_1 = J_2 = J_3 = \frac{1}{3}\ \ I_1 + I_2 + I_3\ \ .$$

Полученный результат допускает также следующую геометрическую интерпретацию. Пусть имеется трехосный эллипсоид с полуосями a, b, c. Тогда всегда можно ввести декартову систему координат с началом в центре эллипсоида таким образом, что точки пересечения координатных осей с эллипсоидом окажутся на одинаковом расстоянии d от его центра, причем

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right).$$

Экстремальные соотношения

Левая часть неравенства $\boxed{J_1 J_2 J_3 \geq I_1 I_2 I_3}$ становится очевидной после выполнения ряда элементарных преобразований, приводящих к

$$J_1 J_2 J_3 = I_1 I_2 I_3 + I_1 (I_2 - I_3)^2 a_{22}^2 a_{23}^2 + I_2 (I_3 - I_1)^2 a_{23}^2 a_{21}^2 + I_3 (I_1 - I_2)^2 a_{21}^2 a_{22}^2 +$$

$$+ (I_1 a_{21}^2 + I_2 a_{22}^2 + I_3 a_{23}^2)(I_1 a_{11} a_{31} + I_2 a_{12} a_{32} + I_3 a_{13} a_{33})^2 \geq I_1 I_2 I_3,$$

причем равенство достигается при одновременном выполнении условий

$$a_{21} a_{22} = 0, \; a_{22} a_{23} = 0, \; a_{23} a_{21} = 0,$$

$$I_1 a_{11} a_{31} + I_2 a_{12} a_{32} + I_3 a_{13} a_{33} = 0,$$

$$a_{11} a_{31} + a_{12} a_{32} + a_{13} a_{33} = 0$$ (следствие ортогональности матрицы).

Отсюда определяются все случаи, когда возможно равенство $J_1 J_2 J_3 = I_1 I_2 I_3$ (в предположении, что $I_1 \neq I_2 \neq I_3$).

Экстремальные соотношения

Равенство $J_1 J_2 J_3 = I_1 I_2 I_3$ возможно в следующих случаях:

1). $a_{11}^2 = a_{22}^2 = a_{33}^2 = 1;$ 2). $a_{11}^2 = a_{23}^2 = a_{32}^2 = 1;$

3). $a_{12}^2 = a_{21}^2 = a_{33}^2 = 1;$ 4). $a_{12}^2 = a_{23}^2 = a_{31}^2 = 1;$

5). $a_{13}^2 = a_{21}^2 = a_{32}^2 = 1;$ 6). $a_{13}^2 = a_{22}^2 = a_{31}^2 = 1.$

(приведены только ненулевые элементы матрицы)

Из вида решений следует, что все они отвечают ситуациям, когда оси систем координат $Oy_1 y_2 y_3$ и $Ox_1 x_2 x_3$ «совпадают» (ось Oy_i коллинеарна оси Ox_k).

Заметим, что надо оставить лишь те решения, которые отвечают правой системе координат, т.е. удовлетворяют условию $|\mathbf{A}| = 1$.

Экстремальные соотношения

Имеет место также неравенство

$$\boxed{J_1L_1 + J_2L_2 + J_3L_3 \geq 3I_1I_2I_3},$$

где $L_i = I_2I_3a_{i1}^2 + I_3I_1a_{i2}^2 + I_1I_2a_{i3}^2$.

Неравенство становится очевидным после несложных преобразований:

$$\sum_{i=1}^{3} J_iL_i = 3I_1I_2I_3 + I_1\left(I_2 - I_3\right)^2\left(a_{12}^2a_{13}^2 + a_{22}^2a_{23}^2 + a_{32}^2a_{33}^2\right) +$$

$$+ I_2\left(I_3 - I_1\right)^2\left(a_{13}^2a_{11}^2 + a_{23}^2a_{21}^2 + a_{33}^2a_{31}^2\right) +$$

$$+ I_3\left(I_1 - I_2\right)^2\left(a_{11}^2a_{12}^2 + a_{21}^2a_{22}^2 + a_{31}^2a_{32}^2\right).$$

Ясно, что равенство достигается при одновременном выполнении условий

$$a_{i1}a_{i2} = 0, \quad a_{i2}a_{i3} = 0, \quad a_{i3}a_{i1} = 0 \qquad \left(i = 1, 2, 3\right),$$

что возможно только в уже рассмотренных ранее случаях.

С.А.МИРЕР. **О некоторых экстремальных соотношениях между элементами тензора инерции твердого тела.**
Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, 2009, №55.

mirer@keldysh.ru

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Программы поддержки Ведущих научных школ России.