О некоторых задачах
в динамике систем гироскопической стабилизации

Л.К.Кузьмина

Казанский авиационный институт (КГТУ им.А.Н.Туполева)

Lyudmila.Kuzmina@ksu.ru

Предметом работы являются некоторые специальные проблемы, порожденные потребностями задач динамики систем стабилизации и ориентации, содержащих гироскопические исполнительные и управляющие устройства. Центральное место занимает проблема декомпозиции модели для систем такого класса, с обоснованием принципа сведения в общем качественном анализе, с разделением параметров в исходной модели на существенные и несущественные, с разбиении фазовых переменных на разномасштабные по времени группы, с выделением главных степеней свободы (в рамках поставленной динамической задачи, с соответствующей идеализацией физических свойств элементов системы).

С учетом особенностей систем гиростабилизации, СГС, (нелинейность, высокая размерность, многосвязность, подсистемы различной физической природы, критические случаи) в развитие асимптотического подхода, развивающего методы теории устойчивости для решения поставленной нетривиальной проблемы, разрабатываются регулярные приемы для декомпозиции исходных нелинейных систем рассматриваемого класса. Формируется алгоритм, доведенный до инженерного уровня, позволяющий автоматически в исходной модели выделять существенные и несущественные параметры, разделять переменные состояния и каналы стабилизации в нелинейной постановке; с возможностью построения минимальной асимптотической модели, к которой допустимо сведение исходной задачи динамики. Предмет отдельного рассмотрения - задача о быстродействии системы и об оптимальных параметрах. Рассмотрены различные классы моделей СГС.

1. Введение

В работе рассматриваются общие вопросы математического моделирования и анализа сложных механических систем применительно к особенностям задач декомпозиции в динамике систем с гироскопами, включая специальные проблемы, порожденные потребностями задач динамики систем стабилизации и ориентации, содержащих гироскопические исполнительные и управляющие устройства. При этом центральное место занимает проблема редукции модели для систем такого класса, с обоснованием принципа сведения в общем качественном анализе с разделением движений и каналов управления для систем гиростабилизации и ориентации. Высокая размерность, многосвязность, нелинейность исходной модели обуславливают жесткую необходимость в разделении параметров системы на существенные и несущественные, в разбиении фазовых переменных на разномасштабные по времени группы, в выделении главных (в рамках поставленной динамической задачи) степеней свободы с соответствующей идеализацией физических свойств элементов системы [1-13].

С учетом особенностей систем гиростабилизации (СГС), в развитие подхода, распространяющего методы теории устойчивости на решение поставленной нетривиальной проблемы (в постановках А.М.Ляпунова, Н.Г.Четаева, П.А.Кузьмина, Д.Р.Меркина), разрабатываются регулярные приемы для декомпозиции исходных нелинейных систем рассматриваемого класса. Построен регулярный алгоритм, позволяющий разделять переменные состояния на разночастотные группы; с возможностью разделения каналов в системе стабилизации и ориентации в нелинейной постановке; с возможностью построения минимальной (асимптотической) модели, к которой допустимо сведение исходной задачи динамики. Рассмотрены различные классы моделей СГС (с обоснованием их математической декомпозиции, с выделением оптимальных моделей и областей приемлемости), с конкретными примерами для многоканальных систем, для случаев малых и больших стабилизируемых объектов.

2. Исходные постановки

Работа формируется на принятом основном положении о глобальной методологической связи между проблемами моделирования и методами теории устойчивости

А.М.Ляпунова [1,14,15]. Такой подход восходит к постулату устойчивости (Н.Г.Четаев) и к свойству устойчивости при параметрических возмущениях (П.А.Кузьмин). Разрабатываемый метод развивает единообразный подход, основанный на постулате сингулярности (Л.К.Кузьмина), с интерпретацией рассматриваемых объектов как систем сингулярно возмущенного класса, комбинирующий методы теории устойчивости и теории возмущений. При этом состояние исходного объекта описывается математической моделью с сингулярными возмущениями. Два основных принципа (постулат устойчивости и постулат сингулярности) приняты здесь как исходные аксиомы. С этих позиций применительно к специфике проблем и особенностей систем гиростабилизации-ориентации исходные модели трактуются как сингулярно возмущенные, расчетные модели для них – укороченные модели меньшего порядка. Как правило, на практике эти расчетные модели получаются по интуиции, без строгого математического анализа влияния отброшенных членов на динамические свойства. Проблемы корректности и качественной эквивалентности не обсуждаются. В качестве критерия законности этих укороченных моделей “интуитивного уровня” принимается, как правило, лишь эксперимент. Но, совершенно очевидно, что необходима общая теория для их строгого обоснования. Не приводя здесь обширной библиографии и ссылок, отметим лишь, что некоторые аспекты со строгими постановками о приемлемости такого перехода в механике были предметом обсуждения с различных точек зрения многими авторами [2,6,14-17].

