

ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 39 за 2007 г.



ISSN 2071-2898 (Print) ISSN 2071-2901 (Online)

А. К. Платонов

Определение параметров проективного отображения в зрительном канале робота

Статья доступна по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International



Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Платонов А. К. Определение параметров проективного отображения в зрительном канале робота // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2007. № 39. 33 с.

https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2007-39

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК Ордена Ленина ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ имени М.В. Келдыша

А.К.Платонов

Определение параметров проективного отображения в зрительном канале робота

Определение параметров проективного отображения в зрительном канале робота

А.К.Платонов

(platonov@keldysh.ru)

Аннотация

Работа посвящена описанию методов определения и использования значений параметров отображения двумерной плоскости в себя в задаче построения модели зрительной системы робота.. Методы, базирующиеся на представлении Ли непрерывной группы проективных преобразований, позволяют получать параметры прямого и обратного отображений "сцена - кадр" (или "сцена – сцена" - в процессе движения) без знания характеристик видеодатчика и места его установки на роботе. На примере алгоритмов системы зрения робота "Трикол" описывается метод привязки координат сцены к параметрам телевизионных кадров и приводится оценка его погрешностей.

Работа поддержана грантами РФФИ № 05-01-00885

Projective Mapping Determination for Robot Vision

A.K.Platonov KIAM RAS

(platonov@keldysh.ru)

Annotation

This work deals with peculiarities of representation method for visual scene transforms in task of a mobile robot video scene analysis. This method permits to avoid necessity to know parameters and localization of a video sensor. Coefficients of Lie transformations for the direct and inverse mapping "scene – cadre" (or "scene – scene", during the robot motion) are got as result of a solving of calibration equations. An example of visual data interpretation is given for visual system of mobile robot "Trikol"..

The work was supported by RFFI grants # 05-01-00885

Содержание								
Введение	3							
Зрительный канал робота "Трикол".								
Проективное пространство ВСК								
Проективная группа Ли преобразований плоскости в себя	9							
Определение коэффициентов преобразования	12							
Оценка погрешности пиксельно-координатного отображения								
Грубость оценки сверху								
Выражения для вариаций коэффициентов отображения сцены в кадр								
Оценка достижимой точности определения координат	17							
Модель калибровочных погрешностей	17							
Анализ свойств навигационных погрешностей	21							
Особенности проективного преобразования	21							
Благодарности	24							
Цитированная литература								
Приложение								
Определение параметров проективного преобразования								
Проективное преобразование прямой								
Проективное преобразование плоскости на прямоугольник								
1 1 1								

Введение

Проективное отображение двумерной плоскости в себя является основной моделью при описании геометрических свойств изображений пространственных сцен на телевизионных или фотографических кадрах. При этом, проективные параметры обычно описываются в виде элементов матриц однородных координат и их линейных преобразований. Здесь хорошо известны постановки и решения задач трёх типов: задач машинной графики, задач калибровки видеокамер в интересах фотограмметрии и задач управления движением робота. Все они тесно связаны с предметом данной работы.

В задачах машинной графики (см., например, [1-5]) для получения в рамках геометрической оптики параметров матрицы проективного отображения рисуемой трехмерной сцены, как правило, задаются значения фокусного расстояния объектива и координаты его расположения в системе координат сцены. Однако следует отметить, что точные параметры расположения в пространстве источника видеоизображений и его угла зрения, как правило, неизвестны, или известны лишь приближённо. Вместе с этим, в искомом проективном преобразовании сцен гораздо более важную роль часто играют факторы нарушений постулатов геометрической оптики.

Это обстоятельство породило обширную литературу, связанную с решением задач калибровки видеокамер по предъявляемым образцам сцен с известными реперными точками. Наиболее ранние из этих работ были связаны с проблемами астрометрии и аэрофотосъёмки, когда высокоточная коррекция дисторсии и астигматизмов оптики играла наиболее важную роль в метрических интерпретациях деталей получаемых сцен. Анализ истории развития методов калибровки видеосистем содержится в работе [6], где прослежен трудный путь от создания образцовых линз и камер [7], сложных калибровочных стендов (мультиколлиматоров [8], гониометров [9]), наблюдений массивов звезд [10] с известным (<0,4") угловым положением до высокоточных (<1мкм) калибровочных математических методов [11,12].

Заметим, что по мере развития видеотехники усложнялись и сами задачи калибровки. Применительно к фотоплёночным астрографам и аэрокамерам исправлялись параметры оптики и зерна фотоэмульсии, для телевизионных приемников появились дополнительные параметры ошибок аналогового сигнала, а у современных цифровых видеокамер возникло новое множество параметров электрических и геометрических погрешностей изготовления светочувствительных матриц [13].

В 1948 г. появилась первая работа [14] с постановкой задачи "само-калибровки" камеры - непосредственно по видимой сцене (при точном знании метрических свойств расположения объектов на ней). Наиболее популярные способы такой калибровки (по наблюдению линейных объектов с известной метрикой деталей их поверхности) описаны в работах [15,16].

При этом, начиная с работы [16], понятие "калибровка камеры" стало всё более удаляться от задач фотограмметрии в сторону задач определения параметров технического зрения роботов и автомобилей. Особенностью этих

задач являются не столько проблемы метрических искажений внутри кадра фотоприёмника (поскольку требуемая точность распознавания метрических свойств зрительной сцены часто позволяет оставаться в рамках модели геометрической оптики) сколько - неизвестность взаимного расположения камеры и трёхмерной сцены наряду с проблемами неоднозначности распознавания трёхмерной позиции областей яркостей сцены на её двумерном изображении (вытекающими из теоремы Л.Брауера о топологической инвариантности отображений [17,18]).

Данная работа, как и многие другие работы (см., например, [19,20]) связана с проблемой навигации по сигналам единственной видеокамеры мобильного робота, предназначенного для движения по полу помещений. Здесь рассматривается проблема калибровки, но не калибровки внутренних и внешних параметров видеокамеры (которые не обязательно нужны, т.к. являются лишь промежуточными параметрами искомого проективного преобразования сцен), а - калибровки параметров отображения метрик трёхмерных сцен и пикселов кадра с их изображением.

С этой целью описывается метод прямой калибровки параметров отображения двумерной плоскости в себя, используемого в задаче построения навигационных алгоритмов по зрительным картинам рисунка пола. Получаемое проективное преобразование пространств пола и кадра позволяет с требуемой навигационной точностью получать параметры прямого и обратного отображений "сцена - кадр" (или "сцена – сцена" - в процессе движения робота) без знания характеристик видеодатчика и координат места его установки на роботе.

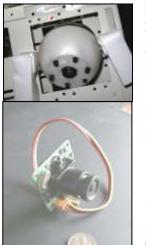
Предлагаема ниже техника определения искомых параметров базируется на дробно-линейном представлении операций непрерывной группы Ли проективных преобразований. Это позволяет, используя непрерывные зависимости параметров группы от навигационных параметров, получать связь последних с пикселами видеокадра путём решения прямой и обратной задач дробно-линейного отображения. Ha удобство описания проективного преобразования вместо алгебры однородных матриц было обращено внимание в работах [21,22], направленных на разработку модели динамики изменения содержания сцен и моделей формообразования в машиностроении. Основная и весьма плодотворная идея здесь заключалась в применении математического аппарата непрерывных групп Ли для построения способов минимизации числа параметров описания изменений искомого преобразования.

Ниже модель проективного отображения двумерной плоскости в себя рассматривается в задаче калибровочного построения модели зрительной системы робота "Трикол". Необходимость этой разработки возникла, именно благодаря упомянутым обстоятельствам неизвестности точных параметров и позиции используемого зрительного сенсора. Особое внимание уделено анализу ошибок преобразования.

 $^{^{*)}}$ Название связано с трёхколесной реализацией полноприводного шасси робота.

Зрительный канал робота "Трикол".

Экспериментальный робот "Трикол" достаточно полно описан в работах [23-33]. Робот предназначен для движения по полу в комнатных стеснённых условиях. Он в разное время был оснащен аналоговой или цифровой телевизионной "вперед смотрящей камерой" (ВСК) с черно-белым



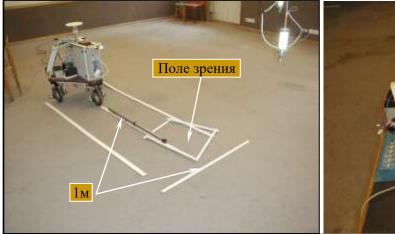
изображением сцены перед роботом. Аналоговая камера показана на рисунке слева, цифровая - справа. Зрительный канал этих камер включает:

- объектив (его фокусное расстояние и угол зрения известны приблизительно);
- ПЗС- или КМОП-матрицы (число их пикселов особого значения не имеет, ввиду преобразования сигналов пикселов в телевизионный стандарт выходного сигнала [24]).
- преобразователя фотометрического данных в цифровую форму с заданным числом строк и пикселов в строке); Особенностями зрительного канала робота "Трикол" [23,24] являются:
- установка TV-камеры внутри корпуса робота с невозможностью точного измерения её положения и ориентации в системе координат робота;
- регулируемое разрешение кадра сцены: 640x480; 176x144; 128x90; 80x60;
- неопределённость позиции ПЗС в поле зрения объектива;
- наклон вниз оси зрения для осмотра предметов на поверхности пола;
- малый угол поля зрения объектива.

В зависимости от расположения камеры на роботе и её наклона система управления имеет информацию внутри некоторой "области видимости", ограниченной границами пространственного угла поля зрения, поверхностью пола и объектами на нём. Её параметры



легко получить, отображая на экран монитора границы поля зрения на полу и измеряя их расположение относительно робота.





Колея, её осевая линия и поле зрения ВСК перед роботом и на экране монитора

На рисунках выше и ниже показаны варианты областей видимости робота "Трикол", использовавшиеся в опытах управления движением робота среди препятствий. Здесь хорошо видны типы смещения поля зрения относительно продольной оси робота и перспективное расширение поля зрения.

