

Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский  
центр Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша Российской  
академии наук»

На правах рукописи

Клюев Никита Андреевич

**Моделирование турбулентных течений с применением  
пенализированных пристеночных функций**

Специальность 1.2.2. —

«Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
канд. физ.-мат. наук  
Жданова Наталья Сергеевна

Москва — 2025

## Оглавление

|                                                                                                                                            | Стр. |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| <b>Введение . . . . .</b>                                                                                                                  | 4    |
| <b>Глава 1. Обзор литературы . . . . .</b>                                                                                                 | 14   |
| 1.1 Обзор методов пристеночного моделирования . . . . .                                                                                    | 14   |
| 1.2 Обзор пристеночных функций . . . . .                                                                                                   | 18   |
| <b>Глава 2. Математическая модель турбулентного обтекания твердых тел на основе метода пенализированных пристеночных функций . . . . .</b> | 22   |
| 2.1 Осреднённые уравнения Навье-Стокса и модели турбулентности . .                                                                         | 22   |
| 2.1.1 Осреднённые по Фавру уравнения Навье-Стокса . . . . .                                                                                | 22   |
| 2.1.2 Модель турбулентности . . . . .                                                                                                      | 23   |
| 2.2 Метод пенализированных пристеночных функций . . . . .                                                                                  | 24   |
| 2.3 Адаптация положения точки сшивки . . . . .                                                                                             | 29   |
| 2.3.1 Адаптация по градиенту давления . . . . .                                                                                            | 32   |
| 2.3.2 Перенос эффективного положения точки сшивки . . . . .                                                                                | 34   |
| <b>Глава 3. Численный метод решения уравнений математической модели</b>                                                                    | 36   |
| 3.1 Решение основной системы уравнений . . . . .                                                                                           | 36   |
| 3.2 Метод решения уравнения для скорости трения . . . . .                                                                                  | 36   |
| 3.2.1 Перенос . . . . .                                                                                                                    | 37   |
| 3.2.2 Источниковый член . . . . .                                                                                                          | 37   |
| 3.2.3 Искусственная вязкость . . . . .                                                                                                     | 38   |
| <b>Глава 4. Параллельная реализация в программном комплексе NOISEtte . . . . .</b>                                                         | 40   |
| <b>Глава 5. Результаты численного решения задач пристеночного моделирования . . . . .</b>                                                  | 42   |
| 5.1 Обтекание пластины без градиента давления . . . . .                                                                                    | 43   |
| 5.2 Обтекание пластины с неблагоприятным градиентом давления . . .                                                                         | 47   |
| 5.2.1 Постановка . . . . .                                                                                                                 | 47   |

|                                                            | Стр.      |
|------------------------------------------------------------|-----------|
| 5.2.2 Сравнение стратегий адаптации . . . . .              | 50        |
| 5.2.3 Сравнение с классическим подходом . . . . .          | 58        |
| 5.3 Обтекание объёмной неровности в канале . . . . .       | 62        |
| 5.3.1 Постановка . . . . .                                 | 62        |
| 5.3.2 Результаты . . . . .                                 | 63        |
| 5.4 Обтекание аэродинамического профиля NASA0012 . . . . . | 66        |
| 5.4.1 Постановка . . . . .                                 | 66        |
| 5.4.2 Результаты . . . . .                                 | 69        |
| <b>Заключение . . . . .</b>                                | <b>75</b> |
| <b>Список литературы . . . . .</b>                         | <b>76</b> |

## Введение

**Актуальность темы. Степень её разработанности.** В связи с развитием вычислительной техники методы вычислительной аэрогидродинамики получили широкое распространение как в фундаментальных исследованиях, так и в практических приложениях. При проектировании летательных аппаратов благодаря вычислительному эксперименту можно сократить объём трубных и лётных испытаний. При этом особенно остро встаёт вопрос требуемых вычислительных ресурсов при проведении параметрических исследований и процедуры оптимизации с использованием численного моделирования течений, которые получили развитие в последнее время в области проектирования летательных аппаратов.

Для практического применения технологий вычислительной аэродинамики применяются методы, основанные на численном решении уравнений Навье–Стокса осреднённых по Рейнольдсу (RANS) или Фавру при расчёте сжимаемых течений с замыканием в виде некоторой модели турбулентности [1—5]. Однако моделирование некоторых типов турбулентных течений, например течения с отрывом пограничного слоя, с применением моделей на основе решения уравнений RANS может быть недостаточно точным. Для более точного моделирования таких течений можно использовать либо прямое численное моделирование (DNS) [6—8], либо методы моделирования крупных вихрей (LES) [9—14].

В подходе прямого численного моделирования уравнения Навье–Стокса напрямую дискретизируются во всей расчётной области, поэтому с помощью DNS можно получить наиболее точное описание турбулентного течения в рамках предположения сплошной среды. В подходе DNS разрешаются все масштабы турбулентного течения вплоть до мельчайших диссипирующих структур, размер которых оценивается масштабом Колмогорова. Однако количество узлов расчётной сетки для трёхмерного по пространству моделирования DNS зависит от числа Рейнольдса  $Re$  и пропорционально  $Re^{9/4}$ , а количество шагов по времени оценивается величиной  $Re^{3/4}$  [15]. Всё это приводит к большим затратам вычислительных мощностей и времени расчёта и ограничивает область применимости подхода DNS только течениями с относительно малыми числами Рейнольдса.

В подходе моделирования крупных вихрей (LES) численно разрешаются только относительно большие масштабы турбулентности, в то время как влияние мельчайших вихрей на отфильтрованные по пространству величины описывается

различными подсеточными моделями. Но и подход LES оказывается достаточно дорогим для расчёта турбулентных пристеночных течений. Для LES с разрешённым пограничным слоем (wall-resolved LES) число узлов сетки и вычислительные затраты пропорциональны как  $Re^{1.8}$  и  $Re^{2.4}$  соответственно [16; 17]. В [18] приводятся ещё более строгая оценка на размер расчётной сетки –  $Re^{13/7}$ . В практических приложениях рассматриваются пристенные турбулентные течения с числами Рейнольдса  $Re \sim 10^6 - 10^8$ , что приводит к невозможности применения в качестве основных методов DNS и wall-resolved LES в ближайшее время.

Так как в подходе RANS моделируются все масштабы турбулентных структур, требования к расчётной сетке значительно снижаются. При этом, если подходы DNS и LES рассматриваются только в нестационарной постановке, так как турбулентность существенно нестационарное явление, то в случае RANS можно рассматривать и стационарную постановку задачи, что так же значительно сокращает требования к затратам вычислительных ресурсов.

Таким образом, для применения на практике всё ещё остаются актуальными методы на основе решения уравнений RANS, так как являются хорошим компромиссом между точностью моделирования и затратами вычислительных ресурсов.

Как упоминалось ранее, в практических приложениях часто рассматриваются пристенные течения с большими числами Рейнольдса. Характерной частью такого течения является пограничный слой, который формируется вблизи твёрдых границ. Толщина пограничного слоя уменьшается с ростом  $Re$ . С уменьшением толщины пограничного слоя уменьшаются и все характерные для него структуры как среднего течения, так и масштабы турбулентных пульсаций. Поэтому для каждого метода существуют требования к пристеночному разрешению для корректного моделирования турбулентного пограничного слоя. Эти требования выражаются в безразмерных автомодельных координатах, обозначаемых символом  $(\cdot)^+$ . Для DNS характерный размер пристеночных ячеек в нормальном направлении должен составлять  $\Delta h_y^+ \lesssim 1$ , в тангенциальных направлениях  $\Delta h_{x,z}^+ \sim 7 \dots 15$ . Для LES характерный размер пристеночных ячеек в нормальном направлении должен составлять  $\Delta h_y^+ \lesssim 1$ , в тангенциальных направлениях  $\Delta h_{x,z}^+ \sim 10 \dots 40$ . Для RANS характерный размер пристеночных ячеек в нормальном направлении должен составлять  $\Delta h_y^+ \sim 1$ , в тангенциальных направлениях может достигать десятков тысяч.

Так как масштаб вязкой длины для больших чисел Рейнольдса очень мал, то значительная часть узлов расчётной сетки приходится на пристенную область

течения. Поэтому для снижения затрат вычислительных ресурсов получили своё развитие различные методы пристеночного моделирования, в основе которых лежит замена численного разрешения тех или иных структур течения в пристеночной области на менее вычислительно затратную математическую модель.

С целью уменьшения требований к пристеночному разрешению расчётной сетки получили своё развитие методы пристеночных функций, где пристеночная часть течения моделируется с помощью упрощённых моделей, зачастую одномерных аналитических соотношений. Такой подход получил распространение как в методологии RANS [19—22], так и в методологии LES под названием LES с моделированием стенки (wall-modelled LES) [23—26]. Так как большая часть узлов расчётной сетки располагается в пристенной области, то применение методов пристеночных функций может существенно сократить требование к пристеночному разрешению расчётной сетки, а соответственно и требуемые вычислительные ресурсы и время проведения моделирования.

Также можно выделить гибридные подходы RANS-LES [27—30], занимающие промежуточное положение по точности и вычислительным затратам между методами RANS и LES, где в пристеночной области течения решаются осреднённые уравнения Навье–Стокса, а во внешней области – LES. При этом переход между областями может быть непрерывным как, например, в методах моделирования отсоединённых вихрей (DES), так и строгим как в зональных подходах.

Существует множество методов пристеночных функций [19—22; 31—36]. Большая часть методов из них зависит как от способа дискретизации уравнений, так и от характеристик используемой расчётной сетки, в том числе на размер пристенных ячеек и их расположение. Такое построение метода может приводить к повышенной зависимости получаемого решения от используемой сетки, которая может быть немонотонной (увеличение ошибок при использовании более подробных сеток), и зависимости от конкретной реализации, которая может быть непрозрачна и неоднозначна. Особо выделяется метод пенализированных пристеночных функций (метод ППФ) [35; 36], формулировка которого производится на уровне математической модели, а не уже дискретизованной модели. Метод пенализированных пристеночных функций сформулирован для преодоления недостатков классических методов пристеночных функций. В частности, в методе ППФ значительно уменьшено влияние сеточного разрешения на получаемое решение, и устранены необходимость явной процедуры интерполяции решения в точке сшивки из ближайших узлов расчётной сетки и связанная с ней неопреде-

лённость, которая может снижать точность расчёта. В основе метода лежит дифференциальная формулировка условия сшивки внешнего решения с пристеночной функцией и дальнейший перенос касательного напряжения из области сшивки на поверхность тела. Описанная процедура реализуется через решение во всей области дифференциального уравнения в частных производных для скорости течения (масштаба скорости в пограничном слое), которое основано на обобщении метода характеристических штрафных функций. Такой подход обладает повышенной гибкостью, что позволяет использовать его с различными аналитическими зависимостями, в том числе и неравновесными пристеночными функциями. Так же имеется возможность адаптировать положение точки сшивки под особенности течения, что позволяет эффективно моделировать турбулентные течения с особенностями: точки торможения, отрыва и присоединения потока и области отрывного течения. Метод ППФ был реализован и протестирован на узком классе двумерных течений, рассматриваемых на структурированных расчётных сетках [35—37].

Таким образом **актуальность** темы диссертации подтверждается:

- потребностью в эффективном и точном методе пристеночного моделирования для расчёта турбулентных течений с применением осреднённых уравнений Навье–Стокса;
- целесообразностью устранения недостатков существующих методов пристеночного моделирования;
- необходимостью расширения области применимости метода пенализированных пристеночных функций.

**Целью** данной работы является разработка эффективной методики моделирования турбулентных течений на основе метода пенализированных пристеночных функций.

Для достижения поставленной цели решены следующие **задачи**:

1. Модификация метода ППФ для повышения точности решения задач с отрывами.
2. Повышение устойчивости разрабатываемой методики численного моделирования пристеночных турбулентных течений.
3. Тестирование, верификация метода ППФ для численного моделирования турбулентного пограничного слоя на модельных задачах.
4. Оценка эффективности применения метода ППФ на примере расчёта задачи внешнего обтекания.

5. Проведение сравнительного анализа с классическими методами пристеночных функций.
6. Параллельная реализация метода ППФ для расчёта на трёхмерных неструктурированных сетках.

**Научная новизна:** В рамках диссертационной работы предложен новый метод адаптации положения точки сшивки, основанный на учёте локального сеточного разрешения. Благодаря учёту пристенного шага расчётной сетки обеспечивается смещение точки сшивки в первый пристенный узел в областях повышенного интереса, к которым относятся точки отрыва и присоединения потока, области рециркуляционного течения и другие зоны неравновесного пограничного слоя, где наблюдается существенное отклонение от аналитических зависимостей для профилей параметров течения, а соответственно к повышенным ошибкам при расположении точки сшивки на уровне логарифмического участка для равновесного течения, как было предложено в ранних работах по методу ППФ [35]. В предложенном методе область адаптации положения точки сшивки определяется локальным значением скорости трения, а именно при значении меньше порогового. В работе рассматривается несколько вариантов определения порогового значения скорости трения: по локальному сеточному разрешению или из комбинации учитывающей продольный градиент давления, кривизну поверхности и оценку сил трения для рассматриваемого течения. Применение предложенного подхода позволяет значительно повысить точность применения метода ППФ для расчёта течений с областями отрыва и присоединения потока по сравнению с более простым вариантом из работы [36]. Для повышения надёжности применения метода ППФ для задач со сложной геометрией, конфигурацией течения и/или при использовании продвинутых формул адаптации положения точки сшивки в работе предложен новый подход распространения адаптированного положения точки сшивки. Предложенная методика распространения направлена на борьбу с непостоянством величин, используемых в определении положения точки сшивки, вдоль направления нормалей к твёрдой поверхности. Такое непостоянство нарушает предположения и приводит к повышенным ошибкам в математической модели. Метод распространения может быть использован для моделирования с применением метода ППФ на сетках с изменяемым положением узлов в процессе расчёта, что может происходить при использовании методов сеточной адаптации или движущихся границах.

Также в работе предлагается и рассматривается новый подход искусственной анизотропной вязкости в методе ППФ для снижения численных осцилляций расчёта на неструктурированных сетках. В ранних формулировках метода ППФ [35; 36] обозначалась возможность добавления члена изотропной искусственной вязкости в уравнение для скорости течения, но её применение не исследовалось.

В рамках диссертации впервые проведено сравнение метода ППФ с другими методами пристеночных функций. Продемонстрированы на примере численного моделирования преимущества метода ППФ, которые раньше выдвигались только теоретически.

В диссертационной работе рассматривается применение метода ППФ для расчёта задач внешнего обтекания. Впервые с использованием метода ППФ произведён расчёт обтекания аэродинамического профиля NASA 0012 на широком диапазоне углов атаки. На примере рассматриваемой задачи продемонстрирована возможность применимости метода ППФ к задачам внешнего обтекания.

В диссертации представлена схема реализации в программном комплексе NOISEtte метода ППФ для решения трёхмерных задач на неструктурированных сетках. Реализация была успешно протестирована для решения задачи с трёхмерной геометрией, что является первым применением метода ППФ для такого класса течений.

**Практическая значимость** Практическая значимость диссертационной работы заключается в том, что разработаны и реализованы модификации метода ППФ, позволяющие проводить расчёты практически значимых задач турбулентного обтекания с большей вычислительной эффективностью, то есть за меньшее время и при меньших потребных расчётных мощностях при сохранении точности получаемого решения, что подтверждается решением различных тестовых задач. При этом метод ППФ свободен от недостатков классических методов пристеночных функций.

**Методология и методы исследования.** Основным методом исследования в работе является численное моделирование течений вязкого совершенного газа в рамках подхода RANS. В качестве модели турбулентности используется модель Спаларта–Алмараса [1].

Для аппроксимации конвективных членов используется конечно-объёмный подход с использованием вершинно-центрированных контрольных объёмов. Для реконструкции на гранях применяются квазиодномерные реконструкции семейства EBR [38] с приближённым решением задачи распада разрыва методом Роу

[39]. Вязкие слагаемые аппроксимируются с применением метода локальных разбиений сеточных элементов [40]. В работе для моделирования стационарных задач применяется метод установления, где используется одношаговый неявный метод Эйлера первого порядка с одной итерацией по методу Ньютона для решения образующейся на каждом шаге по времени системы нелинейных алгебраических уравнений. Для решения линейной системы алгебраических уравнений, формирующейся на итерации метода Ньютона, применяется итерационный стабилизированный метод бисопряжённых градиентов BiCGStab [41] с предобуславливанием SGS.

Для метода ППФ используется конечно-разностная аппроксимация члена, отвечающего за перенос и источниковые члены. Член искусственной вязкости аппроксимируется с применением метода Галёркина с кусочно-линейными базисными функциями и диагонализацией матрицы масс. Аппроксимация по времени уравнения для скорости трения в методе ППФ аналогична аппроксимации системы уравнений RANS. Метод ППФ реализован в виде модуля в программном комплексе NOISEtte [42; 43], с помощью которого были проведены все расчёты представленные в диссертации, с применением технологий параллельного программирования MPI и OpenMP на языке C++.

#### **Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Разработан и численно реализован алгоритм адаптации положения точки сшивки решений, который расширяет область применимости разработанной методики численного моделирования пограничного слоя на задачи с особенностями течений. Разработанный алгоритм основан на учёте локальных характеристик течения и пристеночного шага расчетной сетки.
2. Предложен метод повышения устойчивости численной реализации метода пенализированных пристеночных функций. За счет добавления направленной искусственной численной вязкости в уравнение для расчета скорости трения на обтекаемой поверхности подавляются численные осцилляции, возникающие при расчете на неструктурированных сетках.
3. Проведён сравнительный анализ метода ППФ с классическим методом пристеночных функций на примере решения тестовых задач. Продемонстрировано существенное снижение зависимости результатов расчётов от используемой расчётной сетки и повышение точности результатов при использовании метода ППФ.

4. Продемонстрирована применимость метода ППФ для расчёта задачи внешнего обтекания и возможность снижения требований к пристеночному разрешению без существенной потери точности решения.
5. Метод пенализированных пристеночных функций численно реализован для трехмерных задач и обобщён для параллельных вычислений.

**Личный вклад автора.** Автором диссертации был предложен метод искусственной анизотропной вязкости для метода ППФ, сформулирован алгоритм адаптации положения точки сшивки в методе ППФ, основывающийся на локальном пристенном разрешении расчётной сетки и учитывающей продольный градиент давления, кривизну поверхности и значение сил трения, предложены методы распространения локального сеточного разрешения перед расчётом и распространения адаптированного положения точки сшивки во время расчёта. Все предложенные модификации метода ППФ были имплементированы автором лично. Вклад автора заключается в реализации метода ППФ для объёмных неструктурированных сеток. Автором лично были построены все используемые неструктурированные и объёмные расчётные сетки и все сетки для расчёта обтекания профиля NASA 0012. Автором лично проведена основная часть представленных в работе расчётов и анализ их результатов. Вклад автора является определяющим при получении всех научных результатов, выносимых на защиту.

**Достоверность** полученных результатов обеспечивается сравнением результатов моделирования с применением метода ППФ с результатами расчётов, полученными с помощью протестированного на широком классе задач солвера NOISEtte, без применения методов пристеночных функций и сравнением с работами других авторов и экспериментальными данными. Результаты находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами.

**Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались на 6 конференциях:

1. VI Всероссийская конференция молодых ученых-механиков, Сочи, 04.09.2023 - 14.09.2023;
2. XXXIV научно-техническая конференция по аэродинамике, п. Володарского, 29.02.2024 - 01.03.2024;
3. Новые горизонты прикладной математики, Москва, 18.04.2024-19.04.2024;
4. “Супервычисления и математическое моделирование”; 20.05.2024-24.05.2024, г. Саров (докладчик Жданова Н.С.)

5. X российская конференция «Вычислительный эксперимент в аэроакустике и аэродинамике», Светлогорск, 16.09.2024-21.09.2024;
6. II Российская конференция «Новые горизонты прикладной математики», Москва, 17.04.2025-19.04.2025.

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены в 8 печатных изданиях, 2 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК и индексируемых Web of Science и Scopus, 6 — в тезисах докладов.

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, 5 глав и заключения. Полный объем диссертации составляет 84 страницы, включая 30 рисунков. Список литературы содержит 90 наименований.

Во введении обосновывается актуальность темы диссертации, кратко приводится степень её разработанности, описываются цели и задачи, поставленные перед автором работы. Также приводятся позиции научной новизны, практической значимости и положения, выносимые на защиту. Кратко описываются методология работы, степень достоверности полученных результатов и их апробация. Приводится личный вклад автора.

В первой главе проводится обзор литературы по теме пристеночного моделирования. Далее проводится обзор различных законов стенки, которые являются неотъемлемой частью методов пристеночных функций.

Вторая глава посвящена описанию математической модели. В начале главы приводится система осреднённых уравнений Навье–Стокса и её замыкание в виде модели турбулентности Спаларта–Аллмараса. Далее приводится описание метода ППФ, где кроме вывода основного в методе ППФ уравнения для скорости трения также рассматриваются формулировки различных стратегий адаптации под особенности течения положения точки сшивки. В конце главы представлены техники распространения во всю область пристеночного разрешения и адаптированного положения точки сшивки, которые повышают надёжность применения метода ППФ.

В третьей главе приводится описание численного метода, применяемого для дискретизации рассматриваемой математической модели.

В четвёртой главе приводятся детали программной реализации метода пенализированных пристеночных функций в программном комплексе NOISEtte.

В четвёртой главе приводятся результаты расчётов на модельных задачах, проводится их сравнение между собой и различными референсными данными. Рассматриваются задачи об обтекании плоской пластины без градиента давления

и с градиентом давления, благодаря которому формируется область рециркуляционного течения. Рассматривается задача с течением в канале с объёмной неровностью на его поверхности. Приводятся результаты расчётов обтекания аэродинамического профиля NASA 0012 с применением различных вариантов адаптации положения точки сшивки.

В заключении представлены основные результаты диссертации их значимость. Также рассматриваются возможные направления дальнейшего развития темы.

## Глава 1. Обзор литературы

### 1.1 Обзор методов пристеночного моделирования

Численное решение осреднённых по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса [1—5] остаётся основным подходом для моделирования турбулентных течений с большими числами Рейнольдса, которые представляют большой интерес для практических приложений. Такой подход предлагает меньшие требования к пристеночному разрешению по сравнению с прямым численным моделированием (DNS) [6—8] и моделированием крупных вихрей (LES) [9—14]. Несмотря на относительно меньшие требуемые ресурсы, корректное численное моделирование пристенных течений на основе решения уравнений RANS предъявляет высокие требования к пристенному разрешению расчётных сеток. Данное требование заключается в необходимости разрешения вязкого подслоя — тонкой (указать толщину?) части у стенки пограничного слоя, где наблюдаются большие градиенты параметров течения. Это приводит к увеличению количества узлов расчётной сетки и усложнению её построения, ухудшению обусловленности задачи и ограничению на допустимый шаг по времени. Всё это приводит к увеличению времени, требуемого для проведения вычислительного эксперимента. Факторы связанные с большим временем расчёта с развитием вычислительной техники постепенно уходят на второй план. Однако для задач, где требуется проведение серий параметрических расчётов, и задач численной оптимизацией с использованием методов на основе RANS время единичного расчёта всё ещё остаётся важным ограничивающим фактором. При этом построение качественных расчётных сеток требует серьёзных затрат человеческого ресурса. (Может что-то написать про автоматизированное построение сеток) Так же при построении сеток могут проявляться проблемы с точностью представления геометрии, которая может быть того же порядка, что и требуемая для разрешения вязкого подслоя высота ячейки. В случае сложностей с построением расчётных сеток наблюдается несколько путей развития, а именно: развитие автоматизированных строителей сеток, адаптация сеток во время расчётов. Однако перечисленные выше сложности можно преодолеть или уменьшить с помощью применения методов пристеночных функций, которые снижают требования к пристеночному шагу расчётной сетки.

Приведённые выше ограничения особо остро стояли в начале развития методов вычислительной гидродинамики, так как доступные вычислительные мощности были на порядки меньше, чем сегодня.

В методах пристеночных функций пристенная часть пограничного слоя не разрешается расчётной сеткой и численным методом, а моделируется с применением менее ресурсоёмких методов. А именно производится согласование решения в некоторой точке, которая далее будет называться точкой сшивки, и используемой моделью пристенной части пограничного слоя. В текущем разделе будут рассматриваться варианты согласования, в следующем разделе 1.2 будут рассматриваться упрощённые модели пристенной части пограничного слоя, которые используются в методах пристеночных функций.

Методы пристеночных функций берут начало с работ Патанкара и Спалдинга [19], где внешняя часть турбулентного пограничного слоя согласовывалась с универсальным логарифмическим законом, модифицированным для учёта градиента давления и переноса массы. Аналогичная схема применялась в [44] для постановки граничных условий в конечно-разностной схеме при расчёте течения Куэтта и течения в канале.

Одним из самых распространённых методов пристеночных функций является метод согласования в первой пристеночной ячейке [20—22; 45]. Такой подход применяется в случае ячейко-центрированных решателей (cell-centered). При этом условие прилипания заменяется на условие непротекания для компоненты скорости, направленной по нормали к стенке, а на тангенциальную составляющую скорости накладывается трение, полученное из условия согласования, например [20; 45]. Либо в центре первой пристеночной ячейки жёстко задаются граничные условия [21] соответствующие закону стенки. Схематично подход изображён на рисунке 1.1а.

В случае вершинно-центрированных (node-centered) контрольных объёмов можно построить аналогичные немного усложнённые схемы. Согласование производится на уровне первых сеточных узлов, лежащих не на стенке. При этом появляется большая по сравнению с ячейко-центрированным подходом вариативность в формулировках, например параметры для сшивки можно вычислять либо по среднему значению в рассматриваемых узлах [46], либо с помощью интерполяции в точку пересечения нормали к поверхности со стороной, не лежащей на твёрдой поверхности, сеточного элемента [47]. Схематично подход изображён на рисунке 1.1б.

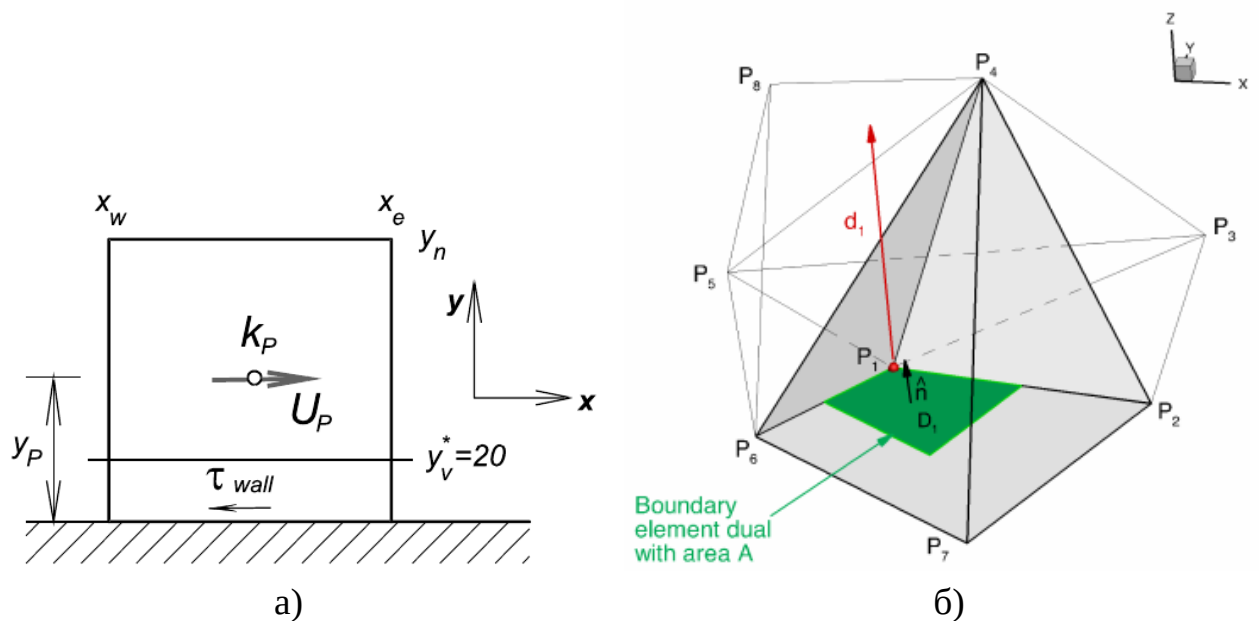


Рисунок 1.1 — Схемы реализации стандартного подхода к пристеночным функциям: а) ячейко-центрированный подход [20] б) вершинно-центрированный подход [46].