Для иллюстрации приведем некоторые примеры конкретного физико-технического содержания. Например, в динамике механических систем с гироскопами [6,9] в качестве исходной полной математической модели, ИМ, используют уравнения в форме Лагранжа вида

ИМ $$a\ddot{q} + (b+g)\dot{q} + eq = ... \tag{1}$$

Модель (1) описывает поведение исследуемого объекта; k – число степеней свободы; $N=2k$ порядок (1). В инженерной практике исследователи нередко пренебрегают некоторыми членами и переходят к укороченной модели, УМ, меньшего порядка (в предположении, например, о малости некоторых инерциальных членов в системе или – о быстровращающихся гироскопах) вида

УМ $$\tilde{a}\ddot{q} + (b+g)\dot{q} + eq = ..., \quad \tilde{a} = \|a_1, 0\|^T \tag{2a}$$

или

УМ $$(b+g)\dot{q} + eq = ... \tag{2b}$$

Порядок УМ – $N_У$ ($N_У<N$), для (2b) – $N_У= N/2$.

Аналогично в динамике быстрого гироскопа исходная математическая модель, описывающая движение тела с одной закрепленной точкой уравнениями в форме Эйлера, заменяется укороченной моделью [6,9] типа (2b) (моделью прикладной теории гироскопов, называемой прецессионной моделью)

УМ $$\Omega \times H = M \tag{3}$$

С точки зрения механики, это означает переход от исходной задачи с k степенями свободы к упрощенной задаче ($k_У$ – число степеней свободы; $k_У= N_У/2$; $k_У<k$) [2,6,16-18]. Но эти укороченные модели – это лишь формализованные математические абстракции, которые не описывают поведение никакого реального объекта [6]; в общем случае $k_У$ – нецелое число [16]. Здесь имеет место математическая декомпозиция [8] для исходной системы. Такая ситуация обуславливает специфические проблемы, являющиеся весьма актуальными и для теории, и для инженерной практики:

– методология сведения к корректной модели меньшей размерности в динамическом анализе, включая сложные управляемые системы [1,3,14,19];
– особый случай полной математической декомпозиции [6,8] (рис.1).

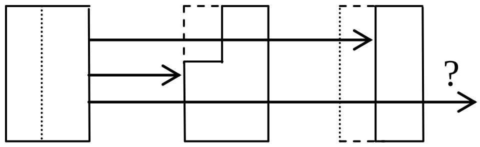

Рис.1

Сформулированные задачи очень важны в динамике систем стабилизации-ориентации с гироскопическими управляющими элементами, для которых имеют место критические особенные случаи.

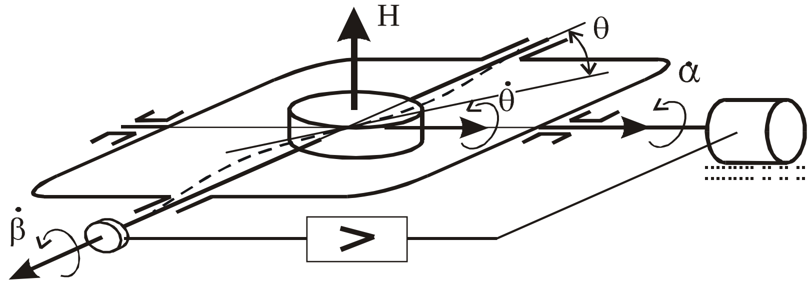

Рис.2

Для конкретности рассмотрим систему (рис.2) одноосной гиростабилизации (ОГС). Здесь ОГС моделируется как механическая система с безинерционным следящим приводом; H – собственный кинетический момент гироскопа; $q=(\beta,\alpha,\theta)$; β – угол прецессии, α – угол стабилизации, θ – угол деформации оси подвеса гироскопа (принято, что элементы подвеса гироскопа не обладают абсолютной жесткостью). В таком случае полная исходная модель, ИМ, – это система типа (1):

ИМ
$$
\begin{aligned}
A\ddot{\beta} &\;\vdots - H\dot{\theta} - H\dot{\alpha} = -b_1\dot{\beta} + \ldots \\
J\ddot{\alpha} + B\ddot{\theta} &\;\vdots + H\dot{\beta} = -b_2\dot{\alpha} - e\beta + \ldots \\
B(\ddot{\theta} + \ddot{\alpha}) &\;\vdots + H\dot{\beta} = -b_3\dot{\theta} - c\,\theta + \ldots
\end{aligned} \tag{4}
$$

A, J, B – соответствующие моменты инерции; b_1, b_2, b_3 – соответствующие коэффициенты трения; c, e - коэффициенты обобщенных сил потенциального и не-потенциального характера. Здесь ИМ имеет 3 степени свободы (k=3).
В инженерной практике вводят различные укороченные модели (в качестве расчетных моделей) в предположении, что гироскоп – быстрый (H – большой параметр):

УМ
$$
\begin{aligned}
- H\dot{\theta} - H\dot{\alpha} &= -b_1\dot{\beta} + \ldots \\
H\dot{\beta} &= -b_2\dot{\alpha} - e\beta + \ldots \\
H\dot{\beta} &= -b_3\dot{\theta} - c\theta + \ldots
\end{aligned} \tag{5}
$$

УМ
$$
\begin{aligned}
- H\dot{\theta} - H\dot{\alpha} &= -b_1\dot{\beta} + \ldots \\
\tilde{J}\ddot{\alpha} + H\dot{\beta} &= -b_2\dot{\alpha} - e\beta + \ldots \\
H\dot{\beta} &= -b_3\dot{\theta} - c\theta + \ldots
\end{aligned} \tag{6}
$$

Эти укороченные модели вводятся на интуитивном уровне.

