



Елизарова Т.Г., Устюгов С.Д.

Квазигазодинамический  
алгоритм решения  
уравнений магнитной  
гидродинамики.  
Многомерный случай

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Елизарова Т.Г., Устюгов С.Д. Квазигазодинамический алгоритм решения уравнений магнитной гидродинамики. Многомерный случай // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2011. № 30. 24 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2011-30>

## 1. Введение

Квазигазодинамический (КГД) алгоритм решения уравнений гидродинамики успешно применялся для численного моделирования широкого круга течений вязкого сжимаемого газа. В работе [1] было представлено расширение метода КГД для решения уравнений магнитной гидродинамики (КМГД) для течений сжимаемой электропроводной жидкости в одномерном случае. Для всех представленных примеров показано, что численное решение уверенно сходится к эталонному решению при сгущении пространственной сетки и с хорошей точностью передает все характерные МГД разрывы. Благодаря простоте численной реализации этот алгоритм дает возможность получать решение одномерных задач с высоким качеством на подробных сетках. В данной работе рассмотрено применение КМГД для численного моделирования многомерных течений сжимаемой электропроводной жидкости в магнитном поле. Проведен анализ КМГД алгоритма на примере нескольких тестовых задач магнитогидродинамики в двумерном случае. Выполнено усреднение по времени для всех физических переменных включая и магнитное поле, в отличие от предыдущей работы авторов [1], где учет магнитного поля рассматривался только как действие внешней силы [2]. Как результат проведен правильный расчет сложных случаев взаимодействия состояний с разрывом тангенциальной компоненты магнитного поля.

## 2. Система уравнений КМГД и численный алгоритм.

Система уравнения магнитной гидродинамики для вязкого теплопроводного газа может быть записана в следующем виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = 0$$

$$\frac{\partial B_i}{\partial t} + \frac{\partial T_{ij}^m}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial Q_j}{\partial x_j} = 0$$

где

$$T_{ij} = \rho u_i u_j + p \delta_{ij} - \Pi_{ij} + \frac{1}{2} B^2 \delta_{ij} - B_i B_j$$

$$T_{ij}^m = u_j B_i - u_i B_j$$

$$Q_j = \rho u_j H - \Pi_{jk} u_k - q_j + u_j B^2 - B_j (u_k B_k)$$

$$E = \rho\varepsilon + \frac{\rho u^2}{2} + \frac{B^2}{2}, \quad H = \frac{E + p}{\rho}$$

$$u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2, \quad B^2 = B_x^2 + B_y^2 + B_z^2, \quad \bar{p} = p + \frac{B^2}{2}$$

где  $\rho$  – плотность,  $u_i$  – компоненты скорости,  $B_i$  – компоненты магнитного поля,  $E$  и  $H$  – полная энергия единицы объема, и полная удельная энтальпия,  $p$  – давление,  $\varepsilon$  – удельная внутренняя энергия. Система уравнений дополняется уравнением состояния, которое в случае идеального газа имеет вид

$$p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$$

где  $\gamma$  – показатель адиабаты.

Тензор вязких напряжений и вектор теплового потока определяются как

$$\Pi_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right), \quad q_i = -k \frac{\partial T}{\partial x_i},$$

где  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости,  $k = \mu\gamma R / ((\gamma - 1)Pr)$  – коэффициент теплопроводности,  $Pr$  – число Прандтля.

Проведём осреднение системы уравнений по времени и будем предполагать, что за малое время  $\Delta t$  изменяются все физические переменные – плотность, скорость, давление и магнитное поле. Все осредненные величины запишутся в виде

$$\rho^* = \rho + \Delta\rho, p^* = p + \Delta p, u_i^* = u_i + \Delta u_i, B_i^* = B_i + \Delta B_i$$

где приращение  $\Delta f \equiv \tau \partial f / \partial t$  для каждой физической переменной  $f$ . Пренебрегая членами второго порядка малости по времени, систему уравнений КГМД можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho j_{mi}}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial T_{ij}^n}{\partial x_j} = \frac{\partial \Pi_{ij}^n}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial B_i}{\partial t} + \frac{\partial T_{ij}^m}{\partial x_j} = \frac{\partial T_{ij}^{mn}}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial F_i}{\partial x_i} + \frac{\partial Q_i^n}{\partial x_i} = \frac{\partial (\Pi_{ij}^n u_j)}{\partial x_i}$$

где все величины определены как

$$j_{mi} = \rho(u_i - w_i)$$

$$F_i = j_{mi} \left( H + \frac{B^2}{2\rho} \right) - B_i(u_k B_k)$$

$$T_{ij}^n = j_{mi} u_j + p \delta_{ij} + \frac{1}{2} B^2 \delta_{ij} - B_i B_j$$

$$\Pi_{ij}^n = \Pi_{ij} - \rho u_i \Delta u_j - \Delta p \delta_{ij} - \frac{1}{2} \Delta B^2 \delta_{ij} + \Delta(B_i B_j)$$

$$T_{ij}^{mn} = \Delta u_j B_i - \Delta u_i B_j + u_j \Delta B_i - u_i \Delta B_j$$

$$Q_i^n = q_i + \rho u_i \Delta \varepsilon + \rho u_i (p + B^2) \Delta \frac{1}{\rho} + u_i (B_k \Delta B_k) - B_i (\Delta u_k B_k)$$

$$w_i = \frac{\tau}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \rho u_i u_j + p \delta_{ij} + \frac{1}{2} B^2 \delta_{ij} - B_i B_j \right)$$

$$\Delta \frac{1}{\rho} = -\tau \left( u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)$$

$$\Delta u_i = -\tau \left( u_j \frac{\partial}{\partial x_j} u_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{B^2}{2} \delta_{ij} - B_i B_j \right) \right)$$

$$\Delta \varepsilon = -\tau \left( u_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} + \frac{p}{\rho} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)$$

$$\Delta p = -\tau \left( u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + \gamma p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)$$

$$\Delta B_i = \tau \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i B_j - u_j B_i)$$

Введем равномерную сетку по координатам  $x, y$  с шагом  $h_x, h_y$  и сетку по времени с шагом  $\Delta t$ . Значения всех физических величин – плотности, скорости, давления, магнитного поля будем определять в узлах сетки. Значения потоков всех величин определяются на границах ячеек в полуцелых узлах. Для решения

исходной системы уравнений используем явную по времени разностную схему следующего вида

для плотности:

$$\widehat{\rho}_{ij} = \rho_{ij} - \frac{\Delta t}{h_x} (j_{mi+1/2j} - j_{mi-1/2j}) - \frac{\Delta t}{h_y} (j_{mij+1/2} - j_{mij-1/2})$$

для компонент импульса:

$$\begin{aligned} \widehat{\rho u}_{k,ij} = & \rho u_{k,ij} - \frac{\Delta t}{h_x} (T_{k1,i+1/2j}^n - T_{k1,i-1/2j}^n) - \frac{\Delta t}{h_y} (T_{k2,ij+1/2}^n - T_{k2,ij-1/2}^n) \\ & + \frac{\Delta t}{h_x} (\Pi_{k1,i+1/2j}^n - \Pi_{k1,i-1/2j}^n) + \frac{\Delta t}{h_y} (\Pi_{k2,ij+1/2}^n - \Pi_{k2,ij-1/2}^n) \end{aligned}$$

для компонент магнитного поля:

$$\begin{aligned} \widehat{B}_{k,ij} = & B_{k,ij} - \frac{\Delta t}{h_x} (T_{k1,i+1/2j}^m - T_{k1,i-1/2j}^m) - \frac{\Delta t}{h_y} (T_{k2,ij+1/2}^m - T_{k2,ij-1/2}^m) \\ & + \frac{\Delta t}{h_x} (T_{k1,i+1/2j}^{mn} - T_{k1,i-1/2j}^{mn}) + \frac{\Delta t}{h_y} (T_{k2,ij+1/2}^{mn} - T_{k2,ij-1/2}^{mn}) \end{aligned}$$