Ещё одним методом пристеночных функций является использование смещённой границы [34; 48; 49]. В [48; 49] исходная твёрдая граница, для расчёта которой была построена расчётная сетка, заменяется на виртуальную. Виртуальная стенка формируется на относительном расстоянии  $y^+ = 11.06$  по нормали к исходной границе, направленной от расчётной области. Для поиска скорости трения решаются уравнения для  $u_\tau$  и  $\tilde{y}$ . Для расчёта используется исходная сетка. Этот подход был модифицирован в [50] заменой константы для относительного расстояния на функцию от локального сеточного разрешения, что является более разумным выбором, так как позволяет проводить расчёты на сетках с более грубым пристеночным разрешением, чем изначальное значение. Среди недостатков данного подхода можно выделить, то что даже при достаточно подробных сетках в исходном и модифицированном подходе виртуальная граница располагается не ближе  $y^+ = 11.06$ . А именно в случае стремления сил трения к нулю, что происходит возле точек отрыва и присоединения потока, виртуальная стенка может располагаться на неограниченно большом расстоянии. В это же время в случае сильных отрывов и других особенностей течений многие варианты законов стенки становятся неприменимыми. Таким образом решение может быть нефизичным. В подходе, описанном в [34] смещение стенки происходит на этапе препроцессинга. Новая граница формируется смещением относительно исходной

по нормальям в сторону расчётной области на фиксированное расстояние в исходных ненормированных координатах, которое для каждой точки может быть своё. Однако такой подход может быть трудноприменимым для расчёта обтекания тел со сложной геометрией, где будут возникать особенности при выдавливании, например в углах, а также к потерям в представлении небольших деталей. Также подходы со смещением границ могут затруднять подсчёт интегральных сил и моментов, так как площадь поверхности меняется.

В рамках развития методов моделирования крупных вихрей с моделированием стенки (WMLES) [25; 26; 51; 52] методы пристеночных функций также получили своё развитие. При прямом переносе метода пристеночных функций из методологии RANS, где внешнее решение согласуется с пристеночной функцией в первой пристенной ячейке, возникает достаточно большая ошибка из-за недо-разрешённости вихревых структур. В [51; 52] было предложено сшивать решение не в первой пристенной ячейке, а на некотором удалении, где пульсации достаточно точно разрешены. Было продемонстрировано, что такой подход существенно повышает точность моделирования течения. Применительно к моделированию крупных вихрей согласование уместно проводить не только с простыми аналитическими или численными зависимостями, но и с решением уравнений RANS на вспомогательной сетке, что всё ещё может значительно сократить требования к пристеночному разрешению и вычислительным ресурсам. Одним из недостатков такого подхода является его зависимость от метода интерполяции в точку сшивки, а также проблемы с распределением при параллельных вычислениях узлов, необходимых для интерполяции, на другой расчётный узел. Авторы отмечают возможность переключения граничного условия на условие прилипания с помощью простого сенсора, основанного на локальном значении скорости потока.

Альтернативный подход, метод пенализированных пристеночных функций (ППФ, или *penalized wall function (PWF)*) был недавно предложен в работах [35—37]. Чтобы полностью устранить необходимость явного определения положения точки сшивки и/или методе интерполяции решение в эту область в методе ППФ вводится вспомогательное уравнение для скорости трения. Это уравнение обеспечивает согласование решения уравнений RANS и закона стенки. Условие согласования достигается с помощью локализованного источникового члена, неявно определённого в слое сшивки как функция относительного расстояния до стенки. Для постановки граничного условия с заданным трением для решения RANS используется метод характеристических штрафных функций [53; 54] для

переноса напряжения из внешней области пограничного слоя на стенку. Таким образом в методе ППФ система дифференциальных уравнений с нелинейными алгебраическими связями для условия сшивки сводится к системе уравнений с дифференциальной обратной связью, обеспеченную членом характеристической пенализации, что приводит к гибкой методике, которая может быть использована с более общими законами стенки, например [31; 55] или более сложными стратегиями согласования внешней части турбулентного пограничного слоя и решениями пристеночных функций. В работе [37] был предпринят первый шаг к обобщению формулировки метода ППФ для учёта физики течения, а именно подстройки положения точки сшивки в областях малого трения на стенке. В работах [35—37] метод ППФ был адаптирован для модели Спаларта–Аллмараса и успешно применён для расчёта модельных двумерных задач. Также была продемонстрирована сеточная независимость метода. В недостатки метода можно записать необходимость решения вспомогательного уравнения, которое, всё же является линейным. При этом алгоритм решения при использовании метода ППФ существенно не усложняется, так как работа идёт с дополнительным полем, инфраструктура для чего имеется в любом гидродинамическом солвере уравнений RANS.

С помощью двух последних описанных методов можно проводить классическое исследование на сеточную сходимость метода, без создания расчётных сеток с большим перепадом в размере ячеек, как в случае классического подхода.

## 1.2 Обзор пристеночных функций

В методах пристеночных функций часто используются аналитические законы стенки для моделирования пристенной части турбулентного пограничного слоя. Различные аналитические законы стенки были получены либо из теоретических соображений, либо для аппроксимации экспериментальных данных.

Существует две фундаментальные зависимости для продольной компоненты скорости в пристенной части турбулентного пограничного слоя: логарифмическая и линейная.

Логарифмический закон является одной из первых аналитических зависимостей, полученных для описания турбулентного пограничного слоя:  $u^+(y^+) = \ln(y^+)/\kappa + B$ , где  $\kappa$  – постоянная Кармана,  $B$  – константа интегрирования. Он был

получен Карманом в [56] из гипотезы о малом влиянии турбулентной вязкости в рассматриваемой области и подобия турбулентных пульсаций в окрестностях любых двух точек. Логарифмическая зависимость может быть получена и из других соображений. Прандтль [57] получил аналогичный закон из теории размерностей и гипотезы о том, что длина пути смешения, а соответственно и значение турбулентной вязкости пропорциональны расстоянию до стенки в пристеночной области пограничного слоя. Из пересечения логарифмического участка и области закона следа – внешней части пограничного слоя в работах [58; 59] независимо была выведена логарифмическая зависимость.

При этом в вязком подслое, коротком участке вблизи стенки, где действие турбулентный перенос мал по сравнению с молекулярным, действует линейная зависимость скорости от расстояния:  $u^+ = y^+$  [60]. Однако линейный закон в методах пристеночных функций не используется, так как область его применимости практически совпадает с размерами пристенных ячеек расчётных сеток, когда можно использовать условие прилипания для корректного численного моделирования течения.

В свою очередь логарифмический закон стенки может использоваться для расчётов с применением методов пристеночных функций [19]. Однако он имеет ограниченную область применимости. Так как логарифмическая зависимость не описывает буферную область и область вязкого подслоя, то для успешного применения первые сеточные узлы, если применяются классические методы пристеночных функций, или точка сшивки при использовании методов типа [25; 26; 51; 52] или метода ППФ должны располагаться на логарифмическом участке, который ограничен снизу значением  $y^+ \sim 30$ , а граница сверху зависит от числа Рейнольдса и внешних параметров рассматриваемого течения. При этом логарифмический участок может быть мал или отсутствовать, например, в начале обтекаемого тела, где турбулентный пограничный слой ещё не успевает сформироваться. При выходе за логарифмический участок ошибка аппроксимации профиля продольной компоненты скорости увеличиваются и уходит на бесконечность при приближении к стенке. Так как логарифмический закон стенки выведен для равновесного пограничного слоя, он теряет свою применимость при рассмотрении течений, например, с большим градиентом давления или областей отрыва потока и присоединения потока, что представляет особый и зачастую ключевой интерес в задачах внешнего обтекания.

Многими авторами предпринимались попытки вывода единого закона стенки, описывающего профиль продольной скорости в вязком подслое и в логарифмической области одновременно [61—66] и др. Например в [66] вывод производился из соображений, что закон стенки должен асимптотически соответствовать линейному закону на стенке и логарифмическому при стремлении на бесконечность и хорошо описывать данные из эксперимента с развитым турбулентным течением в трубе [67]. Единые законы стенки всё ещё могут обладать недостатками, которые могут приводить к неустойчивостям в численном расчёте. Например, композитный закон Кармана [61] является негладким, а соответственно обладает разрывом в профиле соответствующей турбулентной вязкости. А в законе Райхарда [63] профиль турбулентной вязкости имеет участок с нефизичными отрицательными значениями. Однако в расчётах для уравнений RANS методы пристеночных функций применяются совместно с моделями турбулентности. В [68; 69] для моделей Спаларта–Аллмараса и  $k - \omega$  SST Ментера показано, что профили скорости для модели турбулентности отличаются как между собой, так и от законов Райхарда [63] и Спалдинга [66]. Как отмечается в работах [21; 68; 69], такое отличие приводит к повышенной сеточной зависимости решения при использовании пристеночных функций, несогласованных с моделью турбулентности, совместно с классическим подходом, где точка сшивки внешнего решения с пристеночной моделью располагается в первых пристеночных узлах или ячейках. Такая сеточная зависимость проявляется в заметной немонотонной потере точности решения при использовании более подробных расчётных сеток, когда узлы попадают в буферную область, где наблюдается наибольшая ошибка аппроксимации профиля продольной скорости.

Одним из путей уточнения работы методов пристеночных функций является использование тонко настроенных для конкретной модели турбулентности законов стенки. В работах [68—70] приводятся пристеночные функции, настроенные по отдельности для моделей Спаларта–Аллмараса и  $k - \omega$ . Так в [68; 69; 71] для аппроксимации профиля скорости смешиваются между собой логарифмический закон, закон Райхарда и Спалдинга с использованием гиперболического тангенса. В [70] приводится модификация универсального закона стенки из [72], являющийся композитной функцией, где производится гладкое согласование линейного и логарифмических законов в области переключения с помощью экспоненциальной функции. Использование согласованных с моделью турбулентности присте-

ночных функций повышает точность решения и снижает сеточную зависимость результатов.

Существует и другой подход уточнения аппроксимации профиля продольной скорости и других переменных для используемой модели турбулентности. В работе [21] предлагается использовать аппроксимацию с помощью кубических сплайнов решения полученного с требуемой моделью турбулентности без использование методов пристеночных функций на подробной сетке с разрешённым пограничным слоем. Такой подход также повысил точность решения и сеточную независимость применяемого метода.

В подходах пристеночных функций необходимо моделировать не только продольную компоненту скорости вблизи стенки, но и параметры турбулентности скорость диссипации энергии турбулентности  $\varepsilon$  или удельную скорость диссипации  $\omega$  [68; 69; 73]. Для таких переменных также можно использовать и табличное представление, например в [21].

Если для решаемой задачи рассматривается теплообмен между потоком и твёрдой поверхностью, необходимо рассматривать и температурный пограничный слой с моделированием профиля температуры.

Для многих величин можно получить аналитические законы по отдельности для вязкого подслоя и логарифмического участка. В [73] предлагается универсальный алгоритм построения законов стенки для произвольной величины при известных зависимостях для вязкого подслоя и логарифмического участка турбулентного пограничного слоя.

Перечисленные ранее многие аналитические зависимости получены из предположений малости градиентов давления, продольного градиента продольной компоненты скорости и нормальной к стенке компоненты скорости. Существенное отклонение от данного предположения может приводить к значительным ошибкам аппроксимации параметров течения с помощью пристеночных функций. В работах [20; 34; 55] с помощью численного интегрирования одномерной модели производился учёт неравновесных эффектов. Использование такого подхода позволило значительно повысить точность получаемого решения по сравнению с использованием равновесных законов стенки в различных задачах. В [31] приводятся различные аналитические зависимости для модели  $k - \varepsilon$ , учитывающие градиент давления, проницаемость стенки и свободную конвекцию вблизи стенки.

## Глава 2. Математическая модель турбулентного обтекания твердых тел на основе метода пенализированных пристеночных функций

### 2.1 Осреднённые уравнения Навье-Стокса и модели турбулентности

#### 2.1.1 Осреднённые по Фавру уравнения Навье-Стокса

Осреднённые по Фавру уравнения Навье-Стокса для законов сохранения массы, импульса и энергии для сжимаемых течений для термодинамически идеального газа с моделируемыми турбулентными членами могут быть записаны в следующем общем виде (с гипотезой Буссинеска):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \hat{\tau}_{ij}}{\partial x_j}, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [(\rho e + p) u_j] = \frac{\partial}{\partial x_j} [u_i \hat{\tau}_{ij} - q_j], \quad (2.3)$$

где

$$\begin{aligned} p &= \rho R T, \quad e = \frac{1}{2} u_i u_i + \frac{p}{\rho(\gamma - 1)}, \quad q_j = -c_p \left( \frac{\mu}{Pr_L} + \frac{\mu_T}{Pr_T} \right) \frac{\partial T}{\partial x_j}, \\ \hat{\tau}_{ij} &= 2\mu \tilde{S}_{ij} + \tau_{ij}, \quad \tau_{ij} = 2\mu_T \tilde{S}_{ij}, \\ \tilde{S}_{ij} &= \text{dev}(S_{ij}) = S_{ij} - \frac{1}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij}, \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \end{aligned} \quad (2.4)$$

В уравнениях выше,  $\rho$  – осреднённая по Рейнольдсу плотность газа (жидкости),  $p$  – осреднённое по Рейнольдсу давление,  $\rho u_j$  – поток массы,  $u_j$  – осреднённая по Фавру скорость,  $T$  – осреднённая по Фавру температура,  $e$  – осреднённая по Фавру удельная полная энергия. Предполагается, что показатель адиабаты  $\gamma = c_p/c_v \equiv 1.4$  соответствует двухатомному газу. Параметр  $R$  – газовая постоянная,  $c_v$  и  $c_p$  – удельные теплоёмкости при постоянном объёме и давлении соответственно. Член  $q_j$  – сумма молекулярного и турбулентного тепловых потоков, с  $Pr_L = 0.72$  и  $Pr_T = 0.9$  – ламинарное и турбулентное числа Прандтля. Турбулентная вязкость, обозначенная как  $\mu_T$ , неизвестна и требует замыкания моделью

турбулентности. Член  $\hat{\tau}_{ij}$  – тензор суммы молекулярных напряжений и напряжений Рейнольдса, когда  $\tau_{ij}$  – тензор напряжений Рейнольдса,  $S_{ij}$  – тензор средних сдвиговых напряжений,  $\tilde{S}_{ij}$  – девиаторная часть  $S_{ij}$ ,  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера. В уравнениях выше и далее действует соглашение Эйнштейна для суммирования по повторяющимся индексам. Для простоты рассматриваются течения с малыми числами Маха, и молекулярная вязкость  $\mu$  считается постоянной

### 2.1.2 Модель турбулентности

Для иллюстрации метода пенализированных пристеночных функций для замыкания уравнений (2.1)–(2.4) используется модель Спаларта–Аллмараса (СА) [1]. Модель СА широко используется для моделирования течений аэродинамики, в том числе течений с большим числом Маха с существенным влиянием сжимаемости [74]. В стандартной модели Спаларта–Аллмараса [1] вводится дифференциальное уравнение для модифицированной турбулентной вязкости  $\tilde{\nu}$ , которое записывается следующим образом

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \tilde{\nu}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \tilde{\nu} u_j) = c_{b1}(1 - f_{t2}) \tilde{S} \rho \tilde{\nu} - \left[ c_{w1} f_w - \frac{c_{b1}}{\kappa^2} f_{t2} \right] \rho \left( \frac{\tilde{\nu}}{\delta} \right)^2 \\ + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \frac{\mu}{\sigma} + \frac{\rho \tilde{\nu}}{\sigma} \right) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right] - \left( \frac{\mu}{\sigma \rho} + \frac{\tilde{\nu}}{\sigma} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} + c_{b2} \frac{\rho}{\sigma} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где турбулентная вязкость вычисляется

$$\mu_T = \rho \tilde{\nu} f_{v1},$$

и вспомогательные величины определены

$$\begin{aligned} f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v1}^3}, \quad \chi = \tilde{\nu}/\nu, \quad \tilde{S} = \max \left[ 0.3 \sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}}, \sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}} + \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 \delta^2} f_{v2} \right], \\ \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}}, \quad f_w = g \left[ \frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6} \right]^{1/6}, \\ g = r + c_{w2}(r^6 - r), \quad r = \min \left[ \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S} \kappa^2 \delta^2}, 10 \right], \quad f_{t2} = c_{t3} \exp(-c_{t4} \chi^2), \end{aligned} \quad (2.6)$$

$\nu$  – кинематическая молекулярная вязкость,  $\delta(\mathbf{x})$  – расстояние в точке  $\mathbf{x}$  до ближайшей стенки. Для повышения устойчивости расчётов переменная  $\tilde{S}$  ограничивается снизу  $0.3\sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}}$ . Постоянные коэффициенты полагаются равными следующим величинам:  $c_{b1} = 0.1355$ ,  $c_{b2} = 0.622$ ,  $\sigma = 2/3$ ,  $\kappa = 0.41$ ,  $c_{w2} = 0.3$ ,  $c_{w3} = 2$ ,  $c_{v1} = 7.1$ , и  $c_{w1} = \frac{c_{b1}}{\kappa} + \frac{1+c_{b2}}{\sigma}$ . В работе используется “стандартная” версия модели СА без the trip term “ $f_{t1}$ ”, что делает член  $f_{t2}$  необязательным, то есть полагается  $c_{t3} = 0$ .

При использовании модели СА без применения методов пристеночных функций для  $\tilde{\nu}$  ставится на стенке следующее граничное условие:

$$\tilde{\nu}|_w = 0. \quad (2.7)$$

Для внешних течений в свободном потоке полагается  $\tilde{\nu} = 3\nu_\infty$ .

## 2.2 Метод пенализированных пристеночных функций

В разделе приводится подробный вывод уравнения для скорости трения  $u_\tau$  в методе пенализированных пристеночных функций [35—37] с обобщением на случай трёхмерных течений. Также рассматривается постановка граничных условий и модификация уравнений RANS для модели Спаларта–Аллмараса.

При моделировании пристенных течений с большими числами Рейнолдса с использованием уравнений RANS [1—4] для получения корректного решения необходимо разрешать вязкий подслой турбулентного пограничного слоя. Поэтому на пристенную область приходится значительное число узлов расчётной сетки. Требуемые вычислительные ресурсы, связанные с высоким пристенным разрешением, могут быть существенно сокращены, когда подход RANS используется с методами пристеночных функций [19; 20]. Экономия ресурсов достигается за счёт замены интегрирования исходных уравнений RANS вплоть до твёрдой поверхности на моделирование с использованием упрощённых соотношений (закона стенки). Это достигается путём замены условий прилипания на стенке условием сшивки между законом стенки  $f(\tilde{y}^+)$  и внешней частью турбулентного пограничного слоя:

$$u_{||}(\mathbf{x})|_{\delta(\mathbf{x})=\delta_{EL}} = u_\tau f(\tilde{y}^+)|_{\tilde{y}^+=\delta_{EL}^+}, \quad (2.8)$$

где  $u_{\parallel}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{u}_{\parallel}(\mathbf{x})\|$ ,  $\mathbf{u}_{\parallel}(\mathbf{x}) = \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$  – параллельная стенке компонента скорости в точке  $\mathbf{x}$ ,  $\tilde{x}$  и  $\tilde{y}$  – обобщённые координаты вдоль стенки в направлении  $\mathbf{u}_{\parallel}(\mathbf{x})$  и по нормали к стенке соответственно,  $\tau_w(\tilde{x}, t)$  – сдвиговое напряжение на стенке в координате  $\tilde{x}$  вдоль поверхности,  $u_{\tau}(\tilde{x}, t) = (\tau_w/\rho)^{1/2}$  – скорость трения на стенке в точке  $\tilde{x}$ ,  $\delta_{\text{EL}}$  – расстояние из точки сшивки (EL) до стенки, и  $\delta_{\text{EL}}^+ = u_{\tau}\delta_{\text{EL}}/\nu$  – нормированное расстояние от точки сшивки до стенки.  $f(\tilde{y}^+)$  – функция определяющая профиль скорости в нормированных координатах вязкого подслоя. Сначала рассматривается формулировка метода ППФ для двухмерных течений. Обобщение метода для трёхмерных течений будет приведено в конце раздела.

Если задано внешнее поле скорости  $u_{\parallel}(\mathbf{x})$ , то условие сшивки (2.8) является нелинейным уравнением для определения  $u_{\tau}$ , при этом точка сшивки может быть определена как явно через расстояние в исходных координатах  $\delta_{\text{EL}}$

$$\delta(\mathbf{x}) = \delta_{\text{EL}}, \quad (2.9)$$

так и неявно через нормированное расстояние  $\delta_{\text{EL}}^+$

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{\nu}{u_{\tau}}\delta_{\text{EL}}^+. \quad (2.10)$$

В случае явного определения точки сшивки с помощью уравнения (2.9), линейное приближение уравнения (2.8) для коррекции решения  $\delta u_{\tau}$ , например, для использования в методе Ньютона при фиксированном расстоянии  $\delta_{\text{EL}}$  может быть записано, как

$$u_{\parallel}(\mathbf{x})|_{\delta(\mathbf{x})=\delta_{\text{EL}}} \approx u_{\tau}f\left(\frac{u_{\tau}\delta_{\text{EL}}}{\nu}\right) + \left[f\left(\frac{u_{\tau}\delta_{\text{EL}}}{\nu}\right) + \frac{u_{\tau}\delta_{\text{EL}}}{\nu}f'\left(\frac{u_{\tau}\delta_{\text{EL}}}{\nu}\right)\right]\delta u_{\tau}. \quad (2.11)$$

Решение уравнения (2.11) для коррекции скорости трения  $\delta u_{\tau}$  принимает следующий вид:

$$\delta u_{\tau} \approx \frac{u_{\parallel}(\mathbf{x})|_{\delta(\mathbf{x})=\delta_{\text{EL}}} - u_{\tau}f(\delta_{\text{EL}}^+)}{f(\delta_{\text{EL}}^+) + \delta_{\text{EL}}^+f'(\delta_{\text{EL}}^+)}. \quad (2.12)$$

В случае неявного определения точки сшивки с помощью уравнения (2.10), линейное приближение уравнения (2.8) для коррекции решения  $\delta u_{\tau}$  при фиксированном  $\delta_{\text{EL}}^+$  может быть записано, как

$$u_{\parallel}(\mathbf{x})|_{\delta(\mathbf{x})=\frac{\nu}{u_{\tau}}\delta_{\text{EL}}^+} + \frac{\partial u_{\parallel}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}}\bigg|_{\delta(\mathbf{x})=\frac{\nu}{u_{\tau}}\delta_{\text{EL}}^+} \left(-\frac{\nu\delta_{\text{EL}}^+}{u_{\tau}^2}\delta u_{\tau}\right) \approx u_{\tau}f(\delta_{\text{EL}}^+) + \delta u_{\tau}f(\delta_{\text{EL}}^+), \quad (2.13)$$

где вектор нормали  $\mathbf{n}$  определяется через функцию расстояния  $\delta(\mathbf{x})$ :  $\mathbf{n} = \nabla\delta(\mathbf{x})$ . Отметим, что второй член левой части уравнения (2.13) возникает из-за изменения расстояния  $\delta(\mathbf{x})$  точки сшивки решения при изменении  $u_\tau$  для фиксированного  $\delta_{\text{EL}}^+$ . Решение уравнения (2.13) для коррекции скорости трения  $\delta u_\tau$  может быть преобразовано к виду:

$$\delta u_\tau \approx \frac{u_\parallel(\mathbf{x}) \Big|_{\delta(\mathbf{x})=\frac{\nu}{u_\tau}\delta_{\text{EL}}^+} - u_\tau f(\delta_{\text{EL}}^+)}{f(\delta_{\text{EL}}^+) + \frac{\nu}{u_\tau^2}\delta_{\text{EL}}^+ \frac{\partial u_\parallel(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\delta(\mathbf{x})=\frac{\nu}{u_\tau}\delta_{\text{EL}}^+}}. \quad (2.14)$$

В предположении, что в точке сшивки помимо условия (2.8) должно выполняться условие сшивки производной тангенциальной компоненты скорости по направлению нормали

$$\frac{\partial u_\parallel(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\delta(\mathbf{x})=\frac{\nu}{u_\tau}\delta_{\text{EL}}^+} = \frac{u_\tau^2}{\nu} f'(\delta_{\text{EL}}^+), \quad (2.15)$$

уравнения (2.12) и (2.14) для коррекции скорости трения  $\delta u_\tau$  эквивалентны, поэтому в дальнейшем обсуждении метода будет использоваться формулировка (2.12) в силу её простоты и константности знаменателя в случае, когда точка сшивки задается неявно через условие (2.10).

При использовании сильной формулировки условия сшивки уравнение (2.12) может быть использовано для итерационной коррекции решения уравнения (2.8) методом Ньютона. В слабой постановке задачи дискретная коррекция (2.12) может быть заменена на временную релаксацию решения  $u_\tau(\tilde{x}, t)$  на масштабе времени  $\eta_f$  в каждой точке обобщенной координаты  $\tilde{x}$ , определенной вдоль поверхности тела:

$$\frac{\partial u_\tau}{\partial t} = \frac{1}{\eta_f} \frac{u_\parallel(\mathbf{x}) \Big|_{\delta(\mathbf{x})=\delta_{\text{EL}}} - u_\tau f(\delta_{\text{EL}}^+)}{f(\delta_{\text{EL}}^+) + \delta_{\text{EL}}^+ f'(\delta_{\text{EL}}^+)} \quad (2.16)$$

и заменой граничного условия прилипания для скорости  $\mathbf{u}$  на границе тела на условие непротекания для нормальной компоненты скорости  $u_\perp(\mathbf{x}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ :

$$u_\perp|_{\tilde{y}=0} = 0 \quad (2.17)$$

и условие переноса касательных напряжений на поверхность тела:

$$(\nu + \nu_T) \frac{\partial \mathbf{u}_\parallel}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\tilde{y}=0} = \left( \frac{\mathbf{u}_\parallel}{u_\parallel} \Big|_{\tilde{y}=0} \right) u_\tau^2(\tilde{x}, t). \quad (2.18)$$

При параметрическом задании точки сшивки с помощью условия (2.9) или (2.10), из-за несовпадения точки сшивки с узлами сетки определение величины тангенциальной компоненты скорости  $u_{\parallel}$  требует использования локального интерполянта с ближайших узлов, см. например [51]. Задачу можно сильно упростить и полностью исключить применение локального интерполянта введением дополнительного поля скорости трения  $u_{\tau}(\mathbf{x}, t)$  и заменой уравнения (2.16) для  $u_{\tau}(\tilde{x}, t)$ , на следующее уравнение в частных производных для поля  $u_{\tau}(\mathbf{x}, t)$ , определенного во всей области решения:

Ключевым компонентом метода пенализированных пристеночных функций [35—37] является вспомогательное уравнение для скорости трения  $u_{\tau}(\mathbf{x}, t)$ , определённого в всей рассматриваемой области. Доступ к  $u_{\tau}(\mathbf{x}, t)$  в любой точке области существенно упрощает формулировку метода пристеночных функций и устраняет необходимость явного определения положения точки сшивки и/или интерполяции решения в эту точку. Вместо этого алгебраическое условие сшивки (2.8) заменяется релаксационным условием для скорости трения в локализованном слое сшивки, из которого  $u_{\tau}$  переносится на стенку. Эволюция вспомогательного поля скорости трения  $u_{\tau}(\mathbf{x}, t)$  описывается следующим уравнением в частных производных

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{\tau}}{\partial t} - \underbrace{\mathcal{H}\left(\delta_{\text{EL}}^{+} - \frac{u_{\tau}}{\nu}\delta(\mathbf{x})\right) \frac{L}{\eta_s} \frac{\partial u_{\tau}}{\partial \mathbf{n}}}_{\text{перенос } u_{\tau} \text{ на поверхность}} = & \underbrace{\chi_{\delta} \left( \frac{\frac{u_{\tau}}{\nu}\delta(\mathbf{x}) - \delta_{\text{EL}}^{+}}{\sigma^{+}} \right) \frac{1}{\eta_f} \frac{u_{\parallel}(\mathbf{x}) - u_{\tau} f\left(\frac{u_{\tau}}{\nu}\delta(\mathbf{x})\right)}{f\left(\delta_{\text{EL}}^{+}\right) + \delta_{\text{EL}}^{+} f'\left(\delta_{\text{EL}}^{+}\right)}}_{\text{релаксация } u_{\tau} \text{ в локализованной области сшивки}} \\ & + \underbrace{D(u_{\tau})}_{\text{сглаживание}}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

где  $\mathbf{n}$  – единичный вектор нормали, определяемый через функцию расстояния  $\delta(\mathbf{x})$ :  $\mathbf{n} = \nabla \delta(\mathbf{x})$ ,  $L$  – характерный масштаб длины,  $\eta_f$  – временной масштаб релаксации по времени условия сшивки (2.8), определённого в локализованном по пространству слою сшивки,  $\mathcal{H}(\xi)$  – функция Хевисайда, которая отключает перенос  $u_{\tau}$  для  $\delta(\mathbf{x}) > \frac{\nu}{u_{\tau}} \delta_{\text{EL}}^{+}$ ,  $\chi_{\delta}(\xi)$  – локализующая слой сшивки функция маскирования во внешней области решения, определённая как

$$\chi_{\delta}(\xi) = \mathcal{H}(\xi) \exp(-\xi^2/2), \quad (2.20)$$

и  $\sigma^{+}$  – нормализованная толщина области сшивки. Направленный перенос скорости трения  $u_{\tau}$  из точки сшивки в сторону стенки на масштабе времени  $\eta_s$  осуществляется конвективным членом в левой части уравнения (2.19), который со-

ответствует характеристической штрафной функции [53; 54]. Член искусственной направленной вдоль нормалей вязкости  $D(u_\tau)$  для сглаживания вспомогательного поля  $u_\tau$  выражается:

$$D(u_\tau) = \chi_v \left( \delta_{\text{EL}}^+ - \frac{u_\tau}{v} \delta(\mathbf{x}) \right) \text{div} \left( v_a h_{\mathbf{n}} \mathbf{n} \mathbf{n}^T \text{grad} u_\tau \right), \quad (2.21)$$

где  $v_a$  – коэффициент вязкости,  $h_{\mathbf{n}}$  – локальный размер ячейки в направлении нормалей  $\mathbf{n}$ ,  $\chi_v(\xi)$  – экранирующая от переноса из внешних областей функция, выражающаяся:

$$\chi_v(\xi) = \max \left( \mathcal{H}(\xi), \chi_s \left( \frac{\xi}{\sigma^+} \right) \right). \quad (2.22)$$

Когда метод ППФ применяется на структурированных сетках с противопоточной численной схемой со достаточно высокой численной вязкостью, как представлено в работе, член  $D(u_\tau)$  может быть опущен в уравнении (2.19).