Модель (5) – это укороченная (приближенная) модель, которая имеет 1,5 степени свободы ($k_У$ = 1,5). Система (5) получена из (4) при отбрасывании некоторых членов, в предположении что гироскоп – быстрый, H – большой параметр. В этой модели отсутствуют члены с производными второго порядка, которые соответствуют ускорениям для исходной модели. Модель (5) – это прецессионная модель (приближенная модель, которая известна в прикладной теории быстрых гироскопов, в прецессионной теории), широко используемая в качестве традиционной укороченной модели в инженерной практике. Но (5) – это лишь формализованная математическая конструкция с $k_У < k$, $k_У$ – нецелое число. Необходимо получить строгое обоснование для возможности использования ее, с оценками требуемых значений H для законности этой укороченной модели.

Модель (6) – другая укороченная модель с $k_У = 2$. Эта модель не содержит членов, соответствующих массам и моментам инерции гироскопа и его подвеса; сохраняются только члены, соответствующие инерционным моментам стабилизируемого объекта (платформы). Укороченная модель (6) – также формальная математическая конструкция ($k_У < k$). Но в инженерной практике эта модель также называется прецессионной моделью; исследователи принимают, что приемлемость (6) может быть основана на том же самом предположении о быстром вращении гироскопа (с введением в качестве большого параметра H) (почему …?). Наш детальный анализ показывает, что это – не корректное положение (это – заблуждение, ведущее к погрешностям). Условия приемлемости модели (6) должны быть основаны на другом физическом свойстве, которое здесь является главным исходным положением; и для введения укороченной модели, для обоснования ее приемлемости в этом случае должен быть использован другой большой параметр, связанный с большой массой стабилизируемого объекта (платформы). Соответственно, условия приемлемости УМ (6) – другие, основанные на указанном положении.

Из этих рассмотрений следуют главные вопросы применительно к теории систем гироскопической стабилизации-ориентации (СГС):

- при каких условиях укороченная (прецессионная) модель будет корректной?
- что представляет собой вводимая укороченная модель (с точки зрения физической интерпретации)?
- как может быть сконструирована эта укороченная модель строгим аналитическим способом?

Проблема приемлемости прецессионной теории не решена. Это – очень важная область в теории гироскопических систем и в общей механике, и для фундаментальной проблемы моделирования в целом.

Эти проблемы имеют не только важную математическую сторону как сингулярные задачи [13], но они имеют также гносеологический и философский аспекты [19,20]. Здесь возникают интересные вопросы:

- что́ такое укороченная модель?
- что́ значит “существенные” и ”несущественные” степени свободы?
- что́ может быть отброшено?
- ка́к понимать: “может быть”?

Нас интересует здесь иная постановка вопроса: не че́м можно пренебречь, а что́ должно быть учтено, если мы исследуем влияние конкретного физического свойства на динамику системы.

Аналогичные задачи могут быть сформулированы и в общем случае систем гироскопической стабилизации и ориентации, моделируемых как электромеханические системы с учетом переходных процессов в следящих системах, для которых исходная математическая модель принимается в обобщенной форме Лагранжа-Максвелла или в форме Гапонова [19]:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}a\dot{q}_M + (b+g)\dot{q}_M = Q'_M + Q_{ME} + Q''_M \\
&\frac{d}{dt}L\dot{q}_E + R\dot{q}_E = Q'_E + Q_{EM} + Q''_E\,;\;\; \frac{dq_M}{dt} = \dot{q}_M \\
&Q_{ME} = A_M\dot{q}_E\,;\; Q_{EM} = B_E\dot{q}_M\,;\; Q'_E = -\omega\, q_1 - \Omega\, \dot{q}_E
\end{aligned}
\tag{7}
$$