для полной энергии:

$$\begin{aligned} \widehat{E}_{ij} = & E_{ij} - \frac{\Delta t}{h_x} (F_{1,i+1/2j} - F_{1,i+1/2j}) - \frac{\Delta t}{h_y} (F_{2,ij+1/2} - F_{2,ij-1/2}) \\ & - \frac{\Delta t}{h_x} (Q_{1,i+1/2j} - Q_{1,i+1/2j}) - \frac{\Delta t}{h_y} (Q_{2,ij+1/2} - Q_{2,ij-1/2}) \\ & + \frac{\Delta t}{h_x} (\Pi_{1k}^n u_{k,i+1/2j} - \Pi_{1k}^n u_{k,i-1/2j}) + \frac{\Delta t}{h_y} (\Pi_{2k}^n u_{k,ij+1/2} - \Pi_{2k}^n u_{k,ij-1/2}) \end{aligned}$$

Значения всех величин на границе между ячейками определялось простым усреднением по соседним ячейкам, например для плотности

$$\rho_{i+1/2} = \frac{1}{2} (\rho_i + \rho_{i+1})$$

При численном решении исходной системы уравнений магнитной гидродинамики все диссипативные слагаемые содержащие коэффициенты  $\mu$ ,  $k$  и  $\tau$  рассматриваются как искусственные регуляризаторы. При этом релаксационный параметр и коэффициенты вязкости и теплопроводности связаны между собой и в безразмерном виде вычисляются как

$$\tau = \alpha \frac{h}{c_f}, \quad \mu = \tau \cdot \rho \cdot Sc, \quad k = \frac{\tau \cdot p \cdot Sc}{Pr(\gamma - 1)}$$

где  $\alpha$  - численный коэффициент, который выбирался в пределах 0.1 – 0.4, числа Прандтля и Шмидта были равны единице. Шаг по времени  $\Delta t$  определялся из условия Куранта

$$\Delta t = \beta \cdot \min \left( \frac{h_x}{\max_{ij} (|u_{xij}| + c_{f_{x,ij}})}, \frac{h_y}{\max_{ij} (|u_{yij}| + c_{f_{y,ij}})} \right)$$

где  $\beta$  - численный коэффициент, равный в расчетах 0.1 – 0.4 в большинстве случаев,  $c_f$  - быстрая магнитозвуковая скорость.

При численном решении системы уравнений КМГД необходимо также соблюдать выполнение условия соленоидальности магнитного поля. Для этого применялась теорема Стокса

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\text{rot} \vec{E}$$

где электрическое поле определялось из формулы  $\vec{E} = -\vec{u} \times \vec{B}$  согласно МГД приближению. Компоненты электрического поля являются соответствующими компонентами потоков вычисленных через грани ячеек. Усредняя эти потоки по соседним ячейкам можно получить значение компонент электрического поля определенных на ребрах ячеек и необходимых для применения в теореме Стокса. Для двумерного случая необходима только  $z$  – компонента электрического поля определенная в узлах сетки как

$$E_{z,i+1/2 j+1/2} = \frac{1}{4} (T_{21,i+1/2 j} + T_{21,i+1/2 j+1} + T_{12,i j+1/2} + T_{12,i+1 j+1/2})$$

где величины  $T_{ij} \equiv T_{ij}^m + T_{ij}^{mn}$ . Используя теорему Стокса, компоненты магнитного поля на следующем временном шаге вычисляются как

$$B_{x,i+1/2 j}^{n+1} = B_{x,i+1/2 j}^n - \frac{\Delta t}{h_y} (E_{z,i+1/2 j+1/2} - E_{z,i+1/2 j-1/2})$$

$$B_{y,i j+1/2}^{n+1} = B_{y,i j+1/2}^n + \frac{\Delta t}{h_x} (E_{z,i+1/2 j+1/2} - E_{z,i-1/2 j-1/2})$$

Компоненты магнитного поля в центре ячейки  $(i, j)$  получаются усреднением

$$B_{x,ij} = \frac{1}{2}(B_{x,i+1/2j} + B_{x,i-1/2j})$$

$$B_{y,ij} = \frac{1}{2}(B_{y,ij+1/2} + B_{y,ij-1/2})$$

Отметим, что при решении системы КМГД в трехмерном случае необходимо переопределять все три компоненты магнитного поля.

### 3. Тестирование

Представленная численная схема была протестирована на примере нескольких характерных двумерных задач МГД для проверки ее сходимости и точности. Во всех случаях задавалась однородная сетка с постоянным шагом по каждому направлению, и бралось уравнение состояния для идеального газа.

#### 3.1 Тест.1: Численная диссипация и распад альвеновской волны

При моделировании на сетке численная схема всегда обладает некоторой диссипацией. Для того чтобы оценить уровень численной диссипации схемы КМГД был проведен тест по распаду альвеновской волны [3]. В начальный момент времени альвеновская волна имела параметры

$$\delta u_x = u_{amp} c_a \sin(k_x x + k_y y)$$

$$\delta \rho = \delta p = \delta u_y = \delta u_z = \delta B_x = \delta B_y = \delta B_z = 0$$

и двигалась по стационарному фону с  $\rho_0 = 1, P_0 = 1, B_x = 1, B_x = B_y = 0$ . Вычислительная область представляла собой квадрат со стороной  $L = 1$ . Расчеты проводились на трех сетках с числом ячеек в каждом направлении  $N = 64, 128, 256$ . Начальная скорость альвеновской волны  $c_a = 0.7071$  и её амплитуда  $u_{amp} = 0.1$ , показатель адиабаты  $\gamma = 5/3$ . Вычисления проводились с числом Куранта  $\beta = 0.3$ , параметром  $\alpha = 0.1$  и с наложением периодических граничных условий. Рис. 1 показывает график изменения максимума  $z$  – компоненты магнитного поля со временем на последовательно измельчающихся в два раза сетках. Уровень диссипации соответствует схемам первого порядка по пространству и времени и быстро уменьшается при измельчении сетки. При заданном числе Куранта и числе ячеек сетки рис 2. и 3 показывают, что диссипация численной схемы уменьшается при уменьшении параметров  $\alpha$  и  $Sc$ .

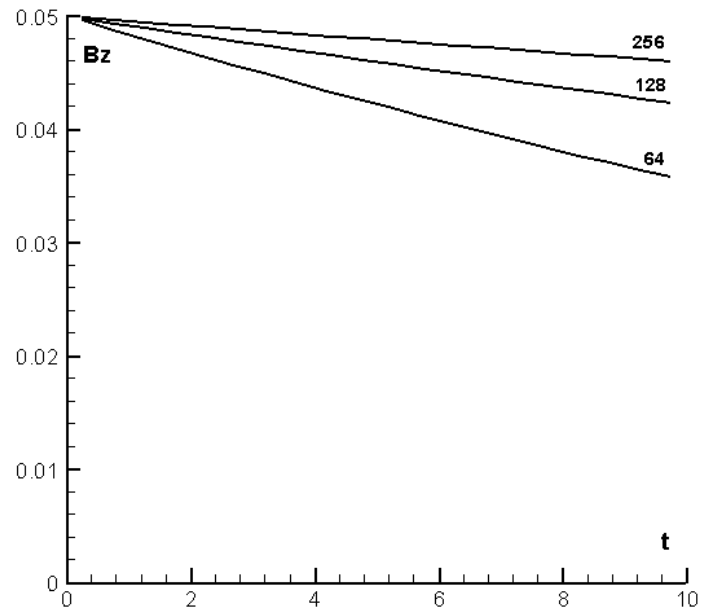


Рис. 1 Тест 1.: графики амплитуды z-компоненты магнитного поля при расчетах на различных сетках. Числами показаны значения  $N$ .

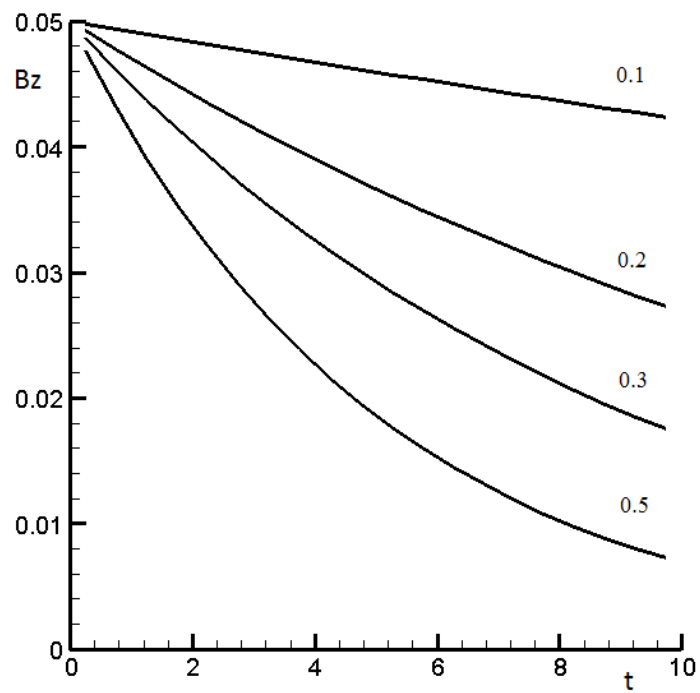


Рис. 2 Тест 1.: графики амплитуды z-компоненты магнитного поля при расчетах на сетке  $N = 128$  при различных значениях  $\alpha$ .



