



Ивашкин В.В., Петухов В.Г.

Траектории перелета с
малой тягой между
орбитами спутников Земли и
Луны при использовании
орбиты захвата Луной

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Ивашкин В.В., Петухов В.Г. Траектории перелета с малой тягой между орбитами спутников Земли и Луны при использовании орбиты захвата Луной // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2008. № 81. 32 с.
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2008-81>

ISSN 2071-2898



Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской Академии наук

В.В. Ивашкин, В.Г. Петухов

**ТРАЕКТОРИИ ПЕРЕЛЁТА С МАЛОЙ ТЯГОЙ
МЕЖДУ ОРБИТАМИ СПУТНИКОВ ЗЕМЛИ И ЛУНЫ
ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ОРБИТЫ ЗАХВАТА ЛУНОЙ**

Препринт № 81 за 2008 г.

Москва

**ТРАЕКТОРИИ ПЕРЕЛЕТА С МАЛОЙ ТЯГОЙ
МЕЖДУ ОРБИТАМИ СПУТНИКОВ ЗЕМЛИ И ЛУНЫ ПРИ
ИСПОЛЬЗОВАНИИ ОРБИТЫ ЗАХВАТА ЛУНОЙ**

АННОТАЦИЯ. В работе представлены результаты исследования задачи перелета космического аппарата (КА) с низкой круговой орбиты искусственного спутника Земли (ИСЗ) на низкую круговую орбиту искусственного спутника Луны (ИСЛ). Для уменьшения энергетических затрат перелета в качестве промежуточной орбиты используется предварительно полученная геоцентрическая орбита захвата Луной. При пассивном движении по этой орбите происходит вход КА в сферу действия Луны в районе точки либрации L_1 и последующее движение к Луне по селеноцентрической эллиптической орбите. Траектория перелета между орбитами ИСЗ и ИСЛ рассматривается в рамках задачи четырех тел (КА, Земля с учетом ее сжатия, Луна и Солнце), при управлении с помощью малой тяги. Весь перелет состоит из трех участков. Сначала осуществляется активный управляемый геоцентрический перелет с начальной орбиты ИСЗ на промежуточную геоцентрическую орбиту захвата. Затем осуществляется пассивный перелет по дуге этой орбиты захвата и вход КА в сферу действия Луны. На конечном участке полета осуществляется активный управляемый селеноцентрический перелет с промежуточной орбиты на конечную орбиту ИСЛ. Приведены геометрические, временные и энергетические характеристики перелета. Работа выполнена при поддержке РФФИ (Гранты 06-01-00531, 06-08-01307-а, 07-01-12060-офи) и программы поддержки научных школ (Грант НШ 1123.2008.1).

Ключевые слова: перелет Земля-Луна, малая тяга, орбита захвата, оптимальные космические траектории.

TRAJECTORIES FOR FLIGHT BETWEEN EARTH AND MOON SATELLITE ORBITS USING INTERMEDIATE ORBIT WITH CAPTURE BY MOON

ABSTRACT. Some results for the study of the spacecraft (SC) flight from low-Earth orbit of the Earth artificial satellite (EAS) to low-Moon orbit of the Moon artificial satellite (MAS) are given in the preprint. To decrease the energy consumption for the transfer, an intermediate geocentric orbit with the capture by the Moon is received previously and used in this trajectory. During a passive motion along this orbit, the SC comes in the Lunar sphere of influence near the libration point L_1 and goes to the Moon along selenocentric elliptic orbit. The trajectory for the transfer between the EAS and MAS orbits is studied in frame of the four-body problem (SC, Earth with taking into account its oblateness, Moon and Sun). The control is performed by a low thrust. All the flight consists of three parts. At first, an active controlled geocentric flight from the initial orbit of the EAS to the intermediate geocentric orbit of the capture is performed. Then, a passive flight along an arc of the capture orbit and the SC coming in the Lunar sphere of influence is realized. At the final part of the trajectory, an active controlled selenocentric flight from the intermediate orbit to the final orbit of the MAS is performed. Some geometric, energy and time characteristics of the flight are given. The study is supported by the Russian Foundation for Basic Research (Grants N 06-01-00531, 06-08-01307-a, 07-01-12060-ofi) and by the Grant of the President of Russia for the State Support of Leading Scientific Schools NSh-1123.2008.1.

Key words: Earth-Moon flight, low thrust, capture orbit, optimal space trajectories.

СОДЕРЖАНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ.....	5
2. ПРОМЕЖУТОЧНАЯ ОРБИТА ЗАХВАТА.....	7
3. МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ «КВАЗИОПТИМАЛЬНОГО» УПРАВЛЕНИЯ ПРИ ПЕРЕЛЕТЕ С МАЛОЙ ТЯГОЙ.....	11
4. ТРАЕКТОРИЯ ПЕРЕЛЕТА С НАЧАЛЬНОЙ ОРБИТЫ СПУТНИКА ЗЕМЛИ НА ОРБИТУ ЗАХВАТА.....	16
5. ТРАЕКТОРИЯ ПЕРЕЛЕТА С ОРБИТЫ ЗАХВАТА НА КОНЕЧНУЮ ОРБИТУ СПУТНИКА ЛУНЫ.....	22
6. СУММАРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЕРЕЛЕТА ОТ ЗЕМЛИ К ЛУНЕ...	27
7. ВЫВОДЫ.....	29
8. ЛИТЕРАТУРА.....	30

CONTENTS

1. INTRODUCTION.....	5
2. INTRMEDIATE ORBIT WITH CAPTURE.....	7
3. METHOD FOR CONSTRUCTING “QUASI-OPTIMAL” CONTROL FOR FLIGHT WITH LOW THRUST.....	11
4. FLIGHT FROM INITIAL ORBIT OF EARTH ARTIFICIAL SATELLITE TO CAPTURE ORBIT.....	16
5. FLIGHT FROM CAPTURE ORBIT TO FINAL ORBIT OF MOON ARTIFICIAL SATELLITE	22
6. SUMMARY CHARACTERISTICS OF EARTH-MOON FLIGHT.....	27
7. CONCLUSIONS.....	29
8. REFERENCES.....	30

1. ВВЕДЕНИЕ

Перелет между Землей и Луной является одной из важнейших задач космонавтики. Большая часть реализованных проектов в этой проблеме осуществлена в рамках обычных «прямых» перелетов Земля-Луна и Луна-Земля с двигателями большой тяги [1]. В этом случае при перелете Земля-Луна разгон от Земли делается с помощью одного или нескольких активных участков у Земли, полет в сфере действия Луны осуществляется по гиперболической орбите [2-4], вблизи Луны с помощью одного или нескольких активных участков производится торможение для посадки на поверхность Луны или для перехода на орбиту искусственного спутника Луны (ИСЛ). Актуальной является задача уменьшения энергетики перелета, т.е. расхода топлива. Это осуществляется двумя путями.

Во-первых, расход топлива уменьшается при переходе к использованию более совершенных электро-реактивных двигателей малой тяги, имеющих более высокую скорость истечения, т.е. более высокую удельную тягу. Полет Европейского КА “SMART-1” реализовал эту возможность [5, 6].

Во-вторых, уменьшение энергетики перелета между Землей и Луной дает использование орбит с захватом Луной. Еще В.А. Егоров отмечал [2-4], что для получения орбиты захвата Луной при полете от Земли надо увеличить константу площадей орбиты. Для достижения этого впоследствии были выявлены два способа. Это можно сделать, во-первых, с помощью малой тяги. По-видимому, впервые это было показано Е. Velbruno [7]. При «раскрутке» орбиты с помощью малой тяги в некоторый момент была получена геоцентрическая орбита, последующее движение по которой приводит КА в сферу действия Луны, причем движение там происходит по селеноцентрической эллиптической (а не гиперболической) орбите. И впоследствии этот способ был фактически использован при полете КА “SMART-1”. Кроме того, захват Луной может быть осуществлен при полете с большой тягой с помощью «обходной» схемы. Предложенная сначала для обычных перелетов в кеплеровском поле (А. Штернфельд, [8, 9]) и для перелетов между Землей и геостационарной орбитой [10 - 14], она затем была распространена на перелеты от Земли к Луне в рамках проблемы четырех тел КА-Земля-Луна-Солнце. Здесь увеличение константы площадей осуществляется с помощью солнечного гравитационного возмущения, а координацией последующего движения КА, Луны и

Земли можно получить селеноцентрическую эллиптическую орбиту, т.е. получим временный захват Луной ([15-23] и др.).

В настоящей работе рассматривается перелет с малой электрореактивной тягой с близкой к Земле круговой орбиты ИСЗ на низкую круговую орбиту искусственного спутника Луны (ИСЛ). Для уменьшения энергетических затрат перелета в качестве промежуточной орбиты используется предварительно полученная геоцентрическая орбита захвата Луной. При пассивном движении по этой орбите происходит вход КА в сферу действия Луны в районе точки либрации L_1 и последующее движение к Луне по селеноцентрической эллиптической орбите. Траектория перелета между орбитами ИСЗ и ИСЛ рассматривается в рамках задачи четырех тел (КА, Земля с учетом ее сжатия, Луна и Солнце), при управлении с помощью малой тяги. Весь перелет состоит из трех участков. Сначала осуществляется активный управляемый геоцентрический перелет с начальной орбиты ИСЗ на промежуточную геоцентрическую орбиту захвата. Затем осуществляется пассивный перелет по дуге этой орбиты захвата и вход КА в сферу действия Луны. На конечном участке полета осуществляется активный управляемый селеноцентрический перелет с промежуточной орбиты на конечную орбиту ИСЛ.

Приняты следующие параметры двигательной установки: тяга двигателя $P=0,1$ Н, удельная тяга $P_{уд}=1640$ с.

Принято, что начальная орбита ИСЗ имеет высоту ~ 500 км, наклонение ~ 28.5 град и 51.5 град. Начальная масса КА $m_0=1000$ кг. Конечная орбита ИСЛ имеет высоту ~ 300 км и 4000 км, наклонение ~ 90 град.

В разделе 2 приведены характеристики промежуточной орбиты захвата. В разделе 3 кратко описан метод построения использованного «квазиоптимального» управления при полете с малой тягой. В разделе 4 приведены характеристики траектории перелета с начальной круговой орбиты низкого спутника Земли на промежуточную орбиту захвата. В разделе 5 приведены характеристики траектории перелета с промежуточной орбиты захвата на конечную круговую орбиту низкого спутника Луны. В разделе 6 приведены суммарные характеристики траектории перелета от Земли к Луне.