$q_M = \| q_1 , q_2 \|^{\mathrm{T}}$; q_M – n-вектор механических обобщенных координат (лагранжевых), q_1 – l-вектор механических управляющих координат (углов прецессий гироскопов); q_E – u-вектор электрических обобщенных координат (максвелловых); a, L – квадратные симметричные матрицы кинетической, электромагнитной энергии СГС соответственно; b, R – квадратные симметричные матрицы диссипативных функций (механической и электрической природы соответственно); g – квадратная матрица гироскопических коэффициентов; Q_{ME} и Q_{EM} – вектор механических обобщенных сил электромагнитного происхождения (пондеромоторных сил) и вектор электрических обобщенных сил механического происхождения (противоэлектродвижущих сил); Q'_E – вектор электрических обобщенных сил (сил управления); Q''_M, Q''_E – совокупность нелинейных членов. Примем, что все функции в (7) – голоморфные (по совокупности всех переменных) в соответствующей области. Система (7), называемая здесь исходной моделью, ИМ, имеет порядок $N = (2n + u)$; и $k= N/2$ – число степеней свободы ИМ. В инженерной практике, идеализируя ИМ по некоторым физическим свойствам, авторы вводят для СГС различные укороченные модели, УМ, меньшего порядка в качестве расчетных моделей: УМ порядка (n+u), УМ порядка (n), УМ порядка ($2n$–l+u), …[9,10]. Но: – эти укороченные модели меньшего порядка используются в решении проблем анализа и синтеза для исходной модели порядка N, хотя для такого перехода не приводится строгого обоснования (*почему?!*); – эти УМ получены на интуитивном уровне (*как?!*); отсутствуют регулярные методы для конструирования укороченных моделей строгим математическим путем; – для такого сведения необходима высокая квалификация исследователя, потому что мы можем получить некорректные модели, которые не будут качественно эквивалентными исходной модели; – что является лучшей укороченной моделью (оптимальной и минимальной в некотором смысле) [12].

Главные задачи, являющиеся целью исследования:

- построение оптимальных механико-математических моделей;
- развитие строгих приемов идеализации;
- обоснование законности укороченных моделей в динамике;
- определение условий качественной эквивалентности.

Сформулированные проблемы можно решить методом, следующим идеологии теории устойчивости, с расширением общего подхода, основанного А.М.Ляпуновым, использованного Н.Г.Четаевым применительно к механике. Понимание этих проблем с точки зрения сингулярно возмущенных задач дает значительные продвижения как для теории, так и для приложений. Здесь с помощью разрабатываемого метода получены интересные и важные результаты для СГС. При этом исследование нелинейных, многомерных моделей сводится к задачам меньшего порядка, для подмоделей, которые вводятся как асимптотические модели (s-модели). Так как качественные характеристики не обладают свойством декомпозиции, разрабатываются соответствующие методы сведения с получением необходимых условий. Используемый метод позволяет разделить переменные и движения исходной системы на разночастотные компоненты уже на начальном этапе исследования выделить существенные и несущественные параматры, получить условия для приемлемой декомпозиции (как для физической, так и для математической). Для рассматриваемых СГС разработана регулярная схема декомпозиции, получены новые результаты.

3. Общие положения

Примем ИМ в форме (7). Последовательные задачи:

(a) задача моделирования (конструирование УМ строгим математическим путем); (b) задача приемлемости (определение условий эквивалентности моделей); (c) задача оценок (нахождение областей допустимых значений параметров); (d) задача построения минимальной модели. Мощный аппарат для решения этих проблем – методы теории А.М.Ляпунова с расширением свойства параметрической устойчивости на нерегулярный случай (Н.Г.Четаев, П.А.Кузьмин). Главная гипотеза: все исследуемые объекты можно трактовать как объекты сингулярно возмущенного класса (Л.К.Кузьмина), причем, всегда существует такое преобразование переменных $(q,\dot{q})\rightarrow y$, с помощью которого исходная математическая модель, ИМ, может быть приведена к стандартной форме системы с нерегулярными возмущениями

$$M(\mu)\, dy/dt = Y(t, \mu, y) \tag{8}$$

μ – малый положительный безразмерный параметр; $M(\mu)=\|M_{ij}(\mu)\|$; $M_{ii}(\mu) =\mu^{\alpha_i} I$, $0 \le\alpha_i\le r$, I – единичные матрицы; y – N-вектор новых переменных; $Y(t, \mu, y)$ – нелинейная N-вектор-функция с соответствующими свойствами.

Система (8), называемая здесь исходной системой (ИС), имеет порядок N ($N = 2n + u$). Для такого представления необходимо: – ввести в исходную модель (7) малый параметр μ, соответствующий конкретному изучаемому физическому свойству элементов; – построить соответствующее преобразование переменных (невырожденное, равномерно-регулярное) $y = L(q, \dot{q}, \mu)$ такое, что ИМ (7) в новых переменных y имеет требуемую форму (8) сингулярно возмущенной системы (СВС).

Такое представление ИМ дает естественный регулярный путь для решения сформулированных проблем. Вводим в качестве укороченной системы (УС) для ИС приближенную упрощенную систему вида

$$M_S(\mu)\, dy/dt = Y_S(t, \mu, y) \tag{9}$$

Система (9) имеет порядок N_S ($N_S<N$). Она получена из (8) при отбрасывании в элементах всех матриц членов более высокого порядка, чем s, по μ (s – число, заданное наперед, $s < r$). Система (9) – система сравнения для (8); и будем называть ее укороченной системой s-уровня (s-системой, УС$_s$). Это – система дифференциально-алгебраических уравнений, СВС; $M_S(\mu)$ – сингулярная матрица.