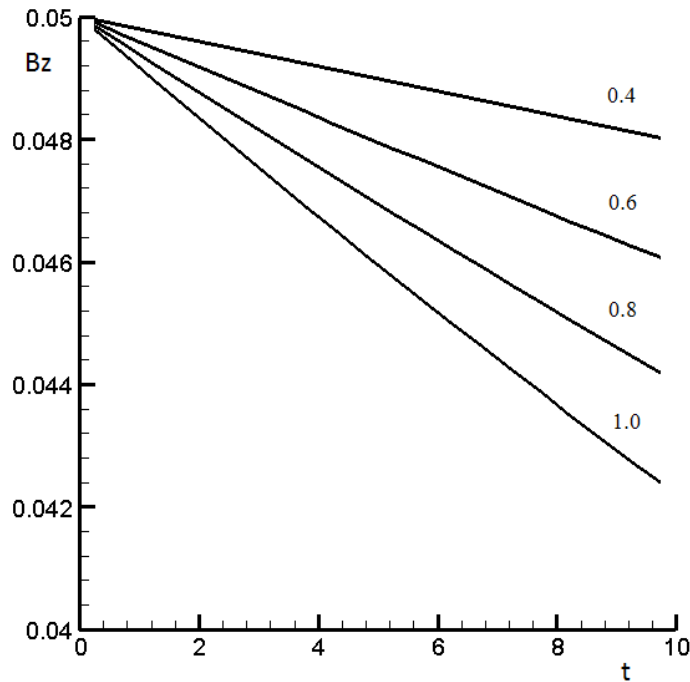


Рис. 3 Тест 1.: графики амплитуды z-компоненты магнитного поля на сетке  $N = 128$  при различных значениях числа Шмидта  $Sc$ .

Наименьшее значение диссипации численной схемы, при которой еще сохраняется устойчивость решения, соответствует значениям параметров  $\alpha = 0.1$  и числа Шмидта  $Sc = 0.4$  на сетке  $N = 128$ .

### 3.2 Тест.2: Распространение циркулярно-поляризованной альвеновской волны.

Данная тестовая задача была рассмотрена в работе [3] для сравнения точности и порядка сходимости численных схем на гладких решениях. Альвеновская волна распространяется вдоль диагонали сетки под углом  $\theta = \text{tg}^{-1}(0.5) \approx 26.6^\circ$  к оси  $x$ . Вычислительная область имеет размер  $L_x = 2L_y$ , с числом ячеек  $N_x = 2N_y$ . Поскольку волна не двигается вдоль диагоналей отдельных ячеек, то проблема имеет истинно многомерный характер. Начальные условия имеют вид:

$$\rho = 1, u_{\parallel} = 0, u_{\perp} = 0.1 \sin(2\pi\xi), u_z = 0.1 \cos(2\pi\xi)$$

$$p = 1, B_{\parallel} = 1, B_{\perp} = 0.1 \sin(2\pi\xi), B_z = 0.1 \cos(2\pi\xi)$$

где  $\xi = x \cos\theta + y \sin\theta$ . Здесь  $u_{\parallel}, u_{\perp}, B_{\parallel}, B_{\perp}$  являются компонентами скорости и магнитного поля направленными параллельно и перпендикулярно направлению

движения альвеновской волны. Волна распространяется в направлении точки  $(x, y) = (0, 0)$  со скоростью  $B_{\parallel} / \sqrt{\rho} = 1$ . Задача решалась при  $N = 16, 32, 64, 128, 256$  численных ячеек в  $x$  направлении, при этом относительная численная ошибка оценивалась для каждой величины по формуле

$$\delta_N(U) = \frac{\sum_{i=1}^{2N} \sum_{j=1}^N |U_{ij}^N - U_{ij}^E|}{\sum_{i=1}^{2N} \sum_{j=1}^N |U_{ij}^E|}, \text{ для } U = u_{\perp}, u_z, B_{\perp}, B_z$$

где  $U_{ij}^E$  – точное решение. Скорость сходимости схемы оценивалась как

$$R_N = \log_2(\delta_{N/2} / \delta_N)$$

где в качестве  $\delta_N$  бралось среднее

$$\delta_N = \frac{1}{4} (\delta_N(u_{\perp}) + \delta_N(u_z) + \delta_N(B_{\perp}) + \delta_N(B_z))$$

Расчеты проводились до момента времени  $t = 5$  с числом Куранта  $\beta = 0.2$ , параметром  $\alpha = 0.1$ , показателем адиабаты  $\gamma = 5/3$ , применялись периодические граничные условия. На рис. 4 представлена ортогональная компонента  $B_{\perp}$  магнитного поля при расчетах на различных сетках. Числами показаны значения  $N$ . Видно, что при увеличении  $N$  решение задачи приближается к точному решению. В таблице 1 представлены усредненная относительная ошибка и скорость сходимости. Результаты подтверждают, что при увеличении разрешения численная схема имеет первый порядок точности по пространству и времени.

Таблица 1. Относительная ошибка и порядок точности для теста 2 при  $u_{\parallel} = 0$ .

| $N$ | $\delta_N$ | $R_N$  |
|-----|------------|--------|
| 16  | 1.4912e-0  | -      |
| 32  | 6.8607e-1  | 1.1240 |
| 64  | 2.0818e-1  | 1.7268 |
| 128 | 6.9952e-2  | 1.5782 |
| 256 | 2.8878e-2  | 1.2811 |

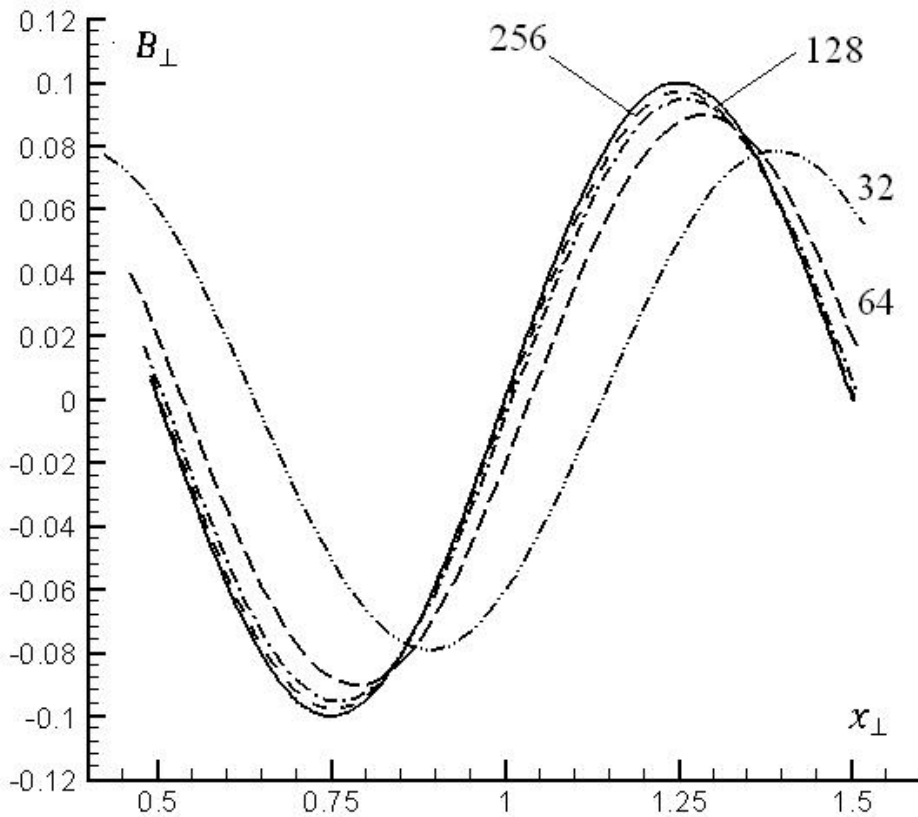


Рис. 4 Тест 2: графики амплитуды перпендикулярной компоненты магнитного поля при расчетах на различных сетках. Числами показаны значения  $N$ .