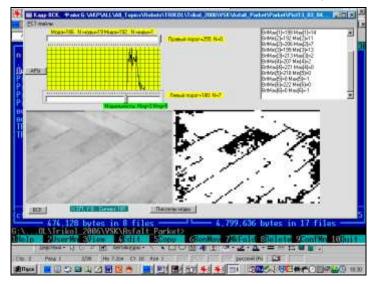


Приведенные примеры иллюстрируют не совсем очевидные особенности влияния на алгоритмы управления движением робота параметров высоты видео-приёмника. наклона При расположения И угла расположении (верхний и левый рисунки) необходимость контролировать окружение робота в пределах ширины его колеи заставляет, изменяя угол наклона, далеко отодвигать поле зрения от робота или смещать его в сторону левой или правой колеи. Это приводит к анизотропии алгоритмов построения движений при объезде препятствий справа или слева. Поэтому, вопреки бытующему мнению, что камеру зрения желательно устанавливать повыше, иногда более целесообразно именно низкое расположение расширением её поля зрения, как это показано на правом рисунке.

Оптимальная высота расположения камеры та, при которой дальний край поле зрения охватывает всю ширину колеи робота, в то время, как ближний край поля зрения расположен на расстоянии не более удвоенной длины его тормозного пути. Это правило обеспечивает минимальные требования к точности счисления пути, определяемые необходимостью движения "по памяти" внутри увиденной ранее слепой части поля зрения робота.

Проективные искажения картины окружения робота могут быть велики. Например, на следующей странице показан экран инструментальной системы при работе с высокорасположенной ВСК. Видно, что на ближнем срезе поля зрения кадра умещаются не более 3,5 элементов паркета пола, в то время, как на верхнем срезе поля зрения их видно почти все 5. Приближение поля зрения (левый рисунок на этой стр.) слабо меняет это, близкое к 1,5 соотношение. Однако при низком расположении камеры проективные искажения увеличиваются до соотношения порядка 3 (рисунок справа внизу).

Это означает, что зрительные каналы робототехники при уменьшении наклона камеры и увеличении дальности обзора по необходимости приводят к разработке методов анализа проективных преобразований пространства в области видимости робота. Заметим, что, использование объектива с узким углом зрения порождает чистую "проективность" отображения пола - без элементов дисторсии в кадре. При широкоугольном объективе следует использовать упомянутые методы борьбы с дисторсией (см. также [34]).





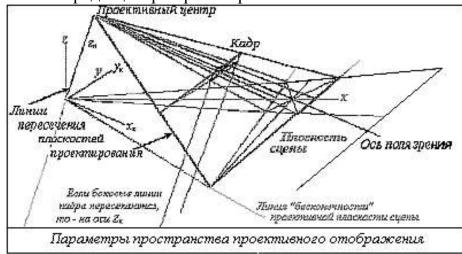
Проективное пространство ВСК

Построим модель центрального проективного отображения плоскости сцены на плоскость кадра ВСК в самых общих предположениях. Ими являются предположения:

- о возможном смещении системы координат камеры относительно системы координат робота по трём координатам и трём углам,
- о возможном отсутствии прямоугольности сторон матрицы ПЗС и кадра,
- о наличии единого проективного центра (т.е. об отсутствии астигматизма и дисторсии объектива).

Заметим, что выше нигде не используются параметры объектива, - речь здесь идёт лишь о неком отображении двумерной плоскости на себя.

В этих общих предположениях картина проективного преобразования выглядит так, как она показана на рисунке. С центром проективного преобразования и направлением линии визирования (оси поля зрения) связаны оси камерной системы координат x_{κ} , y_{κ} , z_{κ} , начало которой совмещено с началом системы координат x, y, z в плоскости сцены. При этом ось x есть проекция оси поля зрения x_{κ} на плоскость сцены. Хотя в реальности плоскость кадра расположена за центром проектирования относительно наблюдаемой сцены, тем не менее, из соображений симметрии её удобнее представлять расположенной впереди центра проектирования.



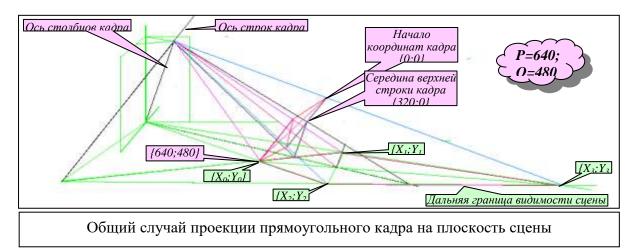
Заметим, что расстояние от центра проектирования до плоскости кадра равно фокусному расстоянию объектива лишь тогда, когда размеры изображения и координаты в плоскости сцены выражены в одинаковых метрических мерах. В нашем случае это не так: размеры фоточувствительного элемента используемой камеры, как правило, не известны с нужной точностью. Более того, после ряда программно-аппаратных преобразований оптического сигнала "размеры" плоскости кадра выражаются в единицах выбранного разрешения изображения сцены (число пикселов в строках кадра и число строк в кадре). Поэтому размеры кадра, известные в лишь единицах разрешения, определяют лишь его "виртуальное" расстояние от центра проектирования, линейно связанное с фокусным расстоянием и масштабом размеров сцены, приходящихся на одну дискрету (пиксел) изображения Поскольку это расстояние нигде не используется, то оно и не вычисляется.

Далее, хотя плоскость кадра в реальных условиях, вообще говоря, не обязательно расположена перпендикулярно оси оптики, но из факта сохранения фокуса по всему кадру эта ортогональность следует с точностью до параметров глубины резкости. В общем случае кадр и не обязательно прямоуголен. Тогда прямые пересечения плоскостей пространственного угла проектирования с плоскостями кадра и сцены в силу свойств проективного преобразования имеют точки схода, принадлежащие общим прямым, как это показано на рисунке.

Однако в нашем случае видеоизображение сцены на экране монитора при любых искажениях в оптическом тракте всегда имеет прямоугольную форму (в силу свойств программно-аппаратных преобразований при изображении цифрового кода яркостей). При таком прямоугольном кадре, перпендикулярном оси камеры, линии пересечения пар плоскостей его проектирования взаимно ортогональны и лежат в плоскости, параллельной плоскости кадра. На этих линиях (возможно — в бесконечности) лежат точки схода границ сцены пола (принадлежащих плоскостям проектирования). Это свойство позволяет уточнять измерения координат вершин поля зрения.

преобразованием "перспективным сцены" будем отображение плоскость кадра K(p,q)видимой векторного на части пространства $\{x,y\}$ плоскости S сцены. Видимая часть плоскости сцены представляет собой неправильный четырёхугольник, ограниченной линиями её пересечения с плоскостями пространственного угла проектирования кадра. Введём в рассмотрение векторы углов этого четырёхугольника с координатами $x_0,y_0; x_1,y_1; x_2,y_2$ и x_3,y_3 , как это показано на рисунке ниже. В плоскости кадра введём координаты с началом в левом верхнем углу кадра, если смотреть из центра проектирования, связанные с номером пиксела р в строке кадра и номером q строки кадра (например, $p=\{0..640\}$, $q=\{0..480\}$).

Задача, таким образом, заключается в построении проективного преобразования без использования параметров камеры (фокусного расстояния объектива, линейных размеров фотоприёмника) и её расположения на роботе.



Проективная группа Ли преобразований плоскости в себя

Приведенное описание искомого преобразования соответствует проективной группе преобразований плоскости из подкласса примитивных групп класса групп Ли [20]. Примитивные группы Ли описывают непрерывные (по параметрам) группы преобразований со свойством параметрической изотропии (симметрии параметрических выражений относительно преобразуемых элементов группового множества - см. [21]) Число степеней свободы деформации плоскости в этой группе (её число "п-транзитивности") равно четырём (4 произвольные точки плоскости изотропно определяют положения всех остальных её точек). Умножение числа *п*-транзитивности группы на размерность пространства даёт число неизвестных параметров преобразования. Этот подход и позволяет избежать необходимости знания параметров камеры и её положения в пространстве в задаче отображения сцена - кадр. С другой стороны, знание параметров преобразования позволяет (при необходимости, с помощью специально подобранных измерений) определить неизвестные параметры камеры и её положение в пространстве.

Проективная группа Ли преобразования плоскости в себя описывается дробно-линейными выражениями восемипараметрической непрерывной связи отображаемых пар двумерных координат:

$$P = \frac{a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1}{a \cdot x + b \cdot y + 1}$$
$$Q = \frac{a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2}{a \cdot x + b \cdot y + 1}$$

Отсюда следует, что система проективного отображения связывает координаты на плоскости с координатами кадра линейными формами вида:

$$a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 = P \cdot (a \cdot x + b \cdot y + 1)$$

 $a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2 = Q \cdot (a \cdot x + b \cdot y + 1).$

Заметим, что эти линейные выражения обычно записывают с помощью матричной связи однородных координат в плоскости сцены и кадра

но при этом элементы перспективы и сдвига c_1 , c_2 , а и b выражают, как было сказано, через параметры фокусного расстояния и расположения камеры [1].