Возвращаясь в (9) к старым переменным $(q, \dot{q})$, получим укороченную модель s-уровня (s-модель, УМ$_s$). УМ$_s$ имеет k_S степеней свободы ($k_S = N_S/2$). С точки зрения механики УМ – идеализированная модель (идеализация по выбранному физическому свойству, которому соответствует малый параметр μ). Более того, могут быть введены иерархические последовательности s-систем, УС$_s$ и – соответствующих s-моделей, УМ$_s$ для разных s (s = 0,1, …, r-1) и разных малых параметров (μ, μ_1, μ_2,…): (УС$_0$, УС$_1$…)$_\mu$ → (УМ$_0$, УМ$_1$,…)$_\mu$; (УС$_0$, УС$_1$…)$_{\mu 1}$→ (УМ$_0$, УМ$_1$,…)$_{\mu 1}$;… Таким подходом может быть построено все семейство возможных моделей для рассматриваемых СГС.

Разработанный метод основан на понимании проблемы моделирования через подход сингулярно возмущенных систем [17,18]. Это дает регулярный алгоритм, простую схему инженерного уровня для построения укороченных математических моделей (в качестве расчетных) исходного объекта (ИО) строгим математическим способом:

$$\text{ИО} \rightarrow \underset{(q,\dot{q})}{\text{ИМ}} \rightarrow \underset{(y)}{\text{ИС}} \rightarrow \underset{(y)}{\text{УС}} \rightarrow \underset{(q,\dot{q})}{\text{УМ}} \tag{10}$$

При этом автоматически выполняется декомпозиция исходной модели на подмодели, исходные переменные состояния разделяются на разночастотные группы; исходные параметры разделяются на существенные и несущественные, автоматически выделяются главные степени свободы (в рамках поставленной задачи).

Замечание. Здесь приведены общие результаты, которые дают полное решение по задаче (a). Следующие стадии – задачи (b), (c) … Не обсуждая все детали и полученные теоремы, приведем здесь только некоторые итоги в рамках используемого подхода. По задаче (b) (задача приемлемости): известно, динамические свойства (устойчивость, оптимальность, быстродействие, …) не обладают декомпозицией. Необходимо, чтобы были выполнены специальные условия [20,21]. Для решения этих вопросов используется развиваемый метод. При этом соответствующие динамические проблемы трактуются как сингулярно возмущенные задачи (СВЗ), в рамках принятой здесь (расширяющей традиционную) постановки, когда порождающие системы, *s*-системы, являются также сингулярно возмущенными. Получены результаты для задачи устойчивости (называемой здесь “s-устойчивостью”), задачи близости (“s-близость” как задача устойчивости множества), задачи *s*-быстродействия, *s*-оптимальности, …

По задаче (c) (задача оценок): это связано как с оценкой значений μ, допускающих сведение ИС, так и с оценкой допустимых областей параметров для использования УС. Разработанная технология, основанная на методах А.М.Ляпунова, на идеях Н.Г.Четаева, на постулате сингулярности, позволяет определить необходимые оценки. Получены важные результаты.

4. Приложения к динамике систем гиростабилизации и ориентации

Применительно к рассматриваемым объектам разработанный подход оказался весьма плодотворным. Пусть исходная модель принята в форме (7).

(a). Задача моделирования для СГС

В соответствии с развитым методом необходимо выбрать конкретное физическое свойство, ввести малый параметр, построить требуемое преобразование переменных, представить ИМ (7) в форме СВС, использовать алгоритм (10).

СГС с быстрыми гироскопами. В этом случае в (7) $g=g^*H$, $H = 1/\mu$, μ – малый параметр. В работе построено требуемое преобразование переменных, ИМ представлена в форме (8), как СВС, переменные состояния разделены на три группы: $\dot{q}_M$ – высокочастотные переменные; $\dot{q}_E$ – среднечастотные переменные; q_M – низкочастотные переменные. Два типа укороченных моделей $(УМ_1, УМ_0)_\mu$ построены:

$$(b+g)\dot{q}_M = Q'_M + Q_{ME} + \overline{Q}''_M, \quad \frac{dq_M}{dt} = \dot{q}_M$$

$$\frac{d}{dt}L\dot{q}_E + R\dot{q}_E = Q'_E + Q_{EM} + Q''_E \qquad (11)$$

$$g\dot{q}_M = Q'_M + Q_{ME} + \tilde{Q}''_M,$$

$$R\dot{q}_E = Q'_E + \tilde{Q}''_E; \quad \frac{dq_M}{dt} = \dot{q}_M \qquad (12)$$

Здесь (11) – это $УМ_1$ порядка $(n + u)$ по μ; (12) – это $УМ_0$ *n*-порядка. (12) – предельная по μ модель (новая модель).