Были проведены расчеты также для случая стоячей альвеновской волны при  $u_{\parallel} = 1$ . На рис. 5 представлена ортогональная компонента  $B_{\perp}$  магнитного поля при расчетах на различных сетках. Числами показаны значения  $N$ . В таблице 2 приведены усредненная относительная ошибка и скорость сходимости. Видно, что при увеличении  $N$  решение задачи очень быстро приближается к точному решению и порядок сходимости близок к единице уже при малых  $N$ .

Таблица 2. Относительная ошибка и порядок точности для теста 2 при  $u_{\parallel} = 1$ .

| $N$ | $\delta_N$ | $R_N$  |
|-----|------------|--------|
| 16  | 1.2671e-1  | -      |
| 32  | 6.4888e-2  | 0.9688 |
| 64  | 3.2914e-2  | 0.9825 |
| 128 | 1.6569e-2  | 0.9935 |
| 256 | 8.3133e-3  | 0.9984 |

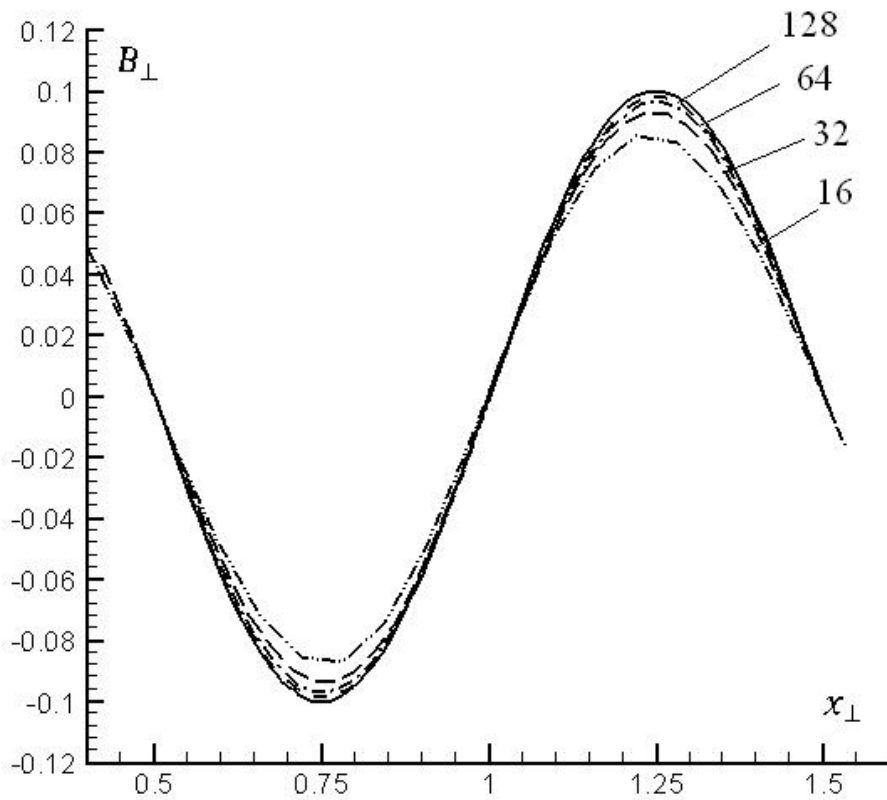


Рис. 5 Тест 2: графики амплитуды перпендикулярной компоненты магнитного поля при расчетах на различных сетках в случае стоячей волны. Числами показаны значения  $N$ .

### 3.3 Тест.3: Распространение взрывной волны в замагниченной среде.

В этой проблеме исследуется распространение начального конечного возмущения давления в среде с наложенным магнитным полем [4]. Задача решается в квадратной области со стороной  $L = 1$  и числом ячеек  $400 \times 400$ . В начальный момент времени во всей области начальная плотность  $\rho = 1$  и давление  $p = 1$  за исключением центральной области радиусом  $r = 0.05$ , в которой давление  $p = 1000$ . Магнитное однородное поле имеет величину  $B = 10$  и направлено вдоль оси  $x$ . Расчеты проводились до момента времени  $t = 0.02$  с числом Куранта  $\beta = 0.1$ , параметром  $\alpha = 0.4$ , показателем адиабаты  $\gamma = 1.4$ , на границе области градиенты всех величин были равны нулю. На рис. 6, 7, 8, 9 показаны результаты решения задачи на конечный момент времени.

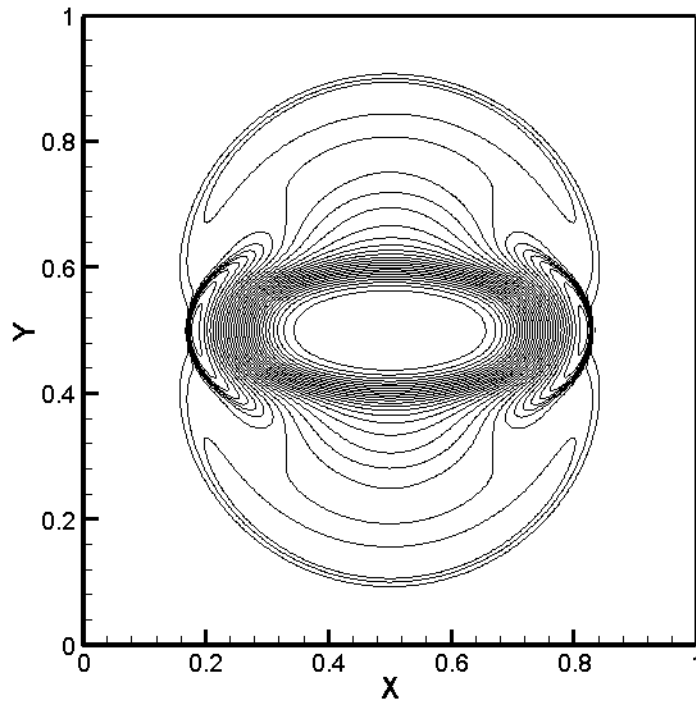


Рис.6 Тест 3: Распределение десятичного логарифма плотности.

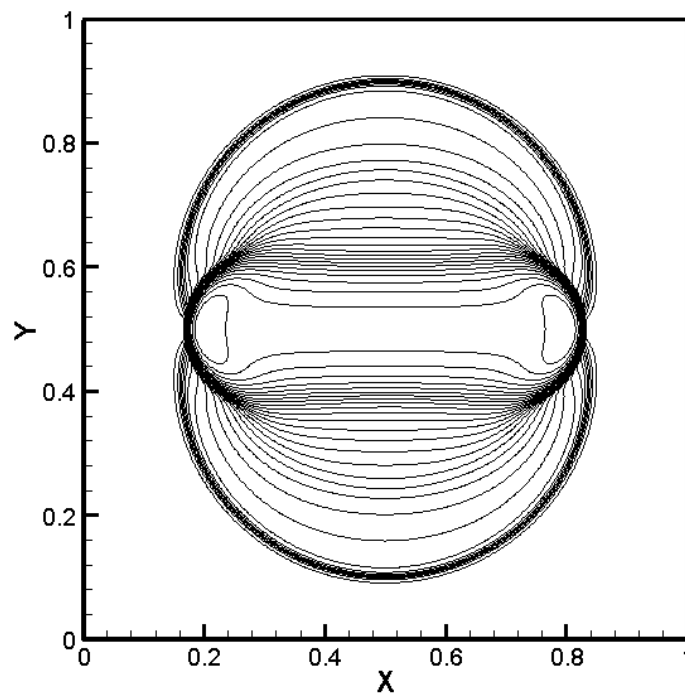


Рис.7 Тест 3: Распределение десятичного логарифма давления.