2. ПРОМЕЖУТОЧНАЯ ОРБИТА ЗАХВАТА

В качестве промежуточной орбиты выбрана такая геоцентрическая орбита, при пассивном движении по которой происходит вход КА в сферу действия Луны в районе точки либрации L_1 и последующее движение к Луне по селеноцентрической эллиптической орбите. Эта орбита (и вся траектория перелета между орбитами ИСЗ и ИСЛ) рассматривается в рамках задачи четырех тел (КА, Земля с учетом ее сжатия, т.е. 2-ой зональной гармоники J_2 , Луна и Солнце) и определяется численным интегрированием системы дифференциальных уравнений движения точки в невращающейся геоэкваatorialной геоцентрической системе прямоугольных координат OXYZ. При этом используется среднее равноденствие и средний геоэкваатор стандартной эпохи J2000.0. Система дифференциальных уравнений, описывающая движение КА, имеет вид [24-27]:

$$d\mathbf{r} / dt = \mathbf{V}, d\mathbf{V} / dt = - (\mu_E/r^3)\mathbf{r} + \mathbf{a}_E + \mathbf{a}_M + \mathbf{a}_S + \mathbf{P}/m. \quad (2.1)$$

Здесь $\mathbf{r} (x, y, z)$, $\mathbf{V} (V_x, V_y, V_z)$ – радиус-вектор и вектор скорости КА, $r=|\mathbf{r}|$; μ_E – гравитационный параметр Земли; \mathbf{P} – тяга двигателя (при движении по промежуточной орбите $\mathbf{P}=0$), m – масса КА, $\mathbf{a}_E (a_{Ex}, a_{Ey}, a_{Ez})$, \mathbf{a}_M , \mathbf{a}_S – возмущающие ускорения, вызванные нецентральностью поля тяготения Земли, притяжением Луны, Солнца:

$$\begin{aligned} a_{Ex} &= a_{E0} [-1+5z^2/r^2]x/r; \\ a_{Ey} &= a_{E0} [-1+5z^2/r^2]y/r; \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} a_{Ez} &= a_{E0} [-3+5z^2/r^2]z/r; \\ a_{E0} &= 3\mu_E J_2 R_e^2 / (2r^4); \\ \mathbf{a}_M &= \mu_M \{ -\mathbf{r}_M / r_M^3 + (\mathbf{r}_M - \mathbf{r}) / |\mathbf{r}_M - \mathbf{r}|^3 \}; \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\mathbf{a}_S = \mu_S \{ -\mathbf{r}_S / r_S^3 + (\mathbf{r}_S - \mathbf{r}) / |\mathbf{r}_S - \mathbf{r}|^3 \}; \quad (2.4)$$

где R_e , J_2 – экваториальный радиус и коэффициент 2-ой зональной гармоники геопотенциала Земли, μ_M , μ_S – гравитационные параметры Луны и Солнца, \mathbf{r}_M , \mathbf{r}_S – геоцентрические радиус-векторы Луны и Солнца, $r_M=|\mathbf{r}_M|$, $r_S=|\mathbf{r}_S|$.

Использованы следующие значения констант:

$$\mu_E = 398.6004481 \text{ тыс.км}^3/\text{тыс.с}^2;$$

$$\mu_M = 4.90279914 \text{ тыс.км}^3/\text{тыс.с}^2;$$

$$\mu_S = 132712439.935 \text{ тыс.км}^3/\text{тыс.с}^2;$$

$$J_2 = 0.0010826348; R_e = 6.378136 \text{ тыс.км.}$$

Время t отсчитывается от эпохи D0= 2000 г, 22 декабря, 0 час.

Для нее юлианская дата DJ0 = 2451898.5.

Эфемеридная поправка принята равной нулю.

При определении орбиты захвата интегрирование системы (2.1) производится методом ИПМ им. М.В.Келдыша РАН [28], причем взято $\mathbf{P}=0$. При этом расчет ведется с двойной точностью. Для определения координат Луны и Солнца используются JPL-эфемериды DE403. Определяется также движение точки в селеноцентрической геоэкваatorialной системе координат MXYZ, которая получена параллельным переносом геоцентрической системы OXYZ в центр масс Луны М.

Для определения промежуточной орбиты использован метод анализа и определения орбит захвата Луной, примененный в [22, 23]. В результате анализа получено семейство орбит захвата. Для данной работы взята орбита захвата, имеющая следующие характеристики.

На момент захвата (когда селеноцентрическая энергия равна нулю) имеем следующие значения времени t и геоцентрических элементов орбиты (p – фокальный параметр, e – эксцентриситет, Ω – долгота восходящего узла, i – наклонение, ω – аргумент перигея, u – аргумент широты, t_π – момент прохождения перигея, a – большая полуось, $2E$ – константа энергии, r_π , r_α – пери- и апоцентрическое расстояния):

$$t=113.424 \text{ сут}; p= 216698.28561536 \text{ км}; e= .32116126641247;$$

$$\Omega= -5.4509625285164 \text{ град.}; i= 21.862252467034 \text{ град.}; \omega= 103.83083113094 \text{ град.};$$

$$u= - 106.06022490370 \text{ град.}; t_\pi= 108.59350644387 \text{ сут}; a= 241620.08247872 \text{ км};$$

$$2E= - 1.6496991641210 \text{ км}^2/\text{с}^2; r_\pi= 164021.0707991 \text{ км}; r_\alpha= 319219.09415827 \text{ км};$$

а также геоцентрических декартовых координат и компонентов скорости:

$$x \text{ (тыс.км)} = - 108.150050839; y \text{ (тыс.км)} = - 258.73862700678;$$

$$z \text{ (тыс.км)} = - 107.46693636132; r \text{ (тыс.км)} = 300.319;$$

$$V_x \text{ (км/с)} = 0.83413452502656; V_y \text{ (км/с)} = -0.52647739776685;$$

$$V_z \text{ (км/с)} = -0.17849181505229; V \text{ (км/с)} = 1.00241.$$

На этот момент имеем следующие значения селеноцентрических параметров (тыс.км, км/с):

$$x = -16.052397539048; y = 94.721347398190; z = 31.038834280606;$$

$$V_x = -0.12328882473104; V_y = -0.28614499233527; V_z = 0.011936526406973;$$

$$r = 100.961; V = 0.311804; 2E = 0.$$

На рис. 1 приведено геоцентрическое движение КА по переходной орбите. Здесь: точка $P_{1\pi}$ соответствует перигею, проходимому в момент 108.3360 сут, примерно за полвитка до захвата; точка $P_{1\alpha}$ соответствует апогею, проходимому в момент 102.0960 сут, примерно за виток до захвата.

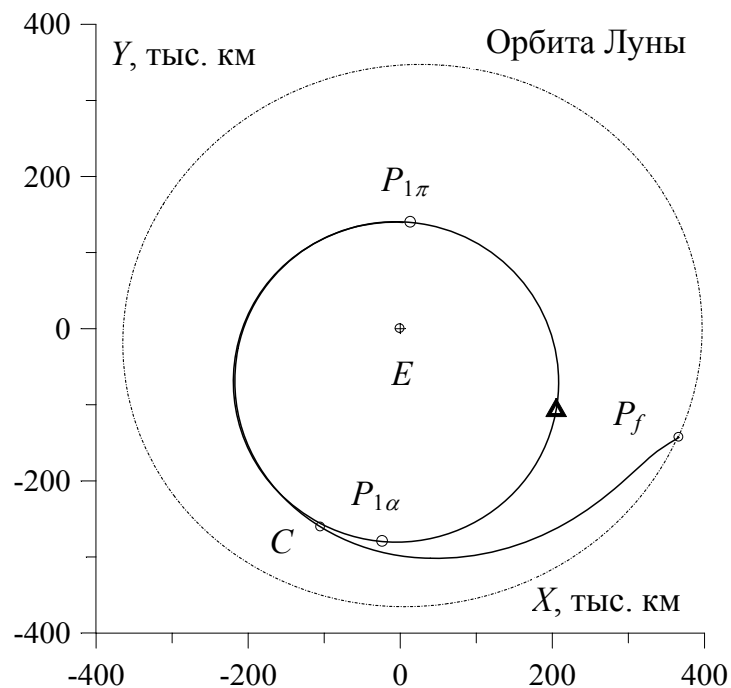


Рис. 1. Геоцентрическое пассивное движение по переходной орбите до прихода в номинальную конечную точку P_f ($96 \text{ сут} \leq t \leq 120 \text{ сут}$, E – Земля, C – точка захвата при $t \approx 113,424 \text{ сут}$).

На рис. 2 приведено селеноцентрическое движение КА по переходной орбите в плоскостях XY и YZ .

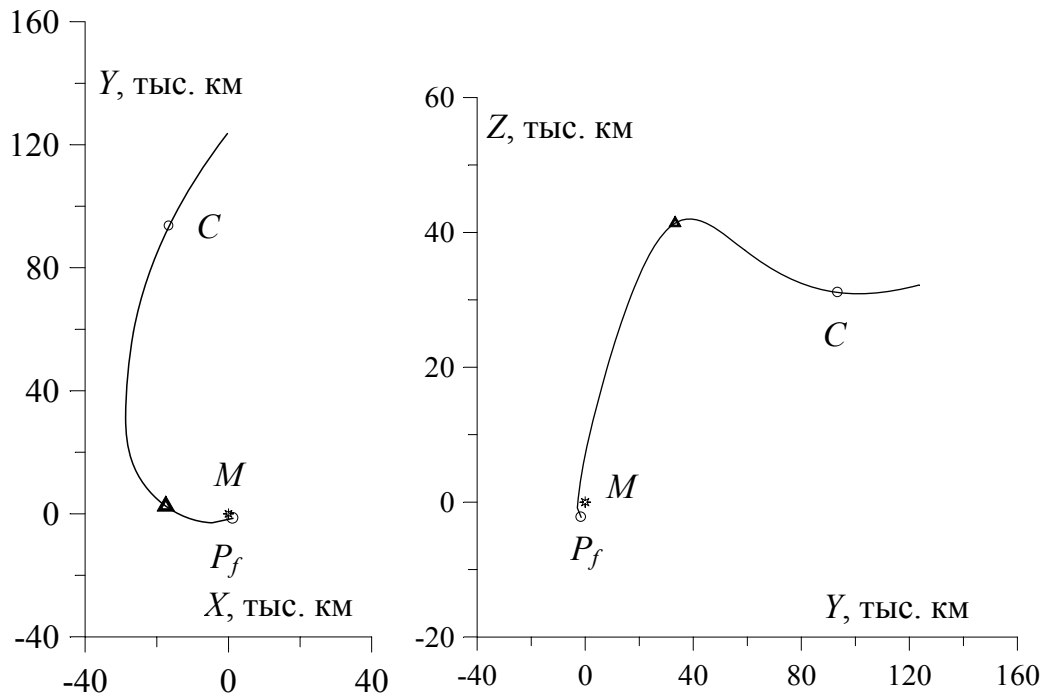


Рис.2. Селеноцентрическая переходная орбита пассивного подлета к Луне ($112,4 \leq t \leq 120$ сут, M – Луна, C – точка захвата при $t \approx 113,424$ сут, P_f – номинальная конечная точка).

Элементы селеноцентрической орбиты в конечный момент имеют следующие значения:

$e=8/9$, $\Omega=25$ град.; $i=50$ град.; $\omega=280$ град.; $u=280$ град.;

$a=27$ тыс. км; $2E = -.18158515333334$ ($V^2 - 2\mu/r$ – конст. энергии, км²/сек²);

$r_\pi=3$ тыс. км; $r_\alpha=51$ тыс. км.

Следовательно, в конечный момент оскулирующая орбита целиком лежит в сфере действия Луны.

На рис. 3 приведено последующее движение КА при отсутствии активного воздействия на него. КА совершает несколько витков в сфере действия Луны.