СГС с быстродействующими следящими системами. В этом случае (7) – это система с малоинерционными электрическими контурами. Здесь вводимый малый параметр μ_1 соответствует малой постоянной времени электрических цепей. Для этого случая в работе также построено требуемое преобразование переменных; ИМ представлена как СВС; переменные состояния разделены на три группы: $\dot{q}_M$ – среднечастотные; $\dot{q}_E$ – высокочастотные; q_M – низкочастотные переменные. Построены укороченные модели $(УМ_1, УМ_0)_{\mu 1}$:

$$\frac{d}{dt}a\dot{q}_M + (b+g)\dot{q}_M = Q'_M + Q_{ME} + Q''_M$$
$$R\dot{q}_E = Q'_E + \overline{Q''_E}, \quad \frac{dq}{dt} = \dot{q}_M \tag{13}$$
$$(b+g)\dot{q}_M = Q'_M + Q_{ME} + \overline{Q''_M}$$
$$R\dot{q}_E = Q'_E + \tilde{Q}''_E, \quad \frac{dq}{dt} = \dot{q}_M \tag{14}$$

(13) – УМ$_1$ порядка $2n$ (по μ_1); (14) – УМ$_0$ порядка n. (14) – предельная по μ_1 модель (новая модель).

Все укороченные модели получены регулярным математическим путем, по единому алгоритму; (11) и (13) – известные модели; но (12) и (14) – новые модели для СГС.

СГС с большими стабилизируемыми платформами (объектами). Пусть исходная модель – (7). В прикладных исследованиях [10] для этого случая укороченная модель вводится как упрощенная математическая модель порядка ($2n–l + u$) (это – УМ типа модели (2а), называемая при этом “прецессионной моделью”, со ссылками по ее обоснованию на “прецессионную теорию” гироскопических систем с быстрыми гироскопами). Но такие ссылки не корректны для этого случая; как уже отмечено выше, прецессионная модель не является обоснованной для СГС рассматриваемого класса (с большим стабилизируемым объектом) (Д.Р.Меркин, А.Ю.Ишлинский). Возникают очень интересные, важные задачи в общей теории СГС: как можно построить корректную УМ в этом случае? каково условие приемлемости УМ для этой системы? как можно получить оценки допустимых значений параметров? …

Наш разработанный единообразный подход позволяет решать эти задачи. Получены новые интересные результаты. В этом случае полагаем, что массы и моменты инерции гироскопов и их подвесов – малые величины (по сравнению с массовыми характеристиками стабилизируемых платформ). Вводим малый параметр μ_2, который соответствует этой постановке. Тогда $a_M=\|a_1,a_2\|^T$; $a_1 =a_1(q_M,\mu_2)= =a_1{*}\mu_2$; $a_2 = a_2(q_M,\mu_2)$, $a_2(q_M, 0) = \bar{a}_2 \neq 0$.

Требуемое преобразование переменных здесь также построено; ИМ (7) представлена в стандартной форме СВС (в новых переменных) для этого случая. По той же самой, разработанной схеме (10) построена укороченная модель. Приближенная модель, построена как УМ$_0$ (по μ_2) порядка ($2n–l + u$). Это – новая модель: укороченная модель СГС с малыми гироскопами (с большими стабилизируемыми платформами). Это – не прецессионная модель; предположения относительно быстрых гироскопов не используются; главное свойство – “малый гироскоп” (точнее – большой стабилизируемый объект) Это – новый результат, с новой рабочей УМ, с новыми условиями приемлемости, отличными от известных, упоминаемых в [10].

(b). Задача приемлемости для СГС

В соответствии с разработанным подходом конкретные типы СГС были рассмотрены с точки зрения проблемы приемлемости УМ. При этом задача приемлемости разделяется на отдельные подзадачи; проблема приемлемости модели в общей постановке не корректна; понятие приемлемости модели – относительное, понятие “приемлемость вообще” не имеет смысла. Это должно рассматриваться в рамках конкретных целей конструируемой модели (L.Ljung, Л.К.Кузьмина). Здесь получены теоремы о декомпозиции свойства устойчивости (асимптотической и неасимптотической), о близости между решениями ИМ и УМ (с оценками типа Н.Г.Четаева), о декомпозиции свойства быстродействия, о свойстве максимальной степени устойчивости, об оптимальных параметрах. Результаты были получены как для общей теории возмущений, так и для теории СГС.

Не приводя деталей и доказательств, приведем здесь, как пример, теорему применительно к задаче сведения (7)→(14) (ИМ – (7), УМ – (14)). Здесь (14) отвечает идеализированной модели с безинерционными элементами механической и электрической подсистем (соответствующий малый параметр – μ_1, отвечающий малой постоянной времени электрических цепей).