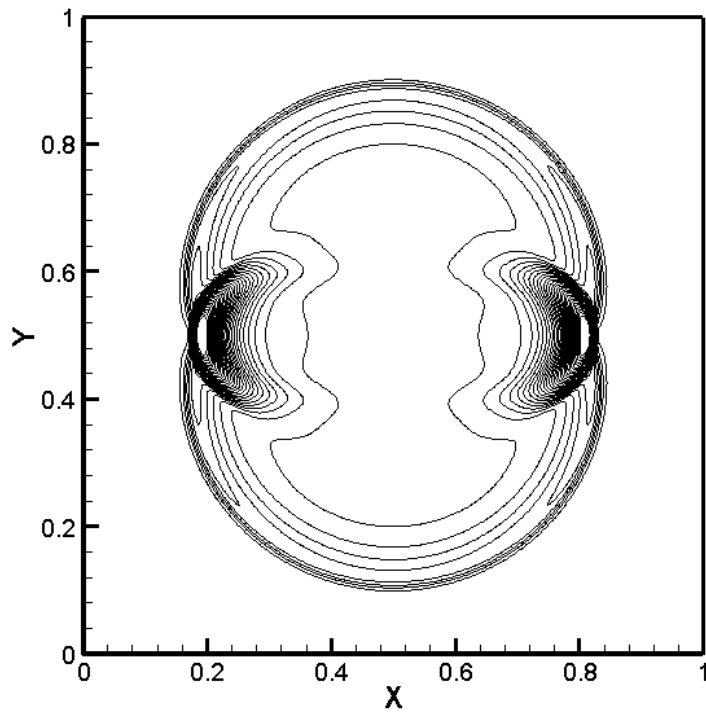


Рис.8 Тест 3: Распределение кинетической энергии.

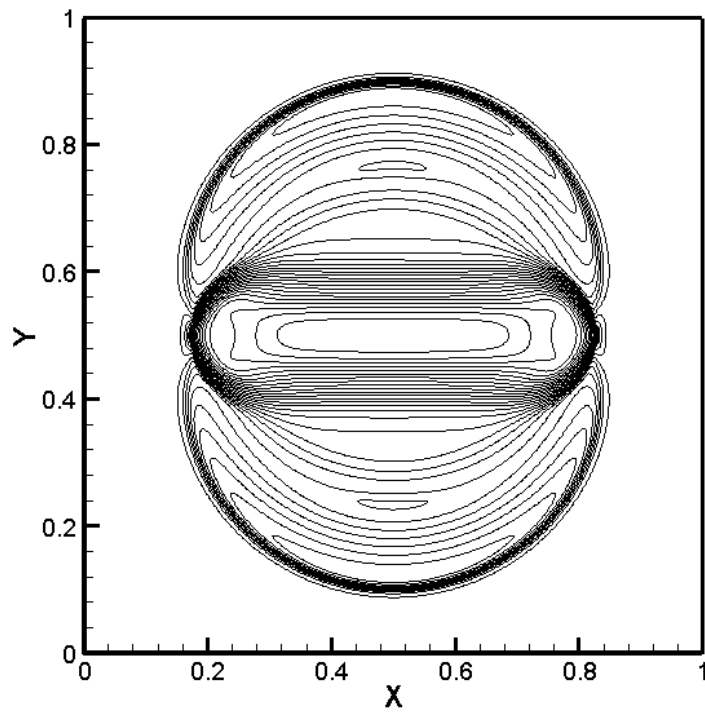


Рис.9 Тест 3: Распределение десятичного логарифма магнитной энергии.

Магнитное поле вводит анизотропию в расширении вещества. Под действием давления вещество ускоряется вдоль силовых линий магнитного поля, на границе в середине области видны ударные волны, содержащие повышенную кинетическую и магнитную энергию. В центре квадрата образуется разреженная область с пониженной плотностью и давлением и преобладанием магнитной энергии над кинетической и тепловой энергией. Несмотря на большой начальный перепад давления и высокую замагниченность среды в центральной части расчетной области на конечной стадии расширения вещества численная схема КМГД дает положительность давления и плотности и передает все характерные разрывы с хорошей точностью для схемы первого порядка по пространству и времени.

### 3.4 Тест.4: Двумерная проблема Римана с четырьмя состояниями с магнитным полем.

Исследуется образование структур при взаимодействии четырех состояний с наложенным магнитным полем [5,6]. Начальные условия имеют вид:

$$(\rho, p, u_x, u_y) = (1., 1., 0.75, 0.5) \text{ при } x > 0, y > 0$$

$$(\rho, p, u_x, u_y) = (2., 1., 0.75, 0.5) \text{ при } x < 0, y > 0$$

$$(\rho, p, u_x, u_y) = (1., 1., -0.75, 0.5) \text{ при } x < 0, y < 0$$

$$(\rho, p, u_x, u_y) = (3., 1., -0.75, -0.5) \text{ при } x > 0, y < 0$$

Задача решается в квадратной области со стороной  $L = 1$ . Задано однородное магнитное поле  $\vec{B} = (2., 0., 1.)$ . Решение вычислено на момент времени  $t = 0.8$  на сетке  $400 \times 400$  с числом Куранта  $\beta = 0.1$ , параметром  $\alpha = 0.4$ , показателем адиабаты  $\gamma = 1.4$ . На границе области градиенты всех величин были равны нулю. На рис. 10, 11, 12, 13 показаны результаты решения задачи на конечный момент времени. В центре квадрата образуется разреженная область с пониженным давлением и магнитной энергией, силовые линии магнитного поля сильно искривляются и расходятся. В середине квадрата вдали от центра на краях вихревой области видно образование волн сжатия с увеличением плотности, давления, магнитной энергии и значительной концентрацией силовых линий магнитного поля. Линий уровней плотности и магнитной энергии с достаточной точностью передают структуру вихревого течения.

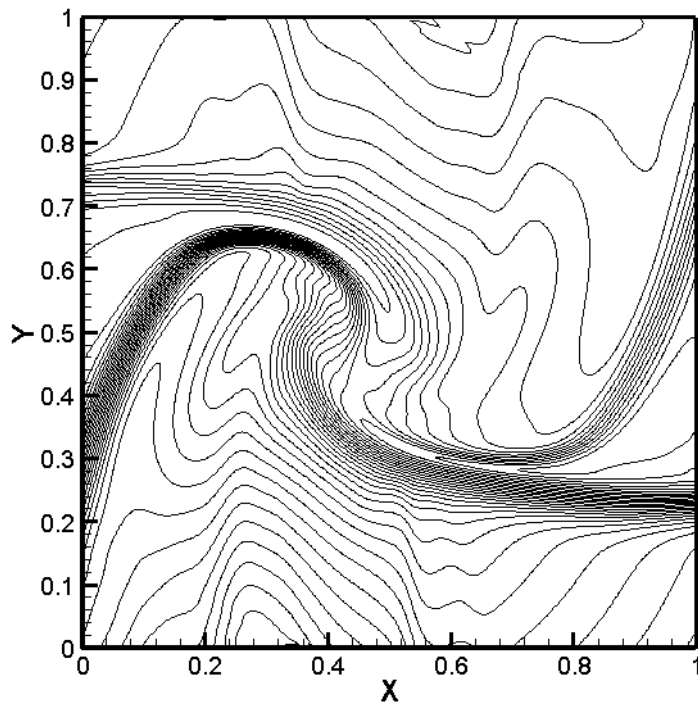


Рис.10 Тест 4: Распределение линий уровней плотности.

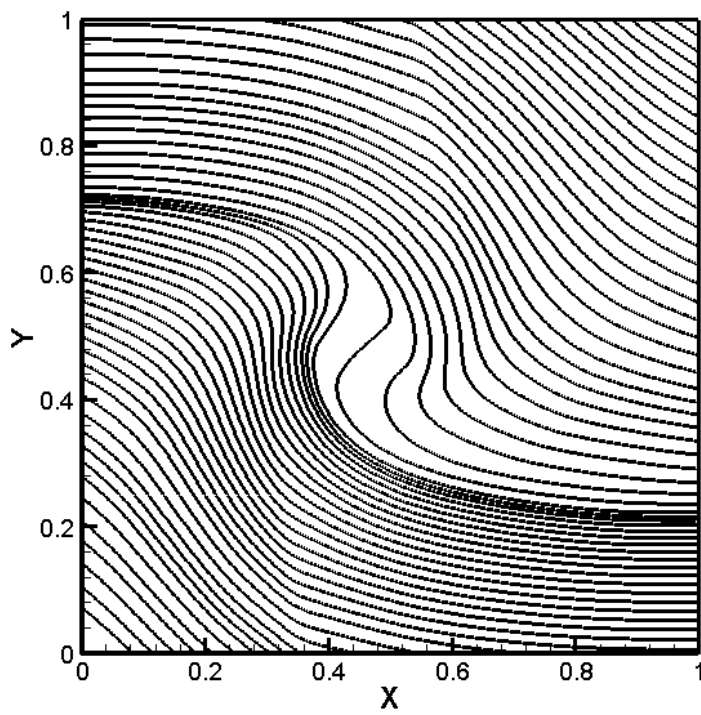


Рис.11 Тест 4: Силовые линии магнитного поля.