Метод ППФ [35—37] основан на дифференциальной формулировке для согласования внешнего решения и закона стенки, где на стенке условие прилипания для скорости  $\mathbf{u}$  заменяется условием непротекания для нормальной компоненты скорости  $u_\perp(\mathbf{x}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\tilde{y}=0} = 0, \quad (2.23)$$

и условие на трение на стенке для тангенциальной компоненты скорости  $u_\parallel$ :

$$(v + v_T) \frac{\partial \mathbf{u}_\parallel}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\tilde{y}=0} = \left( \frac{\mathbf{u}_\parallel}{u_\parallel} \Big|_{\tilde{y}=0} \right) u_\tau^2(\tilde{x}, t). \quad (2.24)$$

Необходимо заметить, что вспомогательное поле скорости трения  $u_\tau(\mathbf{x}, t)$  определено во всей области и, следовательно может быть посчитано на стенке.

Уравнение (2.19) – основа разрабатываемого метода пенализированных пристеночных функций [35—37], используемого в работе. Необходимо отметить, несмотря на то, что разрабатываемый подход продемонстрирован только применительно к модели Спаларта-Аллмараса [1], метод ППФ может использоваться в комбинации с любой другой моделью турбулентности, которая допускает перенос касательного напряжения из внешней части турбулентного пограничного слоя в сторону стенки.

Для эффективного моделирования турбулентных течений с применением метода пенализированных пристеночных функций из-за неразрывности касательного напряжения турбулентная вязкость во внешней области течения  $v_T$  должна

быть согласована с турбулентной вязкостью, полученной из закона стенки:

$$\left(1 + \frac{\nu_T}{\nu}\right) \Big|_{\delta(\mathbf{x}) = \frac{\nu}{u_\tau} \delta_{EL}^+} = \frac{1}{f'(\delta_{EL}^+)}. \quad (2.25)$$

Отметим, что условие (2.25) часто не соблюдается, приводя к численным ошибкам и зависимости решения от сеточного разрешения [21]. В настоящей работе используется неявный вариант согласования турбулентной вязкости с внешним решением, предложенный в [37]. Для этой цели в уравнениях (2.5) и (2.6) функция расстояния  $\delta(\mathbf{x})$  до ближайшей поверхности заменяется на

$$\delta(\mathbf{x}) = \max \left( \delta(\mathbf{x}), \frac{\nu}{u_\tau} \delta_{EL}^+ \right)$$

и граничное условие (2.7) для турбулентной вязкости заменяется на

$$\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\mathbf{w}} = 0.$$

### 2.3 Адаптация положения точки сшивки

Гибкость формулировки метода пенализированных пристеночных функций позволяет обобщить ППФ метод на случай изменяемого в пространстве положения точки сшивки, где значение  $\delta_{EL}$  или  $\delta_{EL}^+$  изменяется в зависимости от получаемого решения. Возможность изменять положение точки сшивки особенно важно для задач с отрывным течением, что часто встречается во внешних течениях, представляющих практический интерес. В окрестности критических точек течения, таких как области отрыва и присоединения, вязкое напряжение на стенке стремится к нулю, что в случае фиксированного значения  $\delta_{EL}^+$  приводит к смещению точки сшивки в область внешнего потока. Таким образом для того, чтобы корректно описать физику течения в окрестности критических точек, необходимо смещать точку сшивки в этих областях в сторону стенки, в вязкий подслой. Из вышесказанного следует необходимость развития стратегии автоматической адаптации положения точки сшивки для более корректного моделирования турбулентных течения в сравнении с оригинальной формулировкой метода ППФ [35; 36].

В текущем разделе описывается два варианта стратегий для смещения точки сшивки. Первая простая стратегия, здесь и далее обозначается как ППФ1, была

предложена в работе [37], где автоматическое смещение положения точки сшивки достигается через введение минимальной скорости трения и заменой расстояния до стенки для точки сшивки  $\delta_{EL}$  на ограниченное эффективное значение:

$$\delta_{EL}^{eff} = \frac{\nu \delta_{EL}^+}{\max(u_\tau, u_\tau^{\min})}. \quad (2.26)$$

С помощью выражения (2.26) точка сшивки смещается в сторону вязкого подслоя в области отрыва и присоединения потока. Основным недостатком этой стратегии адаптации, определяемой формулой (2.26), заключается в том, что не учитывается локальное сеточное разрешение. (почему недостаток)

В работе рассматривался альтернативный вариант адаптации положения области сшивки, который смещает точку сшивки в сторону вязкого подслоя областей отрыва и присоединения потока. В частности, точка сшивки в окрестностях особенностей течения должна быть перемещена из положения, определяемого неявным образом расстоянием  $\delta_{EL}^+$ , в пристеночную область, определяемую расстоянием  $\Delta$  от стенки до первого пристеночного узла расчётной сетки. Такое перемещение достигается использованием следующего выражения для эффективного положения точки сшивки  $\delta_{EL}^{eff}$ :

$$\delta_{EL}^{eff} = \frac{\nu \delta_{EL}^+ (\beta + (1 - \beta) \min((u_\tau / u_\tau^{\min})^\alpha, 1))}{\max(u_\tau, u_\tau^{\min})}. \quad (2.27)$$

Параметры смешивания  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно отвечают за гладкость перехода положения точки сшивки пристеночное разрешение. Параметр  $\alpha$  задаётся пользователем, а  $\beta$  определяется следующим выражением:

$$\beta = \frac{u_\tau^{\min} \Delta}{\nu \delta_{EL}^+}. \quad (2.28)$$

Значение  $u_\tau^{\min}$  можно определить как скорость трения, при которой пристеночный шаг сетки  $\Delta$  соответствует безразмерной величине в координатах вязкого подслоя:

$$\Delta_{min}^+ = \frac{u_\tau^{\min} \Delta}{\nu}, \quad (2.29)$$

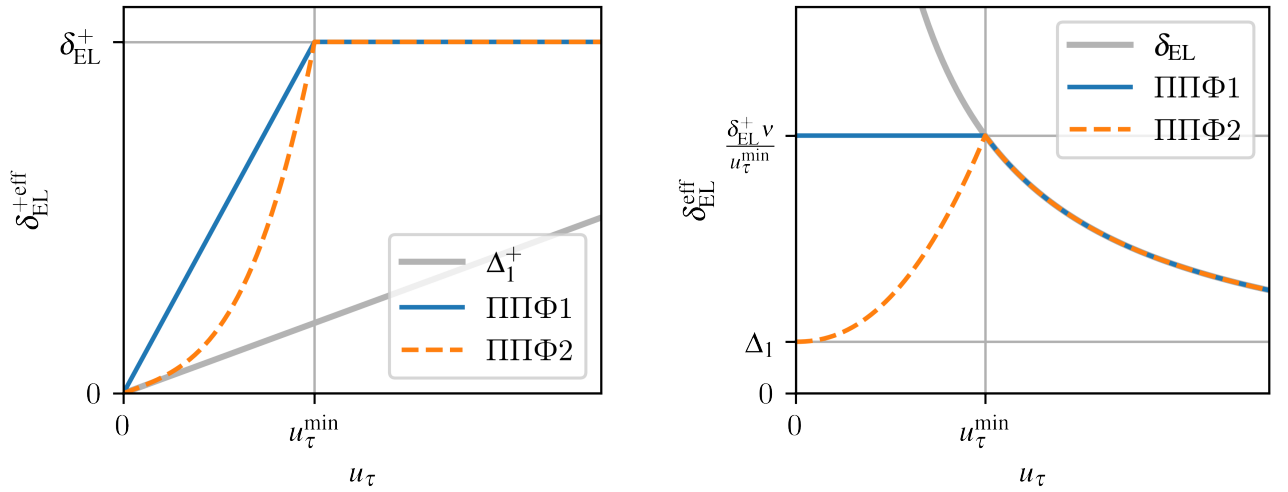
который записывается через  $u_\tau^{\min}$ . Таким образом минимальная скорость трения (м.б. переключения)  $u_\tau^{\min}$  определяется параметрически через безразмерное пристеночное разрешение  $\Delta_{min}^+$ :

$$u_\tau^{\min} = \frac{\nu \Delta_{min}^+}{\Delta}. \quad (2.30)$$

Другими словами, когда скорость трения  $u_\tau$  становится меньше  $u_\tau^{\min}$ , пристеночное разрешение достаточно для смещения точки сшивки на расстояние  $\Delta$  до стенки. Подставляя выражение (2.30) в (2.28), можно получить более простое выражение для параметра  $\beta$ :

$$\beta = \Delta_{\min}^+ / \delta_{\text{EL}}^+. \quad (2.31)$$

Для удобства описания, описанная выражением (2.27) с  $\alpha = 2.2$  стратегия адаптации с определяемым пользователем параметром  $\delta_{\text{EL}}^+$  и параметром  $\beta$ , вычисляемым по (2.31), здесь и далее будет обозначаться ППФ2. Необходимо заметить, что пристенное положение  $\Delta$  можно считать равным пристенному шагу сетки в нормальном направлении или определять из других соображений. Второй вариант можно использовать совместно с адаптацией расчётной сетки, например [75—78], где локальное сеточное разрешение подстраивается, чтобы разрешить внутреннюю часть пограничного слоя, определяемую изменяемым по пространству положением точки сшивки  $\delta_{\text{EL}}^{\text{eff}}(\mathbf{x})$ . В разделе 5.2.2 демонстрируется возможность адаптации положения точки сшивки в соответствии с (2.27) с  $\Delta$ , определяемой как пристенным сеточным разрешением, так и в виде параметра.



а) В относительных координатах вязкого подслоя      б) В исходных физических координатах

Рисунок 2.1 — Зависимость положения точки сшивки от значения скорости трения  $u_\tau$ .

На рисунке 2.1 иллюстрируется поведение определяемых выражениями (2.26) и (2.27) стратегий адаптации положения точки сшивки ППФ1 и ППФ2 в областях отрыва и присоединения потока. На рисунке 2.1а изменение положения

точки сшивки в зависимости от  $u_\tau$  демонстрируется в координатах вязкого подслоя, а на рисунке 2.1б – в исходных физических координатах. В координатах вязкого подслоя, как показано на рисунке 2.1а, точка сшивки в стратегии ППФ2 остаётся в нижнем положении дольше при росте  $u_\tau$ , чем в стратегии ППФ1. Как можно увидеть из рисунка 2.1б, когда  $u_\tau$  стремится к нулю, положение точки сшивки, определяемое в стратегии ППФ1, остаётся постоянным. В это же время в варианте ППФ2 точка сшивки стремится в пристеночное положение  $\Delta$ . Если  $\Delta$  является пристеночным сеточным разрешением в нормальном к стенке направлении, в таком случае точка сшивки стремится в первый пристеночный узел. Таким образом, при использовании стратегии адаптации положения точки сшивки ППФ2 можно ожидать, что течение в окрестности критических точек будет описано лучше, чем при использовании варианта ППФ1. Подробное сравнение эффективности обеих стратегий будет рассмотрено в 5.2.2 на примере решения тестовых задачи обтекания плоской пластины при наличии отрывного течения.

### 2.3.1 Адаптация по градиенту давления

Для формулировки нового определения  $u_\tau^{\min}$  можно подойти с другой стороны. При увеличении величины продольного градиента давления наблюдается рост отклонения от универсального закона стенки, полученного для равновесного пограничного слоя (см. например [68]). Поэтому можно рассмотреть градиент давления в качестве основы для нового критерия адаптации положения точки сшивки под особенности течения. В новой формулировке используется безразмерная величина  $p^+$ , определяемая выражением:

$$p^+ = \frac{\partial p}{\partial \tau} \frac{\nu}{\rho u_\tau^3}, \quad (2.32)$$

где  $\frac{\partial p}{\partial \tau}$  – производная давления по тангенциальному направлению. Величину  $p^+$  можно рассматривать в качестве меры неравновесности пограничного слоя в некоторой точке на поверхности.

Как видно из определения (2.32) величины  $p^+$ , она увеличивается не только при росте градиента давления, но и при снижении трения. Таким образом можно использовать  $p^+$  как для индикации областей с большим градиентом давления,

при котором может наблюдаться существенное отклонение от аналитического закона стенки, так и точек отрыва и присоединения потока. Однако, равенство нулю или небольшие значения градиента давления при отличном от нуля значении  $u_\tau$ , а соответственно отсутствие адаптации положения точки сшивки, может встречаться в областях течения, где наблюдается существенное отклонение от аналитических зависимостей для равновесного пограничного слоя. Во-первых,  $p^+ = 0$  встречается в начале обтекаемого тела, где пограничный слой слабо развит, то есть точка сшивки может лежать во внешней области пограничного слоя выше логарифмического участка, и наблюдаются большие продольные градиенты в течении вблизи рассматриваемой точки. Во-вторых, малое значение  $p^+$  может быть и внутри области отрывного течения, где пограничный слой неравновесный.

Для преодоления рассмотренных выше особенностей поведения  $p^+$  нужно использовать вспомогательные критерии. Так как в задачах внешнего обтекания для тел спереди характерны большие значения кривизны поверхности по сравнению с остальными частями тела, для вспомогательной индикации соответствующих областей можно использовать значение геометрической кривизны. В свою очередь для областей отрывных течений характерны малые значения сил трения по сравнению с характерными масштабами для рассматриваемого течения, поэтому для их индикации можно использовать некоторое граничное значение скорости трения  $u_\tau$ , где меньшее значение будет характеризовать область отрыва или рециркуляции потока.

В работе [68] значения  $p^+$  и кривизны тела используются в качестве критерия для сеточной адаптации совместно с применением пристеночных функций для повышения точности получаемого решения в областях присоединения потока и их окрестностях с неразвитым турбулентным пограничным слоем, а также в областях с большим градиентом давления и областях отрыва.

Введём альтернативный вариант определения величины  $u_\tau^{\min}$ , не зависящий от локального пристенного сеточного разрешения  $\Delta$ :

$$u_\tau^{\min} = \max \left( u_\tau^{p^+}, u_\tau^{\text{Re}}, u_\tau^{\text{curv}} \right), \quad (2.33)$$

где

$$u_{\tau}^{p^+} = \left( \frac{\nu \left| \frac{\partial p}{\partial \tau} \right|}{p_{crit}^+ \rho} \right)^{1/3}, \quad (2.34)$$

$$u_{\tau}^{Re} = 0.8 u_{ref} \left( \frac{C_f^a}{2} \right)^{1/2}, \quad (2.35)$$

$$u_{\tau}^{curv} = \frac{\nu k}{k_{crit}^+}, \quad (2.36)$$

где  $p_{crit}^+$  – критическое значение величины  $p^+$ ,  $u_{ref}$  – масштаб скорости для рассматриваемого течения,  $C_f^a = \tau / (\frac{1}{2} u_{ref}^2 \rho) = u_{\tau}^2 / (\frac{1}{2} u_{ref}^2) \approx 0.058 Re^{-1/5}$  – эмпирическая оценка коэффициента трения для пластины, обтекаемой потоком с числом Рейнольдса  $Re$  рассматриваемого течения, посчитанного по характерной длине,  $k$  и  $k_{crit}^+$  – кривизна и критическая кривизна поверхности тела соответственно. Далее этот вариант будет обозначаться  $ППФp^+$ . В работе использовались значения  $p_{crit}^+ = 7 \times 10^{-3}$  и  $k_{crit}^+ = 10^{-5}$ . Если задача решается в безразмерном виде, то  $u_{ref} = 1$ .

Так как далее рассматривается плоская задача, кривизна поверхности находится, как кривизна кривой, по формуле Френе:

$$\frac{d\tau}{ds} = k \mathbf{n}, \quad (2.37)$$

где  $s$  – длина кривой.

### 2.3.2 Перенос эффективного положения точки сшивки

В рассматриваемой в разделе 2.3 формулировке по адаптации точки сшивки необходимо во всём поле течения знать величину  $\Delta$  в соответствующей точке, которая изначально известна только в узлах на стенке. В случае расчётных сеток с простой геометрией и постоянным пристеночным шагом величину  $\Delta$  можно задавать внешним параметром. Однако в случае переменного пристенного шага сетки, что почти неизбежно для сложных тел или при использовании адаптированных расчётных сеток, где шаг сетки уменьшается в областях повышенного интереса, необходимо некоторым образом сообщить в каждую точку пространства соответствующую величину  $\Delta$ . Для этого перед расчётом можно решить следующее

стационарное уравнение и использовать полученную величину в формулах адаптации:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad (2.38)$$

с граничным условиями на стенке  $\Delta = \Delta_w$  – равенство первому пристеночному шагу.

Однако в сложных течениях  $u_\tau$ ,  $\frac{\partial p}{\partial \tau}$  могут существенно меняться по высоте, а значит высота  $\delta_{EL}^{eff}$  точки сшивки не будет постоянным. Изменение вдоль нормалей величины  $\delta_{EL}^{eff}$  может приводить к повышенным ошибкам, так как расстояние в уравнении для  $\tilde{v}$  меняется в зависимости от  $\delta_{EL}^{eff}$  по выражению (2.26), и расслоению области переноса в уравнении (2.19).

Для сохранения постоянства  $\delta_{EL}^{eff}$  вдоль нормалей можно решать вспомогательное уравнение, где эффективное положение точки сшивки  $\delta_{EL}^{eff}$  переносится по нормали от стенки в расчётную область:

$$\frac{\partial \delta_{EL}^{eff}}{\partial t} + a \frac{\partial \delta_{EL}^{eff}}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad (2.39)$$

где  $a$  – скорость переноса. В работе использовалось безразмерное значение  $a/u_{ref} = 1$ . Для  $\delta_{EL}^{eff}$  ставятся следующие граничные условия: на стенке, где применяется метод ППФ,  $\delta_{EL}^{eff}$  вычисляется по локальным значениям, на прочих границах ставится условие  $\frac{\partial \delta_{EL}^{eff}}{\partial \mathbf{n}} = 0$ .

Стоит отметить, что такой подход может быть применён для расчётов на сетках с изменяющимся во время расчёта положением узлов, например, при использовании адаптивных сеточных методов, и/или с движущимися твёрдыми телами. При этом вспомогательная задача о переносе эффективного положения точки сшивки по постановке и сложности решения сопоставима с основным уравнением метода ППФ (2.19), а значит и дополнительные затраты вычислительных ресурсов будут сопоставимы с решением (2.19).

## Глава 3. Численный метод решения уравнений математической модели

### 3.1 Решение основной системы уравнений

Основная система уравнений (2.1)–(2.5) дискретизована с помощью вершинно-центрированного конечно-объёмного метода с применением квази-одномерных реконструкций переменных вдоль рёбер расчётной сетки (схема EBR) [38]. Пространственная дискретизация вязких членов основана на методе локальных разбиений элементов (averaged element splittings, AES) [40].

Так как в работе решались стационарные задачи методом установления, для дискретизации по времени использовалась неявная схема Эйлера первого порядка с одной итерацией метода Ньютона для решения системы нелинейных уравнений. Однако в солвере NOISEtte доступны схемы более высокого порядка точности с несколькими итерациями метода Ньютона. Для решения системы линейных алгебраических уравнений, появляющихся на каждой итерации метода Ньютона, используется стабилизированный метод бисопряжённых градиентов (Bi-CGSTAB)[41] с симметричным предобуславливанием Гаусса-Зейделя.

### 3.2 Метод решения уравнения для скорости трения

Перед каждым шагом по времени для основной системы уравнений RANS (2.1)–(2.5) при использовании метода ППФ производится решение уравнения для скорости трения  $u_\tau$  (2.19). В данном разделе разбирается численная схема, используемая в работе для дискретизации и решения уравнения (2.19). Для дискретизации производной по времени используется схема Эйлера первого порядка. Все маскирующие функции ( $\mathcal{H}$ ,  $\chi_\delta$ ,  $\chi_v$ ) на каждом шаге по времени считаются замороженными и вычисляются по значениям переменных на текущем слое по времени, обозначаемом в этой главе верхним индексом  $n$ .

### 3.2.1 Перенос

Конвективный член в уравнении (2.19) аппроксимируется по полностью неявной схеме направленных разностей. Для этого из узла расчётной сетки, где активируется перенос ( $\mathcal{H} = 1$ ), вдоль вектора нормали, значение которого считается постоянным, выпускается луч в направлении от твёрдой поверхности. Далее ищется точка пересечения этого луча с первым ребром в случае решения двумерной задачи или треугольной гранью в трёхмерном случае и строится линейная интерполяционная конструкция для значения  $u_\tau^{inter}$  в точке пересечения по значениям, хранящихся в узлах, которые лежат в основе пересекаемого ребра или грани элемента:

$$u_\tau^{inter} \approx \sum_{N_{dim}} C_i u_{\tau_i}^{n+1}, \quad (3.1)$$

где  $N_{dim}$  – геометрическая размерность рассматриваемой задачи,  $C_i$  – интерполяционный коэффициент. Конвективный член аппроксимируется для  $j$ -ого узла следующим образом:

$$\mathcal{H} \left( \delta_{EL}^+ - \frac{u_\tau}{v} \delta(\mathbf{x}) \right) \frac{L}{\eta_s} \frac{\partial u_\tau}{\partial \mathbf{n}} \approx \mathcal{H} \left( \delta_{EL}^+ - \frac{u_{\tau j}^n}{v_j^n} \delta(\mathbf{x}_j) \right) \frac{u_\tau^{inter} - u_{\tau j}^{n+1}}{r}, \quad (3.2)$$

где  $r$  – расстояние между узлом и точкой пересечения луча, направленного вдоль нормали, с ребром или гранью расчётной сетки.

### 3.2.2 Источниковый член

Следуя предположению, что все значения переменных, включая маскирующие функции, кроме  $u_\tau$  берутся с текущего слоя по времени, строится следующая конечно-разностная аппроксимация релаксационного члена уравнения (2.19) для  $j$ -ого узла:

$$\chi_\delta \left( \frac{\frac{u_\tau}{v} \delta(\mathbf{x}) - \delta_{EL}^+}{\sigma^+} \right) \frac{1}{\eta_f} \frac{u_\parallel(\mathbf{x}) - u_\tau f \left( \frac{u_\tau}{v} \delta(\mathbf{x}) \right)}{f(\delta_{EL}^+) + \delta_{EL}^+ f'(\delta_{EL}^+)} \quad (3.3)$$

$$\approx \chi_\delta \left( \frac{\frac{u_\tau^n}{v^n} \delta(\mathbf{x}) - \delta_{EL}^+}{\sigma^+} \right) \frac{1}{\eta_f} \frac{u_\parallel^n(\mathbf{x}) - u_\tau^{n+1} f \left( \frac{u_\tau^n}{v^n} \delta(\mathbf{x}) \right)}{f(\delta_{EL}^+) + \delta_{EL}^+ f'(\delta_{EL}^+)}. \quad (3.4)$$

Знаменатель в данном уравнении является постоянным для всех расчётных узлов.

### 3.2.3 Искусственная вязкость

Для дискретизации члена искусственной анизотропной вязкости, используемого в методе ППФ, применяется метод локальных разбиений элементов (averaged element splittings, AES) [40]. Метод локальных разбиений элементов основывается на осреднения аппроксимаций методом Галёркина на симплицальных разбиениях сетки. Для дискретизации вязкого члена в уравнении для скорости трения необходимо построить аппроксимацию методом Галёркина с кусочно-линейными базисными функциями оператора вязкости для треугольных в двумерном случае и тетрайдальных в объёмном случае сеток.

В методе Галёркина решение представляется в виде разложения по базисным функциям:

$$u(t, \mathbf{x}) = \sum_j u_j(t) \varphi_j(\mathbf{x}), \quad (3.5)$$

где  $u_j(t)$  – коэффициенты разложения в момент времени  $t$ ,  $\varphi_j(\mathbf{x})$  – базисные функции. Базисные функции строятся таким образом, чтобы в  $j$ -ая базисная функция в  $j$ -ом узле равнялась единице, а в остальных узлах равнялась нулю. Из такого построения базисных функций следует, что коэффициенты разложения  $u_j(t)$  равняются значению решения в  $j$ -ом узле.

Далее рассматривается аппроксимация оператора анизотропной искусственной вязкости в методе ППФ. Воспользуемся слабой постановкой задачи. Тогда умножим скалярно член с анизотропной вязкостью на каждую базисную функцию:

$$(\nabla (A \nabla u_\tau), \varphi_i) = - (A \nabla u_\tau, \nabla \varphi_i) + \int_{\Gamma} \varphi_i A \nabla u_\tau \cdot \mathbf{n} d\Gamma, \quad (3.6)$$

Здесь воспользовались интегрированием по частям. В данном случае скалярное произведение двух функций означает интегрирование, таким образом вторая часть выражения равняется нулю, так как базисная функция на границе равняется нулю.

Далее используем разложение по базису, и предположим, что матрица  $A$  постоянна:

$$(\nabla (A \nabla u_\tau), \varphi_i) = - (A \nabla u_\tau, \nabla \varphi_i) = - \left( A \sum_j u_j(t) \nabla \varphi_j(\mathbf{x}), \nabla \varphi_i \right), \quad (3.7)$$

Поменяем порядок суммирования и интегрирования:

$$(\nabla (A \nabla u_\tau), \varphi_i) = - \left( A \sum_j u_j(t) \nabla \varphi_j(\mathbf{x}), \nabla \varphi_i \right) = - \sum_j u_j(t) (A \nabla \varphi_j(\mathbf{x}), \nabla \varphi_i), \quad (3.8)$$

Учитывая интегрирование и постоянство градиента на подэлементе  $\Omega_k$  являющимся пересечением носителей базисных функций  $i$  и  $j$ :

$$(A \nabla \varphi_j(\mathbf{x}), \nabla \varphi_i) = (\nabla \varphi_j^T A \nabla \varphi_i)|_k \int_{\Omega_k} dV, \quad (3.9)$$

Таким образом сводится к простому суммированию

$$(\nabla (A \nabla u_\tau), \varphi_i) = - \sum_j u_j(t) (\nabla \varphi_j^T A \nabla \varphi_i)|_k \int_{\Omega_k} dV, \quad (3.10)$$

При появлении производной по времени возникает матрица масс, которую нужно некоторым образом обратить, но в данном случае она считается единичной, так как для метода ППФ достаточно самого эффекта сглаживания. Матрица  $A$ , а соответственно и коэффициенты вязкости на элементе расчётной сетки осредняются. Таким образом вместо коэффициентов разложения напрямую используются значения переменной в узлах расчётной сетки. Для полностью неявной аппроксимации берутся значения со следующего временного слоя.