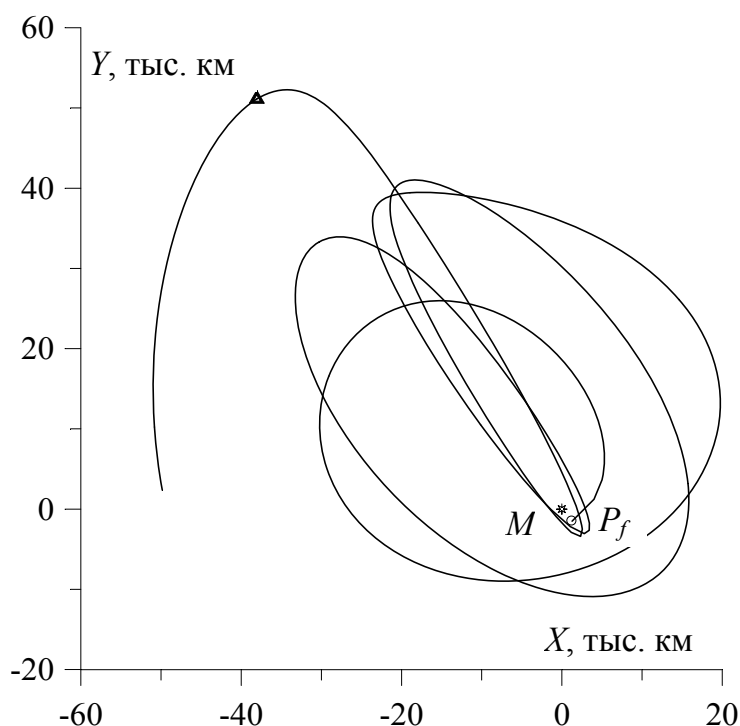


Рис. 3. Селеноцентрическое пассивное движение по переходной орбите в плоскости XY после прихода в номинальную конечную точку ($120 \text{ сут} \leq t \leq 150 \text{ сут}$).

3. МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ «КВАЗИОПТИМАЛЬНОГО» УПРАВЛЕНИЯ ПРИ ПЕРЕЛЕТЕ С МАЛОЙ ТЯГОЙ

При перелете с начальной круговой околоземной орбиты на промежуточную орбиту захвата, а также при перелете с этой промежуточной орбиты на конечную круговую окололунную орбиту в качестве управления используется т.н. «квазиоптимальное» управление. Для построения этого управления применяется оптимальное управление, получаемое из принципа максимума в задаче быстрого перелета на круговую орбиту. При этом в качестве гравитационного поля берется реальное поле задачи четырех тел, описанное в предыдущем разделе при получении промежуточной орбиты захвата. Следует иметь в виду, что, конечно, данное управление может быть улучшено решением точной задачи оптимального перелета, введением (при увеличении времени перелета) пассивных участков при переходе с начальной орбиты на орбиту захвата и при переходе с орбиты захвата на конечную орбиту.

Решение задачи определения траектории перелета между круговыми орбитами ИСЗ и ИСЛ с использованием орбиты захвата можно свести к задаче синтеза устойчивого управления с обратной связью вида $\mathbf{e}_p(\mathbf{x}(t))$ для перелета с заданной эллиптической орбиты на заданную круговую орбиту. Здесь \mathbf{e}_p обозначает единичный вектор в направлении вектора тяги, а \mathbf{x} – фазовый вектор движения КА.

Для этого фиксируется время t_1 выведения КА на орбиту захвата (момент выключения двигателя КА) и время t_2 схода с нее (момент повторного включения двигателя). В момент t_1 оскулирующая геоцентрическая орбита КА должна быть эллиптической, а в момент t_2 – эллиптической должна быть оскулирующая селеноцентрическая орбита КА. В общем случае, моменты времени t_1 и t_2 являются величинами, подлежащими оптимизации с целью минимизации расхода рабочего тела на осуществления перелета между орбитами ИСЗ и ИСЛ.

Задается начальное приближение для массы КА m_1 в момент времени t_1 . Так как на интервале (t_1, t_2) КА движется по пассивной траектории, то масса КА в момент времени t_2 также будет равна m_1 .

Далее дифференциальные уравнения геоцентрического движения КА с управлением $\mathbf{e}_p(\mathbf{x}(t))$ интегрируются в обратном направлении по времени от момента t_1 до достижения малой окрестности начальной круговой орбиты ИСЗ. В результате этого интегрирования определяется масса КА на этой начальной орбите ИСЗ m_0 .

При заданных t_1 и $\mathbf{e}_p(\mathbf{x}(t))$ таким образом определяется функциональная зависимость $m_0(m_1)$. Численно определяется корень уравнения $m_0(m_1) - m_0^* = 0$, где m_0^* – заданная начальная масса КА на начальной круговой орбите ИСЗ. В результате, помимо m_1 , определяется траектория перелета от начальной орбиты ИСЗ до выхода на орбиту захвата в момент t_1 .

Завершающим этапом определения траектории перелета является интегрирование дифференциальных уравнений селеноцентрического движения КА с управлением $\mathbf{e}_p(\mathbf{x}(t))$ в прямом направлении по времени от момента t_2 до достижения малой окрестности конечной орбиты ИСЛ. В результате этого интегрирования определяется масса КА на конечной орбите ИСЛ m_k и траектория перелета от точки схода с орбиты захвата до конечной орбиты ИСЛ.

Таким образом, задача расчета перелета между круговыми орбитами ИСЗ и ИСЛ с использованием заданной орбиты захвата сводится к задаче синтеза

управления с обратной связью вида $\mathbf{e}_p(\mathbf{x}(t))$, гарантирующего перелет КА в малую окрестность заданной круговой орбиты.

Для синтеза такого управления были использованы методы и результаты, полученные в работах [29-31]. Рассматривается случай нерегулируемой двигательной установки малой тяги, то есть тяга и удельный импульс предполагаются постоянными при включенной двигательной установке. Направление вектора тяги неограниченно и выбирается из условий оптимальности.

На первом этапе решения задачи синтеза квазиоптимального управления с обратной связью рассматривается движение КА с малой тягой в центральном гравитационном поле. Используются уравнения управляемого движения КА в элементах $h = (p/\mu)^{1/2}$, $e_x = e \cos(\Omega + \omega)$, $e_y = e \sin(\Omega + \omega)$, $i_x = \tan(i/2) \cos \Omega$, $i_y = \tan(i/2) \sin \Omega$, $F = \nu + \omega + \Omega$, где p – фокальный параметр, e – эксцентриситет, ω – аргумент перигея, i – наклонение, Ω – долгота восходящего узла, ν – истинная аномалия. В качестве управления рассматриваются ϑ – угол тангажа (угол между проекцией вектора тяги на плоскость оскулирующей орбиты КА и трансверсальным направлением) и ψ – угол рысканья (угол между вектором тяги и плоскостью оскулирующей орбиты КА).

Требуется перевести КА начальной массы m_0 с начальной орбиты $h=h_0$, $e_x=e_{x0}$, $e_y=e_{y0}$, $i_x=i_{x0}$, $i_y=i_{y0}$ на конечную $h=h_k$, $e_x=e_y=0$, $i_x=i_y=0$ за минимальное время T .

Для решения поставленной задачи оптимального управления используется принцип максимума Л.С.Понтрягина и численное осреднение правых частей дифференциальных уравнений оптимального движения по средней аномалии [29]. Полученная с помощью принципа максимума краевая задача решается методом продолжения по параметру [29].

На втором этапе синтеза квазиоптимального управления рассматривается решение серии задач оптимизации траекторий перелета КА с малой тягой между некомпланарными круговой и эллиптической орбитами, причем предполагается, что линия пересечения плоскостей граничных орбит совпадает с линией аписид начальной орбиты. В силу сферической симметрии задачи, за основную плоскость системы координат можно без потери общности выбрать плоскость конечной круговой орбиты, а основную ось системы координат направить вдоль вектора Лапласа начальной эллиптической орбиты.

Осредненное оптимальное решение рассматриваемой задачи обладает следующими основными свойствами [31]:

1. Существует три существенных параметра краевой задачи: радиус перигея r_p , радиус апогея r_a и наклонение i начальной орбиты.
2. Существуют три существенных параметра, определяющих оптимальное управление: начальные значения p_h, p_{ex}, p_{ix} . Начальные значения p_{ey}, p_{iy} и p_F равны 0.
3. Оптимальное управление на витке симметрично относительно линии апсид.
4. Решение является асимптотическим: осредненное оптимальное решение применимо для различных значений тяги, удельного импульса и массы КА до тех пор, пока выполняются допущение о малости относительного изменения элементов орбиты за один виток.
5. Оптимальное решение масштабируется по планетоцентрическому удалению и гравитационному параметру.

Серия таких задач оптимизации многовиткового геоцентрического перелета на геостационарную орбиту была решена для параметров начальной орбиты, заданных на трехмерной прямоугольной сетке значений радиуса перицентра, радиуса апоцентра и наклонения при изменении начальных радиусов перицентра и апоцентра от 6571 км до 246539.6 км (всего 40 узлов с равномерным логарифмическим распределением) и начального наклонения от 0 до 90 градусов (всего 19 узлов на равномерной сетке с шагом 5 градусов). В каждом узле трехмерной сетки параметров начальной орбиты были получены, в частности, значения сопряженных переменных. Таким образом, была определена зависимость p_h, p_{ex}, p_{ix} от r_p, r_a, i для геоцентрического перелета с малой тягой на ГСО. При необходимости расчета траектории перелета на круговую орбиту другого радиуса необходимо только пересчитать координаты узлов исходной трехмерной сетки по r_p и r_a таким образом, чтобы они изменились пропорционально изменению радиуса конечной орбиты.

Для формирования управления с обратной связью в рассматриваемой задаче можно использовать трехмерную линейную интерполяцию сопряженных переменных p_h, p_{ex}, p_{ix} по текущим значениям r_p, r_a, i , а значения p_{ey}, p_{iy} и p_F принять равными 0. Подставляя интерполированные значения сопряженных переменных в выражения для

оптимальных углов тангажа и рыскания, полученные в результате применения принципа максимума, можно получить ориентацию вектора тяги как функцию от оскулирующих значений r_π, r_α, i .

Очевидно, что в возмущенной задаче линии узлов и апсид не будут оставаться постоянными, поэтому рассмотренный вариант управления с обратной связью не является устойчивым по отношению к возмущающим ускорениям и вариациям траекторных параметров. Для обеспечения такой устойчивости рассматривается преобразование сопряженных переменных $p_h^* = p_h, p_{ex}^* = p_{ex} \cos(\omega + \Omega), p_{ey}^* = p_{ex} \sin(\omega + \Omega), p_{ix}^* = p_{ix} \cos(\Omega), p_{iy}^* = p_{ix} \sin(\Omega)$, где p_h, p_{ex}, p_{ix} получены линейной интерполяцией на трехмерной сетке r_π, r_α, i . Легко показать, что после подстановки преобразованных сопряженных переменных в выражения для оптимальных углов ориентации вектора тяги, в апсидальных точках радиальное реактивное ускорение становится нулевым, а абсолютная величина трансверсального реактивного ускорения имеет локальные максимумы. Абсолютная величина бинормального реактивного ускорения при таком управлении имеет локальные максимумы в узловых точках орбиты. Устойчивость такого управления по отношению к внешним возмущениям и вариациям траекторных параметров была подтверждена численными экспериментами при расчете перелетов с геопереходной и высокой эллиптической орбиты на геостационарную орбиту при различном составе возмущающих сил.

Полученное управление имеет вид $\mathbf{e}_p = (\cos \vartheta \cos \psi, \sin \vartheta \cos \psi, \sin \psi)^T$, где углы ориентации вектора тяги зависят от модифицированных сопряженных переменных $p_h^*, p_{ex}^*, p_{ey}^*, p_{ix}^*, p_{iy}^*$, радиуса конечной орбиты и оскулирующих орбитальных элементов, а модифицированные сопряженные переменные получены в виде функций от медленных оскулирующих элементов орбиты. Таким образом, получена зависимость единичного вектора ориентации вектора тяги \mathbf{e}_p от оскулирующих орбитальных элементов, являющихся в данной задаче элементами вектора фазового состояния КА \mathbf{x} . Именно это «квазиоптимальное» управление с обратной связью использовалось в алгоритме расчета траекторий перелета с начальной круговой орбиты ИСЗ на орбиту захвата и с орбиты захвата на конечную круговую орбиту ИСЛ.