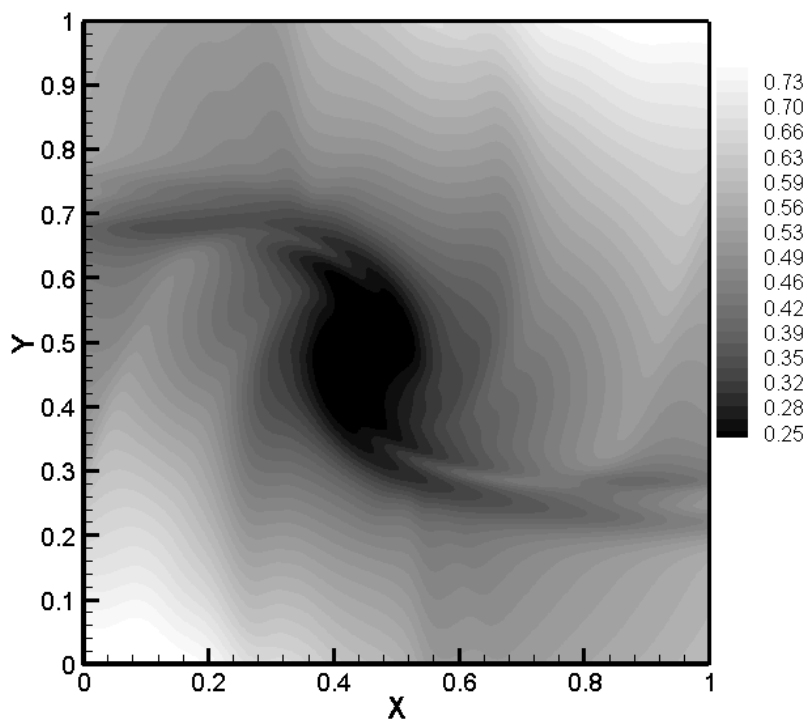


Рис.12 Тест 4: Распределение магнитной энергии.

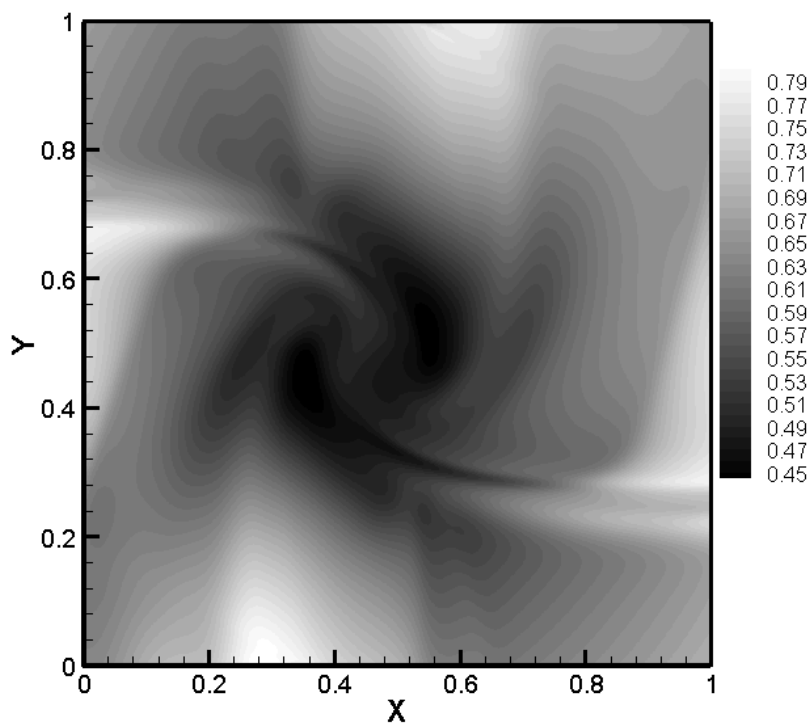


Рис.13 Тест 4: Распределение давления.

### 3.5 Тест.5: Вихрь Орзага - Танга.

В этой проблеме рассматривается образование сложной структуры ударных волн при сверхзвуковой турбулентности [6]. Задача решается в квадратной области со стороной  $L = 1$ . Начальные условия имеют вид:

$$\rho = 25/(36\pi), \quad p = 5/(12\pi), \quad u_x = -\sin(2\pi y), \quad u_y = \sin(2\pi x), \quad u_z = 0.$$
$$B_x = -B_0 \sin(2\pi y), \quad B_y = B_0 \sin(4\pi x), \quad B_z = 0.$$

Решение вычислено на момент времени  $t = 0.5$  на сетке  $400 \times 400$  с числом Куранта  $\beta = 0.2$ , параметром  $\alpha = 0.3$ , показателем адиабаты  $\gamma = 5/3$ . Использовались периодические граничные условия. На рис. 15 показано распределение линий уровней плотности на конечный момент времени.

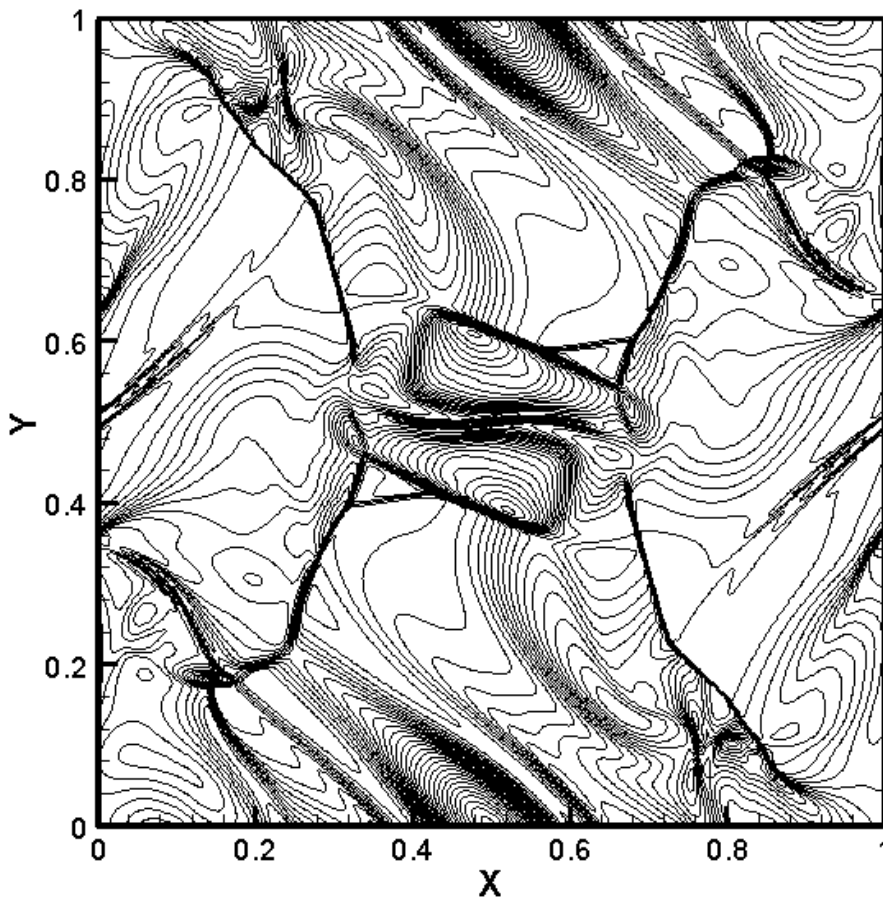


Рис.15 Тест 5: Распределение линий уровней давления в диапазоне 0.05 до 0.5 с шагом 0.015 на момент  $t = 0.5$ .

На рис. 16,17 показаны графики давления в сечениях двумерной плоскости вдоль линий  $y = 0.3125(j = 130)$  и  $y = 0.4277(j = 176)$ , соответственно по которым можно оценить точность передачи разрывов в решении. Штриховой линией показан результат на сетке с  $N = 400$ , сплошной линией с  $N = 800$ .