Такая схема аппроксимации была выбрана из-за относительно компактного шаблона, в который входит узел и его соседи первого порядка по элементам расчётной сетки. Также шаблон такого размера совпадает с шаблоном, на котором строится якобиан при решении основной системы уравнений, что позволяет пользоваться тем же портретом матрицы, что экономит используемую память.

Как можно заметить, во всех разделах аппроксимация соответствующих членов является линейной относительно значений на следующем временном слое. Таким образом на каждом шаге по времени решается только система соответствующих линейных уравнений без применения многоитерационного метода Ньютона.

## Глава 4. Параллельная реализация в программном комплексе NOISEtte

Для выполнения численных расчетов предложенная в предыдущих главах методика моделирования турбулентных течений с применением метода пенализированных пристеночных функций была реализована в качестве отдельного модуля в программном комплексе NOISEtte.

Взаимодействие расчётного кода NOISEtte с модулем ППФ происходит на различных этапах выполнения. Во время инициализации NOISEtte выполняется инициализация ППФ. Происходит чтение параметров метода из конфигурационного файла. Инициализируются объекты модуля ППФ на основе расчётной сетки, обрабатываемой в основном коде NOISEtte. Производится расчёт нормалей к поверхностям, где применяется метод ППФ, на основе градиента расстояния. Через инфраструктуру NOISEtte производится чтение поля скорости трения, если процедура расчёта начинается с имеющихся полей.

Во время выполнения основного цикла интегрирования по времени также происходит взаимодействие кода NOISEtte и модуля ППФ. Во время выполнения процедур до шага по времени производится пересчёт расстояний до поверхности в соответствии с выражением (2.26), которое используется при расчёте источников в уравнении для модели турбулентности Спаларта–Аллмараса (2.5). При этом для корректного восстановления расстояния при снижении положения точки сшивки исходное расстояние до стенок копируется в отдельный массив. На этапе инициализации может производиться распространение пристенного шага сетки в нормальном направлении 2.38.

Во основной части итерации интегрирования по времени, где происходит расчёт потоков и заполнение матрицы Якоби в случае неявных схем, перед учётом граничных условий выполняется основная процедура для расчёта поля скорости трения  $u_\tau$  (2.19). В начале расчёта  $u_\tau$  опционально производится распространение эффективного положения точки сшивки путём решения уравнения (2.39). Далее происходит вычисление значений функций, определяющих области переноса и релаксации в уравнении для скорости трения (2.19) в соответствии с распространённым или вычисленным локально значением положения точки сшивки. Расчёт членов в уравнении (2.19) производится в следующем порядке: перенос, источниковый член, искусственная вязкость. Вычисление значения скорости трения на следующем шаге по времени производится с использованием решателя

СЛАУ BiCGStab, имплементированного в коде NOISEtte. После вычисления поля скорости трения производится запись полученных значений в структуры узлов на твёрдой границе, где используется метод ППФ. Записанные значения участвуют в постановке граничных условий в коде NOISEtte. Модуль ППФ запрограммирован на языке C++ с использованием технологий паралелизации MPI и OpenMP.

## Глава 5. Результаты численного решения задач пристеночного моделирования

Задачи решались в безразмерных переменных со следующими характерными масштабами: плотность потока на бесконечности  $\rho_\infty$ , скорость свободного потока на бесконечности  $U_\infty$ , молекулярная вязкости  $\mu_\infty$ , и характерный масштаб длины  $L$ . Безразмерные переменные, обозначенные символом  $\widehat{(\cdot)}$ , связаны с размерными переменными следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_\infty \widehat{\rho}, \quad u = U_\infty \widehat{u}, \quad x = L \widehat{x}, \quad \mu = \mu_\infty \widehat{\mu}, \\ t &= \frac{L}{U_\infty} \widehat{t}, \quad p = \rho_\infty U_\infty^2 \widehat{p}, \quad T = \frac{U_\infty^2}{R} \widehat{T}. \end{aligned}$$

Для удобства записи численные результаты представлены в безразмерном виде с опущенным символом  $\widehat{(\cdot)}$ . Заметим также, что рассматриваются задачи при малом числе Маха, поэтому предполагается, что зависимость решения от изменений плотности и температуры мала.

В качестве закона стенки используется составная аналитическая функция из [70], настроенная для модели Спаларта-Аллмараса, которая хорошо аппроксимирует скорость на логарифмическом участке, в вязком подслое и буферной области турбулентного пограничного слоя:

$$\begin{aligned} u^+(y^+) &= \begin{cases} \frac{1}{a} \sin ay^+, & y^+ < y_c^+, \\ (1 - c'_1 e^{-y^+/c_2}) \left( \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + B \right), & y^+ \geq y_c^+, \end{cases} \\ c_1 &= 1 - \frac{\frac{1}{a} \sin ay_c^+}{\frac{1}{\kappa} \ln(y_c^+) + B}, \quad c_2 = \frac{c_1}{a(1 - c_1)} \frac{\sin ay_c^+}{\cos ay_c^+ - \frac{1-c_1}{\kappa y_c^+}}, \quad c'_1 = c_1 e^{y_c^+/c_2}, \end{aligned}$$

где  $a = 0.01$ ,  $y_c^+ = 5.0$ ,  $\kappa = 0.41$ , и  $B = 5.2$ .

Размеры расчётной области, характеристики расчётных сеток и параметры математической модели приводятся в описании каждой задачи. Величины безразмерной толщины области сшивки  $\sigma^+$  для расчётов с применением метода ППФ также приводятся в описаниях.

Все расчёты проводились до достижения стационарного течения так, что относительные невязки для продольной компоненты скорости и турбулентных переменных ( $\tilde{v}$  для модели CA,  $k, \omega$  для SST) удовлетворяли соотношениям:  $\frac{\|\Delta u\|_2}{\|u\|_2} \leq 10^{-8}$  и  $\frac{\|\Delta v_T\|_2}{\|v_T\|_2} \leq 10^{-8}$ , соответственно.

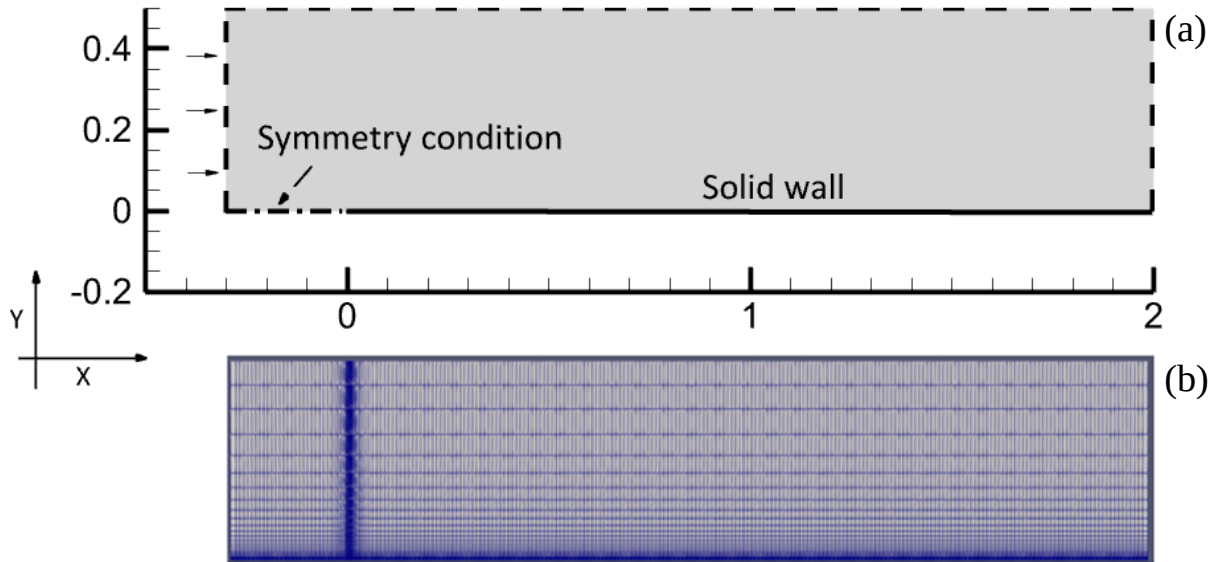


Рисунок 5.1 — Обтекание плоской пластины: (a) постановка задачи; (b) расчётная сетка соответствующая  $\Delta y_1^+ \sim 100$ .

### 5.1 Обтекание пластины без градиента давления

Турбулентное обтекание плоской пластины исследуется в несжимаемом пределе(?). Безразмерные параметры подобия, в частности числа Рейнольдса и Маха равняются  $Re = 5 \times 10^6$  и  $M = 0.2$ , соответственно. Такие величины выбраны в соответствии с тестовой задачей NASA [79].

Геометрия расчётной области с граничными условиями представлена на рисунке 5.1(a). Задача решалась численно на прямоугольных структурированных сетках, которые имеют сгущение в окрестности  $x = 0$  для точного разрешения сингулярности на передней кромке. Шаг сетки в направлении потока затем постепенно увеличивается с коэффициентом роста  $q_x = 1.2$ . Кроме того все сетки имеют сгущение в нормальном к стенке направлении с коэффициентом роста шага  $q_y = 1.2$ . Расчёты проводились на четырёх расчётных сетках с пристенным разрешением  $\Delta y_1 = 5 \times 10^{-4}$ ,  $2.5 \times 10^{-4}$ ,  $1.5 \times 10^{-4}$ , и  $5 \times 10^{-5}$ , что соответствует безразмерным величинам  $\Delta y_1^+ \sim 100$ , 50, 30 и 10, соответственно. Расчётная сетка с  $\Delta y_1^+ \sim 100$  представлена на рисунке 5.1(b).

Параметры метода ППФ определены следующим образом: начальное значение для поля  $u_\tau = 7 \times 10^{-2}$ , масштабы релаксации  $\eta_f = \eta_s = 10^{-2}$ , положение точки сшивки  $\delta_{EL}^+ = 100$ , толщина области сшивки  $\sigma^+ = 100$ . Численное моделирование этой задачи проводилось с использованием модели турбу-

лентности Спаларта-Аллмараса с полностью разрешённым пограничным слоем на сетке с пристеночным шагом  $\Delta y_1^+ \sim 1$ . Результаты хорошо согласуются с результатами [79], полученные с использованием структурированного элементно-центрированного решателя CFL3D, как показано на рисунке 5.2. Это решение использовалось в качестве референсного.

Влияние расчётной сетки на решение, получаемое с применением метода ППФ и стандартного подхода, демонстрируется на рисунке 5.2, где результаты, полученные на четырёх расчётных сетках с различным пристенным разрешением, сравниваются с референсным решением, которое будет обозначаться как СА. Распределение коэффициента трения на пластине, полученное в расчётах с применением метода ППФ представлено на рисунке 5.2(а). Из рисунка видно, что полученные распределения хорошо согласуются с референсным решением, демонстрируя слабую зависимость точности решения от пристеночного разрешения расчётной сетки. Однако, все численные решения в этом исследовании различаются в области роста пограничного слоя (? он же везде растёт). However, all numerical solutions in this study exhibit divergence in the region of boundary layer growth. Это расхождение обусловлено сложностями расчёта вблизи передней кромки в точке  $x = 0$  и сложностью согласования внешнего решения с пристеночной функцией внутри пограничного слоя, который очень тонкий в этой области. Такая сложность также отмечается другими авторами в расчётах с применением других методик, основанных на методах пристеночных функций [22; 70].

Сравнение распределений коэффициента трения, полученных с применением стандартного подхода, представлено на рисунке 5.2(б). Из рисунка видно, что результаты стандартного подхода также хорошо согласуются с референсным решением кроме случая с сеточным разрешением  $\Delta y_1^+ \sim 10$ . Такое расхождение обуславливается положением точки сшивки в буферной области, где пристеночная функция плохо аппроксимирует профиль продольной компоненты скорости.

Сравнение профилей скорости в сечении  $x = 1$  для метода ППФ и стандартного подхода представлено на рисунках 5.2(в) and (г). Как видно из рисунка 5.2(в), положение точки сшивки в методе ППФ остаётся постоянным для всех расчётных сеток, и профили скорости хорошо согласуются с референсным решением выше точки сшивки, расположенной на логарифмическом участке турбулентного пограничного слоя, где профиль скорости хорошо аппроксимируется аналитической пристеночной функцией. В отличие от метода ППФ положение точки сшивки в стандартном подходе определяется размером пристеночной ячейки, что демон-

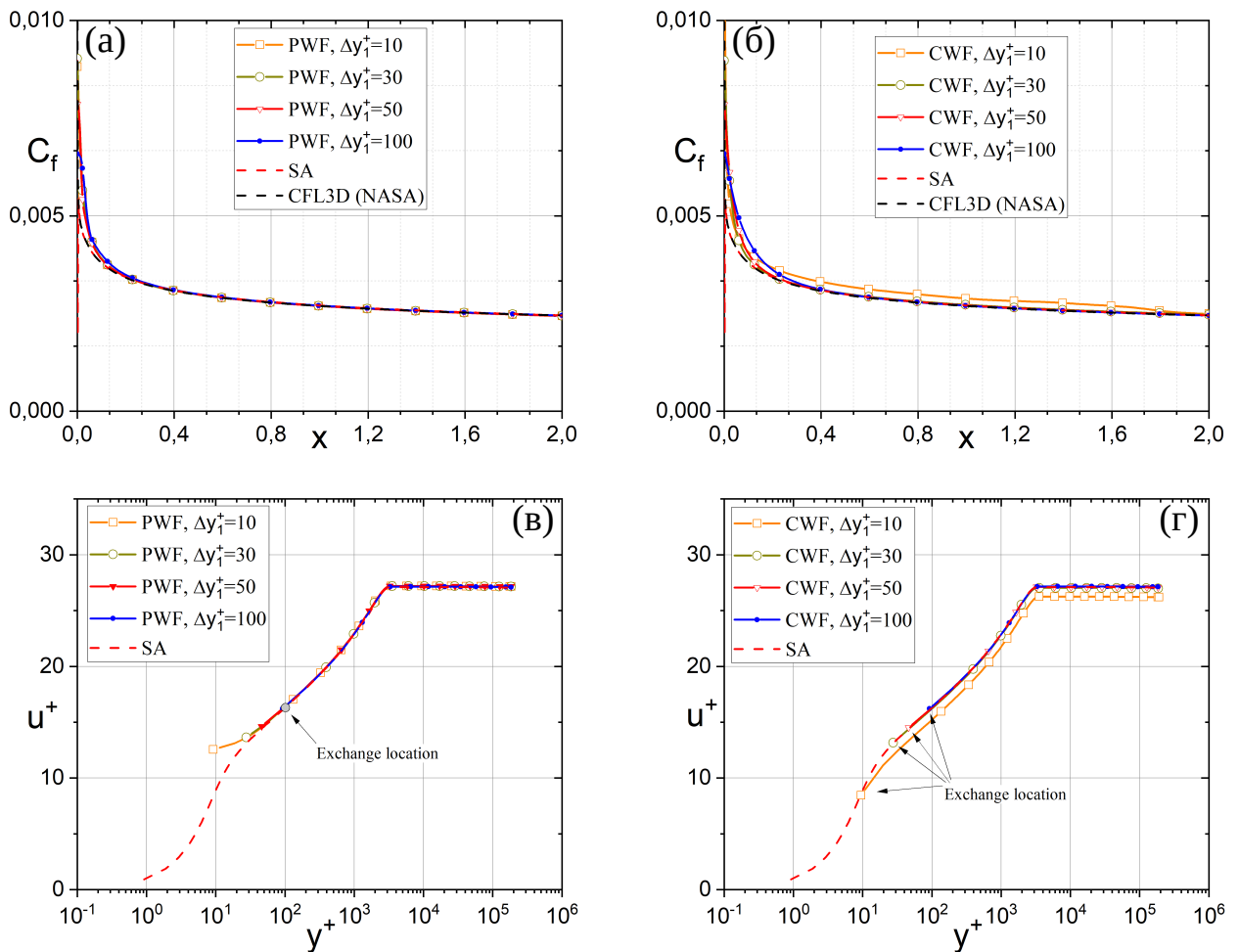


Рисунок 5.2 — Обтекание плоской пластины: влияние разрешения на структурированной сетке. Распределение коэффициента трения для (а) метода ППФ, (б) стандартного подхода, и профили продольной компоненты скорости для (в) метода ППФ, (г) стандартного подхода.

стрируется на рисунке 5.2(г). В следствие точка сшивки попадает в буферную область, где профиль скорости плохо описывается аналитической зависимостью, что, в частности, происходит в расчёте на сетке с пристеночным разрешением  $\Delta y_1^+ \sim 10$ .

Таким образом, результаты, полученные на структурированной сетке, демонстрируют сеточную независимость метода ППФ. В тоже время положение точки сшивки в случае стандартного подхода определяется размером пристенной расчётной ячейки, что влияет на получаемые результаты. Кроме того точность применения стандартного подхода зависит от точности интерполяции скорости в точке сшивки, что может существенно зависеть от сеточного разрешения.

Исследование также проводилось на неструктурированных расчётных сетках, которые имели сопоставимое пристеночное разрешение и коэффициенты роста как в продольном, так и поперечном направлениях. Распределения коэффици-

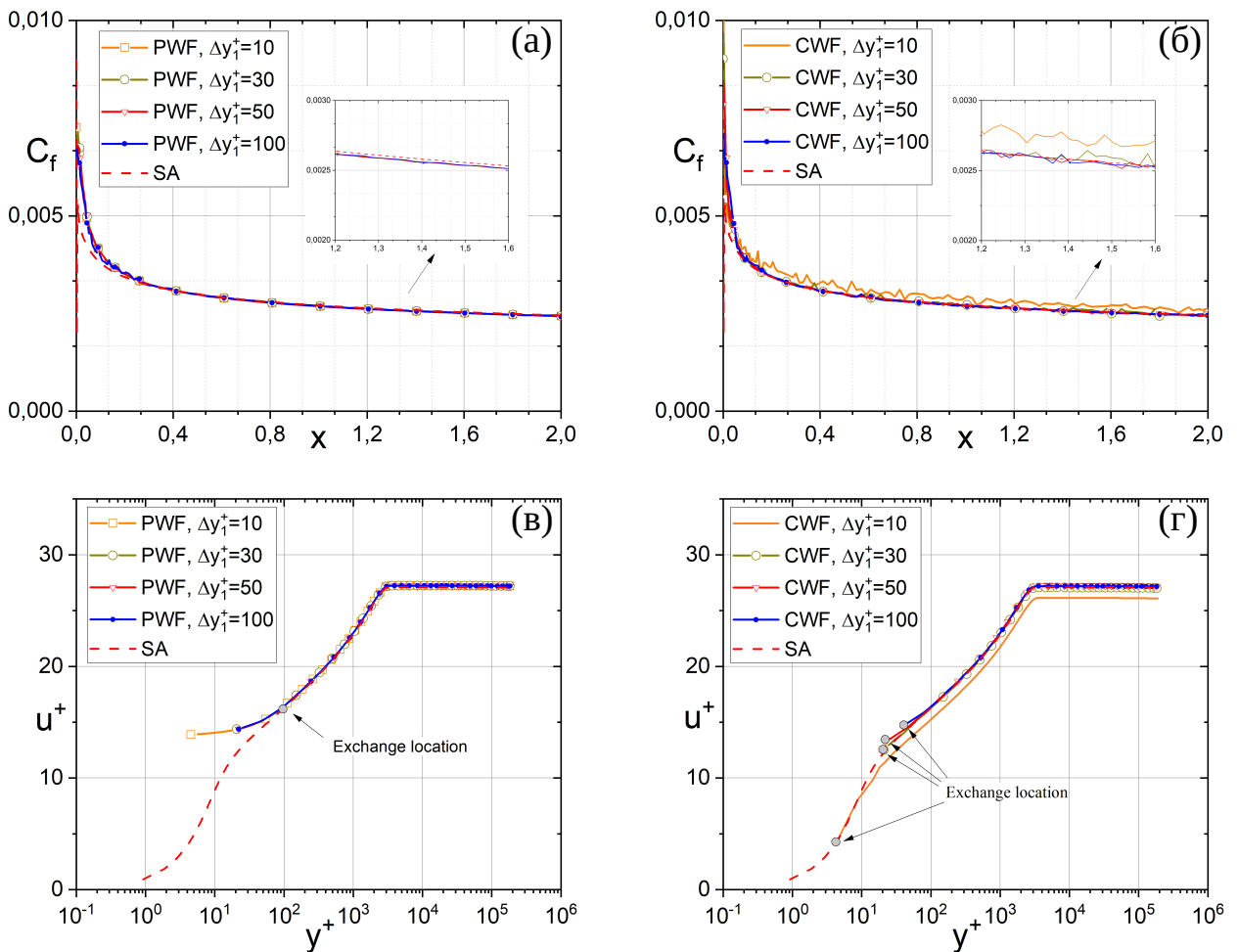


Рисунок 5.3 — Обтекание плоской пластины: влияние разрешения на неструктурированной сетки. Распределение коэффициента трения для (а) метода ППФ (PWF) и (б) стандартного подхода (CWF) и профили продольной компоненты скорости для (в) метода ППФ и (г) стандартного подхода.

ента трения приведены на рисунках 5.3(а) и (б). Из рисунков можно увидеть существенные осцилляции при применении стандартного подхода. Такое поведение связано с большим влиянием ошибок интерполяции при расчёте на неструктурированных сетках. В то же время распределения полученные с использованием метод ППФ хорошо согласуются с референсным решением и друг с другом, подтверждая сеточную независимость подхода ППФ. Как показано на рисунках 5.3(в) и (г), использование неструктурированных сеток не влияет существенно на профили продольной компоненты скорости. Однако наблюдается заметное отклонение в первых узлах сетки при использовании стандартного подхода, вероятно, из-за недостаточной точности аппроксимации профиля скорости пристеночной функцией в буферной области турбулентного пограничного слоя.

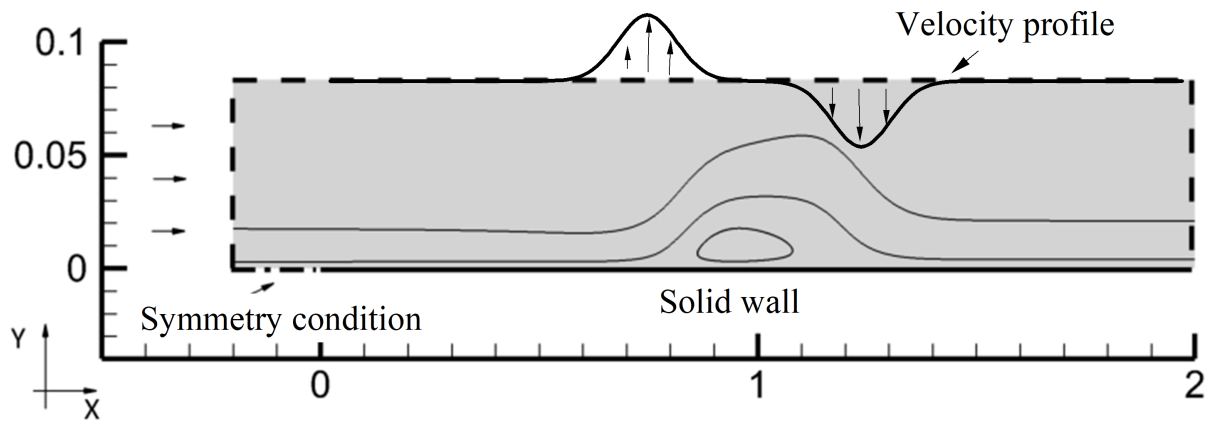


Рисунок 5.4 — Постановка задачи обтекания пластины с переменным градиентом давления.

## 5.2 Обтекание пластины с неблагоприятным градиентом давления

### 5.2.1 Постановка

Метод ППФ с двумя стратегиями адаптации положения точки сшивки применялся для численного решения тестовой задачи обтекания плоской пластины в присутствии знакопеременного градиента давления, вызывающего рециркуляционное течение. Производилось детальное сравнение двух стратегий адаптации положения точки сшивки. Особое внимание уделялось эффективности рассматриваемых стратегий для описания течений в областях отрыва и присоединения потока.

Для решения задачи в качестве аналитического закона стенки использовался модифицированный закон Моргенвека из [70] с коэффициентами из оригинальной работы.

Градиент давления для образования рециркуляционного течения создаётся заданием профиля вертикальной компоненты скорости на верхней границе расчётной области, как схематично показано на рисунке 5.4. Исходная постановка рассматриваемой задачи была предложена в [21]. В настоящей работе рассматривается модифицированная постановка, предложенная в [37] для тестирования стратегии ППФ1. Поэтому для сравнения стратегий адаптации точки сшивки и сравнения с классическим методом пристеночных функций будет использоваться постановка из [37].

Безразмерные параметры подобия и размеры расчётной области в обеих постановках совпадают. Числа Рейнольдса и Маха равняются  $Re = 3.6 \times 10^7$  и  $M = 0.2$  соответственно. Рассматривается прямоугольная расчётная область  $[-0.2, 2.0] \times [0, 1/12]$  в плоскости  $XOY$ . Начало пластины соответствует началу координат  $(0,0)$ . Перед пластиной ставится условие симметрии. На левой границе расчётной области задаётся равномерный поток, а на правой – условие выхода с постоянным давлением. Поперечная компонента скорости в исходной постановке [21] на верхней границе задаётся следующим выражением:

$$v(x) = Ae^{-b(x-x_1)^2} - Ae^{-b(x-x_2)^2}, \quad (5.1)$$

где параметры  $A = 0.35$ ,  $b = 108.0$ ,  $x_1 = 0.25$ , и  $x_2 = 0.75$  определяют интенсивность и размер рециркуляционного течения. В модифицированной постановке из [37] используются значения  $x_1 = 0.75$ , и  $x_2 = 1.25$ . При таком изменении постановки задачи область рециркуляционного течения смещается из начальной части пластины в центральную часть с развитым турбулентным пограничным слоем. В модифицированной постановке задачи снижается влияние ошибок описания течения в окрестности сингулярной точки в начале пластины, обусловленной сменой граничных условий, на решение в области отрывного течения.

Рассматриваемая задача решалась численно на последовательности прямоугольных структурированных расчётных сеток с уменьшением шага в продольном направлении в окрестности значения  $x = 0$  с целью достаточно точного описания течения возле передней кромки пластины, где происходит смена граничного условия симметрии на условие прилипания. Шаг сетки в продольном направлении при  $x = 0$  равнялся  $\Delta_x = 10^{-3}$  и увеличивался при отдалении по закону геометрической прогрессии с коэффициентом  $q_x = 1.2$  до значения  $\Delta_x^{\max} = 10^{-2}$ . Распределение узлов в направлении оси  $OX$  совпадало для всех рассматриваемых расчётных сеток. Также все сетки для разрешения турбулентного пограничного слоя имели сгущение к нижней границе расчётной области при  $y = 0$ . Увеличение шага сетки в поперечном направлении производилось по геометрической прогрессии с коэффициентом роста  $q_y = 1.2$ . Пристенный шаг в поперечном направлении выбирался таким, чтобы обеспечить перед областью рециркуляции желаемое разрешение в координатах внякого подслоя, обозначаемое как  $\Delta y_{\text{in}}^+$ . Основные расчёты проводились на трёх расчётных сетках с пристенными разрешениями  $\Delta y_1 = 10^{-4}$ ,  $10^{-5}$ , и  $10^{-6}$ , которые соответствуют следующим безразмерным значениям  $\Delta y_{\text{in}}^+ \sim 100$ ,  $10$ , и  $1$ . Расчётная сетка соответствующая

значению  $\Delta y_{\text{in}}^+ \sim 100$  приведена на рисунке 5.5. На рисунке 5.6 представлено рас-

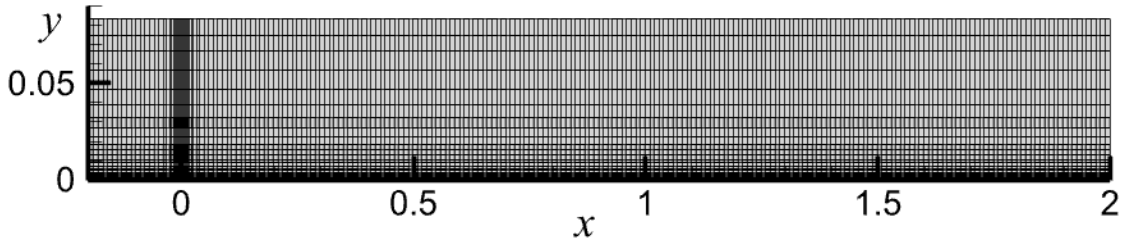


Рисунок 5.5 — Отрывное обтекание пластины: расчётная сетка, соответствующая значению  $\Delta y_{\text{in}}^+ \sim 100$ .