4. ТРАЕКТОРИЯ ПЕРЕЛЕТА С НАЧАЛЬНОЙ ОРБИТЫ СПУТНИКА ЗЕМЛИ НА ОРБИТУ ЗАХВАТА

Используя «квазиоптимальное» управление, определен «спиральный» перелет с начальной круговой околоземной орбиты на промежуточную орбиту захвата. Приведем некоторые основные характеристики этого перелета для двух вариантов начального наклона.

Рассмотрим сначала характеристики траектории перелета на промежуточную орбиту с начальной околоземной орбиты при наклоне 51.5 град, что соответствует запуску с космодрома Байконур.

А) Начальное наклонение 51.5°

Параметры начальной орбиты:

Начальный момент перелета: 23.03.1999; 20:25:26 (JD 2451261.351275);
 Высота перигея: 492.1 км;
 Высота апогея: 507.9 км;
 Наклонение: 51.5°;
 Аргумент перигея: 72.9°;
 Долгота восходящего узла: 167.6°;
 Истинная аномалия: 208.0°;
 Начальная масса КА: 1000 кг.

Параметры геоцентрического активного участка:

Дата и время выхода на траекторию захвата 12.04.2001; 04:18:14
 (JD 2452011.6793287);
 Продолжительность: 750.3 сут;
 Характеристическая скорость: 8298.7 м/с;
 Конечная масса КА: 596.9 кг;
 Затраты рабочего тела 403.1 кг.

На рис. 4 приведена спиралевидная траектория перелета на орбиту захвата в неподвижных плоскостях XY , XZ , YZ . На рис. 5 приведена траектория перелета во

вращающихся с Луной осях X , Y (ось X направлена на Луну, за единицу масштаба принято расстояние Земля-Луна).

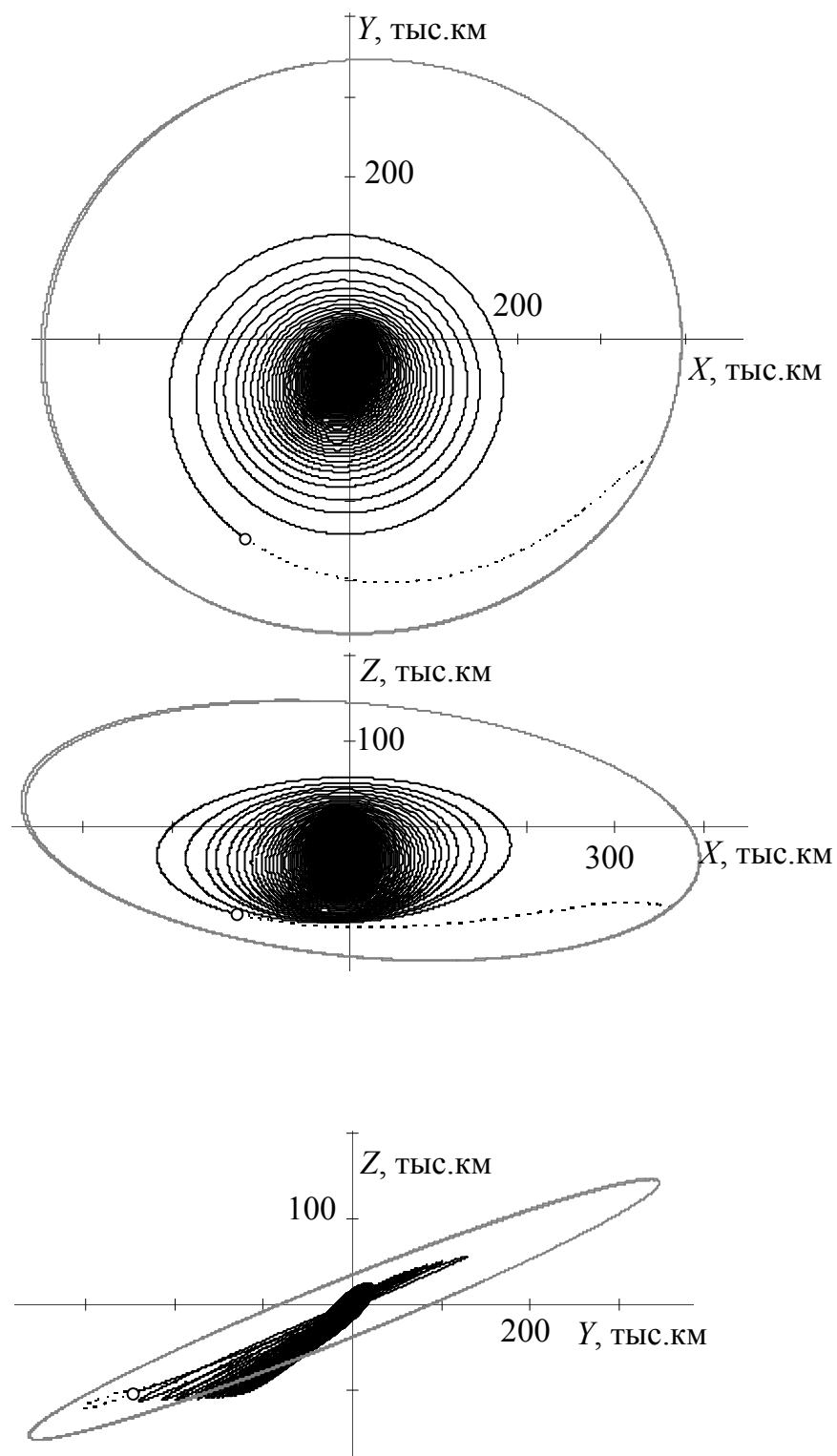


Рис. 4. Траектория перелета КА с начальной околоземной орбиты на орбиту захвата в проекциях на неподвижные оси (сплошная линия – участок активного полета, пунктир – орбита захвата, кружок - точка выключения двигателя, $i_0=51,5^\circ$).

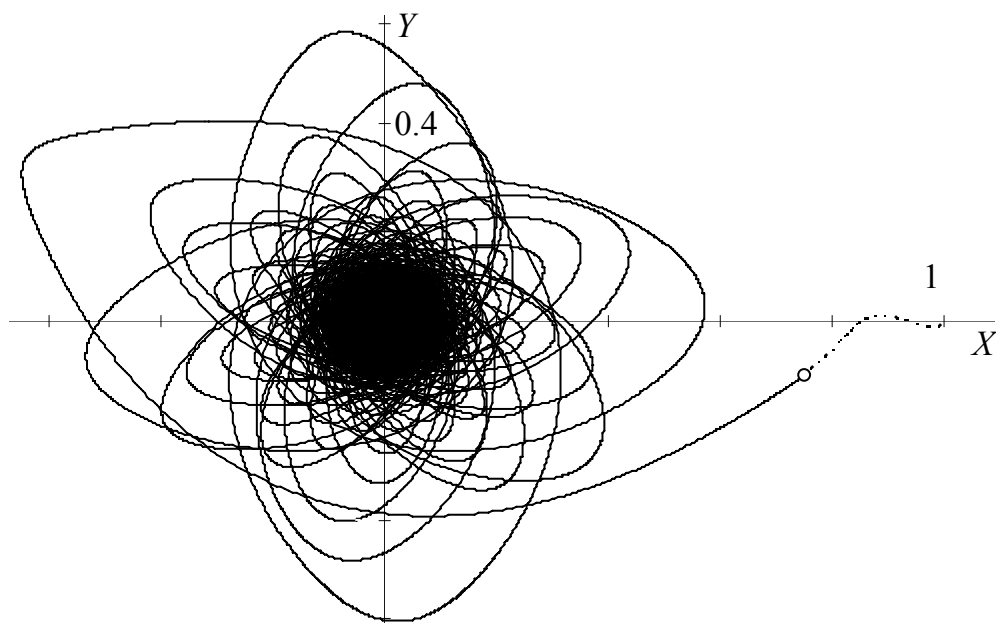


Рис. 5. Траектория перелета КА с начальной околоземной орбиты на орбиту захвата в синодических координатах (сплошная линия – участок активного полета, пунктир – орбита захвата, кружок - точка выключения двигателя, $i_0=51,5^\circ$).

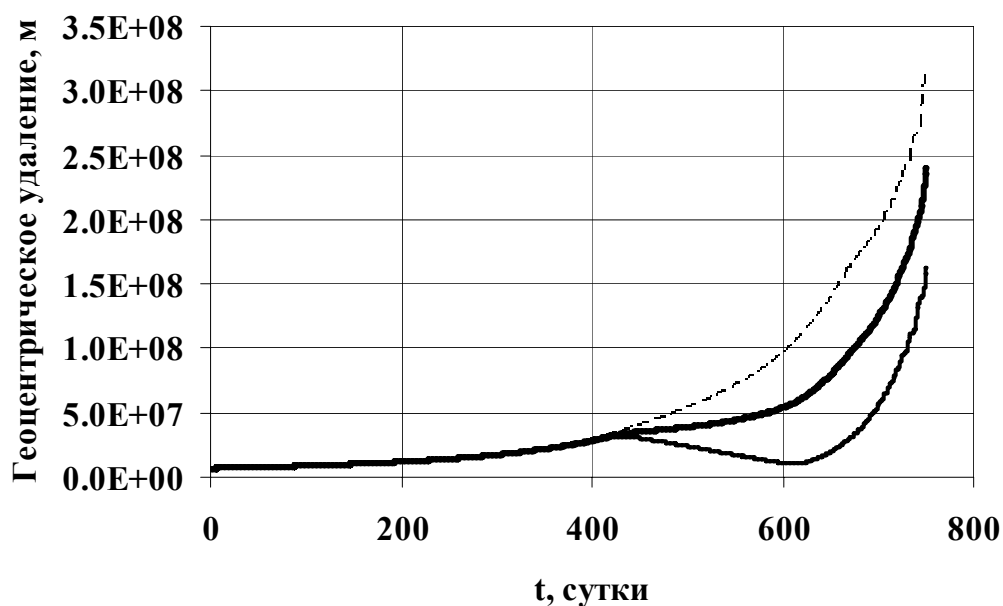


Рис. 6. Изменение радиуса перигея (тонкая сплошная линия), радиуса апогея (пунктирная линия) и большой полуоси (толстая сплошная линия) вдоль траектории выведения на орбиту захвата.

На рис. 6 приведено изменение вдоль траектории большой полуоси a , перигейного и апогейного расстояний r_p , r_a оскулирующей орбиты. На рис. 7 приведено изменение вдоль траектории эксцентриситета оскулирующей орбиты e . На рис. 8, 9 приведено изменение вдоль траектории наклонения i и долготы восходящего узла Ω оскулирующей орбиты. Видим, что для данной траектории изменение эксцентриситета и наклонения орбиты происходит, в основном, на заключительной фазе полета, при больших расстояниях от Земли.