Искомые 8 параметров отображения плоскости сцены S на плоскость кадра K получаются в принятых системах координат кадра и сцены из решения системы 8-ми уравнений связи 4-х точек $\{0,0\}$; $\{0,Q\}$; $\{P,0\}$; $\{P,Q\}$ вершин *прямоугольника* кадра с соответствующими ему вершинами $\{x3,y3\}$; $\{x1,y1\}$; $\{x2,y2\}$; $\{x0,y0\}$ четырёхугольника сцены, видимого в кадре:

$$\begin{array}{c} a_1 \cdot x0 + b_1 \cdot y0 + c_1 = P \cdot (a \cdot x0 + b \cdot y0 + 1) \\ a_2 \cdot x0 + b_2 \cdot y0 + c_2 = Q \cdot (a \cdot x0 + b \cdot y0 + 1) \\ a_1 \cdot x1 + b_1 \cdot y1 + c_1 = 0 \\ a_2 \cdot x1 + b_2 \cdot y1 + c_2 = Q \cdot (a \cdot x1 + b \cdot y1 + 1) \\ a_1 \cdot x2 + b_1 \cdot y2 + c_1 = P \cdot (a \cdot x2 + b \cdot y2 + 1) \\ a_2 \cdot x2 + b_2 \cdot y2 + c_2 = 0 \\ a_1 \cdot x3 + b_1 \cdot y3 + c_3 = 0 \\ a_2 \cdot x3 + b_2 \cdot y3 + c_2 = 0 \end{array}$$

или – в более удобной записи:

С целью упрощения записи решения этой системы введём обозначения для входящих в его выражение следующих всегда не равных нулю значений круговых подстановок измеренных координат (четырёх типов их *треугольных* индексов из номеров четырёхугольника поля зрения):

$$C013 = x0 \cdot (y1 - y3) + x1 \cdot (y3 - y0) + x3 \cdot (y0 - y1)$$

$$C021 = x0 \cdot (y2 - y1) + x2 \cdot (y1 - y0) + x1 \cdot (y0 - y2)$$

$$C032 = x0 \cdot (y3 - y2) + x3 \cdot (y2 - y0) + x2 \cdot (y0 - y3)$$

$$C132 = x1 \cdot (y3 - y2) + x3 \cdot (y2 - y1) + x2 \cdot (y1 - y3)$$

В этих обозначениях выражения для искомых коэффициентов проектирования четырёхугольника сцены на прямоугольник кадра имеют вид (вывод этих выражений приведен в приложении):

$$a := \frac{\frac{(y2 - y0)}{C032} + \left[\frac{(-y1 + y0)}{C013} + \frac{(-y2 + y1)}{C132}\right]}{\frac{(-x0y2 + y0 \cdot x2)}{C032} + \left[\frac{(-y0 \cdot x1 + x0y1)}{C013} + \frac{(-x2y1 + y2 \cdot x1)}{C132}\right]}$$

$$b := \frac{\frac{(x0 - x2)}{C032} + \left[\frac{(-x0 + x1)}{C013} + \frac{(-x1 + x2)}{C132}\right]}{\frac{(-x0y2 + y0 \cdot x2)}{C032} + \left[\frac{(-y0 \cdot x1 + x0y1)}{C013} + \frac{(-x2y1 + y2 \cdot x1)}{C132}\right]}$$

$$a1 := \frac{\frac{C021}{C132} \cdot \frac{(y3 - y1)}{C013}}{\frac{(-x0y2 + y0 \cdot x2)}{C032}} + \left[\frac{\frac{(-y0 \cdot x1 + x0y1)}{C013} + \frac{(-x2y1 + y2 \cdot x1)}{C132}}{\frac{C021}{C132} \cdot \frac{(-x3 + x1)}{C013}} \cdot P \right]$$

$$b1 := \frac{\frac{C021}{C032} \cdot \frac{(-x3 + x1)}{C013}}{\frac{(-x0y2 + y0 \cdot x2)}{C032}} + \left[\frac{\frac{(-y0 \cdot x1 + x0y1)}{C013} + \frac{(-x2y1 + y2 \cdot x1)}{C132}}{\frac{(-x0y2 + y0 \cdot x2)}{C032}} \cdot P \right]$$

$$c1 := \frac{\frac{C021}{C032} \cdot \frac{(y2 - y3)}{C013}}{\frac{(-x0y2 + y0 \cdot x2)}{C032}} + \left[\frac{\frac{(-y0 \cdot x1 + x0y1)}{C013} + \frac{(-x2y1 + y2 \cdot x1)}{C132}}{\frac{(-x0y2 + y0 \cdot x2)}{C032}} \cdot Q \right]$$

$$b2 := \frac{\frac{C021}{C032} \cdot \frac{(x3 - x2)}{C032}}{\frac{(-x0y2 + y0 \cdot x2)}{C032}} + \left[\frac{\frac{(-y0 \cdot x1 + x0y1)}{C013} + \frac{(-x2y1 + y2 \cdot x1)}{C132}}{\frac{(-x0y2 + y0 \cdot x2)}{C032}} \cdot Q \right]$$

$$c2 := \frac{\frac{C021}{C032} \cdot \frac{(x2y3 - y2 \cdot x3)}{C032}}{\frac{(-x0y2 + y0 \cdot x2)}{C032}} + \left[\frac{(-y0 \cdot x1 + x0y1)}{C013} + \frac{(-x2y1 + y2 \cdot x1)}{C132} \right] \cdot Q$$

С найденными коэффициентами a1, b1, c1, a2, b2, c2 и a,b из исходного выражения для проективного преобразования получаем связь координат других точек плоскости сцены (например, - точек пола) с координатами пикселов на кадре.

В свою очередь, применение закона перспективных преобразований, как системы уравнений относительно неизвестных координат сцены при известных координатах кадра, после решения относительно х и у исходной системы уравнений $a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 = p \cdot (a \cdot x + b \cdot y + 1)$

$$a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2 = q \cdot (a \cdot x + b \cdot y + 1)$$

по известным координатам пикселов p, q для видимых в кадре точек плоскости сцены имеем выражения для координат этих точек в принятых координатах плоскости сцены имеем:

$$x = \frac{b \cdot (c1 \cdot q - c2 \cdot p) + b2 \cdot (p - c1) - b1 \cdot (q - c2)}{(b \cdot a2 - b2 \cdot a) \cdot p + (b1 \cdot a - b \cdot a1) \cdot q + (b2 \cdot a1 - b1 \cdot a2)}$$

$$y = -\frac{a \cdot (c1 \cdot q - c2 \cdot p) + a2 \cdot (p - c1) - a1 \cdot (q - c2)}{(b \cdot a2 - b2 \cdot a) \cdot p + (b1 \cdot a - b \cdot a1) \cdot q + (b2 \cdot a1 - b1 \cdot a2)}$$

Заметим, что отсутствие симметрии знаков в выражениях для значений х и у объясняется тем, что для описания пикселов кадра принята стандартная для машинной графики левая система координат (х – направо, у – вниз).

Относительно р и q выражения для х и у имеют вид:

$$x = \frac{(b2 - b \cdot c2) \cdot p + (b \cdot c1 - b1) \cdot q + (b1 \cdot c2 - b2 \cdot c1)}{(b \cdot a2 - b2 \cdot a) \cdot p + (b1 \cdot a - b \cdot a1) \cdot q + (b2 \cdot a1 - b1 \cdot a2)}$$

$$y = -\frac{(a2 - a \cdot c2) \cdot p + (a \cdot c1 - a1) \cdot q + (a1 \cdot c2 - a2 \cdot c1)}{(b \cdot a2 - b2 \cdot a) \cdot p + (b1 \cdot a - b \cdot a1) \cdot q + (b2 \cdot a1 - b1 \cdot a2)}$$
(*)

Если выполнить нормирование коэффициентов при р и q величиной свободного члена знаменателя, то получим стандартное выражение для отображения "Кадр \rightarrow ПЗ", обратного исходному преобразованию "ПЗ \rightarrow Кадр":

$$x = \frac{\frac{b2 - b \cdot c2}{(b2 \cdot a1 - b1 \cdot a2)} \cdot p + \frac{b \cdot c1 - b1}{(b2 \cdot a1 - b1 \cdot a2)} \cdot q + \frac{b1 \cdot c2 - b2 \cdot c1}{(b2 \cdot a1 - b1 \cdot a2)}}{\frac{(b \cdot a2 - b2 \cdot a)}{(b2 \cdot a1 - b1 \cdot a2)} \cdot p + \frac{(b1 \cdot a - b \cdot a1)}{(b2 \cdot a1 - b1 \cdot a2)} \cdot q + 1}$$

$$y = -\frac{\frac{(a2 - a \cdot c2)}{(b2 \cdot a1 - b1 \cdot a2)} \cdot p + \frac{(a \cdot c1 - a1)}{(b2 \cdot a1 - b1 \cdot a2)} \cdot q + \frac{a1(1 - c2) - a2 \cdot (1 - c1)}{(b2 \cdot a1 - b1 \cdot a2)}}{\frac{(b \cdot a2 - b2 \cdot a)}{(b2 \cdot a1 - b1 \cdot a2)} \cdot p + \frac{(b1 \cdot a - b \cdot a1)}{(b2 \cdot a1 - b1 \cdot a2)} \cdot q + 1}$$

Этими выражениями определена связь коэффициентов прямого и обратного проективных преобразований (элементов матриц однородных координат)..

Определение коэффициентов преобразования

Полученные выражения коэффициентов a1, b1, c1, a2, b2, c2 и a,b обеспечивают получение взаимно однозначной связи пикселов кадра и точек видимой плоскости сцены применительно к задаче определения координат объектов в интересах навигации при движении робота. Для определения параметров этого отображения следует измерить координаты вершин четырёхугольника границ видимости, полагая, что эти вершины отображаются на вершины кадра (как это было показано на приведенных выше рисунках).



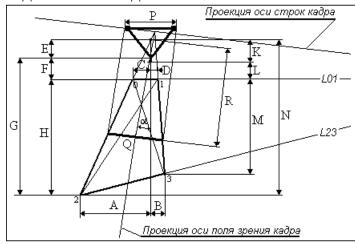


В качестве примера приведём полученные значения коэффициентов для цифровой камеры последней конфигурации робота Трикол (см. рис. выше). Из условий захвата кадров в периоде их преобразований в темпе реального времени разрешение камеры было выбрано равным: P=176; Q=144.

При расположении камеры внутри корпуса робота с учётом необходимости видимости пространства перед роботом на расстоянии около удвоенного его тормозного пути была получена следующая картина поля зрения на горизонтальной плоскости пола:



На заднем плане левого снимка видна ширина колеи робота Р, определяемая внешним размером двигателей задних колёс.