пределение пристеночного шага сетки в координатах вязкого подслоя  $\Delta y_1^+$  для модели Спаларта–Аллмараса. Выраженные локальные минимумы на графиках соответствуют областям отрыва и присоединения потока, где значение силы трения, действующих на поверхность пластины, стремится к нулю.

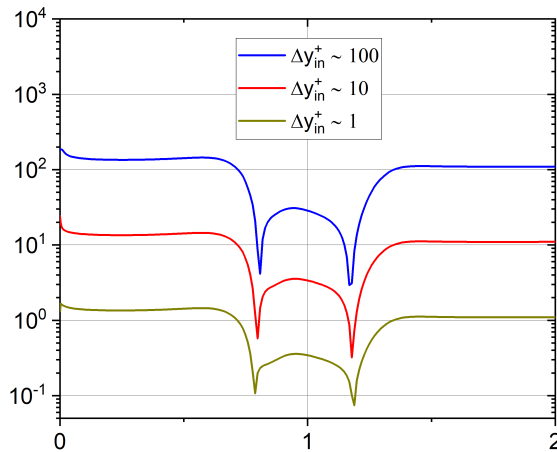


Рисунок 5.6 — Отрывное обтекание пластины: распределение вдоль пластины нормированного пристеночного шага сетки  $\Delta y_1^+$  для трёх рассматриваемых расчётных сеток.

Для метода ППФ использовались следующие параметры: масштабы релаксации и переноса равнялись  $\eta_f = \eta_s = 10^{-2}$ , характерная толщина области сшивки —  $\sigma^+ = 500$ . В начальный момент времени задавалось равномерное поле  $u_\tau = 7 \times 10^{-2}$ . В качестве референсного решения использовались результаты расчёта с моделью турбулентности Спаларта–Аллмараса без применения методов пристеночных функций на расчётной сетке, соответствующей значению  $\Delta y_{\text{in}}^+ \sim 1$ , с разрешённым вязким подслоем. Точность результатов модели Спаларта–Аллмараса подтверждена дополнительным численным моделированием, представленном в работе [37].

### 5.2.2 Сравнение стратегий адаптации

Стратегия ППФ2 адаптации положения точки сшивки зависит от трёх параметров:  $\delta_{EL}^+$ ,  $\Delta$ , и  $\Delta_{\min}^+$ , которые определяют целевое положение точки сшивки в координатах стенки, положение точки сшивки при стремящемся к нулю трении и размер пристеночной ячейки в координатах стенки, при котором точка сшивки начинает смещаться из целевого значения в сторону стенки, соответственно. Пристеночное положение  $\Delta$  может быть либо определено пользователем метода, либо посчитано на основе пристеночного разрешения расчётной сетки.

Для метода ППФ2 исследовалось влияние на решение значения исходного положения точки сшивки  $\delta_{EL}^+$ . Рассматривалось три значения параметра  $\delta_{EL}^+$ :  $\delta_{EL}^+ = 50$ ,  $\delta_{EL}^+ = 100$ , и  $\delta_{EL}^+ = 200$ . Расчёты проводились на сетке с пристеночным шагом  $\Delta y_{\text{in}}^+ \sim 10$ . Полученные результаты сравниваются с результатами подхода ППФ1 и результатами модели Спаларта–Аллмараса на разрешённой сетке без применения методов пристеночных функций. На рисунке 5.7 приведено распределение вдоль пластины эффективного положения точки сшивки  $\delta_{EL}^{\text{eff}+}$ . Из рисунка 5.7 видно, что в случае применения стратегии адаптации положения точки сшивки ППФ2 точка сшивки смещается ближе к вязкому подслою и стенке в сравнении с подходом ППФ1, что говорит о большей эффективности подхода ППФ2. Кроме того, чем меньше значение  $\delta_{EL}^+$ , тем ближе к стенке смещается точка сшивки в области рециркуляции.

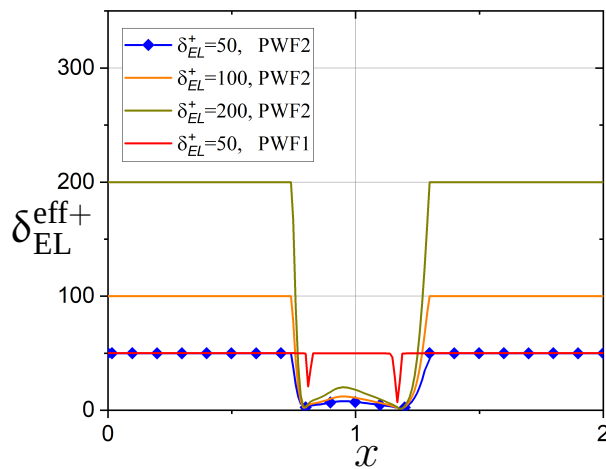
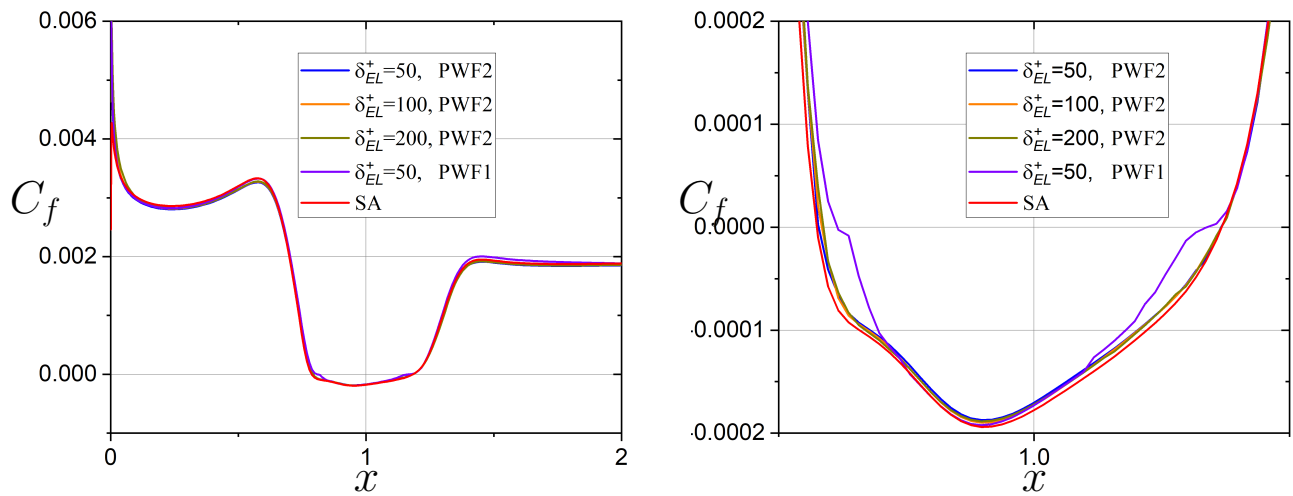


Рисунок 5.7 — Влияние параметра целевого положения точки сшивки  $\delta_{EL}^+$  и стратегии по адаптации на распределение вдоль пластины эффективного положения точки  $\delta_{EL}^{\text{eff}+}$  сшивки в расчёте отрывного обтекания пластины.

Распределение коэффициента трения  $C_f$  вдоль поверхности пластины представлено на рисунке 5.8. Как видно из рисунка 5.8а, решения с применением обоих



а) вся расчётная область

б) область рециркуляционного течения

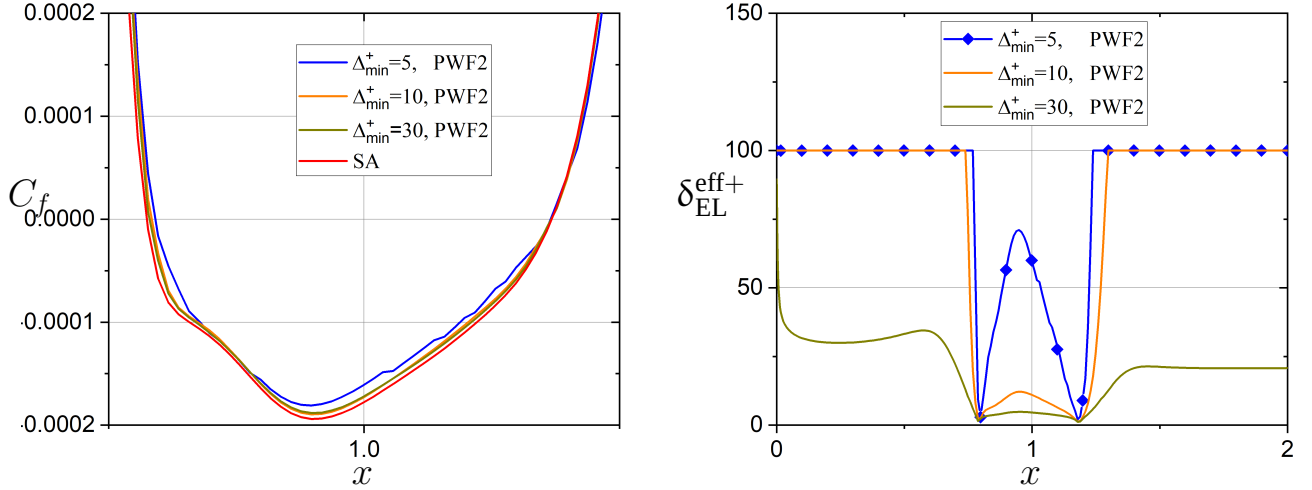
Рисунок 5.8 — Влияние параметра целевого положения точки сшивки  $\delta_{EL}^+$  и стратегии по адаптации на распределение коэффициента трения  $C_f$  вдоль пластины. Результаты для модели Спаларта–Аллмараса приведены в качестве референсных.

стратегий адаптации положения точки сшивки хорошо согласуются между собой и с референсным решением вне области рециркуляционного течения. На рисунке 5.8б представлено распределение коэффициента трения в области отрывного течения. Как видно из графиков, применение стратегии адаптации положения точки сшивки ППФ2 повышает точность решения в сравнении со стратегией ППФ1. Такое улучшение результатов связано со смещением точки сшивки в область вязкого подслоя, где аналитический закон стенки точнее описывает профиль продольной компоненты скорости, чем на логарфмическом участке, где в областях отрывных течений наблюдаются существенные отклонения от аналитических зависимостей, полученных для случая равновесного пограничного слоя. Можно заметить, что точность получаемого решения в случае применения стратегии ППФ2 слабо зависит от величины  $\delta_{EL}^+$  вне области рециркуляционного течения в основном из-за того, что для метода ППФ2 точка сшивки внутри области отрыва располагается внутри вязкого подслоя во всех рассматриваемых случаях.

Так как результаты численного моделирования вне области рециркуляции хорошо согласуются с референсным расчётом на сетке с разрешённым вязким подслоем для модели турбулентности Спаларта–Аллмараса без применения ме-

тодов пристеночных функций, далее распределение коэффициента трения будет демонстрироваться только для области отрывного течения.

Влияние параметра  $\Delta_{\min}^+$  на точность получаемых результатов в численных расчётах демонстрируется на рисунке. 5.9. Рассматриваются результаты, получен-



а) коэффициент трения в области рециркуляции

б) эффективное положение точки сшивки

Рисунок 5.9 — Влияние на решение параметра  $\Delta_{\min}^+$  в стратегии адаптации ППФ2: а) распределение коэффициента трения в области отрывного течения б) распределение вдоль пластины нормализованного эффективного положения точки сшивки  $\delta_{EL}^{\text{eff}+}$ . Результаты на разрешённой сетке для модели Спаларта–Аллмараса приведены в качестве референсных.

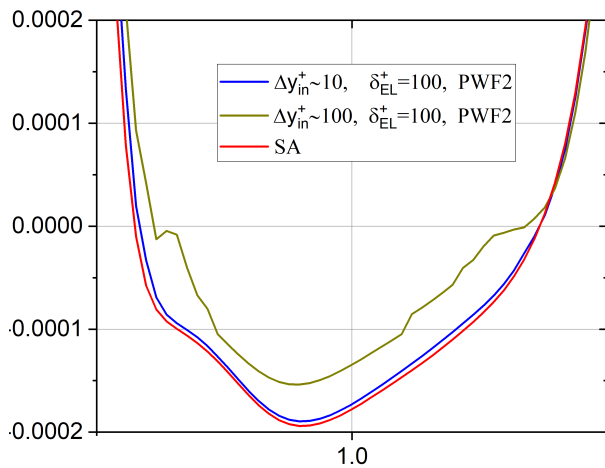
ные на расчётной сетке с пристеночным разрешением  $\Delta y_{\text{in}}^+ \sim 10$  для различных значений параметра  $\Delta_{\min}^+ = 5, 10, 30$ . При этом использовалось одинаковое целевое значение  $\delta_{EL}^+ = 100$ , пристеночное положение точки сшивки равнялось первому шагу сетки в поперечном направлении:  $\Delta = \Delta y_1$ . Распределение коэффициента трения  $C_f$  для расчётов с применением стратегии ППФ2 и референсного решения на разрешённой сетке с использованием модели Спаларта Аллмараса без применения методов пристеночных функций приведено на рисунке 5.9а. Из рисунка видно, что наибольшее отклонение от референсного решения наблюдается для наименьшего значения  $\Delta_{\min}^+ = 5$ . В это же время значения коэффициента трения в области рециркуляции при использовании значений  $\Delta_{\min}^+ = 10$  и  $30$  практически совпадают. На рисунке 5.9б приводится распределение вдоль пластины эффективного положения точки сшивки  $\delta_{EL}^{\text{eff}+}$ . Из рисунка видно, что при использовании значения параметра  $\Delta_{\min}^+ = 5$ , эффективное положение точки сшивки внутри отрывной области существенно выходит из вязкого подслоя, что вызвано

меньшим значением граничной скорости трения  $u_{\tau}^{\min}$ , при которой активируется адаптация. Такое положение точки сшивки приводит к увеличению погрешности в расчёте, наблюдаемое на рисунке 5.9а. В это же время для значений параметра  $\Delta_{\min}^+ = 10$  и 30 наблюдается нахождение точки в вязком подслое практически на всём протяжении области рециркуляционного течения, что приводит к лучшему предсказанию значений коэффициента трения в области отрыва.

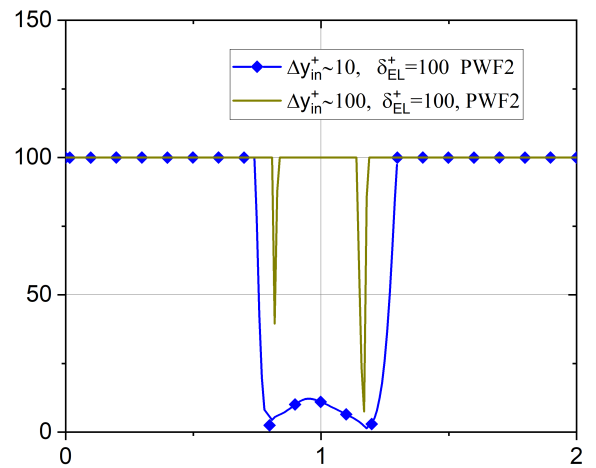
Также исследовалось влияние сеточного разрешения на результаты расчётов применением стратегии ППФ2 адаптации положения точки сшивки, когда пристеночное положение точки сшивки равняется пристенному сеточному разрешению  $\Delta = \Delta y_1$ . Рассматриваются результаты расчётов на двух сетках  $\Delta y_{\text{in}}^+ \sim 10$  и  $\Delta y_{\text{in}}^+ \sim 100$  и сравниваются с референсным решением, полученным на сетке с разрешённым вязким подслоем для модели Спаларта–Аллмараса без применения методов пристеночных функций. Для рассматриваемых здесь расчётов использовались следующие одинаковые для обоих расчётных сеток значения параметров для стратегии ППФ2:  $\delta_{EL}^+ = 100$  и  $\Delta_{\min}^+ = 10$ .

На рисунке 5.10а приведено распределение вдоль пластины коэффициента трения в области рециркуляционного течения, где наблюдается существенное отклонение от референсного решения для расчётной сетки с пристеночным разрешением  $\Delta y_{\text{in}}^+ \sim 100$ . На рисунке 5.10б приведено распределение эффективного положения точки сшивки вдоль пластины. Из рисунка видно, что в случае расчётной сетки с  $\Delta y_{\text{in}}^+ \sim 100$  точка сшивки во всей области рециркуляции располагается на уровне целевого параметра  $\delta_{EL}^+ = 100$ , кроме небольших окрестностей точек отрыва и присоединения потока, что означает нахождение точки сшивки вне вязкого подслоя. Такое распределение положения точки сшивки приводит к существенному отклонению от референсного решения в распределении коэффициента трения.

На рисунках 5.11а и б приведены профили продольной компоненты скорости в сечениях  $x = 0.5$  и  $x = 1.0$  соответственно. Сечение  $x = 0.5$  расположено снаружи рециркуляционного течения, а сечение  $x = 1.0$  — внутри области рециркуляции. Как видно из рисунка 5.11а, вне отрывного течения профили скорости хорошо согласуются между собой и с референсным решением. В это же время на рисунке 5.11б наблюдается существенное отклонение от референсного решения профиля скорости, полученного из численного решения на сетке с  $\Delta y_{\text{in}}^+ \sim 100$ . Из рисунка видно, что в случае грубой расчётной сетки, точка сшивки располагается в области значительного отклонения профиля продольной скорости от аналитиче-



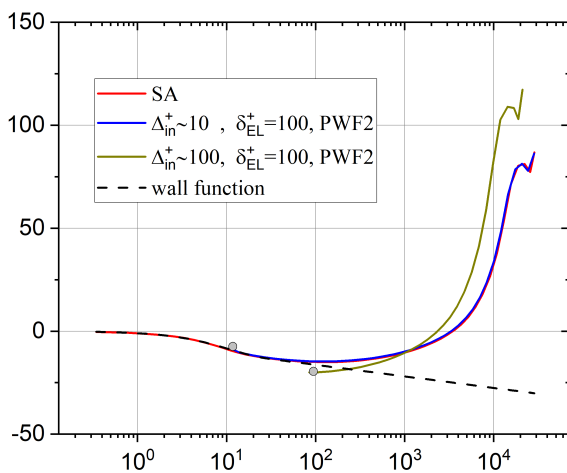
а) Коэффициент трения в области отрывного течения



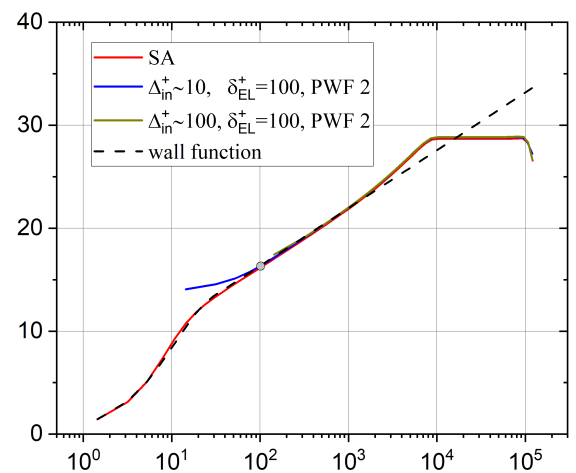
б) Эффективное положение точки сшивки

Рисунок 5.10 — Влияние сеточного разрешения на решение в задаче отрывного обтекания пластины. Результаты для модели Спаларта-Аллмараса приведены в качестве референсных.

ской зависимости, что демонстрирует важность смещения точки сшивки в область вязкого подслоя в области рециркуляционного течения.



а)  $x = 0.5$



б)  $x = 1.0$

Рисунок 5.11 — Влияние сеточного разрешения на решение в задаче отрывного обтекания пластины: профили продольной компоненты скорости. Результаты для модели Спаларта-Аллмараса приведены в качестве референсных.

Как обсуждалось в разделе 2.3, пристенное положение  $\Delta$  может быть либо определяться через пристеночное разрешение расчётной сетки, либо определяется пользователем. В последнем случае, если величина  $\Delta$  определена поль-

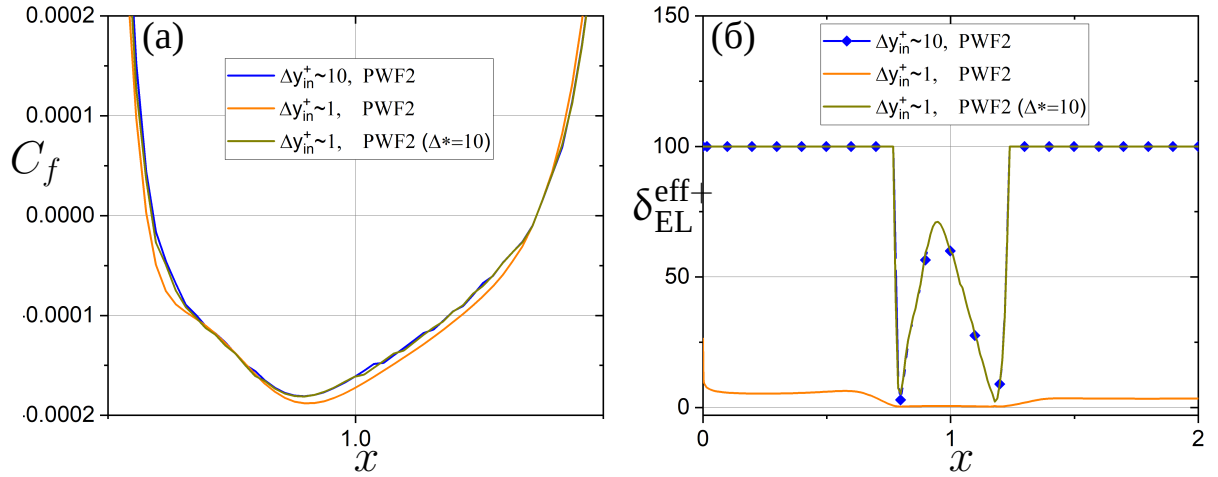


Рисунок 5.12 — Демонстрация сеточной независимости решения для стратегии ППФ2 адаптации положения точки сшивки с одинаковым значением пристенного положения  $\Delta$ : (а) распределение коэффициента трения вдоль пластины в области рециркуляционного течения, (б) распределение вдоль пластины относительного эффективного положения точки сшивки  $\delta_{EL}^{eff+}$  во всей области.

зователем, и расчётная сетка имеет достаточное разрешение, то можно ожидать, что результаты численного моделирования будут сеточно независимыми. Такая сеточная независимость исследовалась на двух расчётных сетках с  $\Delta y_{in}^+ \sim 10$  и  $\Delta y_{in}^+ \sim 1$ . Для первой расчётной сетки для параметра  $\Delta$  было выбрано равенство пристенному шагу сетки:  $\Delta = \Delta y_1$ . В случае второй сетки рассматривалось два значения параметра  $\Delta$ . В качестве первого варианта рассматривалось равенство величине пристенного шага:  $\Delta = \Delta y_1$ . Во втором варианте использовалось десять величин первого пристеночного шага:  $\Delta = 10\Delta y_1$ , обозначаемое как  $\Delta^* = 10$ , что обеспечивает равенство параметру  $\Delta$  на первой рассматриваемой расчётной сетке. На рисунке 5.12 представлены результаты расчётов с описанными выше параметрами.

На рисунке 5.12(а) приведены распределения коэффициента трения в области отрывного течения. Как видно из рисунка, при равенстве параметра  $\Delta$  результаты слабо различимы, что и ожидалось. В это же время результаты на сетке  $\Delta y_{in}^+ \sim 1$  лучше согласуются с референсным решением. Это объясняется, расположением точки сшивки в расчётах с применением метода пенализированных пристеночных функций, которое приведено на рисунке 5.12(б). А именно тем, что в случае меньшего значения параметра  $\Delta$  на подробной сетке, точка сшивки во всей расчётной области, кроме малого участка в окрестности передней кромки пластины, а в двух других случаях при большем значении  $\Delta$  точка сшивки нахо-

дится вне области вязкого подслоя в большей части области рециркуляционного течения. Также необходимо отметить, что в случае одинакового значения параметра  $\Delta$ , наблюдается одинаковое распределение вдоль пластины эффективно-го положения точки сшивки, что подтверждает сеточную независимость метода ППФ2 при фиксированном значении  $\Delta$ . Свойство сеточной независимости позволяет использовать стратегию адаптации положения точки сшивки ППФ2 совместно с методами адаптации расчётной сетки, чтобы подстраивать разрешение во внутреннем слое, определяемом положением точки сшивки  $\delta_{EL}^{eff}(\mathbf{x})$ . Данное свойство очень важно для разработки надёжного (робастного) подхода в рамках метода пенализированных пристеночных функций для расчёта отрывных течений с автоматической сеточной адаптацией для точного описания областей отрыва и присоединения потока. Приведённые выше результаты демонстрируют достаточность пристеночного разрешения расчётной сетки  $\Delta y_{in}^+ \sim 10$  для численного моделирования зоны рециркуляции в рассматриваемой постановке. Более того, как было показано в работе [36], численное моделирование безотрывного течения может проводиться на расчётных сетках со значительно больши пристенным шагом, например,  $\Delta y_{in}^+ \sim 100$ . Таким образом избыточное разрешение сетки может быть устранено при использовании метода ППФ совместно с методами адаптации расчётной сетки.

Для демонстрации применимости стратегии адаптации ППФ2 на сильно анизотропных адаптированных расчётных сетках, например, когда метод ППФ используется совместно с методами перераспределения сеточных узлов [80—87], на основе расчётной сетки с шагом  $\Delta y_{in}^+ \sim 10$  была построена расчётная сетка с меньшим шагом в вертикальном направлении в области рециркуляционного течения и большим пристенным шагом вне области рециркуляционного течения. Координаты узлов исходной расчётной сетки были преобразованы по следующему закону:

$$y = \frac{10}{\gamma} \arctan(\gamma y_{old}) t(x) + y_{old}(1 - t(x)), \quad (5.2)$$

где  $t(x) = 1 - (0.5 \tanh(20(x - 0.6)) - 0.5 \tanh(20(x - 1.4)))$ ,  $\gamma = 181.05$ ,  $y$  — новая координата узла по вертикальному направлению и  $y_{old}$  — координата узла в исходной расчётной сетке  $\Delta y_{in}^+ \sim 10$ . Такое построение расчётной сетки обеспечивает внутри области рецркуляции разрешение соответствующее ранее рассматриваемой сетке с  $\Delta y_{in}^+ \sim 10$ , а в остальной части расчётной области — сетке с  $\Delta y_{in}^+ \sim 100$ .