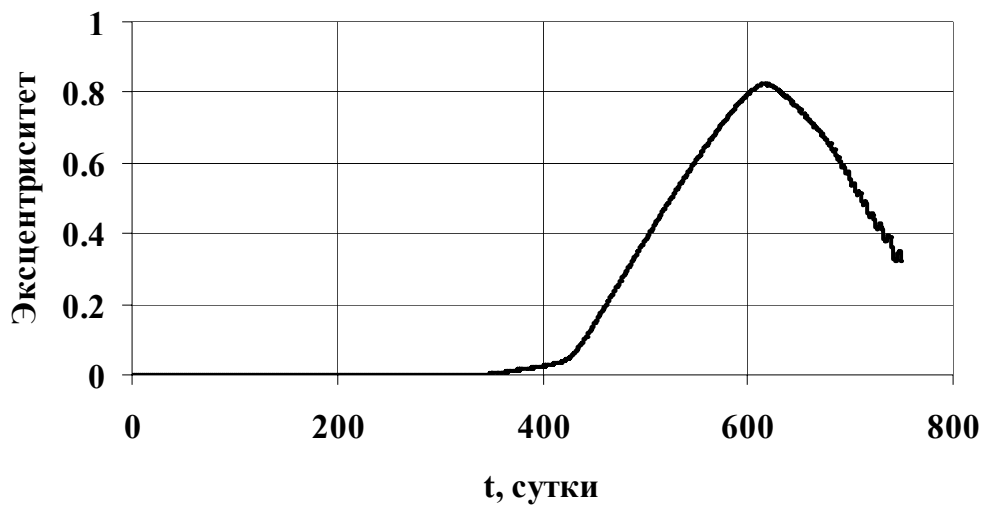


Рис. 7. Изменение вдоль траектории выхода на орбиту захвата эксцентриситета оскулирующей орбиты e .

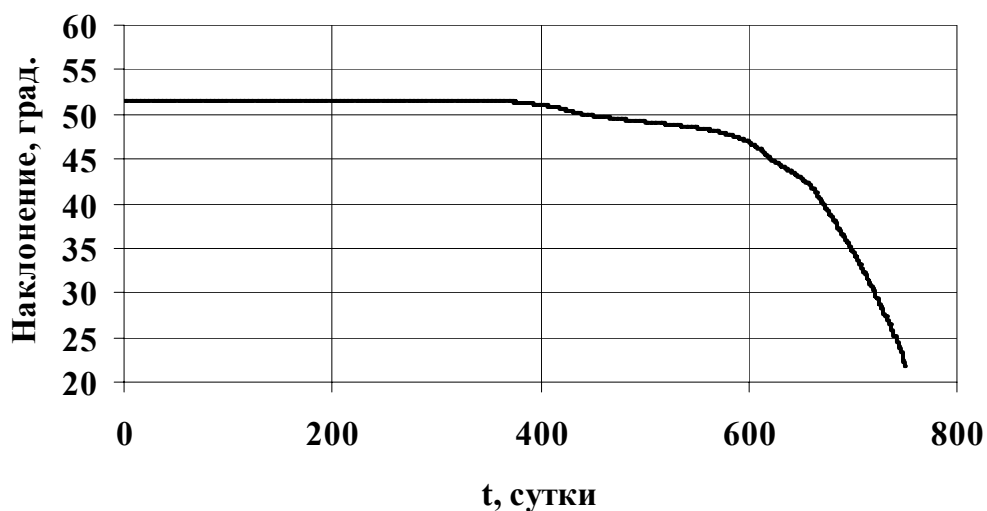


Рис. 8. Изменение наклонения оскулирующей орбиты i вдоль траектории выхода на орбиту захвата.

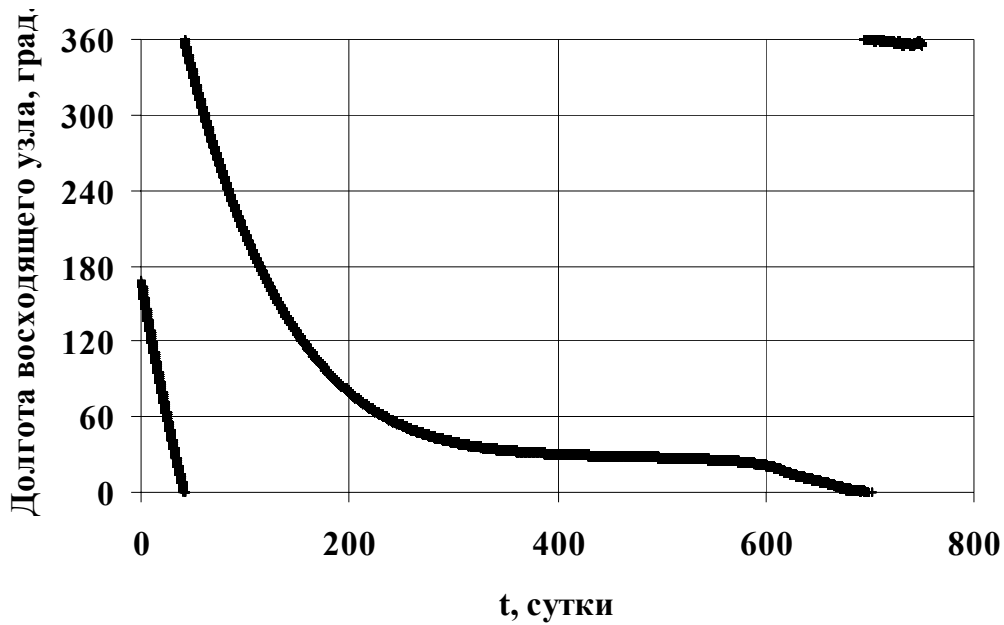


Рис. 9. Изменение долготы восходящего узла оскулирующей орбиты вдоль траектории выхода на орбиту захвата.

Рассмотрим теперь характеристики управления на траектории перелета на промежуточную орбиту. На рис. 10 и рис. 11 приведены углы тангажа и рыскания вдоль этой траектории. Здесь угол рыскания есть угол наклона вектора тяги к оскулирующей плоскости орбиты КА. Угол тангажа есть угол наклона проекции вектора тяги на плоскость орбиты КА к местной трансверсали.

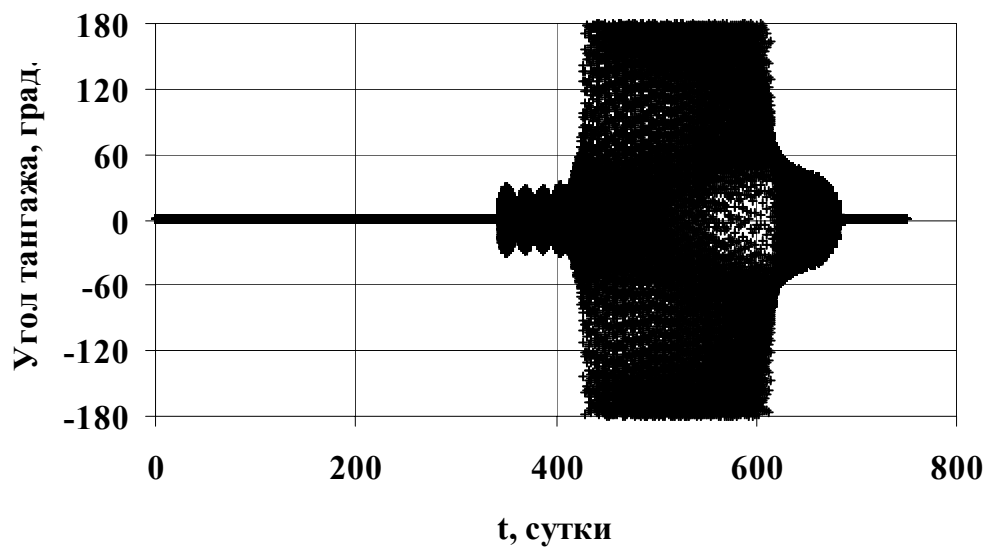


Рис. 10. Зависимость угла тангажа от времени на геоцентрическом участке перелета.

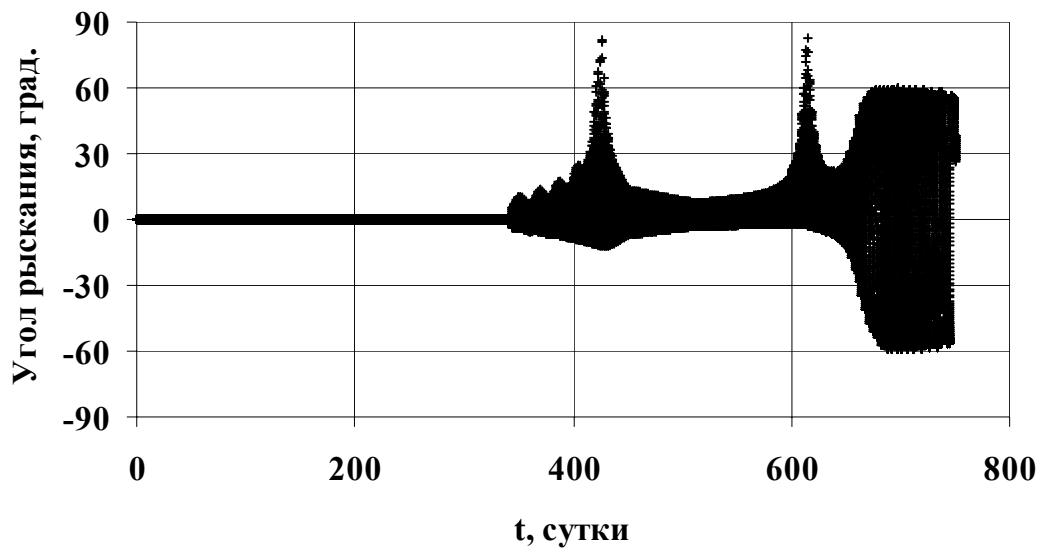


Рис. 11. Зависимость угла рыскания от времени на геоцентрическом участке перелета.

Таким образом, на значительной начальной части траектории выхода на орбиту захвата тяга ориентируется практически вдоль трансверсали.

Рассмотрим теперь основные характеристики траектории выхода на орбиту захвата для случая, когда начальное наклонение составляет 28.5° .

Б) Начальное наклонение 28.5°

Параметры начальной орбиты:

Начальный момент перелета: JD 2451303.6259 (05.05.1999; 03:01:17 UTC);

Радиус перигея: 6865.9 км;

Радиус апогея: 6876.1 км;

Аргумент перигея: 104.9° ;

Долгота восходящего узла: 353.2° ;

Координаты (м): (-1949930.769; 5847063.549; 3025029.747);

Компоненты скорости (м/с): (-7295.9024; -1712.8529; -1390.4606);

Начальная масса КА: 1000 кг.

Параметры геоцентрического активного участка:

Дата окончания: JD 2452011.740 (12.04.2001; 05:45:36 UTC);

Продолжительность: 708.1 сут;
 Характеристическая скорость: 7698.8 м/с;
 Конечная масса КА: 619.6 кг.

Вид траектории, а также основные зависимости элементов орбиты и параметров управления для этого случая близки к первому случаю.

Рассмотрим теперь характеристики второй части траектории, при перелете с промежуточной орбиты на конечную круговую окололунную орбиту, когда используется «квазиоптимальное» управление. Движение КА здесь происходит в сфере действия Луны.

Опять рассмотрим два варианта: сначала случай начального наклона 51.5 град., затем случай начального наклона 28.5 град.

5. ТРАЕКТОРИЯ ПЕРЕЛЕТА С ОРБИТЫ ЗАХВАТА НА КОНЕЧНУЮ ОРБИТУ СПУТНИКА ЛУНЫ

А) Начальное наклонение $i_0=51,5^\circ$, высота конечной орбиты $H_f \sim 300$ км

Параметры конечной орбиты:

Радиус (высота) периселения: 2027.8 (289.8) км;
 Радиус (высота) апоселения: 2049.9 (311.9) км;
 Аргумент периселения: 292.17° ; Истинная аномалия: 39.67° ;
 Наклонение: 89.97° ; Долгота восходящего узла: 309.66° .
 Здесь угловые параметры даны в селеноцентрической геоэкуаториальной системе *МХУЗ*.