Проекции строк кадра на плоскость сцены (пересечение последней с фокальной плоскостью) определяется направлением из проекции центра зрения на точку пересечения прямых L01, L12..

Измерение параметров поля зрения дало следующие значения [см]:

A	В	С	D	Е	F	G	Н	K	L	M	N	P	Q	R	α^{o}
83	34	21	12	32	54	208	154	42	44	138	240	82	83	181	5

Координаты углов поля зрения, отображаемые на вершины кадра, соответственно, равны:

$$X_0$$
=E+F=K+L= 86см; X_1 = X_0 = 86см; X_2 = N = 240см; X_3 = E+F+M=K+L+M = 224см; Y_0 = -C = -21см; Y_1 = D = 12см; Y_2 = -A =- 83см; Y_3 = B = 34см. Тогда коэффициенты преобразования ПЗ \leftrightarrow Кадр при P=176 и Q=144 равны: $a = 0.0222 \text{ [cm}^{-1}]; a_1$ = 0.718[px, cm $^{-1}$]; b_1 =-8.252[px, cm $^{-1}$]; c_1 =148.980[px]; b_2 =-0.00190[cm $^{-1}$]; a_2 =-1.995[px, cm $^{-1}$]; b_2 =-0.283[px, cm $^{-1}$]; c_2 =372.395[px].

Оценка погрешности пиксельно-координатного отображения

Погрешностей измерения значений координат четырёх калибровочных точек x1, y1, x2, y2, x3, y3, x4, y4, z_{max} и соответствующих им величин P и Q влияют на точность определения параметров проективного отображения. Прежде всего выпишем вариации треугольных комплексов Сххх при варьировании этих координат :

```
\begin{split} \delta C013 &= \delta x 0 \cdot (y1 - y3) + \delta x 1 \cdot (y3 - y0) + \delta x 3 \cdot (y0 - y1) + \\ &+ \delta y 0 \cdot (x3 - x1) + \delta y 1 \cdot (x0 - x3) + \delta y 3 \cdot (x1 - x0); \\ \delta C021 &= \delta x 0 \cdot (y2 - y1) + \delta x 2 \cdot (y1 - y0) + \delta x 1 \cdot (y0 - y2) + \\ &+ \delta y 0 \cdot (x1 - x2) + \delta y 2 \cdot (x0 - x1) + \delta y 1 \cdot (x2 - x0); \\ \delta C032 &= \delta x 0 \cdot (y3 - y2) + \delta x 3 \cdot (y2 - y0) + \delta x 2 \cdot (y0 - y3) + \\ &+ \delta y 0 \cdot (x2 - x3) + \delta y 3 \cdot (x0 - x2) + \delta y 2 \cdot (x3 - x0); \\ \delta C132 &= \delta x 1 \cdot (y3 - y2) + \delta x 3 \cdot (y2 - y1) + \delta x 2 \cdot (y1 - y3) + \\ &+ \delta y 1 \cdot (x2 - x3) + \delta y 3 \cdot (x1 - x2) + \delta y 2 \cdot (x3 - x1); \end{split}
```

Полагая ошибки измерения координат одинаковыми по величине, но с наихудшими знаками: $\delta xy = \{\pm \delta x0, \pm \delta y0, \pm \delta x1, \pm \delta y1, \pm \delta x2, \pm \delta y2, \pm \delta x3, \pm \delta y3\}$, получим максимальные оценки их влияния на искомые параметры: Наборы численных значений вариаций $\delta Cxxx$ и коэффициентов преобразования имеют 2^8 вариантов (соответствующих вершинам единичного куба в восьмимерном пространстве знаков вариаций δxy). Можно попытаться построить их оценку сверху, полагая в каждом случае присутствие наихудшего знака ошибки координат. Хотя это и грубая оценка, но следует оценить её точность.

Грубость оценки сверху

```
Такая мажоранта имеет вид:
```

```
\delta C013_{\text{max}} = \delta xy \cdot [|(y1-y3)| + |(y3-y0)| + |(y0-y1)| + 2|(x0+x1+x3)|] = \delta xy \cdot D013_{\text{max}}
 \delta C021_{\text{max}} = \delta xy \cdot [|(y2 - y1)| + |(y1 - y0)| + |(y0 - y2)| + 2|(x0 + x2 + x1)|] = \delta xy \cdot D021_{\text{max}}
 \delta C032_{\text{max}} = \delta xy \cdot [|(y3-y2)| + |(y2-y0)| + |(y0-y3)| + 2|(x0+x3+x2)|] = \delta xy \cdot D032_{\text{max}}
 \delta C132_{\text{max}} = \delta xy \cdot [|(y3 - y2)| + |(y2 - y1)| + |(y1 - y3)| + 2|(x1 + x3 + x2)|] = \delta xy \cdot D132_{\text{max}}
 Тогда, используя технику логарифмического дифференцирования, получим:
 \delta a1_{\text{Max}} = |a1| \cdot \{\delta P/P + \delta xy \cdot [D021/|C021| + D132/|C132| + D013/|C013| + 2/|(y3-y1)| + R]\};
 \delta b1_{\text{Max}} = |b1| \cdot \{ \delta P/P + \delta xy \cdot [D021/|C021| + D132/|C132| + D013/|C013| + 2/|(x3-x1)| + R ] \};
 \delta c1_{\text{Max}} = |c1| \cdot \{\delta P/P + \delta xy \cdot [D021/|C021| + D132/|C132| + D013/|C013| + D0
                                                                                                                                                                                          +(|x1|+|x3|+|y1|+|y3|)/|(y1\cdot x3\cdot y3\cdot x1)|+R];
 \delta a2_{\text{max}} = |a2| \cdot \{ \delta Q/Q + \delta xy \cdot [D021/|C021| + D132/|C132| + D032/|C032| + 2/|(y2-y3)| + R] \};
 \delta b2_{\text{Max}} = |b2| \cdot \{ \delta Q/Q + \delta xy \cdot [D021/|C021| + D132/|C132| + D032/|C032| + 2/|(x3-x2)| + R] \};
 \delta c2_{\text{Max}} = |c2| \cdot \{\delta Q/Q + \delta xy \cdot [D021/|C021| + D132/|C132| + D013/|C013| + D0
                                                                                                                                                                                         +(|x2|+|x3|+|y2|+|y3|)/|(y2\cdot x3-y3\cdot x2)|+R]};
 \delta a_{\text{max}} = |a| \cdot \delta x y \cdot \{ [2/|C032| + D032 \cdot |(y2 - y0)|/C032^2 + (y2 - y0)|/C0
                                                                                                               2/|C013| + D013 \cdot |(y0-y1)|/C013^2 +
                                                                                                                2/|C132| + D132 \cdot |(y1-y2)|/C132^2|
                                                                                                           /|[(y2-y0)/C032+(y0-y1)/C013+(y1-y2)/C132]|+R\};
\delta b_{\text{max}} = |b| \cdot \delta x y \cdot \{ [2/|C032| + D032 \cdot |(y2-y0)|/C032^2 + (y2-y0)|/C032^2 + (y2-y0)|/C032
                                                                                                               2/|C013| + D013 \cdot |(y0-y1)|/C013^2 +
                                                                                                                2/|C132| + D132 \cdot |(y1-y2)|/C132^2|
                                                                                                           / |[(x0-x2)/C032+(x1-x0)/C013+(x2-x1)/C132]|+R\}.
```

Общее слагаемое R является мажорантой логарифмической вариации знаменателя в исходных выражениях для коэффициентов преобразования:

```
R = \frac{[(|x0| + |x1| + |y0| + |y1|)/|C013| + D013 \cdot |(x0 \cdot y1 - y0 \cdot x1)|/C013^2 + \\ + (|x1| + |x2| + |y1| + |y2|)/|C132| + D132 \cdot |(x1 \cdot y2 - y1 \cdot x2)|/C132^2 + \\ + (|x0| + |x2| + |y0| + |y2|)/|C032| + D032 \cdot |(y0 \cdot x2 - x0 \cdot y2)|/C032^2 \\ ]/ \left[ (x0 \cdot y1 - x1 \cdot y0)/C013 + (x1 \cdot y2 - x2 \cdot y1)/C132 + (x2 \cdot y0 - x0 \cdot y2)/C032 \right] \right]
```

Выполненные расчёты показали, что эта мажоранта на несколько порядков больше величины истинной погрешности (ошибка ± 1 см при измерениях координат вершин поля зрения приводит к погрешностям знания координат сцены прядка 1 м, что, вообще говоря, хоть и возможно (см. ниже), но не всегда и не везде в поле зрения). Оказалось, что причина неудобства мажоранты связана с треугольностью комплексов C^{***} .

Действительно, следует иметь в виду, что при любом выборе знаков вектора ошибок бху он при варьировании не изменяется, и поэтому в силу круговой подстановки индексов один из трёх членов вида

$$\delta C013 = x0 \cdot (\delta y1 - \delta y3) + x1 \cdot (\delta y3 - \delta y0) + x3 \cdot (\delta y0 - \delta y1) \le 2|(x0 + x1 + x3)|$$
 в вариациях треугольных комплексов $\delta Cxxx$ обязательно равен нулю. Поскольку при

низком расположении камеры велики значения координат x2 и x3 дальнего края поля зрения, то отсутствие в мажорирующей оценке такого обнуления приводит в каждом из трёх членов вариаций Сххх практически к удвоению их значений. Подтвердим это примером ошибок, расширяющих размеры поля зрения:

$$\delta xy = \{x0 = \delta x1 = -1, \delta x2 = \delta x3 + 1, \delta y0 = \delta y2 = -1, \delta y1 = \delta y3 = +1\}.$$

Тогда имеем (справа показана суммарная величина множителя при x_i):

Поэтому для низко расположенной камеры робота "Трикол" величины D^{***} равны D013=-362, D021=394, D032=-542, D132=510, вместо +650, 782, +1082, 1082.