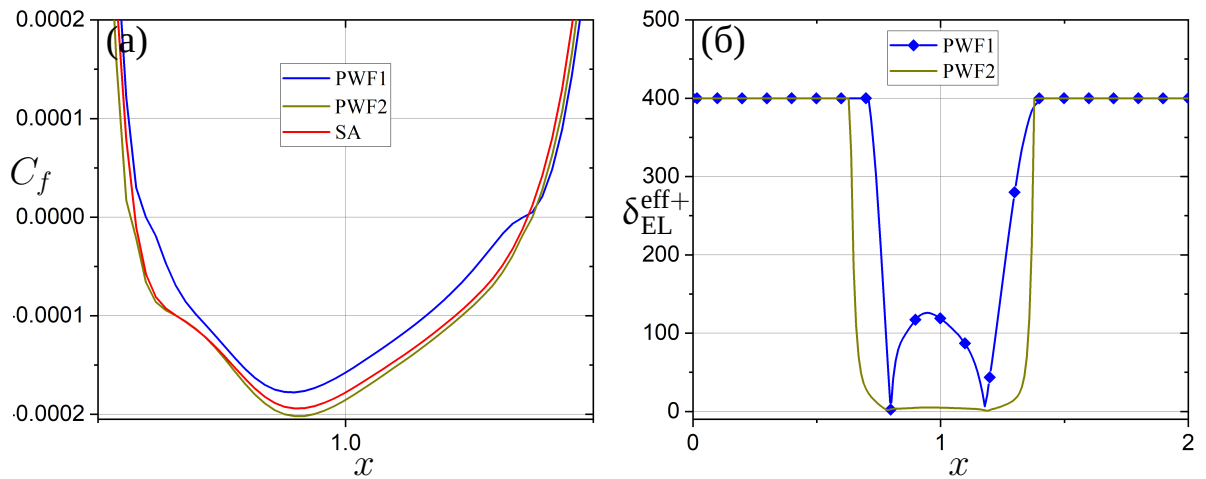


Рисунок 5.13 — Сравнение результатов подходов ППФ1 (PWF1) и ППФ2 (PWF2) адаптации положения точки сшивки для адаптированной расчётной сетки с переменным пристенным шагом  $\Delta y_1^+$ : а) распределение коэффициента трения в области рециркуляционного течения, б) распределение безразмерного эффективного положения точки сшивки.

Результаты расчётов на описанной выше адаптированной сетке с применением стратегий адаптации положения точки сшивки ППФ1 и ППФ2 показаны на рисунке 5.13. В обоих расчётах использовалось значение целевого положения точки сшивки  $\delta_{EL}^+ = 400$ . Для стратегии ППФ2 использовалось значение параметра  $\Delta_{min}^+ = 30$ .

Распределение вдоль пластины эффективного положения точки сшивки, полученного в расчётах с применением стратегий ППФ1 и ППФ2, приведено на рисунке 5.13(б). Из рисунка видно, что точка сшивки при использовании стратегии ППФ1 находится вне вязкого подслоя во всей расчётной области за исключением малых окрестностей точек отрыва и присоединения потока. В это же время в расчёте со стратегией ППФ2 точка сшивки находится внутри вязкого подслоя во всей области рециркуляционного течения. Величина параметра  $\Delta_{min}^+$  была выбрана таким образом, чтобы точка сшивки располагалась в первом пристеночном узле, что максимизирует в точке сшивки точность аппроксимации аналитическим законом профиля продольной скорости в области рециркуляционного течения для используемой расчётной сетки. Наблюдается неспособность смещения точки сшивки в область вязкого при использовании стратегии ППФ1, что приводит к значительным отклонениям от референсного решения в области отрывного течения по величине коэффициента трения, распределение которого приведено на рисунке 5.13(а). При этом распределение коэффициента трения, полученного в расчё-

те с применением стратегии адаптации ППФ2, хорошо согласуется с референсным решением, полученным в расчёте на сетке с разрешённым вязким подслоем с использованием модели Спаларта–Аллмараса без применения методов пристеночных функций. Выше сказанное ещё раз подчёркивает важность корректности стратегии адаптации положения точки сшивки для моделирования турбулентных отрывных течений с использованием методов пристеночных функций.

### 5.2.3 Сравнение с классическим подходом

Также проводилось сравнение метода ППФ и классического метода пристеночных функций на примере решения задачи об обтекании плоской пластины в присутствии области рециркуляционного течения, вызванного переменным градиентом давления.

Расчёты проводились на структурированных сетках, которые подробно описано в разделе 5.2. Расчёты с применением методов пристеночных функций проводились на расчётных сетках с пристенным шагом  $\Delta y_{in}^+ \sim 10$  и  $\Delta y_{in}^+ \sim 100$ . Референсный расчёт был проведён с применением модели турбулентности Спаларта–Аллмараса без использования методов пристеночных функций на структурированной сетке с разрешённым вязким подслоем  $\Delta y_{in}^+ \sim 1$ .

При расчётах с применением метода ППФ начальное поле для скорости трения задавалось равномерным  $u_\tau = 0.07$ , масштабы релаксации равнялись  $\eta_f = \eta_s = 10^{-2}$ , целевое положение точки сшивки задавалось на логарифмическом участке  $\delta_{EL}^+ = 100$ , а характерная ширина области сшивки —  $\sigma^+ = 200$  для гарантированного присутствия в ней узлов расчётной сетки. В качестве стратегии адаптации положения точки сшивки использовался вариант ППФ2, который показал наилучшие результаты в разделе 5.2. Использовалось значение параметра  $\Delta^+ = 10$  для расчётной сетки  $\Delta y_{in}^+ \sim 10$ ,  $\Delta^+ = 100$  для расчётной сетки  $\Delta y_{in}^+ \sim 100$ .

На рисунках 5.14а и а представлено распределение коэффициента трения вдоль пластины для метода ППФ и классического метода пристеночных функций соответственно. Из графиков видно, что вне области рециркуляционного течения результаты, полученные с помощью метода ППФ, хорошо согласуются с референсным решением для модели Спаларта–Аллмараса без использования методов

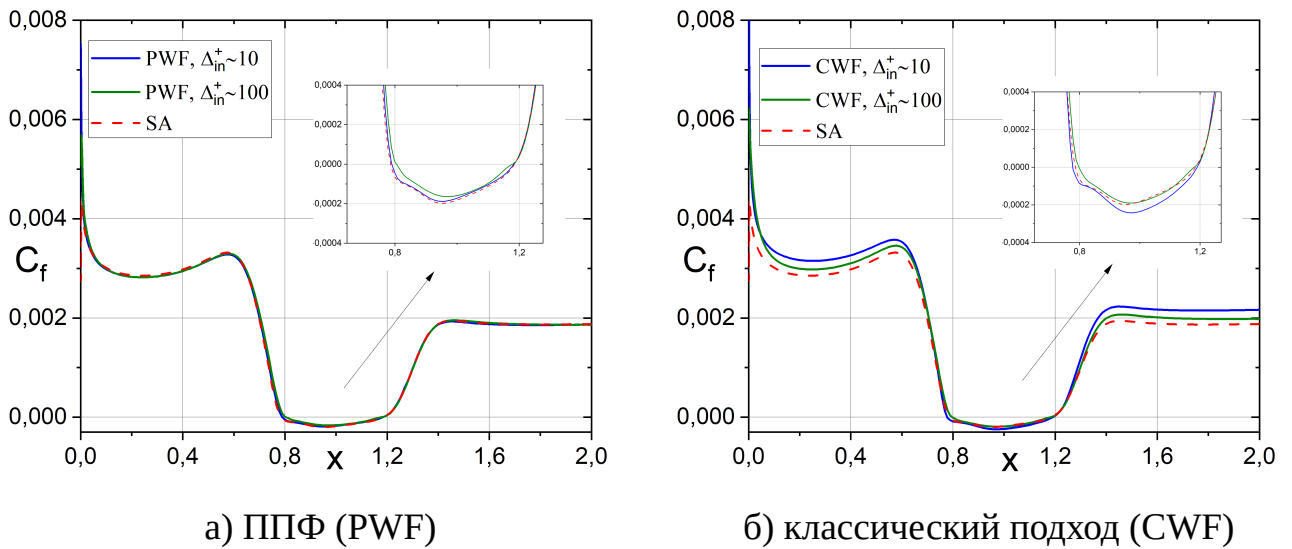
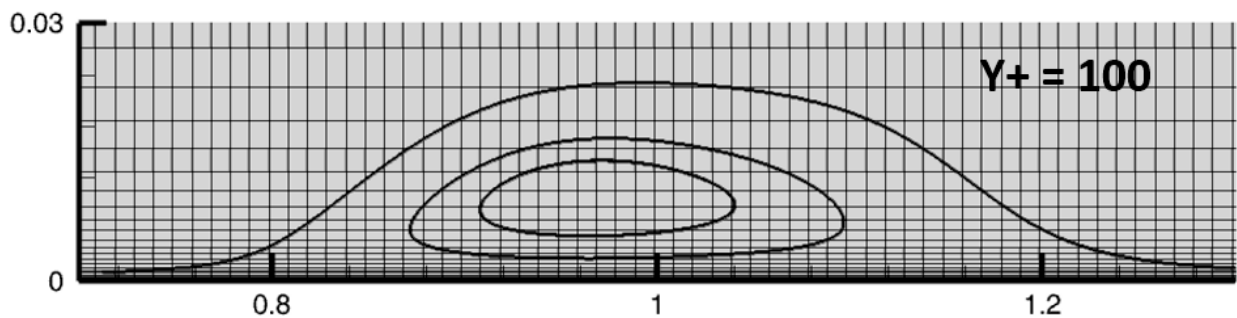


Рисунок 5.14 — Отрывное обтекание плоской пластины: исследование влияния сеточного разрешения. Распределение вдоль пластины коэффициента трения.

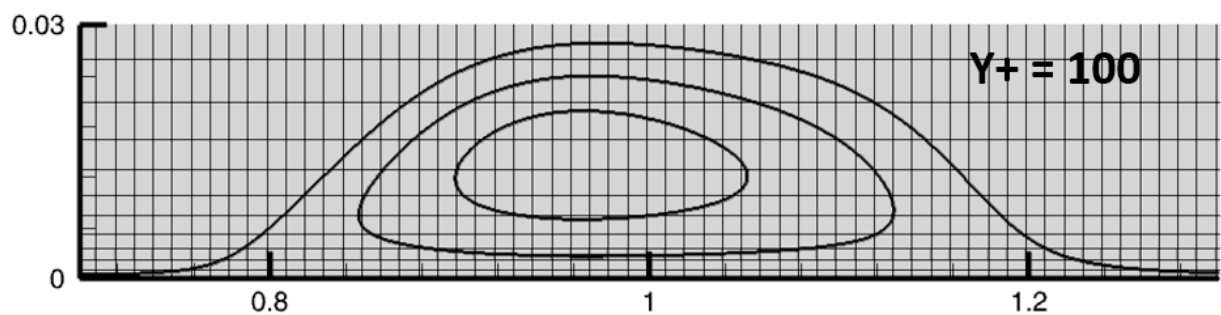
пристеночных функций. В это же время наблюдается снижение точности результатов при использовании классического метода пристеночных функций на более подробной расчётной сетке  $\Delta y_{in}^+ \sim 10$ . Аналогично задаче обтекания пластины без градиента давления (см. раздел 5.1) уменьшение точности решения в этом случае связано с положением точки сшивки внутри буферной области турбулентного пограничного слоя, где точность аппроксимации профиля продольной компоненты скорости пристеночной функцией снижена по сравнению с логарифмическим участком.

Внутри области рециркуляции, как показано на рисунке 5.14, использование расчётной сетки с более грубым пристеночным разрешением  $\Delta y_{in}^+ \sim 100$  приводит к заметному увеличению отклонения от референсного решения для обоих рассматриваемых методов пристеночных функций. Такое поведение связано с особенностями применения методов пристеночных функций в областях с большим градиентом давления. В области рециркуляционного течения важно помещать точку сшивки в область вязкого подслоя, где пристеночная функция точнее описывает профиль продольной компоненты скорости, что было показано в [37] и разделе 5.2.2. При численном расчёте на более подробной сетке с  $\Delta y_{in}^+ \sim 10$ , согласование с референсным решением достигается только при использовании метода ППФ, что демонстрируется на рисунке 5.14а, из-за относительно близкого к твёрдой стенке расположения точки сшивки. Для классического метода пристеночных функций на рисунке 5.14б наблюдается заметное отклонение от референсного решения в области отрывного течения несмотря на достаточно низкое

расположение точки сшивки. Такое отклонение может быть связано с повышенными ошибками моделирования вне области рециркуляционного течения, которые были описаны выше.



а)  $Re = 3.6 \times 10^7$

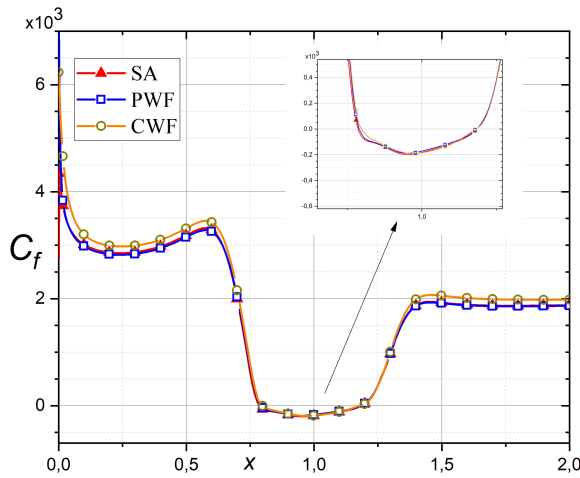


б)  $Re = 3.6 \times 10^6$

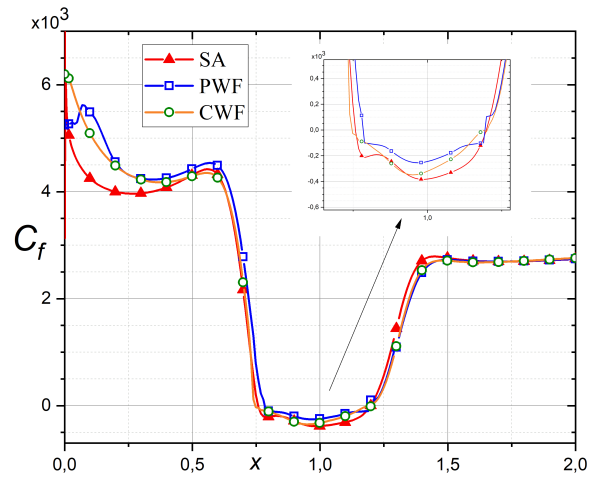
Рисунок 5.15 — Отрывное обтекание плоской пластины: линии тока из расчёта на самой подробной сетке ( $\Delta y_1^+ = 1$ ) моделью Спаларта–Аллмараса на фоне расчётной сетки с  $\Delta y_1^+ = 100$  при разном значении числа Рейнольдса  $Re$ .

Влияние значения числа Рейнольдса на структуру течения в области рециркуляции иллюстрируется на рисунке 5.15. Как было показано ранее в [22], изменение числа Рейнольдса слабо влияет на высоту области рециркуляционного течения, что также демонстрируется на рисунке. Изображённые линии тока получены в численном решении рассматриваемой задачи с применением модели турбулентности Спаларта–Аллмараса без использования методов пристеночных функций на расчётной сетке с пристеночным разрешением  $\Delta y_{in}^+ \sim 1$ . Расчёты проводились для значений чисел Рейнольдса  $Re = 3.6 \times 10^7$  (рисунок 5.15а) и  $Re = 3.6 \times 10^6$  (рисунок 5.15б). Также на рисунках приводятся расчётные сетки с пристеночным разрешением  $\Delta y_{in}^+ \sim 100$  в соответствии с рассматриваемым числом Рейнольдса и одинаковым коэффициентом увеличения шага сетки  $q_y$  в вертикальном направлении. На этих сетках также проводились сравнительные расчёты с применением метода ППФ и классического метода пристеночных функций. На рисунке 5.15 видно, что при одинаковом относительном шаге сетки  $\Delta y_{in}^+ \sim 100$  физический

шаг  $\Delta y$  внутри области рециркуляционного течения больше для случая меньшего значения числа Рейнольдса. Результаты расчётов для рассматриваемых чисел Рейнольдса приводятся на рисунке 5.16. На графиках представлено распределе-



а)  $Re = 3.6 \times 10^7$



б)  $Re = 3.6 \times 10^6$

Рисунок 5.16 — Отрывное обтекание плоской пластины: сравнение метода ППФ (PWF) с классическим методом пристеночных функций (CWF). Распределение коэффициента трения вдоль пластины при разном значении числа Рейнольдса  $Re$ .

ние коэффициента трения вдоль пластины. Из рисунка 5.16а видно, что распределения коэффициента трения для обоих рассматриваемых методов пристеночных функций относительно хорошо согласуются с референсным решением. С другой стороны, как видно из рисунка 5.16б, результаты расчётов с меньшим числом Рейнольдса  $Re = 3.6 \times 10^6$  для обоих рассматриваемых методов пристеночных функций заметно отличаются от референсного решения. Такое значительное отклонение связано с недостаточностью сеточного разрешения в поперечном направлении в области рециркуляционного течения в случае меньшего значения числа Рейнольдса. Таким образом можно сделать вывод о дополнительной необходимости достаточного разрешения структуры отрывного течения вдали от стенки для сохранения точности решения задачи.

### 5.3 Обтекание объёмной неровности в канале

#### 5.3.1 Постановка

Применимость стандартного метода пристеночных функций и метода ППФ для численных расчётов трёхмерных задач демонстрируется на решении верификационной задачи [88] о течении в плоском канале с трёхмерной неровностью. Геометрия трёхмерной неровности формируется протягиванием двумерной геометрии неровности из [89] вдоль оси  $OY$  с  $-1 \leq y \leq 0$ . Получившаяся (или исходная) геометрия определяется следующей формулой:

$$z(x) = \begin{cases} 0.05(\sin(\pi x/0.9 - (\pi/3)))^4, & 0.3 < z < 1.2 \\ 0, & 0 \leq z \leq 0.3 \text{ или } 1.2 \leq z \leq 1.5 \end{cases}. \quad (5.3)$$

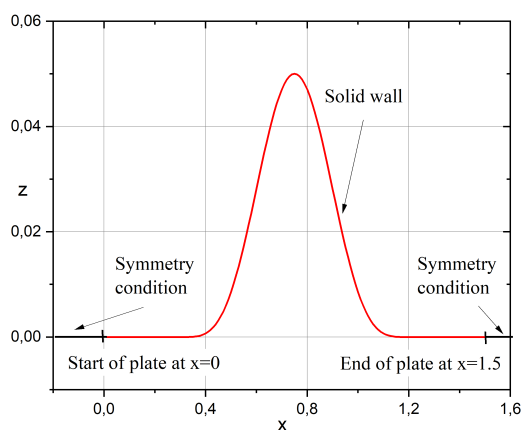
Для формирования трёхмерности течения, поверхность пластины деформируется вдоль потока в направлении оси  $OX$  по следующему выражению:

$$x = x_0 + 0.3(\sin(\pi y))^4, \quad (5.4)$$

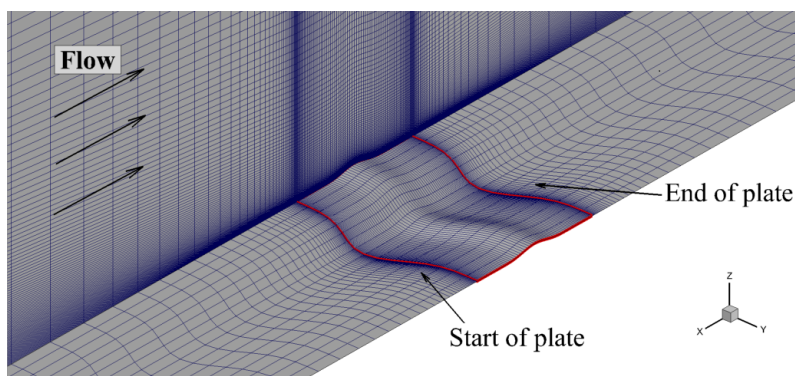
где  $x_0$  – положение на двумерной геометрии при  $y = 0$  и  $y = -1$ ,  $x$  положение на бампе. При прохождении потока над трёхмерным бампом развивается трёхмерное течение с ненулевой поперечной компонентой скорости и градиентом давления. При этом течение остаётся безотрывным.

Течение над трёхмерным бампом исследуется при числе Маха  $M = 0.2$  и числе Рейнольдса  $Re = 3 \times 10^6$ , рассчитанном по единичной длине, в то время, как длина пластины составляет 1.5 единицы. На нижней поверхности вне пластины, а также на боковых продольных поверхностях канала ставится условие симметрии. Форма бампа в сечении плоскостью  $y = 0$  и соответствующие граничные условия показаны на рисунке 5.17.

Все расчёты проводились на структурированных расчётных сетках. Сетки имели сгущения в нормальном к стенке направлении вблизи нижней границы и вдоль оси  $OX$  вблизи границ пластины. В направлении оси  $OY$  шаг сетки остаётся постоянным, приводя к тому, что объёмная сетка может быть составлена из ряда плоских расчётных сеток, равномерно распределённых вдоль направления



а) Сечение поверхности бампа  
плоскостью  $y = 0$



б) Расчётная сетка на нижней поверхности и  
плоскости  $y = 0$

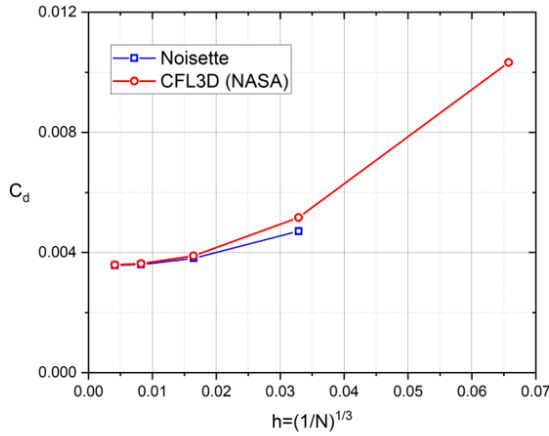
Рисунок 5.17 — Постановка задачи течения в канале с трёхмерным бампом.

$OY$ . Только координата  $x_0$ , которая определяет положение вершины бампа в каждой двумерной сетке, меняется вдоль координаты  $y$ .

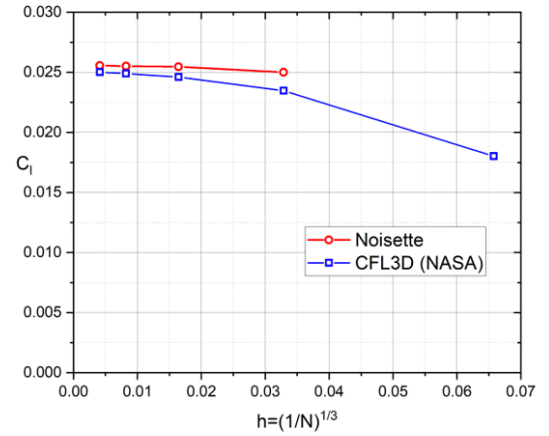
В качестве референсного решения использовалось решение с применением модели Спаларта–Аллмараса без применение методов пристеночных функций на определённой выше сетке с разрешённым вязким подслоем. Точность решения подтверждается серией расчётов на последовательности вложенных сетках с увеличением количества узлов в два раза по каждому направлению и сравнением с результатами, полученными на этих же расчётных сетках с применением решателя CFL3D [79]. Использовались расчётные сетки в соответствии с [79] со следующими размерностями вдоль направлений  $N_x$ ,  $N_y$ , и  $N_z$ : сетка 1 –  $(9 \times 89 \times 41)$ , сетка 2 –  $(17 \times 177 \times 81)$ , сетка 3 –  $(33 \times 353 \times 161)$ , сетка 4 –  $(65 \times 705 \times 321)$ .

### 5.3.2 Результаты

На рисунках 5.18а и б представлены интегральные характеристики, полученные из решения на сетке с разрешённым вязким подслоем с применением модели турбулентности Спаларта–Аллмараса без использования методов пристеночных функций. Представленные значения коэффициентов сил сравниваются с результатами, полученными решателем CFL3D [79]. Оба решателя демонстрируют сеточную сходимость к одинаковым величинам интегральных характеристик.



а) Коэффициент сопротивления



б) Коэффициент подъёмной силы

Рисунок 5.18 — Верификационная задача с трёхмерным бампом в канале: сеточная сходимость для модели Спаларта–Аллмараса и сравнение с результатами CFL3D.

$N$  обозначает количество узлов в расчётной сетке.

Для расчётов с применением классического подхода и метода пенализированных пристеночных функций использовались структурированные расчётные сетки, построенные на основе сеток 5-7, где было изменено распределение вдоль направления оси  $OZ$ . В частности, сетка 5 построена с первым пристеночным шагом  $\Delta z_1 = 10^{-3}$ , соответствующим диапазону  $\Delta z_1^+ = 60 \dots 170$ ; сетка 6 с первым пристеночным шагом  $\Delta z_1 = 5 \times 10^{-4}$ , соответствующим диапазону  $\Delta z_1^+ = 30 \dots 90$ ; и сетка 7 с первым пристеночным шагом  $\Delta z_1 = 10^{-4}$ , соответствующим диапазону  $\Delta z_1^+ = 7 \dots 20$ . Число узлов и их распределение вдоль осей  $OX$  и  $OY$  равнялось, как на сетке 3:  $N_x = 353$  и  $N_y = 33$ . Таким образом результаты на расчётной сетке 3 для модели Спаларта–Аллмараса без применения методов пристеночных функций использовались в качестве референсных.

Для метода ППФ использовались следующие значения параметров: масштабы релаксации  $\eta_f = \eta_s = 10^{-2}$ , положение точки сшивки  $\delta_{EL}^+ = 100$ , толщина области сшивки  $\sigma^+ = 200$ . В начальный момент времени задавалось равномерное поле со значением  $u_\tau = 7 \times 10^{-2}$ .

Сравнение профилей компонент нормированной скорости  $u^+$  и  $w^+$  в центре бампа ( $x = 0, y = -0.5$ ) представлено на рисунке 5.19. Как видно из рисунка, профили скорости, полученные в расчётах с применением методов пристеночных функций, хорошо согласуются с референсным решением во всех рассматриваемых случаях кроме расчёта на сетке 7.

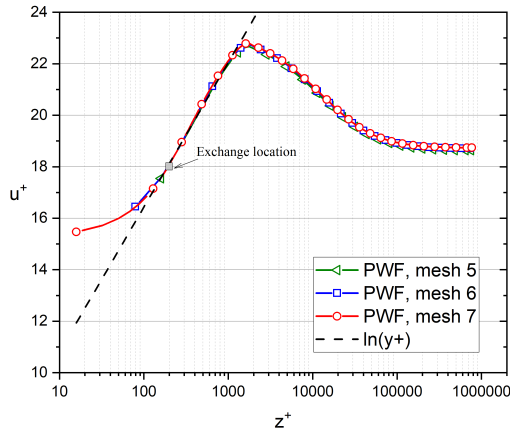
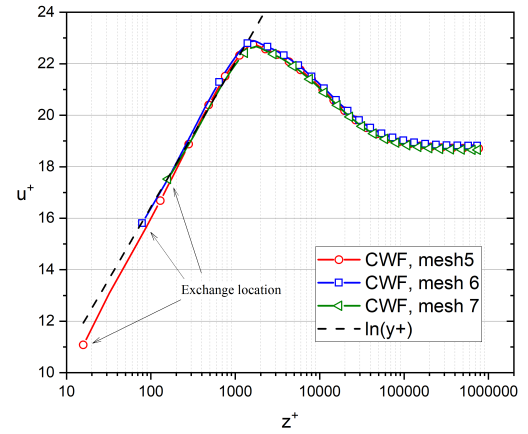
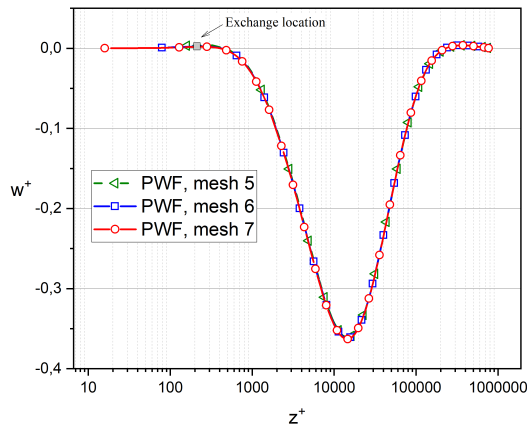
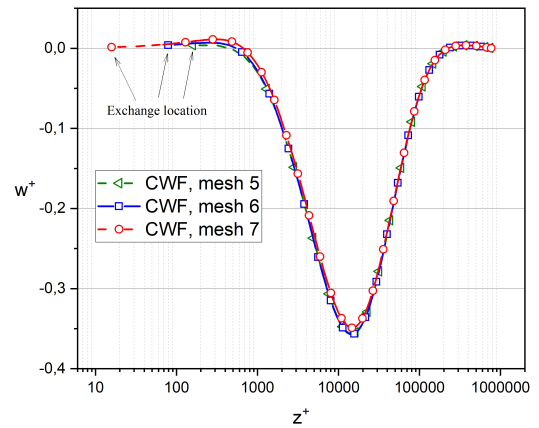
а) ППФ: профиль  $u^+$ б) Классический подход: профиль  $u^+$ в) ППФ: профиль  $w^+$ г) Классический подход: профиль  $w^+$ 

Рисунок 5.19 — Верификационная задача с трёхмерным бампом в канале: исследование влияния сеточного разрешения. Профили скорости в центре бампа в точке  $x = 0, y = -0.5$ .