Параметры селеноцентрического активного участка:

Продолжительность пассивного движения по орбите захвата – 6.8 сут;
 Начальный момент активного участка - 18.04.2001; 23:58:14 (JD 2452018.498773);
 Продолжительность - 97.96 сут; Дата окончания - JD 2452116.457;
 Характеристическая скорость - 1484.4 м/с;
 Конечная масса КА - 544.3 кг;
 Затраты рабочего тела - 52.6 кг.

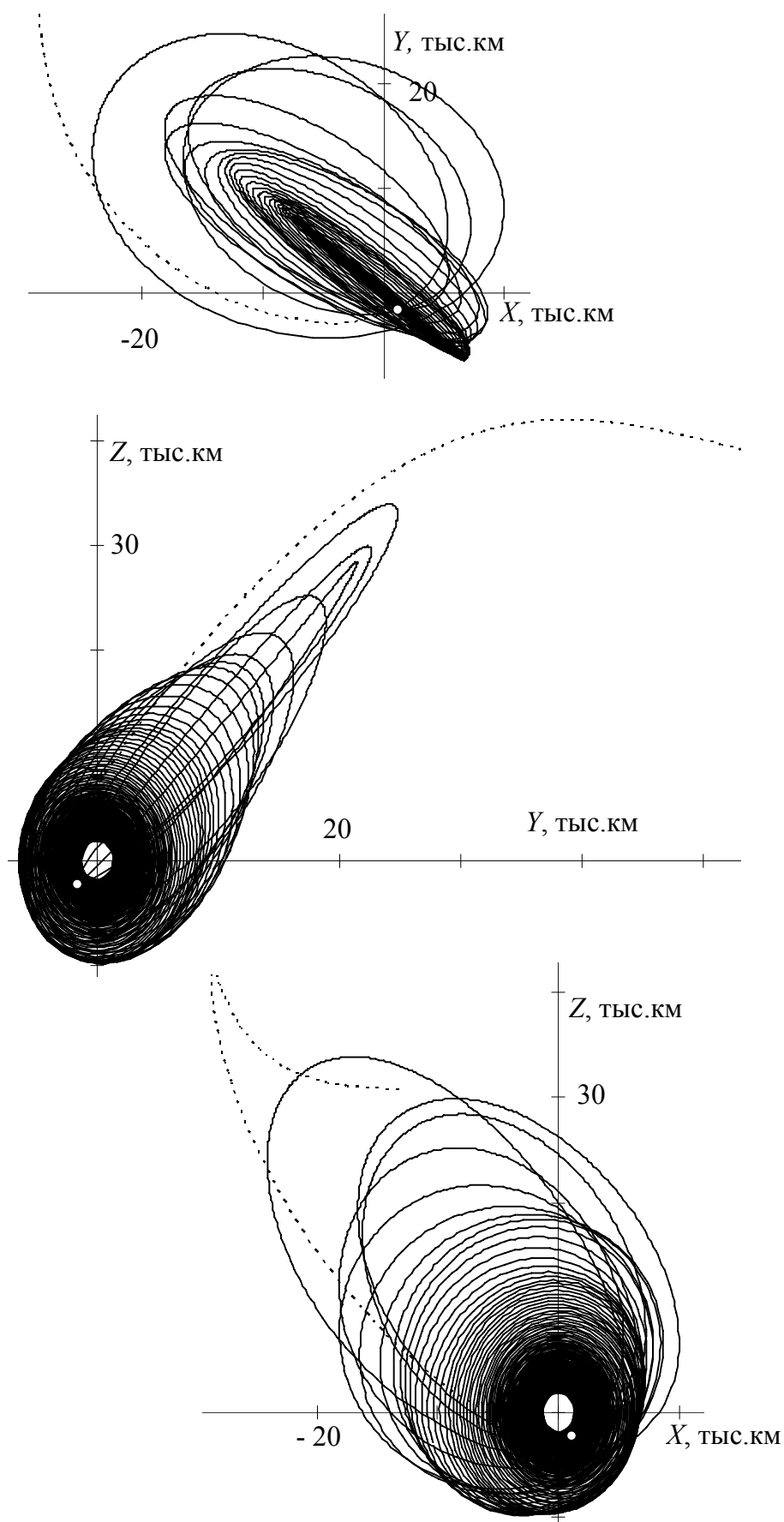


Рис.12. Траектория перелета КА с промежуточной орбиты захвата на конечную окололунную орбиту ($i_0=51,5$ град, $H_f \approx 300$ км).

Для этой второй части полета на рис. 12 приведена спиралевидная траектория (скрутка) перелета с орбиты захвата на конечную окололунную орбиту ИСЛ в неподвижных плоскостях XY , XZ , YZ . На рис. 13 приведено изменение вдоль траектории большой полуоси a , перигейного и апогейного расстояний r_p , r_a оскулирующей орбиты. На рис. 14 приведено изменение вдоль траектории эксцентриситета оскулирующей орбиты e . На рис. 15, 16 приведено изменение вдоль траектории наклонения i и долготы восходящего узла Ω оскулирующей орбиты.

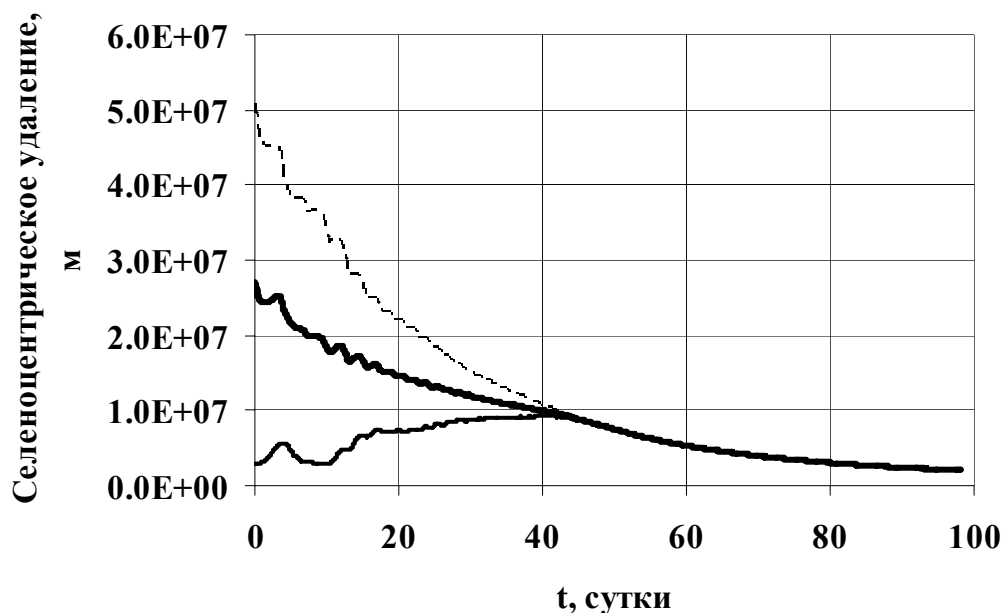


Рис. 13. Изменение радиуса периселения (тонкая сплошная линия), радиуса апоселения (пунктирная линия) и большой полуоси (толстая сплошная линия) вдоль траектории перехода с орбиты захвата на орбиту спутника Луны.

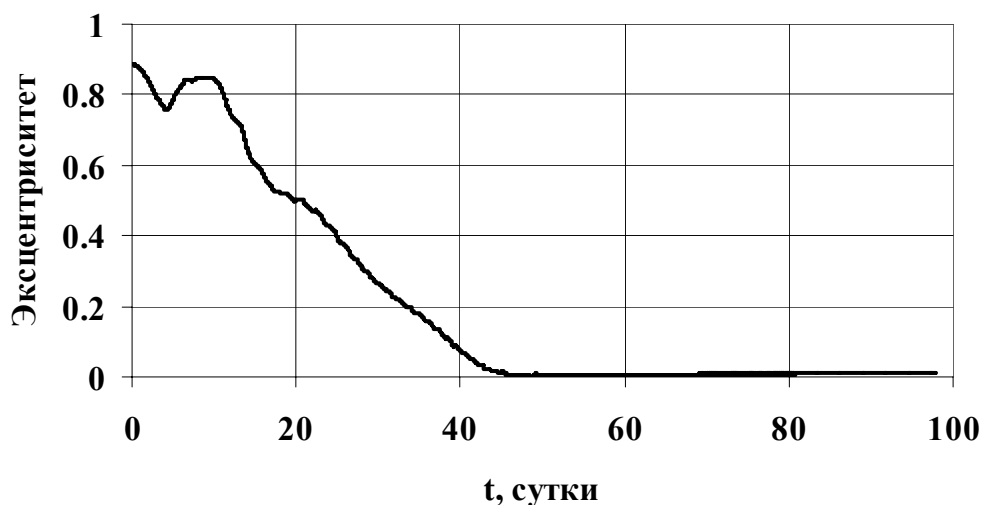


Рис. 14. Изменение эксцентриситета селеноцентрической орбиты вдоль траектории перехода с орбиты захвата на орбиту спутника Луны

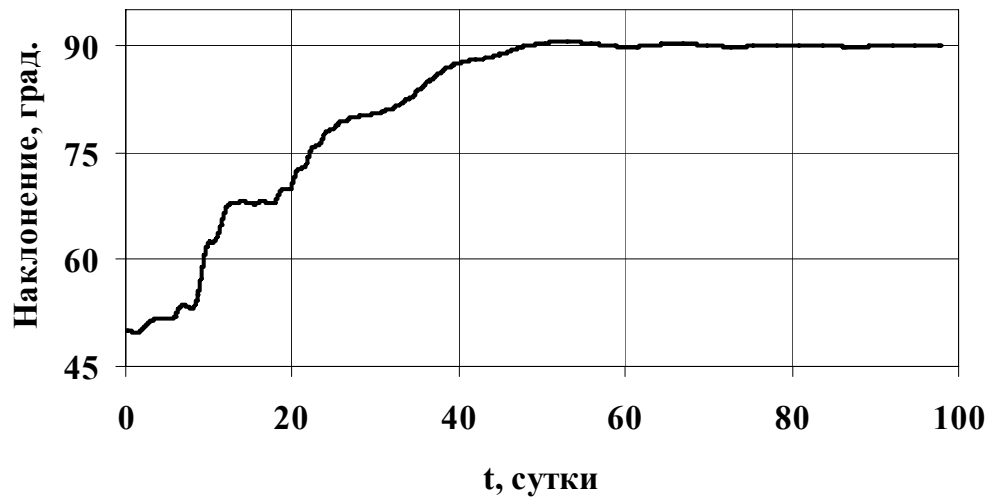


Рис. 15. Изменение наклона селеноцентрической орбиты вдоль траектории перехода с орбиты захвата на орбиту спутника Луны.