Вместе с тем, эти производные Dxxx треугольных комплексов Cxxx по величине модуля ошибки калибровочных измерений координат поля зрения имеют наибольшие значения в выражениях для вариаций коэффициентов проективного преобразования. Отсюда и происходит неоправданное увеличение мажоранты.

Таким образом, для оценки знания погрешностей коэффициентов проективного отображения поля зрения в кадр необходимо получить значения вариаций этих коэффициентов на всём множестве векторов ошибок измерений поля границ зрения и привязки этих границ к границам кадра. Ниже для этого приводятся выражения дифференциалов коэффициентов отображения.

Выражения для вариаций коэффициентов отображения сцены в кадр

Заметим, что дробно-линейные выражения для коэффициентов проективного отображения поля зрения на кадр зрительной системы имеют одинаковый знаменатель:

```
 znam = (x0 \cdot y1 - x1 \cdot y0)/C013 + (x1 \cdot y2 - x2 \cdot y1)/C132 + (x2 \cdot y0 - x0 \cdot y2)/C032,  а сами коэффициенты можно представить в виде:  a1 = (y3 - y1) \cdot kfc1; \ b1 = (x1 - x3) \cdot kfc1; \ c1 = (x3 \cdot y1 - x1 \cdot y3) \cdot kfc1;   a2 = (y2 - y3) \cdot kfc2; \ b2 = (x3 - x2) \cdot kfc2; \ c2 = (x2 \cdot y3 - x3 \cdot y2) \cdot kfc2;  где  kfc1 = P \cdot C021/(C132 \cdot C013 \cdot znam);   kfc2 = Q \cdot C021/(C132 \cdot C032 \cdot znam);   u = ((y0 - y1)/C013 + (y1 - y2)/C132 + (y2 - y0)/C032)/znam;
```

Как было упомянуто, величина погрешности знания этих коэффициентов является функцией восьми переменных - компонент вектора ошибок измерения угловых координат поля зрения:

```
\delta xy = \{\pm \delta x0, \pm \delta y0, \pm \delta x1, \pm \delta y1, \pm \delta x2, \pm \delta y2, \pm \delta x3, \pm \delta y3\}.
```

 $b = \frac{(x_1-x_0)}{C_{013}+(x_2-x_1)}{C_{132}+(x_0-x_2)}{C_{032}}$ znam;

Для каждого значения компонент вектора бху и соответствующего (см. выше) значений вариаций бСххх треугольных параметров имеем:

```
 \delta z nam = (\delta y 1 \cdot x 0 + \delta x 0 \cdot y 1 - \delta y 0 \cdot x 1 - \delta x 1 \cdot y 0) / C013 - \delta C013 \cdot (x 0 \cdot y 1 - x 1 \cdot y 0) / C013^2 + \\ + (\delta y 2 \cdot x 1 + \delta x 1 \cdot y 2 - \delta y 1 \cdot x 2 - \delta x 2 \cdot y 1) / C132 - \delta C132 \cdot (x 1 \cdot y 2 - x 2 \cdot y 1) / C132^2 + \\ + (\delta y 0 \cdot x 2 + \delta x 2 \cdot y 0 - \delta y 2 \cdot x 0 - \delta x 0 \cdot y 2) / C032 - \delta C032 \cdot (x 2 \cdot y 0 - x 0 \cdot y 2) / C032^2; \\ \delta kfc1 = kfc1 \cdot (\delta P/P + \delta C021 / C021 - \delta C132 / C132 - \delta C013 / C013 - \delta z nam / z nam); \\ \delta kfc1 = kfc2 \cdot (\delta Q/Q + \delta C021 / C021 - \delta C132 / C132 - \delta C032 / C032 - \delta z nam / z nam). \\ \text{И тогда} \qquad \delta a1 = a1 \cdot ((\delta y 3 - \delta y 1) / (y 3 - y 1) + \delta k f c 1 / k f c 1); \\ \delta b1 = b1 \cdot ((\delta x 1 - \delta x 3) / (x 1 - x 3) + \delta k f c 1 / k f c 1); \\ \delta c1 = c1 \cdot ((\delta x 3 \cdot y 1 + \delta y 1 \cdot x 3 - \delta x 1 \cdot y 3 - \delta y 3 \cdot x 1) / (x 3 \cdot y 1 - x 1 \cdot y 3) + \delta k f c 1 / k f c 1); \\ \delta a2 = a2 \cdot ((\delta y 2 - \delta y 3) / (y 2 - y 3) + \delta k f c 2 / k f c 2); \\ \delta b2 = b2 \cdot ((\delta x 3 - \delta x 2) / (x 3 - x 2) + \delta k f c 2 / k f c 2); \\ \delta c2 = c2 \cdot ((\delta x 2 \cdot y 3 + \delta y 3 \cdot x 2 - \delta x 3 \cdot y 2 - \delta y 2 \cdot x 3) / (x 2 \cdot y 3 - x 3 \cdot y 2) + \delta k f c 2 / k f c 2). \\ \text{В свою очередь}
```

```
\begin{split} \delta a &= (\ (\delta y 0 - \delta y 1) / C 013 - \delta C 013 \cdot (y 0 - y 1) / C 013^2 + \\ &+ (\delta y 1 - \delta y 2) / C 132 - \delta C 132 \cdot (y 1 - y 2) / C 132^2 + \\ &+ (\delta y 2 - \delta y 0) / C 032 - \delta C 032 \cdot (y 2 - y 0) / C 032^2 \ ) / z nam - \delta z nam \cdot a / z nam; \\ \delta b &= (\ (\delta x 1 - \delta x 0) / C 013 - \delta C 013 \cdot (x 1 - x 0) / C 013^2 + \\ &+ (\delta x 2 - \delta x 1) / C 132 - \delta C 132 \cdot (x 2 - x 1) / C 132^2 + \\ &+ (\delta x 0 - \delta x 2) / C 032 - \delta C 032 \cdot (x 0 - x 2) / C 032^2 \ ) / z nam - \delta z nam \cdot a / z nam; \end{split}
```

Получаемые погрешности коэффициентов отображения поля зрения в кадр при данном векторе бху ошибок измерения вершин поля зрения сами по себе мало интересны. Они являются промежуточными величинами, необходимыми для оценки погрешности привязки видимых в кадре точек сцены.

Оценка достижимой точности определения координат.

Пусть в результате анализа видеоизображения сцены определены пиксельные индексы р и q некоторой точки сцены и с помощью обратного преобразования "Кадр \rightarrow ПЗ" (см. выше (*)) вычислены в системе координат робота координаты x и y наблюдаемой точки. Спрашивается, с какой точностью известны эти координаты? Очевидно, что оценка их погрешности получается путём варьирования обратного преобразования (*) погрешностями знания коэффициентов прямого преобразования, полученными выше.

Запишем преобразование (*) в виде: x=u/w и y=-v/w. Тогда имеем:

```
\begin{split} \delta x &= (\mathbf{u} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{q} - \mathbf{b} 2) / \mathbf{w}^2) \cdot \delta \mathbf{a} 1 + (\mathbf{u} \cdot (\mathbf{b} 1 - \mathbf{b} \cdot \mathbf{p}) / \mathbf{w}^2) \cdot \delta \mathbf{a} 2 + \\ &\quad + ((\mathbf{c} 2 - \mathbf{q}) / \mathbf{w} + \mathbf{u} \cdot (\mathbf{a} 2 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{q}) / \mathbf{w}^2) \cdot \delta \mathbf{b} 1 + ((\mathbf{p} - \mathbf{c} 1) / \mathbf{w} + \mathbf{u} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{p} - \mathbf{a} 1) / \mathbf{w}^2) \cdot \delta \mathbf{b} 2 + \\ &\quad + ((\mathbf{b} \cdot \mathbf{q} - \mathbf{b} 2) / \mathbf{w}) \cdot \delta \mathbf{c} 1 + ((\mathbf{b} 1 - \mathbf{b} \cdot \mathbf{p}) / \mathbf{w}) \cdot \delta \mathbf{c} 2 + \\ &\quad + (\mathbf{u} \cdot (\mathbf{b} 2 \cdot \mathbf{p} - \mathbf{b} 1 \cdot \mathbf{q}) / \mathbf{w}^2) \cdot \delta \mathbf{a} + ((\mathbf{c} 1 \cdot \mathbf{q} - \mathbf{c} 2 \cdot \mathbf{p}) / \mathbf{w} + \mathbf{u} \cdot (\mathbf{a} 1 \cdot \mathbf{q} - \mathbf{a} 2 \cdot \mathbf{p}) / \mathbf{w}^2) \cdot \delta \mathbf{b}; \\ \delta y &= ((\mathbf{q} - \mathbf{c} 2) / \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{b} 2 - \mathbf{b} \cdot \mathbf{q}) / \mathbf{w}^2) \cdot \delta \mathbf{a} 1 + ((\mathbf{c} 1 - \mathbf{p}) / \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{p} - \mathbf{b} 1) / \mathbf{w}^2) \cdot \delta \mathbf{a} 2 + \\ &\quad + (\mathbf{v} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{q} - \mathbf{a} 2) / \mathbf{w}^2) \cdot \delta \mathbf{b} 1 + ((\mathbf{v} \cdot (\mathbf{a} 1 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{p}) / \mathbf{w}^2) \cdot \delta \mathbf{b} 2 + \\ &\quad + ((\mathbf{a} 2 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{a}) / \mathbf{w}) \cdot \delta \mathbf{c} 1 + ((\mathbf{p} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a} 1) / \mathbf{w}) \cdot \delta \mathbf{c} 2 + \\ &\quad + ((\mathbf{p} \cdot \mathbf{c} 2 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{c} 1) / \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{a} 2 \cdot \mathbf{p} - \mathbf{b} 2 \cdot \mathbf{p}) / \mathbf{w}^2) \cdot \delta \mathbf{a} + (\mathbf{v} \cdot (\mathbf{b} 1 \cdot \mathbf{q} - \mathbf{a} 1 \cdot \mathbf{q}) / \mathbf{w}^2) \cdot \delta \mathbf{b}; \end{split}
```

В процессе разработки вычислительных алгоритмов эти дифференциальные соотношения сравнивались с результатами вычислений в конечных разностях при отклонении в 1 см измерений координат в стороны расширения поля зрения, и было получено хорошее их совпадение (до 3х десятичных знаков).