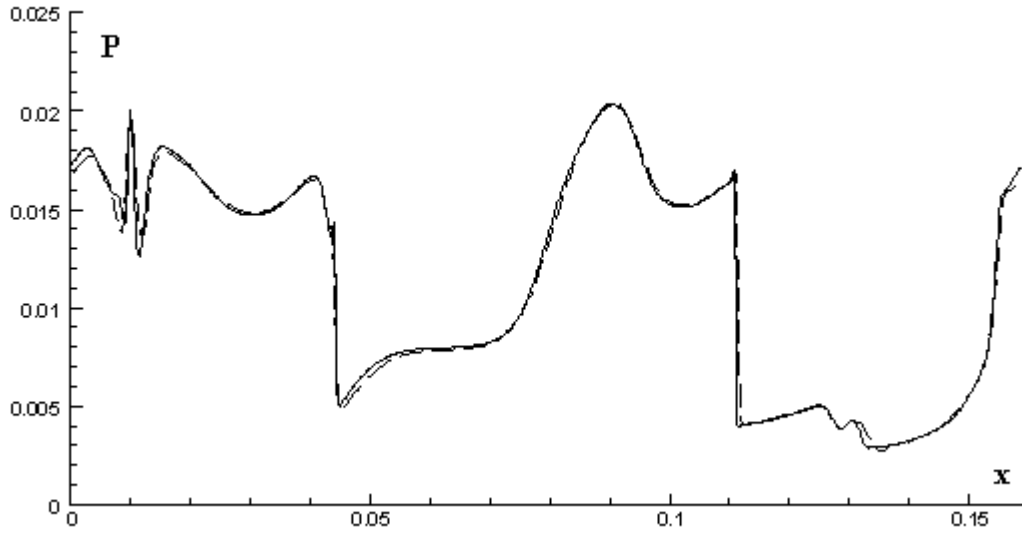


Рис.16 Тест 5: Давление вдоль линии  $y = 0.3125$ .

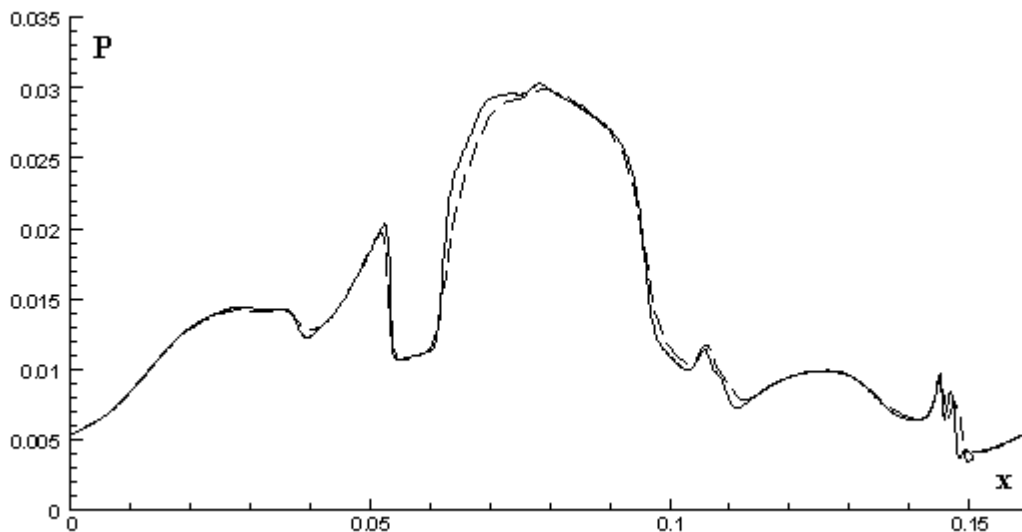


Рис.17 Тест 5: Давление вдоль линии  $y = 0.4277$ .

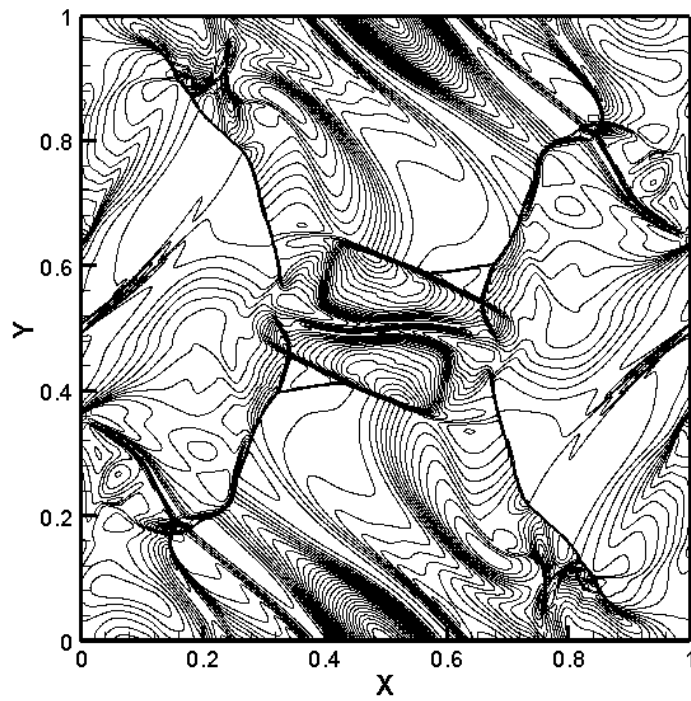


Рис.18 Тест 5: Распределение давления на сетке  $800 \times 800$  .

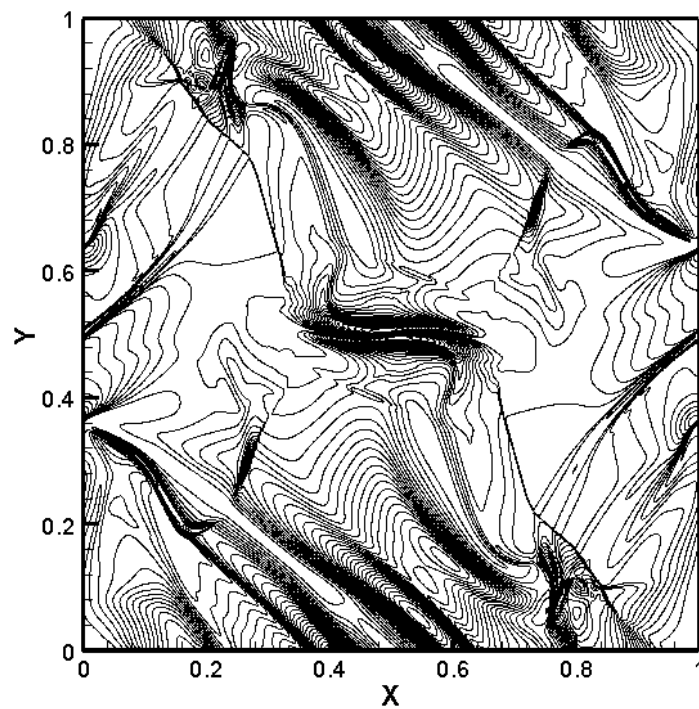


Рис.19 Тест 5: Распределение магнитной энергии на сетке  $800 \times 800$ .

### 3.6 Тест.6: Взаимодействие ударной волны с облаком.

Рассматривается проблема разрушения облака под действием ударной волны в магнитном поле [7]. Задача решается в квадратной области со стороной  $L = 1$ . В начальный момент времени задаются два постоянных состояния

$$U_l = (3.86859, 11.2536, 0., 0., 167.345, 0., 2.1826182, -2.1826182)$$

$$U_r = (1., 0., 0., 0., 1., 0., 0.56418958, 0.56418958),$$

связанные с ударной волной, и разделенные плоскостью  $x = 0.05$ . Здесь  $U = (\rho, u_x, u_y, u_z, p, B_x, B_y, B_z)$ . Сферическое облако с плотностью  $\rho = 10$  и радиусом  $r = 0.15$  устанавливается в гидростатическом равновесии с внешней средой в точке с координатами  $(0.3, 0.5)$ . Решение вычислено на момент времени  $t = 0.06$  на сетке  $400 \times 400$  с числом Куранта  $\beta = 0.1$ , параметром  $\alpha = 0.4$ , показателем адиабаты  $\gamma = 5/3$ , на границе области градиенты всех величин были равны нулю. На рис. 20, 21, 22 показано распределение линий уровней десятичного логарифма плотности и магнитной энергии, давления соответственно.