Теорема. Если уравнения $d_1=|L\alpha+R^0+\Omega^0| = 0$; $d_2=| a^0 \beta+b^0+g^0| = 0$;

$$d_3 = \left|\begin{array}{c:c} b^0_1+g^0_1 & 0 \\ \hdashline (b^0_2+g^0_2)\lambda & -A^0 \\ \hdashline \omega^0 \;\vdots\; 0 & R^0+\Omega^0 \end{array}\right| = 0$$

удовлетворяют условиям Гурвица, тогда при достаточно малых значениях μ_1, свойство устойчивости (асимптотической или неасимптотической) нулевого решения системы (14) влечет за собой соответствующее свойство устойчивости нулевого решения системы (7); и для заданных чисел $\varepsilon>0$, $\delta>0$, $\gamma>0$ (ε и γ могут быть сколь угодно малыми) существует такое значение μ_1^*, что в возмущенном движении при $\mu_1<\mu_1^*$ для всех $t \geq t_0+\gamma$ выполняются оценки:

$$\left\|\dot{q}_M - \dot{q}_M^*\right\| < \varepsilon, \quad \left\|q_M - q_M^*\right\| < \varepsilon, \quad \left\|\dot{q}_E - \dot{q}_E^*\right\| < \varepsilon,$$

если для $t = t_0$ $q_{M0} = q_{M0}^*$, $\left\|\dot{q}_{M0} - \dot{q}_{M0}^*\right\| < \delta$, $\left\|\dot{q}_{E0} - \dot{q}_{E0}^*\right\| < \delta$

Здесь индексом “*” отмечено решение (14); решение (7) – без “*”. Теорема дает условия приемлемости для новой УМ (14), более простой, чем известная (13). Другие случаи и сингулярные задачи были рассмотрены; соответствующие теоремы – получены.

5. Примеры

Рассмотрим здесь систему одноосной гиростабилизации (ОГС, рис.2), моделируя ее в форме (7) [21], где $n=2$, $u=3$; $q_M=(\beta,\alpha)$; $\dot{q}_E=(i_1, i_2, i_3)$;

$$A\ddot{\beta} + b_1\dot{\beta} - H\dot{\alpha} = \ldots;\; I\ddot{\alpha} + b_2\dot{\alpha} + H\dot{\beta} = -g_M i_2 + \ldots$$

$$\sum_{j=1}^{3} L_{kj}\dot{i}_j + R_k\, i_k = Q_k + \ldots \quad (k = 1,2,3) \tag{15}$$

$$Q_1 = -\omega\beta;\; Q_2 = g_E\dot{\alpha} - \Omega i_1,\; Q_3 = 0$$

β – угол прецессии гироскопа; α – угол стабилизации платформы; i_1, i_2, i_3 – токи в независимых контурах электрических цепей следящих систем; H – собственный кинетический момент гироскопа. Здесь ИМ – система 7-ого порядка.

Рассмотрим ОГС с быстродействующим следящим приводом, полагая $L_{kj} = L^*_{kj}\mu_1;\; g_M = g^*_M\mu_1;\; g_E = g^*_E\mu_1,\; \mu_1$ малый параметр. С представлением (15) в форме СВС (8), построены два типа укороченных моделей $(УМ_0, УМ_1)_{\mu1}$, соответствующих (13), (14). Приведем результаты для редукции (15)→ $(УМ_0)_{\mu1}$

$$\begin{aligned} &b_1\dot{\beta} - H\dot{\alpha} = \ldots;\; b_2\dot{\alpha} + H\dot{\beta} = -g_M i_2 + \ldots \\ &R_1 i_1 = -\omega\beta + \ldots;\; R_2 i_2 = -\Omega i_1 + \ldots;\; R_3 i_3 = \ldots \end{aligned} \tag{16}$$

Здесь $(УМ_0)_{\mu1}$ – система (16), которая имеет 2-ой порядок. Сведение (15) к (16) допустимо при достаточно малых μ_1 ($\mu_1 \leq \mu^*_1$), если при $b_1 = 0$, $L^*_{23} \neq 0$, $L^*_{ij}=0$ уравнение $|L\lambda+R+\Omega|=0$ удовлетворяет условиям Гурвица и $H\omega g_M\Omega > 0$, $b_2 > 0$. Получена оценка μ^*_1; и, соответственно – оценка областей допустимых значений параметров исходной модели (15):

$$g_M \leq inf\left\{\frac{R_1R_2b_2H}{I\Omega\omega};\frac{R_1R_2H^3}{A\Omega\omega b_2};\frac{|L_{33}R_2-L_{22}R_3|IR_2}{(L_{22}L_{33}-L_{23}^2)g_E}\right\}$$

При этом $(УМ_0)_{\mu 1}$ приемлема в рассматриваемом здесь смысле (свойство устойчивости обладает декомпозицией; близость между соответствующими решениями ИМ и $(УМ_0)_{\mu 1}$ сохраняется на бесконечном интервале времени; …).
Рассмотрим теперь ОГС с быстрым гироскопом. Тогда полагаем в (15) $H=H^*/\mu$; $(УМ_0)_\mu$, соответствующая системе (12), получена тем же самым подходом:

$$\begin{aligned} -H\alpha^{\cdot} &= \ldots; \quad H\beta^{\cdot} = -g_M i_2 + \ldots \\ R_1 i_1 &= -\omega\beta + \ldots;\ R_2 i_2 = -\Omega i_1 + \ldots; R_3 i_3 = \ldots \end{aligned} \tag{17}$$