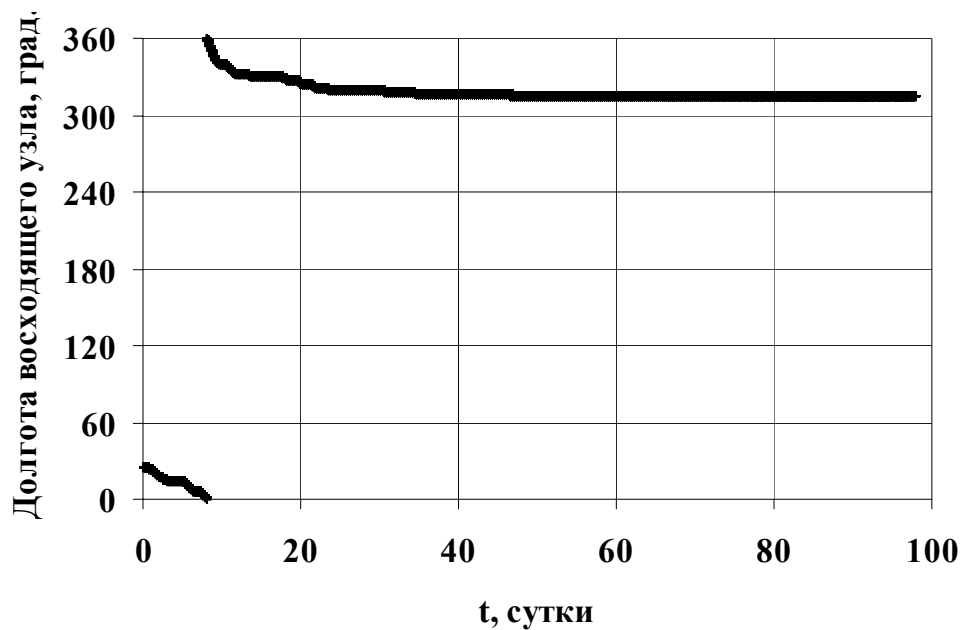


Рис. 16. Изменение долготы восходящего узла селеноцентрической орбиты вдоль траектории перехода с орбиты захвата на орбиту спутника Луны.

Видим, что эксцентриситет, а также наклонение и долгота восходящего узла селеноцентрической орбиты меняются, в основном, на начальной части траектории перехода с орбиты захвата на орбиту спутника Луны.

Рассмотрим параметры управления на траектории перехода с орбиты захвата на орбиту спутника Луны. На рис. 17 и 18 приведены углы тангажа и рыскания для селеноцентрического движения КА на этой траектории.

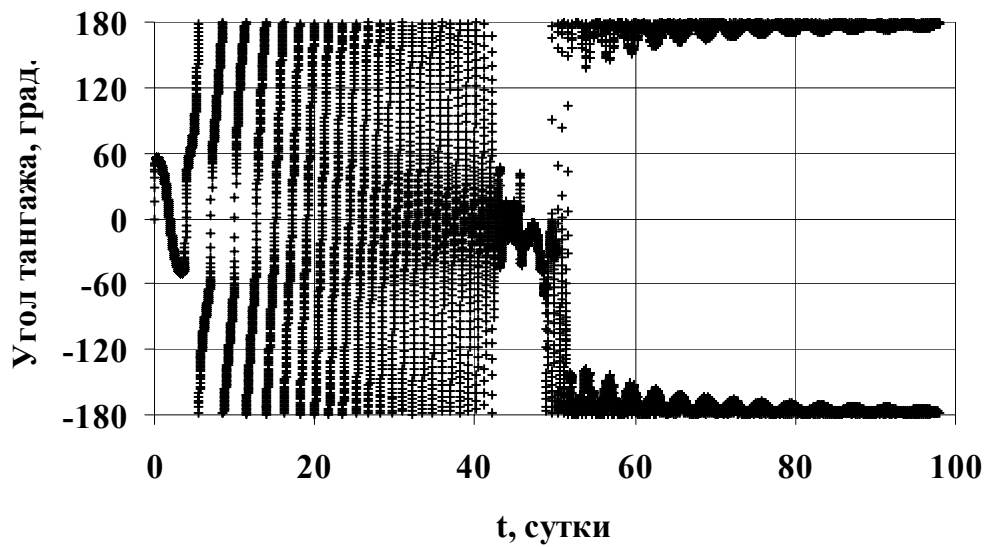


Рис. 17. Изменение угла тангажа для управления вдоль траектории перехода с орбиты захвата на орбиту спутника Луны.

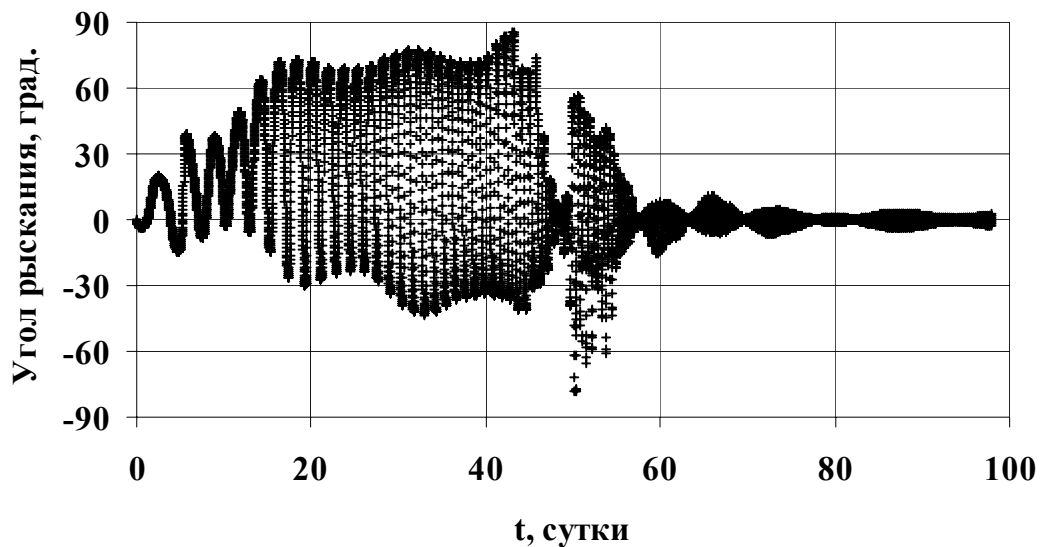


Рис. 18. Изменение угла рыскания для управления вдоль траектории перехода с орбиты захвата на орбиту спутника Луны.

На заключительной фазе полета тяга ориентируется примерно противоположно вектору селеноцентрической скорости КА.

Рассмотрим теперь случай Б), когда начальное наклонение $i_0=28,5$ град., высота конечной орбиты $H_f \approx 4000$ км.

Б) Случай начального наклона 28.5° , высоты конечной орбиты ~ 4000 км

Параметры конечной орбиты:

Радиус периселения: 5687.6 км; Радиус апоселения: 5790.4 км;

Аргумент периселения: 219.37°; Истинная аномалия: 293.16°;

Наклонение: 89.59°; Долгота восходящего узла: 314.0°.

Здесь угловые параметры даны в селеноцентрической геоэкваториальной системе *WXYZ*.

Параметры селеноцентрического активного участка:

Начальный момент перелета: JD 2452018.5 (19.04.2001; 00:00:00 UTC);

Дата окончания: JD 2452077.8472 (17.06.2001; 08:19:58 UTC);

Продолжительность: 59.3 сут;

Характеристическая скорость: 849.6 м/с;

Конечная масса КА: 587.7 кг.

Характер изменения параметров орбиты и управления в этом случае близок к первому варианту А).

6. СУММАРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЕРЕЛЕТА ОТ ЗЕМЛИ К ЛУНЕ

Приведем основные суммарные характеристики перелета от близкой к Земле круговой орбиты ИСЗ на близкую к Луне круговую орбиту ИСЛ, если тяга двигателя составляет 0,1 Н, удельная тяга 1640 с.

Для первого варианта, когда начальное наклонение составляет 51.5 град, а конечная высота 300 км, суммарное время перелета составляет 855 сут, при этом первый активный участок продолжается 750 сут, пассивный перелет по орбите захвата продолжается 7 сут, второй активный участок продолжается 98 сут. Суммарная характеристическая скорость составляет 9783 м/с, при этом для первого активного участка характеристическая скорость составляет 8299 м/с, для второго – 1484 м/с. Если начальная масса составляет 1000 кг, то конечная масса составляет 544 кг, при этом для первого активного участка расход массы составляет 403 кг, для второго – 53 кг. Для этого варианта А) на рис. 19 приведена геоцентрическая траектория всего перелета в невращающихся осях, на рис. 20 – геоцентрическая

траектория всего перелета в проекции на вращающиеся с Луной оси X , Y (здесь за единицу масштаба принято расстояние Земля-Луна).

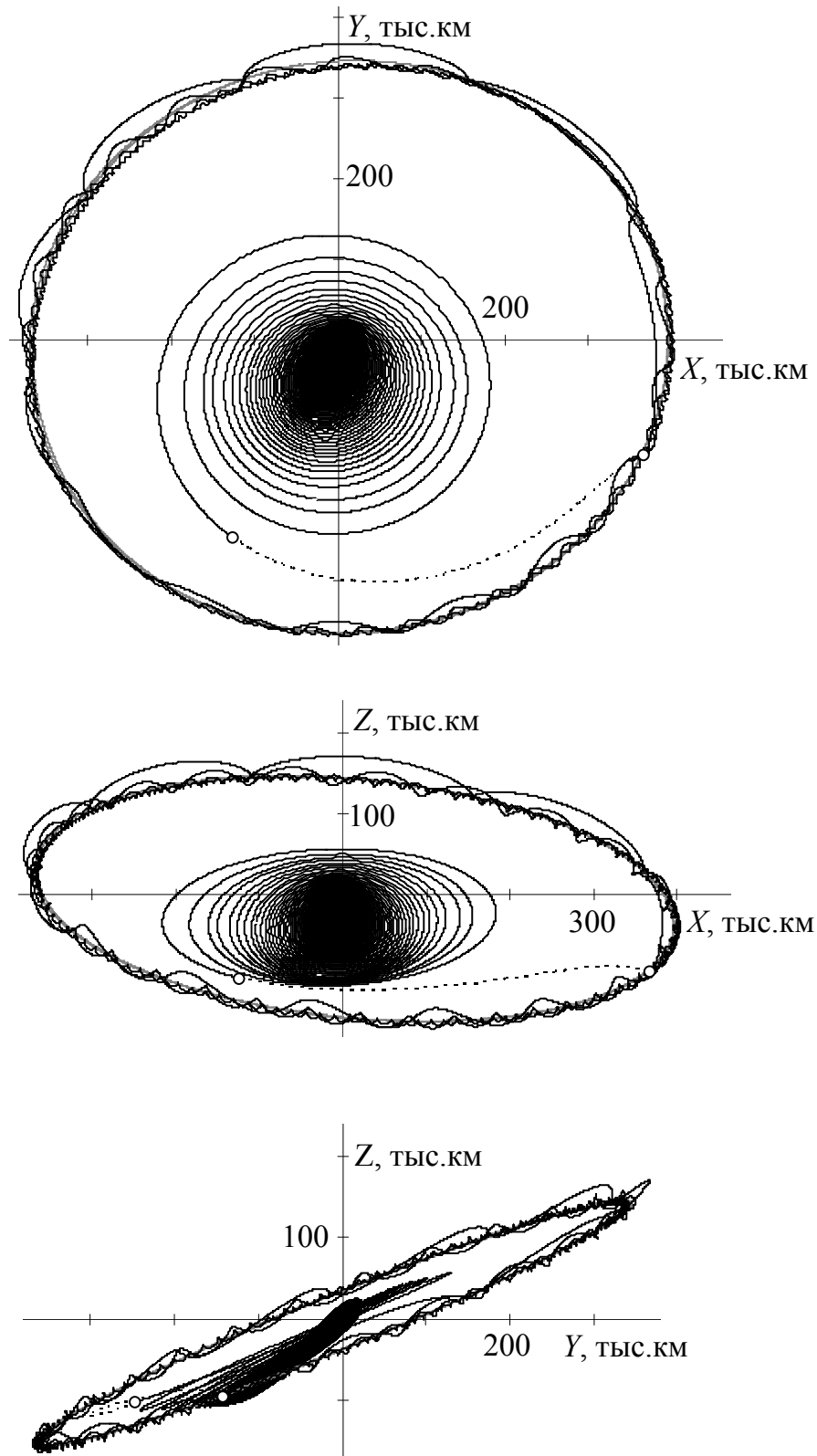


Рис. 19. Геоцентрическая траектория выведения КА на орбиту ИСЛ (проекции на неподвижные координатные плоскости, сплошная линия – участки активного полета, пунктир – орбита захвата, кружки - точки выключения и включения двигателя, $i_0=51.5^\circ$, $H_f \approx 300$ км).