Модель калибровочных погрешностей

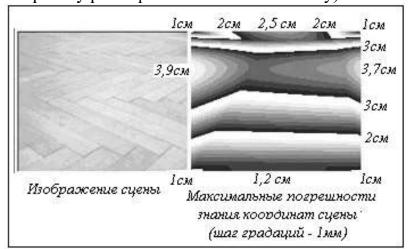
Имея выражения для вариаций $\delta\{xy\}=f(\{abc,pq\}=F(\{PQ\},\{xy\}_i),\delta\{xy\}_i)$ по вариациям вершин $\{xy\}_i$ калибровочного четырёхугольника, оценим характер и величину погрешностей навигационной привязки координат $\{xy\}$ в зависимости от выбора места и размеров калибровочной области $\{PQ\}$ в кадре. Желательность такой оценки связана с принципиальной возможностью определения коэффициентов преобразования не по углам кадра, а по некоторой видимой в кадре области с известными координатами (например, *по рисунку пола*). Но для этого надо проверить предположение, что при малом размере области или её неудачном положении (например, в далёкой перспективе изображения сцены) навигационные ошибки могут расти.

Выбранным пиксельным номерам вершин четырёхугольника $\{PQ\}$ соответствуют в поле зрения сцены координаты точек $x_0, y_0; x_1, y_1; x_2, y_2$ и $x_3, y_3,$ (см. рисунки выше) и вектор $\delta\{xy\}_i$ ошибок калибровочного измерения. Для получения требуемой оценки применим следующий алгоритм:

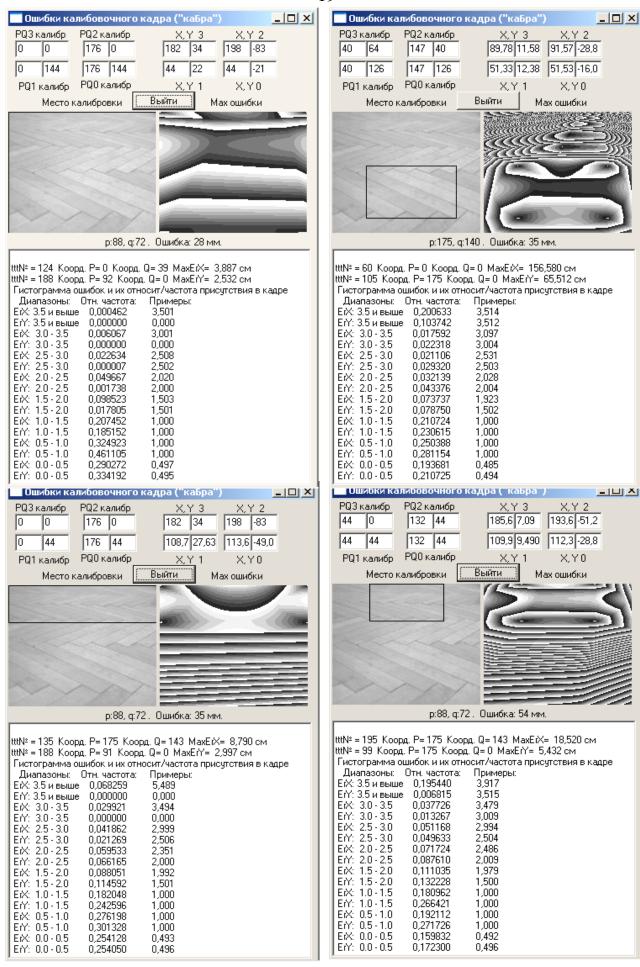
1. Предположим, что калибровочная область представляет собой прямоугольник со сторонами, параллельными сторонам кадра. В этом случае, после преобразований пиксельных номеров $p:=p-p_3$ и $q:=q-q_3$ (т.е. - переноса начала пиксельных координат в левый верхний угол выбранного калибровочного прямоугольника) удобным образом сохраняется вид всех полученных выше зависимостей $\{abc\}=F(\{PQ\},\{xy\}_i)$.

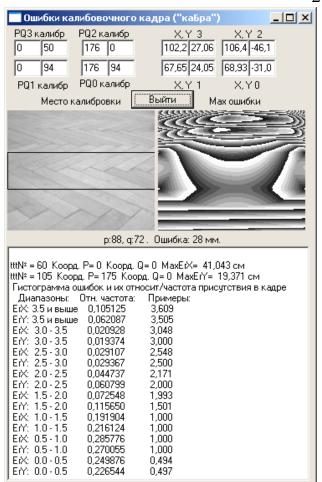
- 2. Выберем пиксельные номера для диагональных вершин $\{p,q\}_3$ и $\{p,q\}_0$ анализируемой калибровочной области.
- 3. Координаты точек сцены, соответствующих пикселам вершин нового калибровочного прямоугольника, вычислим по приведенным выше полнокадровым коэффициентам взаимного отображения пикселов в координаты сцены.
- 4. Используя приведенные выше зависимости $\{abc\}=F(\{PQ\},\{xy\}_i)$ определим коэффициенты калибровочного отображения для выбранной калибровочной области.
- 5. Выберем вектор ошибок измерения координат x_0,y_0 ; x_1,y_1 ; x_2,y_2 и x_3,y_3 . Например, положим равными модули погрешностей измерения координат $|\delta x| = |\delta y| = 1$ см. Тогда множество векторов ошибок совпадает с множеством двоичных чисел в диапазоне 0-255, где каждый разряд $\{0,1\}$ каждого числа этого множества представляет собой знак ошибки соответствующей координаты x_i или y_i (i=0..3).
- 6. Для каждого выбранного номера вектора ошибок, используя приведенные выше зависимости $\delta\{abc\}=F(\{PQ\},\{xy\}_i),\delta\{xy\}_i)$ определим параметры ошибок коэффициентов калибровочного отображения.
- 7. Далее, для каждого пиксела p,q полного кадра определим погрешность определения координат на плоскости сцены $\delta\{xy\}=f(\{abc,\delta\{abc\},pq\})$.
- 8. Повторим эти действия для каждого вектора ошибок $\delta\{xy\}_I$ из их числа и при этом для каждого пиксела кадра оставим максимальное значение погрешности навигационной привязки координат сцены к системе координат робота.

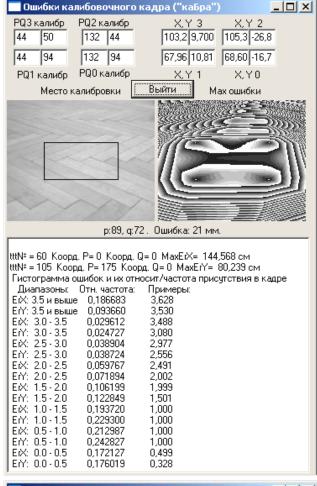
Ниже приведен результат расчёта поля этих погрешностей (правое изображение) для случая калибровки отображения по углам кадра с ошибкой измерения 1см. Для такого "полнокадрового" отображения плоскости пола на плоскость кадра максимум погрешности знания координат видимых точек равен 4 см. (см. вершину рельефа изолиний слева сбоку)

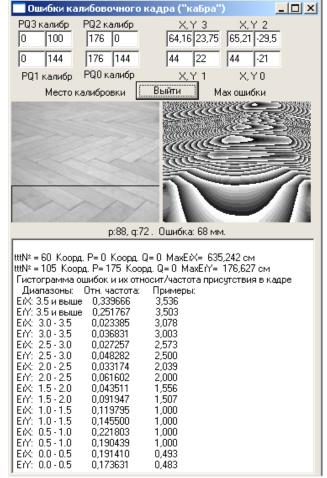


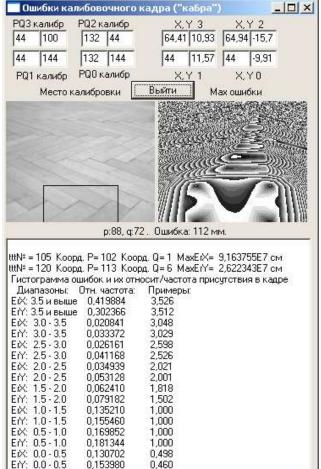
Примеры полей ошибок при изменении размеров и позиций калибровочных прямоугольников в кадре (показываемых на левом изображении) приведены ниже. Здесь приводятся параметры калибровочной области, № вектора ("ttt№") у максимальной ошибки и относительные частоты ошибок разной величины.











Анализ свойств навигационных погрешностей

Может показаться, что из группового свойства непрерывности параметров рассматриваемого преобразования следует, что малым вариациям координат калибровочного четырёхугольника соответствуют малые вариации параметров прямого и обратного отображений, а следовательно - и малые вариации координатной привязки пиксельных точек. Действительно, во всех приведенных выше вариантах при ошибке калибровочных измерений в ± 1 см погрешности привязки к осям системы координат робота точки, видимой в центре кадра (p=88, q=72), достаточно малы и лежат в диапазоне 4..11 см.

Однако, во всех приведенных случаях калибровочных прямоугольников меньших размеров (вне зависимости от положения последних внутри кадра) максимальные ошибки (см. "MaxErX" и "MaxErY") достигают громадных величин (до $9\cdot10^2$ км(!)). Заметим, что эти максимальные ("экстраполяционные" по их существу) погрешности возникают при попытках привязки точек, принадлежащих границам кадра, *наиболее удалённым* от калибровочных точек.