Нормализованный пристеночный шаг  $\Delta z_1^+$  для сетки 7 лежит в диапазоне  $\Delta z_1^+ = 7 \dots 20$ , что соответствует буферной области турбулентного пограничного слоя. Таким образом в классическом подходе точка сшивки лежит с области, где аналитический закон стенки имеет пониженную точность аппроксимации профиля продольной компоненты скорости. Это объясняет заметное отклонение от референсных данных профиля скорости для классического подхода на рисунках 5.19б и г.

Похожее поведение наблюдается и в распределении коэффициента трения на поверхности пластины. Графики распределения коэффициента трения в сечении плоскостью  $y = 0$  представлены на рисунке 5.20. Как видно из рисунка 5.20б наибольшее отклонение от референсного решения по коэффициенту трения  $C_f$

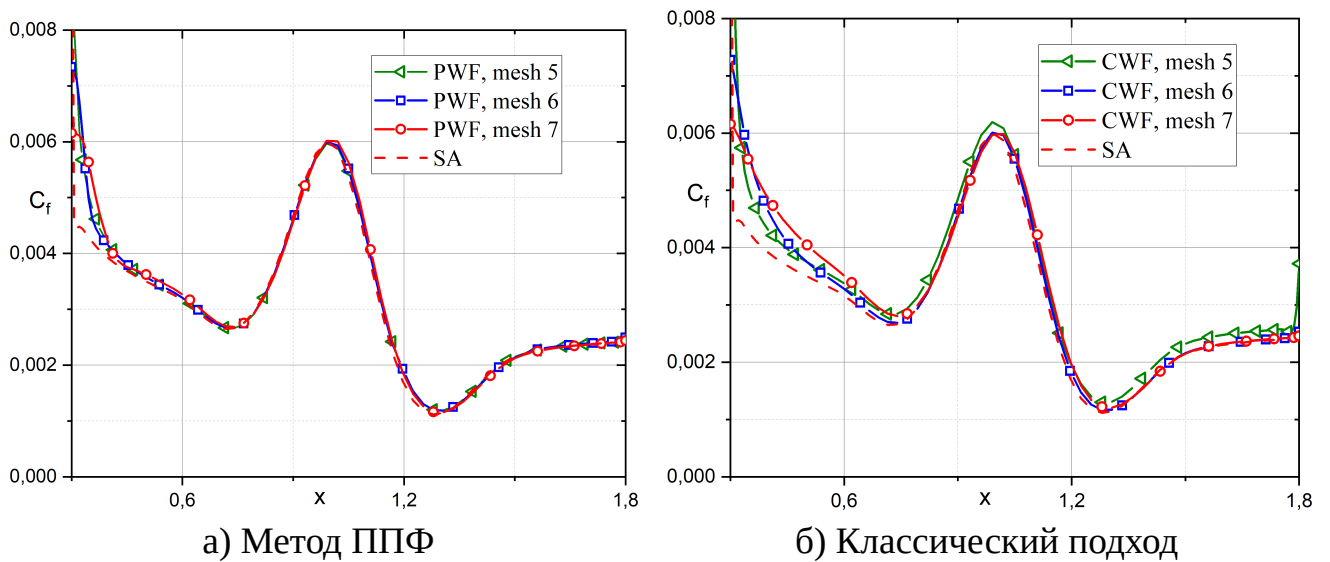


Рисунок 5.20 — Верификационная задача с трёхмерным бампом в канале: Влияние пристеночного разрешения на распределение коэффициента трения на пластине в сечении плоскостью  $y = 0$ .

наблюдается для расчётной сетки 7. Кроме того при применении классического метода пристеночных функций наблюдается слабое согласование в начале пластины для всех трёх рассматриваемых сеток. Как было отмечено в описании результатов для двумерных тестовых задач, такое повышенное отклонение может быть связано с сеточной зависимостью классического подхода.

## 5.4 Обтекание аэродинамического профиля NASA0012

### 5.4.1 Постановка

Рассматриваемая ниже постановка основывается на тесте [90]. Профиль NASA0012 с острой задней кромкой обтекается равномерным потоком с числами Рейнольдса и Маха:  $Re = 6 \times 10^6$  и  $M = 0.15$ . Температура набегающего потока равнялась  $T = 300\text{K}$ . Рассматривался широкий диапазон углов атаки ( $\alpha = 0, 5, 10, 15, 16, 17, 18^\circ$ ) для сравнения подходов к адаптации положения точки сшивки как на безотрывном, так и на отрывном обтекании профиля. Геометрия профиля приведена на рисунке 5.21.

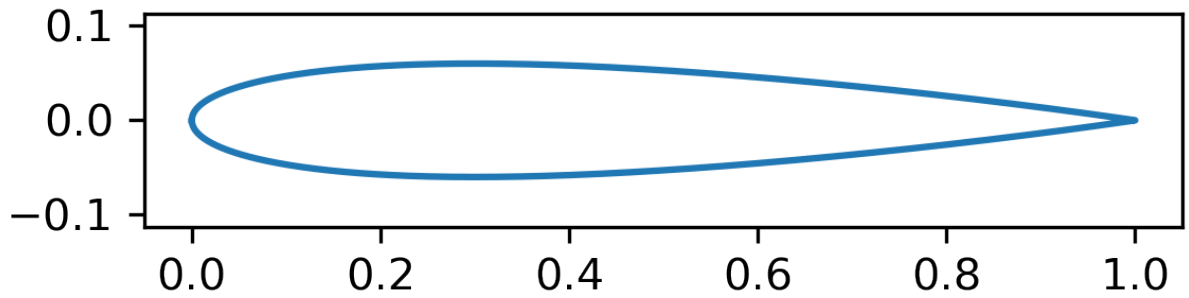
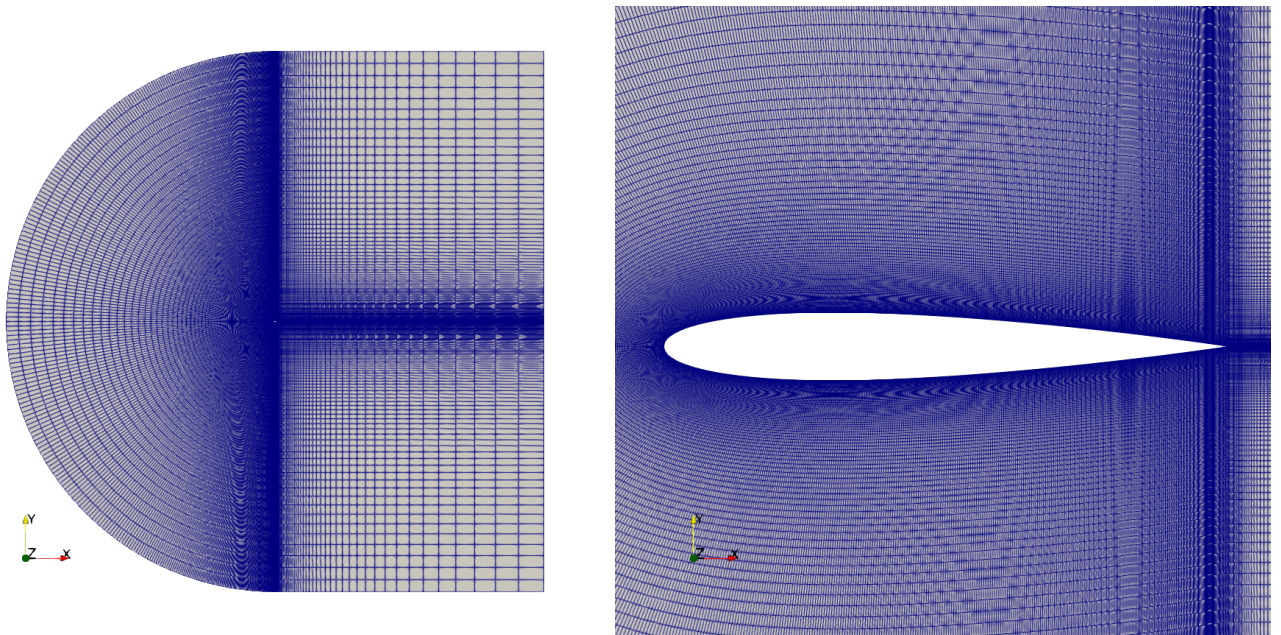


Рисунок 5.21 — Профиль NACA0012.

Референсный результат без применения методов пристеночных функций (далее будет обозначаться СА) был получен на структурированной сетке с пристеночным шагом  $\Delta h = 1 \times 10^{-6}$ . Пример структурированной сетки для  $\Delta h = 5 \times 10^{-5}$  приведён на рисунке 5.22. Расчёты с применением метода ППФ произво-



а) вся расчётная область

б) область вблизи профиля

Рисунок 5.22 — Структурированная расчётная сетка для  $\Delta h = 5 \times 10^{-5}$ .

дились на структурированной сетке с  $\Delta h = 5 \times 10^{-5}$ ,  $1 \times 10^4$  (далее обозначаются ППФ с указанием шага сетки) и неструктурированной сетке (далее обозначается ППФ adapt) с изменяющимся пристенным шагом от  $\Delta h = 5 \times 10^{-6}$  в передней и задней частях профиля, где на рассматриваемых режимах ожидаются области присоединения и отрыва потока, до  $\Delta h = 5 \times 10^{-5}$  в середине профиля, где течение ожидается безотрывным.

Для всех сеток использовалось одинаковое распределение узлов на поверхностях профиля со сгущением к передней и задней кромкам. Число узлов на каж-

дой поверхности равнялось 400. На рисунке 5.23 приведено распределение относительной высоты пристенного шага для рассматриваемых сеток для двух углов атаки  $\alpha = 0, 16^\circ$ . Как видно из графика, распределение относительной вели-

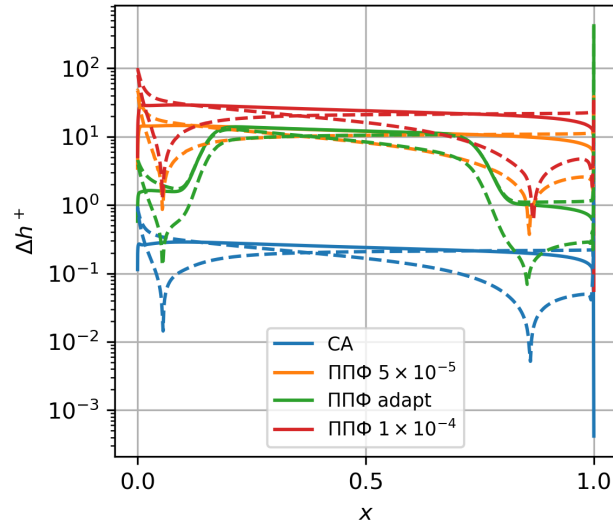


Рисунок 5.23 — Распределение относительной высоты пристенного шага сетки для  $\alpha = 0, 16^\circ$ .

ны шага сетки  $\Delta h^+$  неравномерно. На сетке СА для референсного решения на рассматриваемых режимах  $\Delta h^+ < 1$ , что обеспечивает корректность результатов при расчёте без применения методов пристеночных функций. На сетке с шагом  $\Delta h = 5 \times 10^{-5}$  в основной части профиля соответствует  $\Delta h^+ \approx 10$  с увеличением до  $\Delta h^+ \approx 50$  в области передней кромки профиля ( $x \approx 0$ ) и снижением в областях отрыва и присоединения потока. Для расчётной сетки с шагом  $\Delta h = 1 \times 10^{-4}$  все величины соответственно увеличиваются в 2 раза. В случае с адаптивной сеткой в центральной части профиля  $\Delta h^+ \approx 10$ , а в областях передней и задних кромок  $\Delta h^+ \lesssim 4$ .

На примере рассматриваемой задачи сравнивались два подхода адаптации положения точки сшивки, описанные в разделе 2.3. Адаптация положения точки сшивки с учётом только пристенного шага будет обозначаться  $\text{ППФ}\Delta^+$ , а случай учёта градиента давления —  $\text{ППФ}p^+$ . При использовании варианта адаптации положения точки сшивки  $\text{ППФ}\Delta^+$  для расчётной сетки с  $\Delta h = 5 \times 10^{-5}$  и адаптированного варианта использовалось значение параметра  $\Delta^+ = 10$ , а для сетки с  $\Delta h = 5 \times 10^{-5} - \Delta^+ = 20$ , для того чтобы значение  $u_\tau^{\min}$  было одинаковым на основной части профиля. В то же время параметры подхода  $\text{ППФ}p^+$  оставались постоянными для всех расчётных сеток и соответствовали указанным ранее в разделе 2.3.1.

Задача решалась в плоскости ОХУ. Характерное удаление внешних границ расчётной области от профиля составляло 100 хорд для уменьшения влияния внешних граничных условий. Профиль обтекается равномерным потоком с единичной скоростью направленной в соответствии с рассматриваемым углом атаки. На профиле ставится условие прилипания при расчёте на разрешённой сетке без применения метода ППФ или условие проскальзывания с заданным трением (2.23) и (2.24) при использовании метода ППФ. Тепловой поток на профиле равнялся нулю.

### 5.4.2 Результаты

На рисунках 5.24 и 5.25 представлены распределения для коэффициента трения и давления соответственно для углов атаки  $\alpha = 5^\circ$  и  $16^\circ$ . При  $\alpha = 5^\circ$  обтекание профиля является безотрывным. При  $\alpha = 16^\circ$  присутствует отрывное течение на верхней поверхности профиля у задней кромки, при этом было получено стационарное решение.

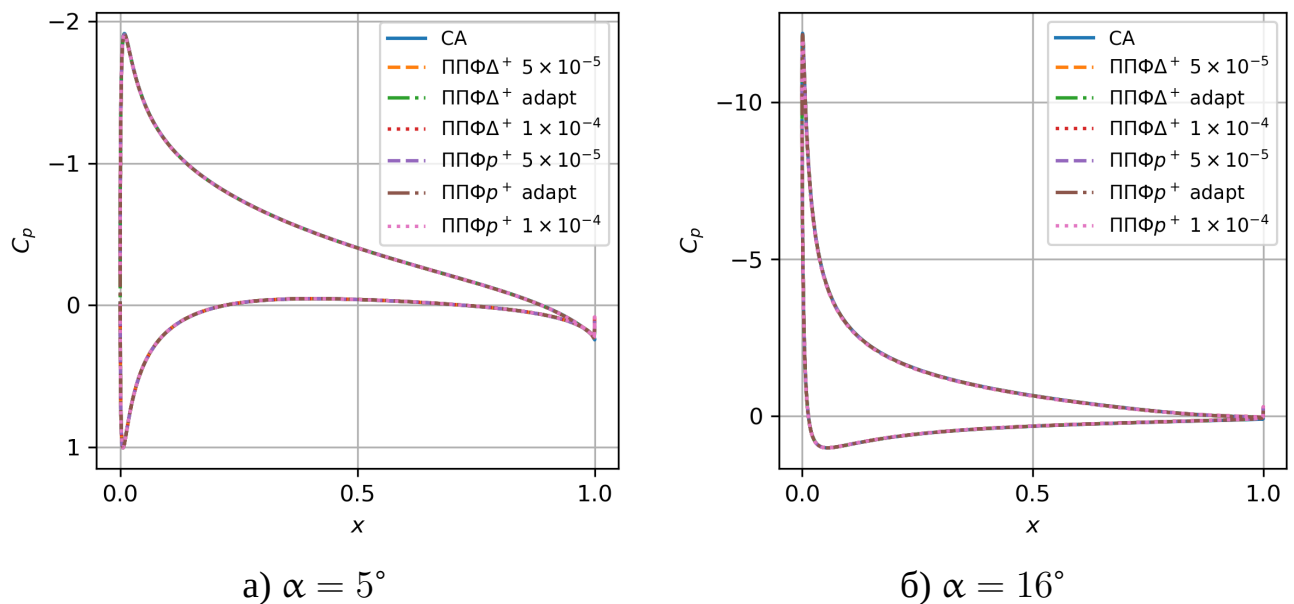


Рисунок 5.24 — Распределение коэффициента давления  $C_p$ .

Для обоих рассматриваемых углов атаки по профилю распределение коэффициента давления  $C_p$  (см. рис. 5.24) хорошо согласуется. Для угла атаки  $\alpha = 5^\circ$  максимальное отклонение в коэффициенте давления от референсного решения для всех расчётов с применением метода ППФ располагалось в передней части

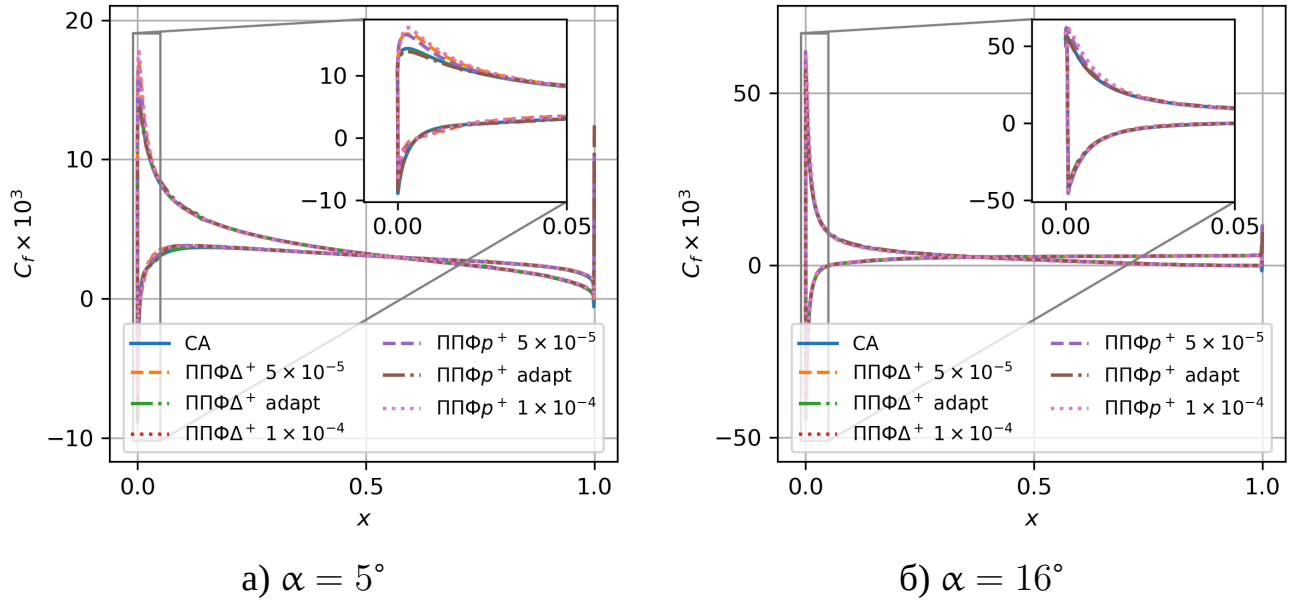


Рисунок 5.25 — Распределение коэффициента трения  $C_f$ .

профиля и составило менее  $10^{-2}$ . В остальной части профиля  $\Delta C_p \approx 2 \times 10^{-3}$ . Для угла атаки  $\alpha = 16^\circ$  максимальное значение  $\Delta C_p \approx 2 \times 10^{-1}$  аналогично находилось в начале профиля. В основной части профиля  $-\Delta C_p \lesssim 1 \times 10^{-2}$ .

На рисунке 5.25 приведены распределения коэффициента  $C_f$  трения по профилю для двух углов атаки  $\alpha = 5, 16^\circ$ . Как видно из рисунка, для обоих углов атаки в целом по профилю распределение коэффициента трения хорошо согласуется. Ошибка для всех вариантов расчётов с применением метода ППФ в сравнении с референсным решением в центральной части профиля составляет менее  $2 \times 10^{-4}$ . Наибольшая ошибка достигается в передней части профиля. Для  $\alpha = 5^\circ$  (рис. 5.25а) максимальная ошибка составила  $3 \times 10^{-3}$  на сетках с постоянным пристенным шагом. В это же время на адаптированной сетке с уменьшенным шагом в передней и задних частях профиля максимальная ошибка в области передней кромки по коэффициенту трения составила  $\Delta C_f \approx 5 \times 10^{-4}$  для обоих вариантов адаптации положения точки сшивки. Как видно на рисунке 5.25а, несмотря на сопоставимые максимальные отклонения для разных вариантов адаптации положения точки сшивки, в случае для сетки  $\Delta h = 5 \times 10^{-5}$  немного лучше себя показал вариант с учётом градиента давления. В то же время на адаптированной сетке лучше результаты у варианта вычисления  $u_\tau^{\min}$  через  $\Delta^+$ .

Для большего угла атаки  $\alpha = 16^\circ$  (рис. 5.25б) поведение в коэффициенте трения в передней части профиля качественно остаётся таким же. При этом максимальная ошибка в  $C_f$  для сетки с  $\Delta h = 5 \times 10^{-5}$  увеличилась до  $6 \times 10^{-3}$ , для сетки с  $\Delta h = 1 \times 10^{-4}$  — до  $8 \times 10^{-3}$ , а для адаптированной сетки — до  $2 \times 10^{-3}$ . При

этом ошибка в определении точки отрыва  $x_{sep}$  при использовании метода ППФ для  $\alpha = 16^\circ$  для всех рассматриваемых вариантов сеток составила  $\Delta x_{sep} \approx 0.01$ , на такое отклонение приходится примерно 7 узлов расчётной сетки. Для двух рассматриваемых углов атаки наблюдается повышение точности при увеличении сеточного разрешения.

Эффективное положение точки сшивки вдоль профиля, полученное в расчёте согласно формулировке, приведённой в разделе ??, демонстрируется на рисунке 5.26 для рассматриваемых углов атаки  $\alpha = 5^\circ, 16^\circ$ . Из рисунка 5.26 видно,

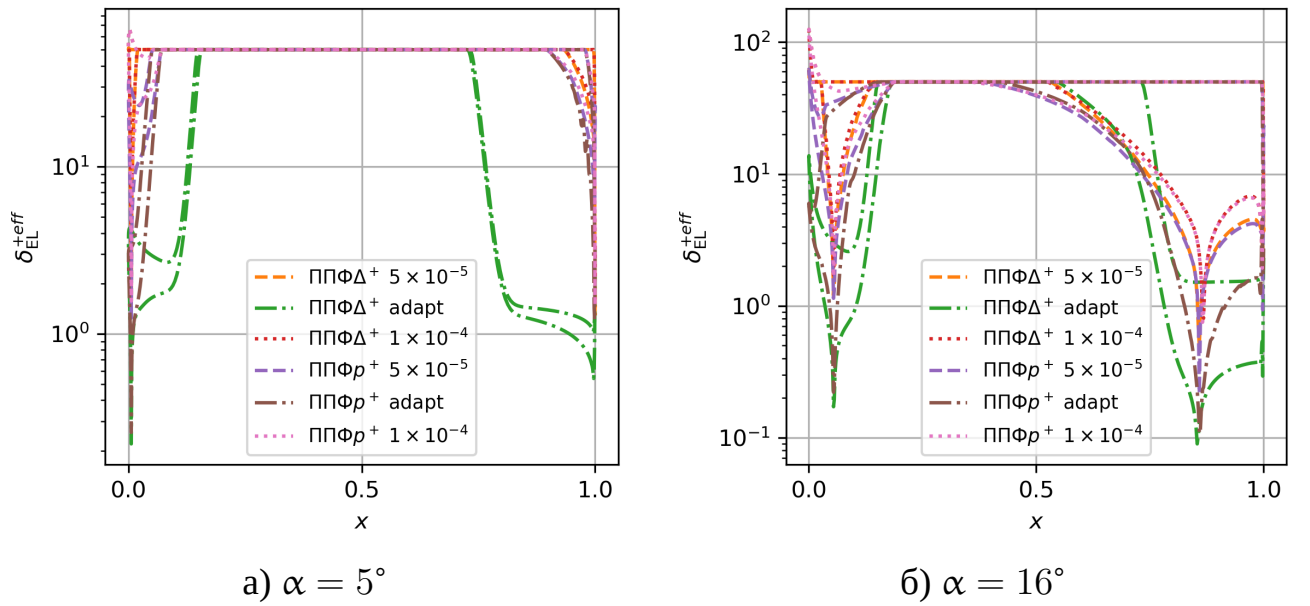


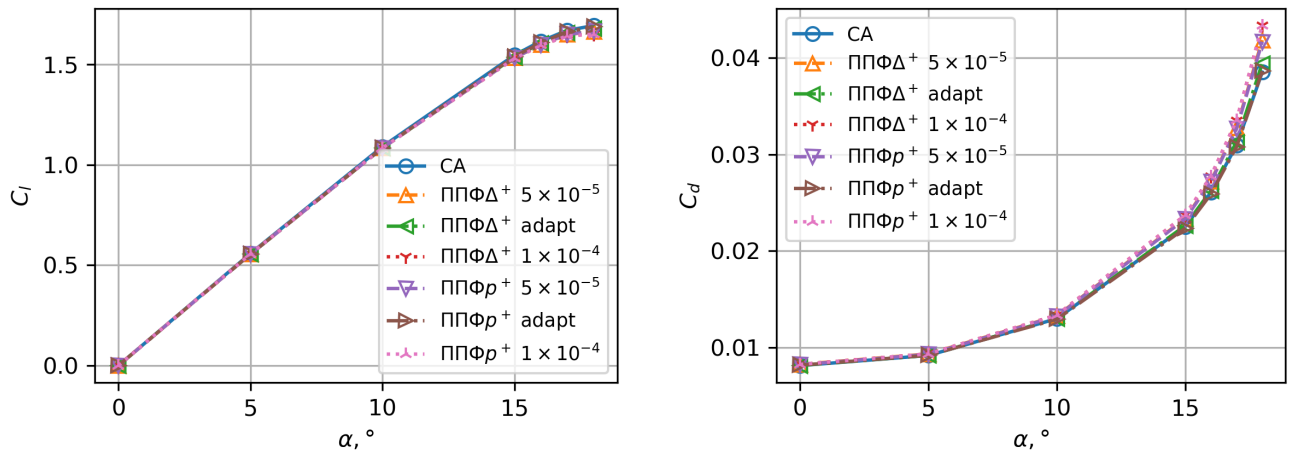
Рисунок 5.26 — Распределение эффективного положения точки сшивки  $\delta_{EL}^{+eff}$ .

что для расчётных сеток с постоянным пристеночным разрешением в варианте ППФ $\Delta^+$  положение точки сшивки в начале профиля практически сразу же выходит на значение параметра  $\delta_{EL}^+ = 50$ , в то время как для сетки с адаптированным пристеночным шагом в областях присоединения потока значение  $\delta_{EL}^{+eff}$  дольше остаётся в области вязкого подслоя в начале профиля, что объясняет меньшую ошибку в коэффициенте трения для адаптированной сетки. В то же время при использовании ППФ $p^+$  выход  $\delta_{EL}^{+eff}$  на значение  $\delta_{EL}^+ = 50$  происходит одновременно для всех расчётных сеток. При этом, чем подробнее сетка, тем ниже смещается точка сшивки, что приводит к уменьшению ошибок в области адаптации сеточного шага.

Также необходимо отметить, что  $\delta_{EL}^{+eff}$  в случае с адаптивной сеткой находится значительно ниже первого пристеночного шага для сетки с фиксированным шагом. В области отрыва (см. рис. 5.26б) для обоих вариантов адаптации положения точки сшивки наблюдается смещение положения точки сшивки в сторону

профиля. При этом для адаптированной сетки точка сшивки находится в области вязкого подслоя в большей области по сравнению с результатами на сетке с постоянным пристеночным шагом. Необходимо заметить, что из-за меньшего шага в случае адаптивной сетки для  $\alpha = 5^\circ$  (см. рис. 5.26а) в расчёте для ППФ  $\Delta^+$  на задней части профиля наблюдается смещение точки сшивки в сторону стенки в безотрывной области течения. Такое смещение в области без особенностей вызвано зависимостью (2.30) граничного значения  $u_\tau^{\min}$  от пристеночного разрешения сетки  $\Delta$ , которое значительно было уменьшено в области адаптации. В то же время для варианта ППФ  $p^+$  такого смещения не наблюдается, а переход из области адаптации положения точки сшивки в область  $\delta_{EL}^{+eff} = 50$  происходит для всех рассматриваемых сеток одновременно. Таким образом вариант ППФ  $p^+$  менее сеточно зависим, чем ППФ  $\Delta^+$ . При этом полностью избавиться от зависимости от сеточного разрешения не удалось, так как смещение точки сшивки ограничено снизу расстоянием от стенки до первого узла.