Заметим, что $(УМ_0)_\mu$ более простая модель, чем $(УМ_0)_{\mu 1}$; и проведенный анализ показывает, что $(УМ_0)_\mu$ – это минимальная модель (в смысле Н.Н.Моисеева), которая при соответствующих условиях приемлема в динамике ОГС.
Система двухосной гиростабилизации (ДГС). Здесь ИМ имеет 14-й порядок. Это – система типа (7) с двумя каналами стабилизации. Построено семейство возможных укороченных моделей; проведенный анализ показал:
минимальная укороченная модель для этого двухосного гиростабилизатора, ДГС, – также $(УМ_0)_\mu$, $\mu=1/H$ (укороченная модель нулевого уровня для ДГС в предположении о быстрых гироскопах). Эта УМ – предельная модель, имеющая 4-й порядок; при этом каналы стабилизации разделяются для любого положения стабилизированной платформы, при любых значениях углов стабилизации, в нелинейной постановке. Переход от ИМ 14-ого порядка к этой УМ 4-ого порядка приемлем при соответствующих условиях (которые получены, но не представлены здесь).

6. Заключение

Развиваемая методология, основанная на теории А.М.Ляпунова, теории возмущений, постулате устойчивости и постулате сингулярности (ЛВУС-подход), позволяет:
– рассмотреть все исходные объекты с единообразных позиций как СВС;
– подойти к проблеме моделирования в механике через понимание ее как СВЗ;

При этом решены задачи применительно: к конструированию моделей сравнения в качестве расчетных моделей; к получению условий приемлемости; к разработке регулярных приемов декомпозиции для систем и свойств.
Разработан конструктивный алгоритм инженерного уровня, который дает простые схемы, который позволяет изучать сложные системы (СГС) аналитическими (численно-аналитическими) методами.
Применительно к проблемам многоканальных, многоосных систем стабилизации с гироскопическими управляющими элементами, этот подход позволяет:

– разработать систематические процедуры декомпозиции для исходных моделей, с разделением исходных переменных состояния на разномасштабные по времени компоненты (высокочастотные, среднечастотные, низкочастотные);
– получить минимальные приближенные модели как асимптотические модели;
– определить условия приемлемости для декомпозированных моделей;
– обосновать законность приближенной теории (прецессионной теории);
– получить условия декомпозиции исходных нелинейных моделей с возможностью разделения по каналам управления и стабилизации, в задачах синтеза и анализа.

Автор благодарен Российскому Фонду Фундаментальных Исследований за поддержку работы.

Литература

1. А.М.Ляпунов. Общая задача об устойчивости движения. АН СССР, Москва, Собр.соч., т.2, 1956, 7-264.
2. Н.Г.Четаев. Об оценках приближенных интегрирований. ПММ, т. 21, №3, 1957, 419-421.
3. А.А.Воронов. Введение в динамику сложных управляемых систем. М., Наука, 1985.
4. К.П.Персидский. Некоторые критические случаи счетных систем. Изв. АН Казах.ССР, сер. Математика и механика, № 5, 1951, 3-24.
5. L.K.Kuzmina. Dynamic systems with singular perturbations. Dynamic systems and applications, Ser., v.3, 2001, pp.351-358.
6. Д.Р.Меркин. Гироскопические системы. М., Гостехиздат, 1956.
7. K.Magnus. Kreisel. Springer, Berlin, 1971.
8. Д.Д.Шиляк. Децентрализованное управление сложными системами. Мир, Москва, 1991.
9. А.Ю.Ишлинский. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М., Наука, 1976.
10. Б.В.Раушенбах, Е.Н.Токарь. Управление ориентацией космических аппаратов. М., Наука, 1974.
11. Lennart Ljung. System Identification: Theory for the User, Sweden: Prentice-Hall, 1987.
12. Н.Н.Моисеев. Математические задачи системного анализа. М., Наука, 1981.
13. S.L.Campbell. Singular Systems of differential equations. London: Pitman Advanced Publishing Program, 1980.
14. Н.Г.Четаев. Об устойчивых траекториях динамики. Сб. Науч.Тр. Казанского авиационного института, №5, 1936, 3-18.
15. П.А.Кузьмин. Устойчивость при параметрических возмущениях. ПММ, т. 21, №1, 1957, 129-132.
16. А.А.Андронов, А.А.Витт, С.Э.Хайкин. Теория колебаний. М., Наука, 1959.
17. L.K.Kuzmina. General modelling problems in mechanics. SAMS, v.29, 1997, 105-118.
18. L.K.Kuzmina, “Asymptotic Approach to the General Problem of Modelling”, Proc., IEEE-SMC, vol.4, 1998.
19. Л.К.Кузьмина. О приемлемости упрощенных уравнений в динамике гироскопических систем. ПММ, т.52, №6, 1988, 915-924.
20. L.K.Kuzmina. Methods of stability theory for singularly perturbed problems with applications to dynamics. WCNA Proceedings, v.2, (Lakshmikantham (Ed.)), Walter de Gruiter, Berlin, 1996, 1279-1285.
21. Л.К.Кузьмина. К решению сингулярно возмущенной задачи об устойчивости. ПММ, т.55, №4, 1991, 594-601.