Может вызвать удивление и то обстоятельство (см. рисунки на предыдущих и на следующей страницах), что при "полнокадровой" калибровке её "интерполяционные" погрешности координат внутренних точек поля зрения превышают калибровочную ошибку, равную 1см (максимальная погрешность равна 3,9 см). Эти факты требуют объяснения.

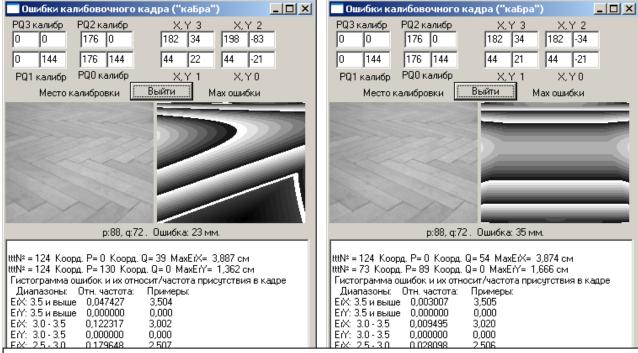
Обратим внимание на то, что получаемые километровые ошибки привязки координат возникают только для точек на верхней границе кадра. Это обстоятельство наталкивает на мысль, что дело здесь в свойствах проективного преобразования. Рассмотрим эти свойства и их влияние на точность навигационной привязки координат.

Особенности проективного преобразования

Достаточно очевидно, что эти особенности связаны с геометрическими свойствами пространственного проективного угла. Однако отображение плоскости в себя не зависит от размеров видеодатчика и положения центра проектирования в осях системы координат робота. Поэтому полученные определить коэффициенты отображения "сцена-кадр" позволяют не параметры видеокамеры и её позиции (для этого следует построить отображение "3D-сцена-2D-кадр" с присущим ему неоднозначным обратным отображением неподвижного кадра). Тем не менее, у конкретной камеры есть конкретное положение её центра проектирования в пространстве, и пусть мы умеем его определять, делая дополнительные измерения видимых высот.

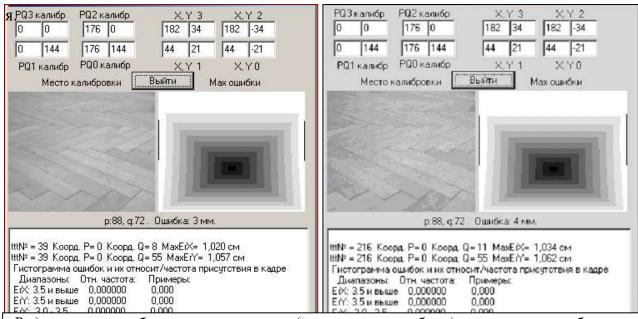
Что происходит с этим центром проектирования при ошибочном изменении калибровочных координат? Это изменение в общем случае приводит к изменению геометрии угла зрения и/или положения его центра в системе координат робота. Можно подозревать, что если в проективном преобразовании существуют особые точки, то такое фиктивное перемещение центра проектирования может приводить ситуацию проектирования в окрестность особой точки, что, возможно, и объясняет быстрый рост экстраполяционных ошибок привязки координат видимых точек.

Поля вектора максимальной ошибки № 124 (11111100=-dy3-dx3-dy2-dx2-dy1-dx1+dy0+dx0). Ошибки для робота Трикол (см. коорд. х,у) и поле ошибок для симметричного поля зрения:



Видно, что поле ошибок у одного вектора (Noleq 124,) вызывающего максимальную ошибку привязки координат точек поля зрения (в малой области вверху слева), практически повторяет вытянутую вперёд направо форму проективного растяжения поля зрения робота (см. рис. на стр.13). А симметричное поле зрения приводит к симметричному полю ошибок, но - с той же максимальной погрешностью привязки координат и том же месте поля зрения.

Ниже показаны поля погрешностей привязки координат в поле зрения для векторов №№ 39 и 216, симметрично расширяющих и сужающих симметричное поле зрении



Видно, что ошибки похожи, и что (черные линии сбоку) существуют области погрешностей привязки координат, которые несколько больше исходной ошибки калибровки, равной 1 см (белая полоса). Этому соответствует и вогнутые внутрь изолинии границ погрешностей (с шагом 1 мм), что означает наличие максимума погрешности по q на каждом столбце кадра p=Const.

Поскольку проективное отображение описывается дробно-линейными выражениями, то его особенности могут быть связаны с нулями знаменателей этих дробей. Прямое преобразование "сцена-кадр" в общем случае вырождения не испытывает. Действительно, знаменатели выражений, определяющих коэффициенты преобразования, представляют собой суммы трёх слагаемых вида: $C_1 \cdot (y0 \cdot x2 - y2 \cdot x0) + C_2 \cdot (y1 \cdot x0 - y0 \cdot x1) + C_3 \cdot (y1 \cdot x2 - y2 \cdot x1)$, где коэффициенты C_i представляют собой произведения и частные треугольных комплексов C^{***} , никогда не равных нулю.

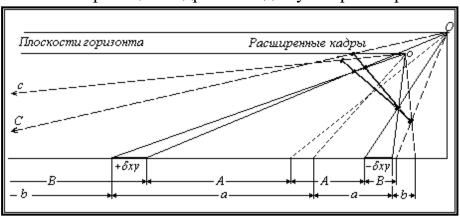
преобразования Вырождение ЭТОГО ЛИШЬ случае нулю трёх скобочных одновременного равенства членов, которые представляют собой модули векторных произведений векторов координат трёх вершин четырёхугольника поля зрения. Их одновременное равенство нулю, геометрически означает, что три вершины четырёхугольника лежат на одной прямой (условие колинеарности легко доказывается через равенство трёх отношений у/х компонент этих векторов). Это невозможно при любом расположении камеры (если плоскость матрицы фотоприёмника ортогональна оптической оси объектива). Заметим, что геометрически условие вырождения проективного отображения, как условие отображения линии в плоскость, достаточно очевидно.

У обратного преобразования его знаменатели имеют вид $w = A \cdot p + B \cdot q + C$. Условие w=0 является уравнением прямой в плоскости пикселов кадра, проходящей через точки на его границах:

$$\mathbf{w=0} \Rightarrow \begin{cases} p=0, \ q=-\text{C/B} \\ q=0, \ p=-\text{C/A} \end{cases}$$

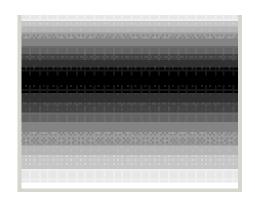
Эта прямая представляет собой геометрическое место лучей проектирования, параллельных плоскости сцены, т.е. она отображает линию горизонта в плоскости кадра. Если камера достаточно сильно наклонена вниз, то эта линия горизонта проходит вне кадра. Однако если наклон мал (что бывает при низком расположении камеры), то линия горизонта может быть расположенной весьма близко к границам кадра. И тогда лучи проектирования

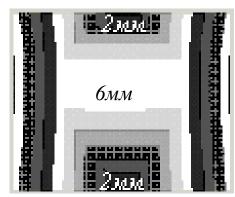
в верху кадра будут далеко пересекать плоскость сцены, а их вариации (см. рисунок справа) изза калибровочных ошибок могут быть рядом с горизонтом. Этим объясняются большие размеры



ошибок координаты х вблизи верхней границы кадра.

На рисунке показана ситуация влияния ошибок калибровки dxy по области внутри поля зрения на параметры проективного отображения при их расширении на весь кадр. Видно получаемое смещение центра проектирования и соответствующие изменения лучей





Причиной роста ошибок привязки координат внутри точек области калибровки, как это не странно, являются не продольные, а боковые искажения углов eë Действительно, на рис. слева вверху показано ошибок привязки координат единичном сдвиге вперёд дальней границы калибровочной симметричной области $(\delta x 2 = \delta x 3 = +1 \text{ см}, \text{ остальные } \delta x y = 0)$. Видно, что координатные ошибки регулярны по х и всюду меньше 1см ($min\delta x=3$ мм).

Однако при чисто боковом растяжении симметричной калибровочной области ($\delta y1=\delta y3=+1$ см и $\delta y0=\delta y2=-1$ см) поле ошибок (рис. слева внизу) имеет максимумы на левой и правой границах кадра (черные линии у границ) с их округлённой величиной 11мм ($\min \delta x=1$ мм – в самых вверху и внизу кадра).

Это объясняется разной степенью проективного растяжения из-за изменения направления и наклона лучей точек (координат пиксельных образов обратного отображения) вдоль номинальной отклонённой И границ калибровочных полей. Сравнение координат взаимных соответствующих точек показывает, что если угловая точка дальней границы смещена только по у на 1 см, то уже вторая точка отклонённой границы сильнее смещена по оси х чем соответствующая точка номинальной границы (180,48 и 180,45 см соответственно). Из-за этого малого смещения по х расстояние по у между этими точками становится больше 1см (!,0025), Таким образом, уже в граничной точке мы имеем положительные производные погрешностей координатной привязки по боковому отклонению углов калибровочной области. Поэтому при боковом отклонении углов области калибровки расхождение координат растёт от краёв к центру. обстоятельство и объясняет причину роста и максимума "интерполяционной" ошибки привязки координат.

Суммируя сказанное, заметим, что из приведенного анализа полей ошибок привязки координат следует, что для исключения больших ошибок калибровочный прямоугольник желательно выбирать с максимальными значениями ширины и площади и располагать его ближе к центру кадра или - непосредственно в районе места контроля координат сцены.

Благодарности

Автор выражает большую признательность своим товарищам по разработке систем робота "Трикол" В.С.Ярошевскому и Н.С.Сербенюку за большую помощь в работе и полезные дискуссии по теме этого исследования.