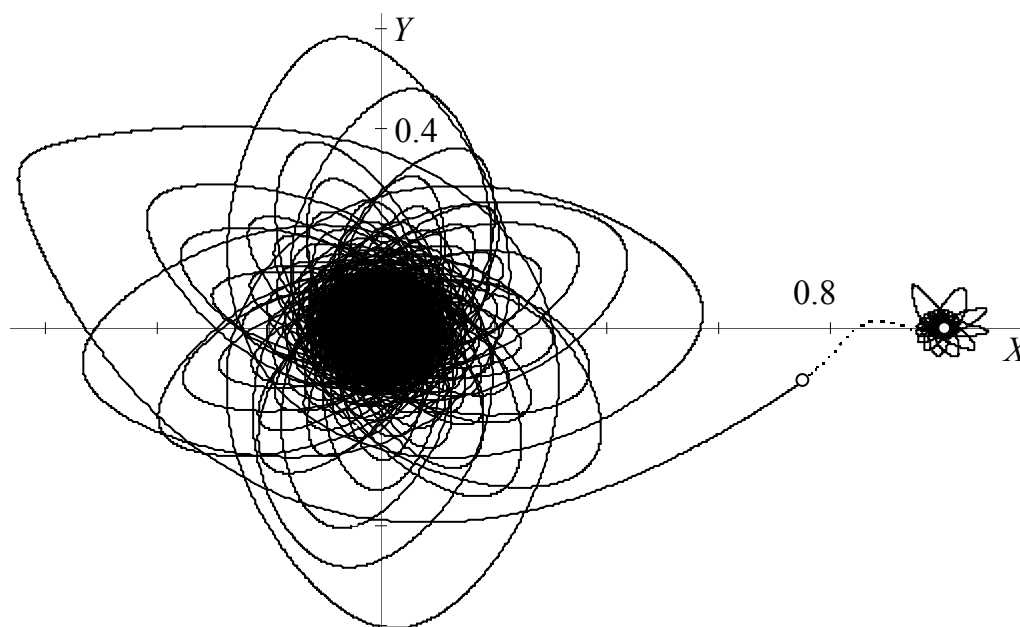


Рис. 20. Геоцентрическая траектория выведения КА на орбиту ИСЛ (синодические координаты, сплошная линия – участки активного полета, пунктир – орбита захвата, кружки - точки выключения и включения двигателя, $i_0=51.5^\circ$, $H_f \approx 300$ км).

Для второго варианта перелета, при начальном наклонении 28.5 град. и конечной высоте ~ 4000 км, суммарное время перелета составляет $774,2$ сут, при этом первый активный участок продолжается 708 сут, пассивный перелет по орбите захвата продолжается 7 сут, второй активный участок продолжается 59 сут. Суммарная характеристическая скорость составляет 8549 м/с, при этом для первого активного участка характеристическая скорость составляет 7699 м/с, для второго – 850 м/с. Если начальная масса составляет 1000 кг, то конечная масса составляет 587 кг, при этом для первого активного участка расход массы составляет 381 кг, для второго – 32 кг.

7. ВЫВОДЫ

В работе получены траектории перелета с круговой орбиты искусственного спутника Земли на круговую орбиту спутника Луны. Перелет осуществляется с помощью электрореактивных двигателей малой тяги. Для уменьшения расхода топлива при перелете используется промежуточная орбита захвата. При пассивном

движении по этой орбите происходит вход КА в сферу действия Луны в районе точки либрации L_1 и последующее движение к Луне по селеноцентрической эллиптической орбите. Траектория перелета между орбитами ИСЗ и ИСЛ рассматривается в рамках задачи четырех тел (КА, Земля с учетом ее сжатия, Луна и Солнце). Весь перелет состоит из трех участков. Сначала осуществляется активный управляемый геоцентрический перелет с начальной орбиты ИСЗ на промежуточную геоцентрическую орбиту захвата. Затем осуществляется пассивный перелет по дуге этой орбиты захвата и вход КА в сферу действия Луны по эллиптической селеноцентрической орбите. На конечном участке полета осуществляется активный управляемый селеноцентрический перелет с данной промежуточной орбиты на конечную орбиту ИСЛ. Использование разработанного «квазиоптимального» управления с помощью малой тяги (0.1 Н) с высокой удельной тягой (1640 с) приводит к траекториям перелета с большим временем полета (~ 800 -900 сут), но с большей (по сравнению с перелетом при использовании химического двигателя большой тяги) конечной массой КА (~ 550 -590 кг при начальной массе 1000 кг). Предполагается продолжить выполненный анализ данной проблемы.

8. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ivashkin V.V. Lunar space projects. // American Astronautical Society Publications, Science and Technology Series, Vol. 108, 2004. Proceedings of the International Lunar Conference 2003, November 16-22, 2003, Hawaii Island, USA. Eds: Steve M. Durst, et al. AAS 03-763. P. 481-499.
2. Егоров В.А. О некоторых задачах динамики полета к Луне. – Успехи физических наук, 1957, т. 63, вып. 1а, с. 73-117.
3. Егоров В.А. Пространственная задача достижения Луны. – М.: Наука. 1965. 224 с.
4. Егоров В.А., Гусев Л.И. Динамика перелетов между Землей и Луной. – М.: Наука. 1980. 544 с.
5. Giuseppe Racca, Bernard Foing, and the SMART-1 Project Team. The SMART-1 Mission: A Solar-Powered Visit to the Moon. // ESA bulletin. Number 113-february 2003. Pp. 15-21.
6. Foing B.H., Racca G.D., et al. SMART-1 after lunar capture: First results and perspectives. // J. of Earth System Science, Vol. 114, N. 6, Dec. 2005. Pp. 687-697.

7. Belbruno E. Lunar Capture Orbits, a Method of Constructing Earth-Moon Trajectories and the Lunar GAS Mission // AIAA Paper 87-1054, 19th Intern. Electric Propulsion Conf. 1987. 9 p.
8. Sternfeld A. Sur les trajectoires permettant d'approcher d'un corps attractifs central à partir d'une orbite Keplérienne donnée. // *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (Paris), 1934, vol. 198. Pp. 711— 713.
9. Штернфельд А.А. Введение в космонавтику. а) 1937, М.- Л.: ОНТИ, 318 с. б) Изд. 2-е, М: Наука, 1975, 240 с.
10. Ивашкин В.В., Тупицын Н.Н. Об использовании гравитационного поля Луны для выведения космического аппарата на стационарную орбиту спутника Земли. // *Космические исследования*. 1971, т. IX, вып. 2, с. 163-172.
11. Ивашкин В.В. Оптимизация космических маневров при ограничениях на расстояния до планет. М.: Наука, 1975, 392 с.
12. Graziani F., Gastronuovo M.M. and Teofilatto P. Geostationary obits from mid-latitude launch sites via lunar gravity assist. // *American Astronautical Society Publications, Advances in Astronautical Sciences*. V. 84. 1993. AAS 93-289. Pp. 561-572.
13. Riebe T., and Schweitzer M. Space operations and support. // *AEROSPACE AMERICA*, Dec. 1998, p. 83.
14. Ивашкин В.В. О траекториях возвращения космического аппарата с геостационарной орбиты к Земле с использованием гравитационного маневра у Луны. Доклады Академии Наук. 2006, том 409, N 6. С. 770-773.
15. Miller J.K., Belbruno E.A. A Method for the Constructing of a Lunar Transfer Trajectory Using Ballistic Capture. Presented at the AAS/AIAA Spaceflight Mechanics Meeting, Houston. 1991, Paper AAS 91-100, pp. 97–109.
16. Belbruno E.A. and Miller J.K. Sun-Perturbed Earth-to-Moon Transfers with Ballistic Capture; - *J. of Guidance, Control and Dynamics*. 1993, Vol. **16**. № 4. Pp. 770–775.
17. Hiroshi Yamakawa, Jun'ichiro Kawaguchi, Nobuaki Ishii, Hiroki Matsuo. On the Earth-Moon Transfer Trajectory with Gravitational Capture: AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, Victoria, USA. 1993, Paper AAS 93-633, 20 p.
18. Uesugi, Kuninori. Space Odyssey of an Angel – Summary of the Hiten's Three Years Mission: AAS/GSFC International Symposium on Space Flight Dynamics, 1993, AAS Paper 93-292. 20 p.

19. Bello Mora M., F. Graziani, P. Tiofilatto, et al. A Systematic Analysis On Weak Stability Boundary Transfers To The Moon: 51st International Astronautical Congress, Rio de Janeiro, Brazil, October 2000. Paper IAF-00-A.6.03. 12 p.
20. Biesbroek R., Janin G. Ways to the Moon? ESA Bulletin. 2000, Vol. 103. Pp. 92 - 99.
21. Koon W.S., Lo M.W., Marsden J.E., et al. Low Energy Transfer to the Moon; *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* (Kluwer Academic Publishers, Netherlands), 2001, Vol. **81**, pp. 63-73.
22. Ивашкин В.В. О траекториях полета точки к Луне с временным захватом ее Луной. // Доклады Академии наук, 2002, том 387, N 2, с. 196-199.
23. Ивашкин В.В. О траекториях полета точки от Луны к Земле с гравитационным освобождением от лунного притяжения. // Доклады Академии Наук, 2004, том 398, N 3, с. 340-342.
24. Эльясберг П.Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. // М.: Наука, 1965. 540 с.
25. Основы теории полета космических аппаратов. Под редакцией Нариманова Г.С., Тихонравова М.К. // М.: Машиностроение, 1972. 610 с.
26. Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г. Введение в механику космического полета. // М.: Наука, 1990. 448 с.
27. Ивашкин В.В., Баум Ф.И. Использование гравитационного маневра у Луны для полта космического аппарата к сближающемуся с Землей астероиду. – Препринт ИПМ им. Келдыша РАН, 2000, N 67. 32 с.
28. Степаньянц В.А., Львов Д.В. Эффективный алгоритм решения системы дифференциальных уравнений движения. // Математическое моделирование. 2000, т. 12, вып. 6, с. 9-14.
29. Петухов В.Г. Оптимизация многовитковых перелетов между некомпланарными эллиптическими орбитами. // Космич. исследования, т. 42, № 3, 2004, с. 260-279.
30. Petukhov V.G., Konstantinov M.S. Spacecraft Insertion into High Working Orbits using Light-Class Launcher and Electric Propulsion. Proceedings of 17th International Symposium on Space Flight Dynamics, vol. 2, 2003, pp. 314-327.
31. Konstantinov M.S., Petukhov V.G. Easy Engineering Technique of Optimal Electric Propulsion Trajectory Estimation. IAC-06-C4.4.06, 2006, 11 p.