На рисунках 5.27а и б приведены полученные зависимости для коэффициента подъёмной силы  $C_l$  и коэффициента сопротивления  $C_d$  соответственно.

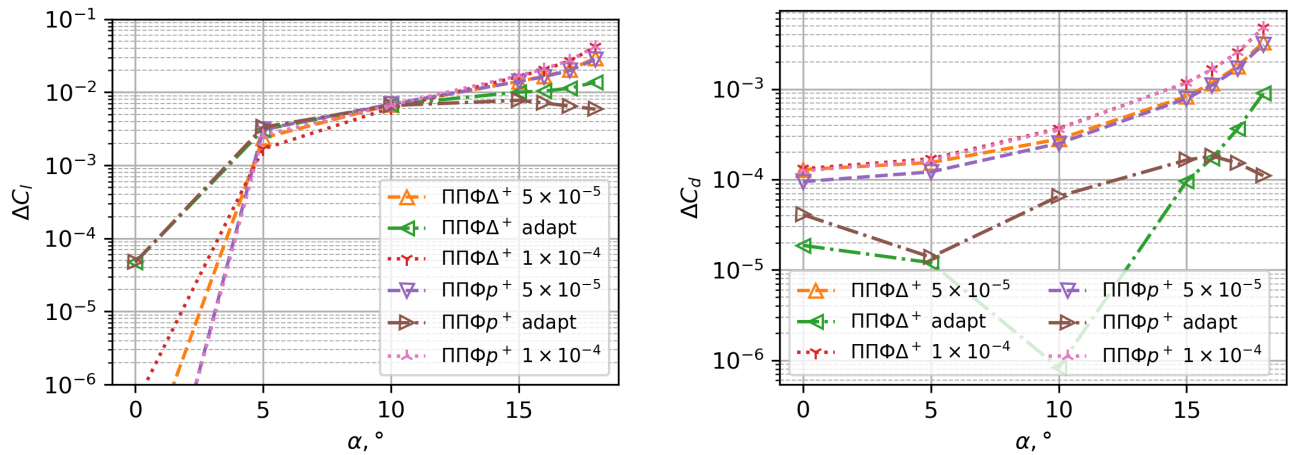


а) коэффициент подъёмной силы

б) коэффициент сопротивления

Рисунок 5.27 — Зависимость интегральных характеристик от угла атаки.

Значения отклонений от референсного решения в зависимости от угла атаки приведены на рисунках 5.28а для  $C_l$  и 5.28б для  $C_d$ . Для режимов с  $\alpha > 0^\circ$  отклонение по  $C_l$  от референсного решения составило менее 3% для всех вариантов расчётов. Увеличение отклонения по  $C_l$  при  $\alpha = 0^\circ$  для неструктурированной адаптированной сетки объясняется несимметричностью сетки относительно оси  $OX$ . Для адаптированной сетки отклонение по  $C_l$  для  $\alpha > 0^\circ$  составило менее 1%. При этом для  $\alpha \geq 15^\circ$ , где присутствует отрыв, для варианта ППФ  $p^+$  ошибка по



а) коэффициент подъёмной силы

б) коэффициент сопротивления

Рисунок 5.28 — Зависимость от угла атаки отклонения интегральных характеристик от референсного решения.

$C_l$  уменьшается и становится заметно меньше, чем для варианта ППФ $\Delta^+$ , где отклонение от референсного решения увеличивается с ростом угла атаки. В случае сеток с постоянным пристеночным разрешением меньшая ошибка наблюдается для варианта ППФ $r^+$  для малых углов атаки. При увеличении угла атаки результаты для рассматриваемых методов адаптации положения точки сшивки становятся очень близкими.

Отклонение по коэффициенту сопротивления увеличивается при увеличении пристеночного шага расчётной сетки. На безотрывных режимах обтекания ( $\alpha \leq 10^\circ$ ) отклонение от референсного решения по  $C_d$  для сетки с  $\Delta h = 10^{-4}$  составило менее  $4 \times 10^{-4}$  ( $\sim 3\%$ ), для сетки с  $\Delta h = 5 \times 10^{-5}$  – менее  $3 \times 10^{-4}$  ( $\sim 2\%$ ), на адаптированной сетке – менее  $7 \times 10^{-5}$  ( $\sim 0.5\%$ ). Для сетки с  $\Delta h = 5 \times 10^{-5}$  ошибка с применением ППФ $r^+$  меньше в  $\sim 0.75$  раз для  $\alpha = 0^\circ$ , чем для ППФ $\Delta^+$ . Разница между решениями уменьшается с ростом угла атаки. При этом на адаптированной сетке наблюдается обратная ситуация: большее отклонение для ППФ $r^+$  на малых углах атаки, чем для ППФ $\Delta^+$ , а на режимах с сильным отрывным течением  $\alpha > 16^\circ$  отклонение от референсного решения по  $C_d$  для ППФ $r^+$  становится меньше более чем в 2 раза, чем для ППФ $\Delta^+$ . Для сетки с постоянным пристеночным шагом  $\Delta h = 1 \times 10^{-4}$  результаты, полученные с применением рассматриваемых алгоритмов адаптации положения точки сшивки, являются сопоставимыми.

Точность метода ППФ для отрывных режимов на рассматриваемых сетках варьируется от хорошей для адаптированной сетки до неплохих для сетки с большим постоянным пристеночным шагом. Необходимо отметить, что при увеличе-

нии пристеночного шага расчётной сетки увеличивался шаг сетки и во внешней области течения, что также влияет на точность решения. Поэтому на грубой рассматриваемой сетке результаты не меняются существенно при смене вариантов адаптации положения точки сшивки.

## Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Разработана методика адаптации точки сшивки – места согласования внешнего решения осреднённых уравнений Навье–Стокса и пристеночной функции. Предложенная методика адаптации основана на учёте локальных характеристик течения и пристеночного шага сетки. Её применение повышает точность решения задач с особенностями: точками отрыва и присоединения потока, областями отрывного течения. Предложен метод распространения адаптированного положения точки сшивки для повышения надёжности расчёта сложных турбулентных течений. Предложен алгоритм использования анизотропной искусственной вязкости в уравнении для определения скорости трения в методе пенализированных пристеночных функций. Применение искусственной вязкости существенно снижает численные осцилляции при расчёте на неструктурированных сетках.
2. Разработана численная схема на основе метода локальных разбиений элементов для аппроксимации члена направленной искусственной вязкости в уравнении для определения скорости трения в методе пенализированных пристеночных функций. Разработанная схема обладает компактным шаблоном, что необходимо, когда на высоту области действия оператора сглаживания приходится малое число узлов расчётной сетки.
3. Программно реализованы предложенные модификации метода пенализированных пристеночных функций и трёхмерный вариант метода для неструктурированных сеток в программном комплексе NOISEtte с применением технологий распараллеливания MPI + OpenMP.
4. Проведён сравнительный анализ метода пенализированных пристеночных функций с традиционным методом пристеночных функций на примере решения тестовых задач. Продемонстрированы сеточная независимость и повышение точности результатов при использовании метода пенализированных пристеночных функций. Продемонстрирована применимость метода пенализированных пристеночных функций на прикладной задаче задаче внешнего обтекания.

## Список литературы

1. *Spalart, P. R.* A one equation turbulence model for aerodynamic flows [Text] / P. R. Spalart, S. R. Allmaras // AIAA journal. — 1992. — Vol. 94.
2. *Gatski, T. B.* Simulation and Modeling of Turbulent Flows [Text] / T. B. Gatski, M. Y. Hussaini, J. L. Lumley. — Oxford, 1996.
3. *Durbin, P. A.* Statistical Theory and Modeling for Turbulent Flows [Text] / P. A. Durbin, B. A. P. Reif. — Wiley, 2001.
4. *Wilcox, D. C.* Formulation of the  $k - \omega$  Turbulence Model Revisited [Text] / D. C. Wilcox // AIAA Journal. — 2008. — Vol. 46, no. 11. — P. 2823—2838.
5. Wavelet-Based Adaptive Unsteady Reynolds-Averaged Navier–Stokes Simulations of Wall-Bounded Compressible Turbulent Flows [Text] / X. Ge [et al.] // AIAA Journal. — 2020. — Vol. 58, no. 4. — P. 1529—1549. — eprint: <https://doi.org/10.2514/1.J058428>. — URL: <https://doi.org/10.2514/1.J058428>.
6. *Moin, P.* Direct numerical simulation: A tool in turbulence research [Text] / P. Moin, K. Mahesh // Annual Rev. Fluid Mech. — 1998. — Vol. 30. — P. 539—578.
7. Direct numerical simulations of turbulent pipe flow at high Reynolds number [Text] / A. Ceci [et al.] // PHYSICAL REVIEW FLUIDS. — 2022. — Nov. — Vol. 7, no. 11.
8. *Yao, J.* Direct numerical simulation of turbulent open channel flows at moderately high Reynolds numbers [Text] / J. Yao, X. Chen, F. Hussain // JOURNAL OF FLUID MECHANICS. — 2022. — Dec. — Vol. 953.
9. *Lesieur, M.* New trends in large-eddy simulations of turbulence [Text] / M. Lesieur, O. Métais // Annu. Rev. Fluid Mech. — 1996. — Vol. 28. — P. 45—82.
10. *Meneveau, C.* Scale-invariance and turbulence models for large-eddy simulation [Text] / C. Meneveau, J. Katz // Annu. Rev. Fluid Mech. — 2000. — Vol. 32. — P. 1—32.
11. *Moin, P.* Advances in Large Eddy Simulation Methodology of Complex Flows [Текст] / P. Moin // Int. J. Heat Fluid Flow. — 2002. — T. 23. — C. 710—720.

12. *Lesieur, M.* Large-Eddy Simulations of Turbulence [Text] / M. Lesieur, O. Métais, P. Comte. — Cambridge University Press, 2005. — URL: <https://books.google.it/books?id=FWmsrNv3BYoC>.
13. *De Stefano, G.* Wall-resolved wavelet-based adaptive large-eddy simulation of bluff-body flows with variable thresholding [Text] / G. De Stefano, A. Nejadmalayeri, O. V. Vasilyev // Journal of Fluid Mechanics. — 2016. — Feb. — Vol. 788. — P. 303—336. — URL: [http://journals.cambridge.org/article\\_S0022112015007089](http://journals.cambridge.org/article_S0022112015007089).
14. *De Stefano, G.* Wavelet-based adaptive large-eddy simulation of supersonic channel flow [Text] / G. De Stefano, E. Brown-Dymkoski, O. V. Vasilyev // Journal of Fluid Mechanics. — 2020. — Vol. 901. — A13.
15. *Pope, S. B.* Turbulent Flows [Текст] / S. B. Pope. — Cambridge University Press, 2000.
16. *Chapman, D. R.* Computational aerodynamics development and outlook [Text] / D. R. Chapman // AIAA journal. — 1979. — Vol. 17, no. 12. — P. 1293—1313.
17. *Piomelli, U.* Wall-modeled large-eddy simulations: Present status and prospects [Text] / U. Piomelli // Direct and Large-Eddy Simulation VII: Proceedings of the Seventh International ERCOFTAC Workshop on Direct and Large-Eddy Simulation, held at the University of Trieste, September 8-10, 2008. — Springer. 2010. — P. 1—10.
18. *Choi, H.* Grid-point requirements for large eddy simulation: Chapman's estimates revisited [Text] / H. Choi, P. Moin // Phys. Fluids. — 2012. — Vol. 24. — P. 011702.
19. *Patankar, S. V.* Heat and Mass Transfer in Boundary Layers [Text] / S. V. Patankar, D. B. Spalding. — Morgan-Grampia, 1968.
20. Development and application of wall-function treatments for turbulent forced and mixed convection flows [Text] / T. Craft [et al.] // Fluid Dynamics Research. — 2006. — Vol. 38, no. 2. — P. 127—144. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0169598305000778> ; Seiken Symposium.
21. Near-wall behavior of RANS turbulence models and implications for wall functions [Text] / G. Kalitzin [et al.] // Journal of Computational Physics. — 2005. — Vol. 204, no. 1. — P. 265—291. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999104004164>.

22. Adaptive wall functions with applications [Text] / G. Medic [et al.] // Proceedings of the 36th AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit. — 2006.
23. *Balaras, E.* Two-layer approximate boundary conditions for large-eddy simulations [Text] / E. Balaras, C. Benocci, U. Piomelli // AIAA journal. — 1996. — Vol. 34, no. 6. — P. 1111—1119.
24. *Cabot, W.* Approximate wall boundary conditions in the large-eddy simulation of high Reynolds number flow [Text] / W. Cabot, P. Moin // Flow, Turbulence and Combustion. — 2000. — Vol. 63, no. 1—4. — P. 269—291.
25. *Kawai, S.* Dynamic non-equilibrium wall-modeling for large eddy simulation at high Reynolds numbers [Text] / S. Kawai, J. Larsson // Physics of Fluids. — 2013. — Vol. 25, no. 1. — P. 015105.
26. *Park, G. I.* An improved dynamic non-equilibrium wall-model for large eddy simulation [Text] / G. I. Park, P. Moin // Physics of Fluids. — 2014. — Vol. 26, no. 1. — P. 37—48.
27. *Larsson, J.* Feedback-controlled forcing in hybrid LES/RANS [Text] / J. Larsson, F. S. Lien, E. Yee // International Journal of Computational Fluid Dynamics. — 2006. — Vol. 20, no. 10. — P. 687—699.
28. Detached-eddy simulation of an airfoil at high angle of attack [Text] / M. Shur [et al.] // Engineering turbulence modelling and experiments. — 1999. — Vol. 4. — P. 669—678.
29. A new version of detached-eddy simulation, resistant to ambiguous grid densities [Text] / P. R. Spalart [et al.] // Theoretical and computational fluid dynamics. — 2006. — Vol. 20, no. 3. — P. 181—195.
30. A hybrid RANS-LES approach with delayed-DES and wall-modelled LES capabilities [Text] / M. L. Shur [et al.] // International Journal of Heat and Fluid Flow. — 2008. — Vol. 29, no. 6. — P. 1638—1649.
31. *Зайчик, Л. И.* Пристеночные функции для моделирования турбулентного течения и теплообмена [Текст] / Л. И. Зайчик // Теплофизика Высоких Температур. — 1997. — Т. 35, № 3. — С. 391—396.
32. *Nichols, R. H.* Wall Function Boundary Conditions Including Heat Transfer and Compressibility [Text] / R. H. Nichols, C. C. Nelson // AIAA Journal. — 2004. — Vol. 42, no. 6. — P. 1107—1114.

33. *Beaugendre, H.* Penalization of the Spalart–Allmaras turbulence model without and with a wall function: Methodology for a vortex in cell scheme [Text] / H. Beaugendre, F. Morency // *Computers and Fluids*. — 2018. — July. — Vol. 170. — P. 313–323. — URL: <https://hal.inria.fr/hal-01963687>.
34. *Дубень, А. П.* О граничных условиях на твердых стенках в задачах вязкого обтекания [Текст] / А. П. Дубень, И. В. Абалакин, В. О. Цветкова // *Матем. моделирование*. — 2021. — Т. 32, № 1. — С. 79–98.
35. *Zhdanova, N. S.* Penalized Wall Function Method for Turbulent Flow Modeling [Text] / N. S. Zhdanova, O. V. Vasilyev // *Supercomputing Frontiers and Innovations*. — 2022. — Dec. — Vol. 9, no. 4. — P. 55–68. — URL: <https://superfri.org/index.php/superfri/article/view/480>.
36. *Vasilyev, O. V.* Characteristic-based volume penalization-imposed wall function method for turbulent boundary layer modeling [Текст] / O. V. Vasilyev, N. S. Zhdanova // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. — 2023. — Т. 63, № 5. — С. 821–836.
37. *Vasilyev, O. V.* Generalisation of the Penalised Wall Function Method for the Simulation of Turbulent flows With Unfavourable Pressure Gradients [Текст] / O. V. Vasilyev, N. S. Zhdanova // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. — 2023. — Т. 63, № 12. — С. 2384–2401.
38. *Bakhvalov, P.* Edge-based reconstruction schemes for unstructured tetrahedral meshes [Text] / P. Bakhvalov, I. Abalakin, T. Kozubskaya // *Int. J. Numer. Meth. Fluids*. — 2016. — Vol. 81, no. 6. — P. 331–356.
39. *Roe, P. L.* Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes [Text] / P. L. Roe // *Journal of computational physics*. — 1981. — Vol. 43, no. 2. — P. 357–372.
40. *Bakhvalov, P. A.* Method of averaged element splittings for diffusion terms discretization in vertex-centered framework [Text] / P. A. Bakhvalov, M. Sur-nachev // *Journal of Computational Physics*. — 2022. — Vol. 450. — P. 110819.
41. *Vorst, H. A. van der.* BI-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of BI-CG for the solution of nonsymmetric linear systems [Text] / H. A. van der Vorst // *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* — 1992. — Vol. 13, no. 2. — P. 631–644.

42. *A.Gorobets*. Technology for Supercomputer Simulation of Turbulent Flows in the Good New Days of Exascale Computing [Text] / A.Gorobets, A.Duben // Supercomputing Frontiers and Innovations. — 2021. — Feb. — Vol. 8, no. 4. — P. 4—10. — URL: <https://superfri.susu.ru/index.php/superfri/article/view/400>.
43. *Gorobets, A*. Heterogeneous CPU+GPU parallelization for high-accuracy scale-resolving simulations of compressible turbulent flows on hybrid supercomputers [Text] / A. Gorobets, P. Bakhvalov // Computer Physics Communications. — 2022. — Vol. 271. — P. 108231. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S001046552100343X>.
44. *Wolfshtein, M*. The velocity and temperature distribution in one-dimensional flow with turbulence augmentation and pressure gradient [Text] / M. Wolfshtein // International Journal of Heat and Mass Transfer. — 1969. — Vol. 12, no. 3. — P. 301—318.
45. Progress in the generalization of wall-function treatments [Text] / T. Craft [et al.] // International Journal of Heat and Fluid Flow. — 2002. — Vol. 23, no. 2. — P. 148—160.
46. *Carlson, J.-R*. Node-centered wall function models for the unstructured flow code FUN3D [Text] / J.-R. Carlson, V. Vatsa, J. A. White // 22nd AIAA Computational Fluid Dynamics Conference. — 2015. — P. 2758.
47. *Vasilyev, O*. Comparative Study of Conventional and Penalized Wall Function Methods in Turbulent Flow Modeling [Text] / O. Vasilyev, N. Zhdanova, N. Kluev // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2024. — Vol. 16, Suppl 1. — S139—S161.
48. *Grotjans, H*. Wall functions for general application CFD codes [Text] / H. Grotjans, F. R. Menter // Computational fluid dynamics'98. — 1998. — P. 1112—1117.
49. *Grotjans, H*. Turbulenzmodelle höherer Ordnung für komplexe Anwendungen [Text] / H. Grotjans. — VDI-Verlag, 1999.
50. *Vieser, V*. Heat transfer predictions using advanced two-equation turbulence models [Text] / V. Vieser, T. Esch, F. Menter // CFX Technical Memorandum (CFX-VAL10/0602). — 2002.
51. *Bodart, J*. Wall-modeled large eddy simulation in complex geometries with application to high-lift devices [Text] / J. Bodart, J. Larsson // Annual Research Briefs, Center for Turbulence Research, Stanford University. — 2011. — P. 37—48.

52. *Kawai, S.* Wall-modeling in large eddy simulation: Length scales, grid resolution, and accuracy [Text] / S. Kawai, J. Larsson // *Physics of Fluids*. — 2012. — Vol. 24, no. 1. — P. 015105.
53. *Brown-Dymkoski, E.* A Characteristic Based Volume Penalization Method for General Evolution Problems Applied to Compressible Viscous Flows [Text] / E. Brown-Dymkoski, N. Kasimov, O. V. Vasilyev // *J. Comp. Phys.* — 2014. — Vol. 262. — P. 344—357.
54. Galilean-Invariant Characteristic-Based Volume Penalization Method for Supersonic Flows with Moving Boundaries [Text] / N. Kasimov [et al.] // *Fluids*. — 2021. — Vol. 6, no. 8. — URL: <https://www.mdpi.com/2311-5521/6/8/293>.
55. *Popovac, M.* Compound wall treatment for RANS computation of complex turbulent flows and heat transfer [Text] / M. Popovac, K. Hanjalic // *Flow, turbulence and combustion*. — 2007. — Vol. 78. — P. 177—202.
56. Mechanische Ähnlichkeit und turbulenz [Text] / T. Kármán [et al.] // *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*. — 1930. — Vol. 1930. — P. 58—76.
57. *Prandtl, L.* Neuere ergebnisse der turbulenzforschung [Text] / L. Prandtl // *Z. vdi.* — 1933. — Vol. 77, no. 5. — P. 105—114.
58. *Изаксон, А.* О формуле распределения скоростей вблизи стенки [Текст] / А. Изаксон // *ЖЭТФ*. — 1937. — Т. 7. — С. 919.
59. *Millikan, C.* A critical discussion of turbulent flow in channels and circular tubes [Text] / C. Millikan // *Proc. 5th Int. Congress on Applied Mechanics, Cambridge*. — 1938. — P. 386—392.
60. *Prandtl, L.* Eine beziehung zwischen warmeaustausch and stromungswiderstand der flussigkeiten [Текст] / L. Prandtl // *Phys. Z.* — 1910. — Т. 11. — С. 1072—1078.
61. *Von Karman, T.* The analogy between fluid friction and heat transfer [Text] / T. Von Karman // *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*. — 1939. — Vol. 61, no. 8. — P. 705—710.
62. *Van Driest, E.* On turbulent flow near a wall [Text] / E. Van Driest // *Journal of the aeronautical sciences*. — 1956. — Vol. 23, no. 11. — P. 1007—1011.

63. *Reichardt, H.* Vollständige Darstellung der turbulenten Geschwindigkeitsverteilung in glatten Leitungend [Text] / H. Reichardt // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. — 1951. — Vol. 31, no. 7. — P. 208—219.
64. *Deissler, R. G.* Analysis of turbulent heat transfer, mass transfer, and friction in smooth tubes at high Prandtl and Schmidt numbers [Text]. Vol. 3145 / R. G. Deissler. — National Advisory Committee for Aeronautics, 1954.
65. *Rannie, W. D.* Heat transfer in turbulent shear flow [Text] / W. D. Rannie // Journal of the Aeronautical Sciences. — 1956. — Vol. 23, no. 5. — P. 485—489.
66. A single formula for the law of the wall [Text] / D. B. Spalding [et al.] // Journal of Applied mechanics. — 1961. — Vol. 28, no. 3. — P. 455—458.
67. *Laufer, J.* The structure of turbulence in fully developed pipe flow [Text] : tech. rep. / J. Laufer. — 1954.
68. *Knopp, T.* A grid and flow adaptive wall-function method for RANS turbulence modelling [Text] / T. Knopp, T. Alrutz, D. Schwamborn // J. Comput. Phys. — 2006. — Vol. 220. — P. 19—40.
69. *Knopp, T.* Model-consistent universal wall-functions for RANS turbulence modelling [Text] / T. Knopp // International Conference on Boundary and Interior Layers, Göttingen, Germany. — 2006.
70. *Palombo, C. L.* Development and validation of an improved wall-function boundary condition for computational aerodynamics [Text] : Master's thesis / Palombo Carlo Loris. — Stockholm, Sweden : KTH, Engineering Mechanics, 2021.
71. *Knopp, T.* On grid-independence of RANS predictions for aerodynamic flows using model-consistent universal wall-functions [Text] / T. Knopp // Proceedings of the European Conference on Computational Fluid Dynamics. — 2006.
72. *Morgenweck, D.* Investigation and validation of a hybrid wall boundary condition in turbulent flows [Text] : PhD thesis / Morgenweck D. — Master's thesis, TU Berlin, 2005.
73. *Кадер, Б.* Законы подобия для пристенных турбулентных течений [Текст] / Б. Кадер, А. Яглом // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. М.: ВИНТИ. — 1980. — Т. 15. — С. 81—155.

74. Turbulence modeling validation [Text] / J. Bardina [et al.] // 28th Fluid dynamics conference. — 1997. — P. 2121.
75. *Mehta, Y.* Computational Fluid Dynamics Using the Adaptive Wavelet-Collocation Method [Text] / Y. Mehta, A. Nejadmalayeri, J. D. Regele // *Fluids*. — 2021. — Vol. 6, no. 11.
76. *De Stefano, G.* Hierarchical Adaptive Eddy-Capturing Approach for Modeling and Simulation of Turbulent Flows [Text] / G. De Stefano, O. V. Vasilyev // *Fluids*. — 2021. — Vol. 6, no. 2. — URL: <https://www.mdpi.com/2311-5521/6/2/83>.
77. Wavelet-Based Adaptive Eddy-Resolving Methods for Modeling and Simulation of Complex Wall-Bounded Compressible Turbulent Flows [Text] / X. Ge [et al.] // *Fluids*. — 2021. — Vol. 6, no. 9. — URL: <https://www.mdpi.com/2311-5521/6/9/331>.
78. *Ge, X.* Wavelet-based adaptive wall-modeled large eddy simulation method for compressible turbulent flows [Text] / X. Ge, O. V. Vasilyev, M. Y. Hussaini // *Phys. Rev. Fluids*. — 2021. — Sept. — Vol. 6, issue 9. — P. 094606. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevFluids.6.094606>.
79. NASA Langley Research Center Turbulence Modeling Resource [Text]. — URL: <https://turbmodels.larc.nasa.gov>.
80. *Winslow, A.* Numerical solution of the quasilinear Poisson equation in a nonuniform triangle mesh (Reprinted from the *Journal of Computational Physics*, vol 1, pg 149-172, 1966) [Text] / A. Winslow // *J. Comp. Phys.* — 1997. — Aug. — Vol. 135, no. 2. — P. 128—138.
81. *Thomas, P. D.* Direct control of the grid point distribution in meshes generated by elliptic equations [Text] / P. D. Thomas, J. F. Middlecoff // *AIAA Journal*. — 1980.
82. *Ryskin, G.* Orthogonal Mapping [Text] / G. Ryskin, L. G. Leal // *J. Comp. Phys.* — 1983. — Vol. 50, no. 1. — P. 71—100.
83. *Kania, L.* Elliptic adaptive grid generation and area equidistribution [Text] / L. Kania // *Int. J. Num. Meth. Fluids*. — 1999. — July. — Vol. 30, no. 5. — P. 481—491.
84. *Yuan, L.* Resolving the shock-induced combustion by an adaptive mesh redistribution method [Text] / L. Yuan, T. Tang // *J. Comp. Phys.* — 2007. — June. — Vol. 224, no. 2. — P. 587—600.

85. *Bin, J.* Adaptive mesh redistribution method for domains with complex boundaries [Text] / J. Bin, A. Uzun, M. Y. Hussaini // J. Comp. Phys. — 2011. — Apr. — Vol. 230, no. 8. — P. 3178—3204.
86. *Garanzha, V. A.* Maximum norm optimization of quasi-isometric mappings [Text] / V. A. Garanzha // Numerical Linear Algebra with Applications. — 2002. — Sept. — Vol. 9, no. 6/7. — P. 493—510.
87. *Garanzha, V. A.* Variational principles in grid generation and geometric modelling: theoretical justifications and open problems [Text] / V. A. Garanzha // Numerical Linear Algebra with Applications. — 2004. — June. — Vol. 11, no. 5/6. — P. 535—563.
88. VERIF/3DB: 3D Bump-in-channel Verification Case - Intro Page [Text]. — URL: <https://turbmodels.larc.nasa.gov/bump3d.html>.
89. VERIF/2DB: 2D Bump-in-channel Verification Case - Intro Page [Text]. — URL: <https://turbmodels.larc.nasa.gov/bump.html>.
90. *Rumsey, C.* 2DN00: 2D NACA 0012 Airfoil Validation Case [Text] / C. Rumsey. — 09/2022. — URL: [https://turbmodels.larc.nasa.gov/naca0012\\_val.html](https://turbmodels.larc.nasa.gov/naca0012_val.html) ; Accessed on 08 10, 2024.