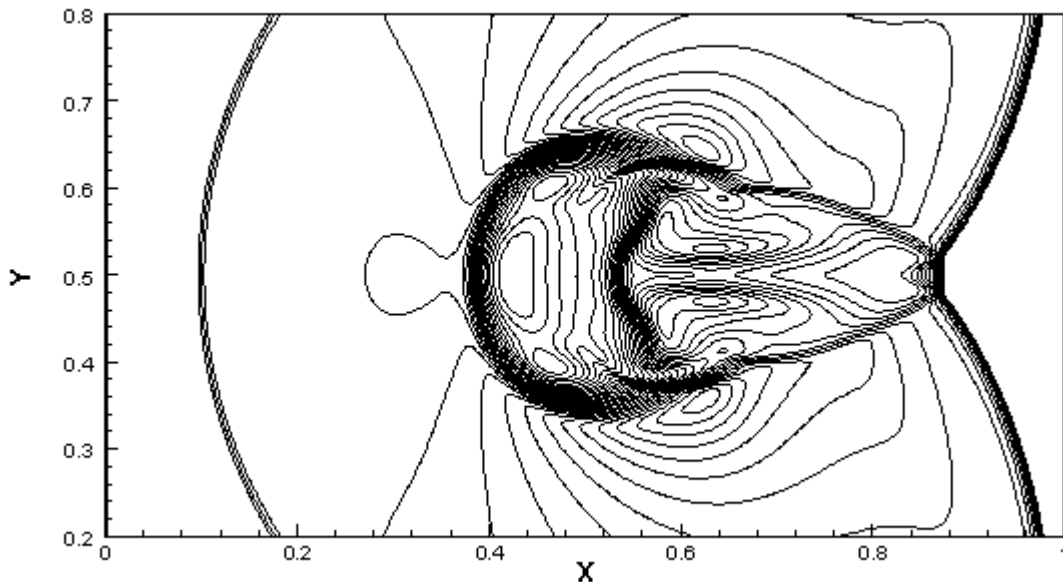


Рис.20. Тест 6: Распределение линий уровней десятичного логарифма плотности.

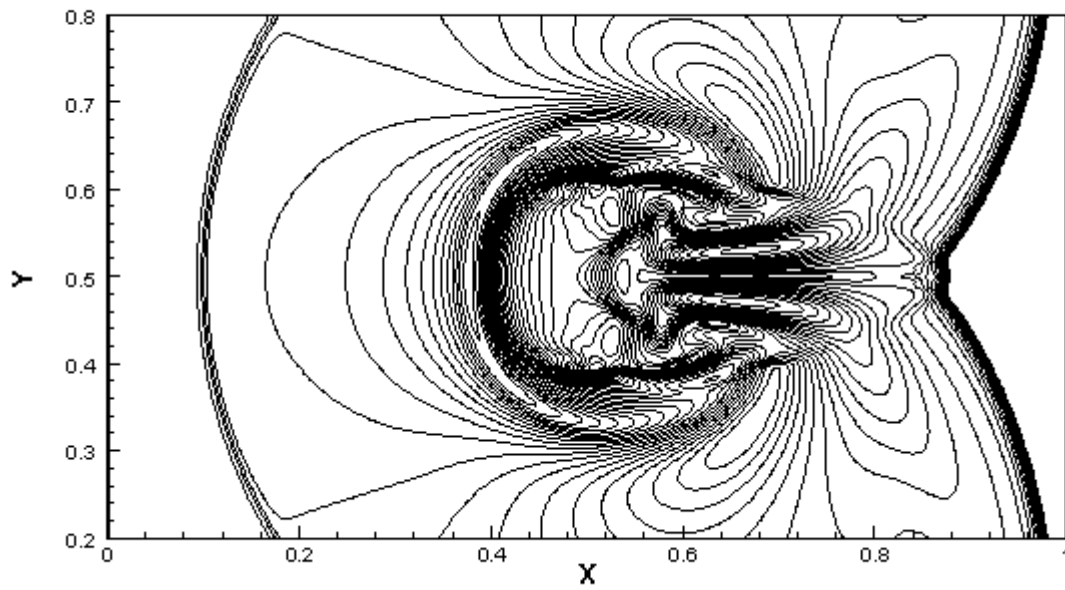


Рис.21. Тест 6: Распределение линий уровней десятичного логарифма магнитной энергии.

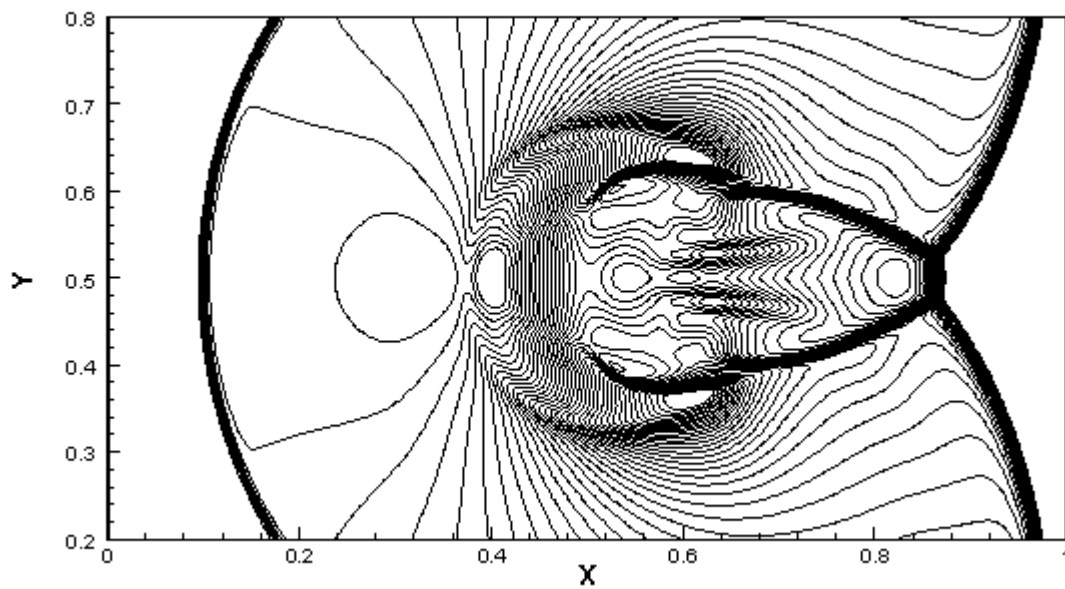


Рис.22. Тест 6: Распределение линий уровней десятичного логарифма давления.

#### 4. Заключение

В данной работе показано, что КМГД метод расчета уравнений сжимаемой магнитной гидродинамики позволяет на основе единого подхода моделировать широкий круг нестационарных МГД задач. При подобранных параметрах настройки КМГД алгоритма, многомерные расчеты дают аккуратное представление распределений для всех физических переменных в гладкой части решения и на разрывах. Для всех рассмотренных примеров расчеты показывают уверенную сходимость численного решения к точному решению при сгущении пространственной сетки. Простота численной реализации, однородность алгоритма делают КМГД подход конкурентно-способным по сравнению с существующими численными методами решения уравнений идеальной магнитогидродинамики.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 10-01-00136).

#### Список литературы.

1. *Т. Г. Елизарова, С. Д. Устюгов* Квазигазодинамический алгоритм решения уравнений магнитной гидродинамики. Одномерный случай, Препринт ИПМ № 1, Москва, 2011 г., 20 с.
2. *Ю.В. Шеретов* Динамика сплошных сред при пространственно—временном осреднении. Москва—Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009., 400 с.
3. *T.A. Gardiner, J.M. Stone* An unsplit Godunov method for ideal MHD via constrained transport, *J. Comp. Phys.* **205**, 2005, p. 509.
4. *D.S. Balsara* Total variation diminishing scheme for adiabatic and isothermal magnetohydrodynamics, *ApJ* **116**, 1998, p. 133.
5. *W. Dai, P. Woodward* An a simple finite difference scheme for multidimensional magnetohydrodynamical equations, *J. Comp. Phys.* **142**, 1998, p. 331.
6. *P. Arminjon, R. Touma* Central finite volume methods with constrained transport divergence treatment for ideal MHD, *J. Comp. Phys.* **204**, 2005, p. 737.
7. *G. Tóth*, The  $\nabla \cdot B = 0$  constraint in shock-capturing magnetohydrodynamics codes, *J. Comp. Phys.* **161**, 2000, p. 605.