Цитированная литература

- 1. Роджерс Д., Адамс Дж. *Математические основы машинной графики*. М.:Мир, 2001. 604c
- 2. Хорн Б.К.П. Зрение роботов. М.:"Мир", 1989г., 488с.
- 3. Дуда Р., Харт П. Распознавание образов и анализ сцен. М.:Мир, 1976. 511с.
- 4. Foley J.D., van Dam A., Feiner S.K., Hughes J.F. *Computer graphics: principles and practice*. 2nd ed. Addison-Wesley Publ.Co. 1990. 1174p.
- 5. Шапиро Л., Стокман Дж. Компьютерное зрение. М.: Бином, 2006. 752с.
- 6. Clarke T.A., Fryer J.F. *The development of camera calibration methods and models*, Photogrammetric Record, 16(91), 1998, pp 51-66.
- 7. Gardener I.C., Case. *Precision camera for testing lenses*, Journal of Research. National Bureau of Standards, 1937, RP 984.
- 8. Karren R.J. *Camera calibration by the multicollimator method*. Photogrammetric Engineering, 1968, 34(7), pp 706-719.
- 9. Hakkarainen J., *Determination of radial and tangential distortion of aerial cameras with a horizontal goniometer*. Photogrammetric Record, 1974, 8(44), pp 180-187.
- 10. Schmid H.H. *Stellar calibration of the Orbigon lens*. Photogrammetric Engineering, 1974, 40(1), pp 101-111.
- 11. Hallert B. *Photogrammetry, basic principles and general survey*. McGraw-Hill Book company, USA, 1960, 340 p..
- 12.Brown D.C. *Calibration of close-range cameras*. International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing, 19(5) 1972, ISP Congress, Ottawa, 26 p
- 13.Clarke T.A., Fryer J.G., Wang X. *The principal point for CCD cameras*. Submitted to the Photogrammetric Record, 1997.
- 14.Merrit E.L. *Field camera calibration*. Photogrammetric Engineering, 1948, 14(2), pp 303-309.
- 15. Ziemann H. *Thoughts on a standard algorithm for camera calibration. Progress in Imaging Sensors*, Proc. ISPRS Symposium, Stuttgart, 1986. pp 41-48.
- 16.Tsai R.Y. A versatile camera calibration technique for high accuracy 3D machine vision metrology using off-the-shelf TV cameras and lenses IEEE J. Robotics Automat. 1987,Vol. RA-3, No. 4, pp 323-344.
- 17.Brouwer L.E.J. "Math. Ann", 1912, Bd 71, pp 91-117.
- 18. Александров П.С., Ефремович В.А. *Очерк основных понятий топологии*. М.Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1936. сс 65-91.
- 19. Visual navigation using a single camera. (- 382K gzipped), appeared in ICCV'95 proceedings, Boston, USA, 8 p.
- 20.Zhang Zh. Flexible Camera Calibration by Viewing a Plane from Unknown Orientations ICCV99
- 21. Файн В.С. Опознавание изображений. М.: Наука, 1970, 296с.
- 22. Файн В.С. *Алгоритмическое моделирование формообразования*. М.:Наука, 1975, 141с.
- 23.Сербенюк Н.С. "Экспериментальное исследование свойств конического сенсора". Мобильные роботы и мехатронные системы: Труды школы-

- конференции (Москва, 5-6 дек.2000г.). Москва: Изд-во МГУ,2000г.c56-68.
- 24.Платонов А.К. Сербенюк Н.С. *Выявление с помощью TV-камеры препятствий движению робота* Препринт ИПМ, 2004,№71,26 с.
- 25. Емельянов С.Н., Платонов А.К., Ярошевский В.С.. "Система управления полноприводного трехколесного движителя" Труды школы-конференции "Мобильные роботы и мехатронные системы", Москва: Изд-во МГУ, 2000г., сс. 89-100.
- 26.Богуславский А.А., Сербенюк Н.С., Соколов С.М. "Конический сенсор для навигации подвижного робота по маякам". Мобильные роботы и мехатронные системы: Материалы научной школы-конференции Москва: Изд-во МГУ, 2000г.. 42-56с.
- 27. Ярошевский В.С. "Согласованное управление движением колес и корпуса полноприводного колесного движителя". Мобильные роботы и мехатронные системы. М.:МГУ, 2001г.,70-78с.
- 28.Емельянов С.Н., Платонов А.К. "Метод согласования электрических сенсорных сигналов и геометрических характеристик мобильного робота". В сб. Мобильные роботы и мехатронные системы. М.:МГУ,2001г.,сс 78-84.
- 29. Ярошевский В.С. "*Организация процессов пятипроцессорной системы управления мобильного трёхколёсного робота*". Труды школыконференции "Мобильные роботы и мехатронные системы", Москва: ИМех. МГУ, 2002г.
- 30.Платонов А.К."*Система управления поведением мобильного робота*". Труды школы-конференции "Мобильные роботы и мехатронные системы", Москва 2002г., Имех. МГУ.
- 31.Богуславский А..А., Соколов С.М. "Компонентные методы разработки программного обеспечения СТЗ". Труды школы-конференции "Мобильные роботы и мехатронные системы", Москва 2003г., Имех. МГУ.
- 32. Богуславский А.А., Платонов А.К., Сербенюк Н.С.. "Система машинного видения робота Трикол". Труды школы-конференции "Мобильные роботы и мехатронные системы", Москва 2003г., Имех. МГУ.
- 33.Богуславский А.А., Сербенюк Н.С., Соколов С.М. СТЗ для навигации подвижного робота по маякам на основе анализа конической проекции окружающего пространства на ТВ камеру. Препринт ИПМ 1991г 23с.
- 34. Носков В.П., Рубцов В.И..Романов А.Ю. Объединение дальнометрической и телевизионной информации при формировании модели внешней среды Известия Тульского Государственного университета. Выпуск 3. Системы управления. Том.2. Тула: ТулГУ, 2006, cc100-103
- 35. Чеботарёв Н.Г. Теория групп Ли. М,Л:ГИТТЛ, 1940. 397с.
- 36. Эйзерхарт П.П. Непрерывные группы преобразований. М.:ИЛ, 1947.359с.
- 37.Клейн Ф. Высшая геометрия М.:ГОНТИ, 1939, 399с.
- 38.Гильберт Д. Основания геометрии М.: Гостехиздат, 1948, 491с.
- 39.Юнг Дж.В. Проективная геометрии М: ИЛ, 1949, 184с.
- 40.Бэр Р. Линейная алгебра и проективная геометрия М.: ИЛ, 1955, 399с.
- 41. Комацу М. Многообразие геометрии М.: Знание, 1981, 207с.

Определение параметров проективного преобразования

Любое проективное преобразование n-мерного пространства (прямой, двумерной плоскости, трёхмерного пространства, ...) в себя принадлежит классу взаимно однозначных $(n+1)^2$ -1-параметрических преобразований (3-x, 8-u, 15-u, ...) в составе *примитивных групп Ли* из всех непрерывных по параметрам композиции их преобразований с групповыми свойствами. Эти преобразования позволяют неким однородным (изотропным - в смысле отсутствия специальных направлений и/или областей многообразия) способом преобразовывать пространство с сохранением его топологии. В частности, при проективном преобразовании сохраняются прямолинейность любых линий и топология их инцидентности (пересечения).

Выпишем полезные аналитические формулы для прямых и обратных проективных преобразований.

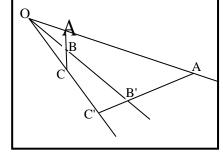
Проективное преобразование прямой

Одномерное групповое проективное преобразование имеет вид:

$$\frac{a1 \cdot x + c1}{a \cdot x + 1} = P$$

Для определения трёх параметров этого преобразования нужно задать

соответствие трёх точек на прямой: х0, х1, х2 и р0, р1, р2. Это связано с тем, что одномерное преобразование проективное В отличие одномерного аффинного преобразования не только сдвигает и растягивает отрезки прямой, но и подвергает их внутренней деформации. Если группа аффинных растяжений отрезка соответствует параллельному движению его



концов по сторонам некоторого угла, то проективное растяжение соответствует такому же, но непараллельному движению - с одновременными поворотами. Это преобразование хорошо изучено в тех отделах проективной геометрии, в которых, в частности, рассматриваются инвариантность двойного отношения гармонических точек и свойства преобразований коллинеации и гомологии (перспективной коллинеации) (см.[22 - 26]).

Попарное соответствие трёх точек доставляет систему уравнений вида

$$a1 \cdot x0 + c1 = p0 \cdot (a \cdot x0 + 1)$$

 $a1 \cdot x1 + c1 = p1 \cdot (a \cdot x1 + 1)$
 $a1 \cdot x2 + c1 = p2 \cdot (a \cdot x2 + 1)$

ИЛИ

$$a1 \cdot x0 + c1 - a \cdot p0 \cdot x0 = p0$$

 $a1 \cdot x1 + c1 - a \cdot p1 \cdot x1 = p1$
 $a1 \cdot x2 + c1 - a \cdot p2 \cdot x2 = p2$

Решение этой системы относительно параметров "а", "а1" и "с1" следующее:

$$a1 \cdot (x0 - x1) - a \cdot (p0 \cdot x0 - p1 \cdot x1) = p0 - p1$$

$$a1 \cdot (x2 - x1) - a \cdot (p2 \cdot x2 - p1 \cdot x1) = p2 - p1$$

$$a1 \cdot (x0 - x1) \cdot (x2 - x1) - a \cdot (p0 \cdot x0 - p1 \cdot x1) \cdot (x2 - x1) = (p0 - p1) \cdot (x2 - x1)$$

$$a1 \cdot (x0 - x1) \cdot (x2 - x1) - a \cdot (p2 \cdot x2 - p1 \cdot x1) \cdot (x0 - x1) = (p2 - p1) \cdot (x0 - x1)$$

$$a = \frac{(p0 - p1) \cdot (x2 - x1) - (p2 - p1) \cdot (x0 - x1)}{(p2 \cdot x2 - p1 \cdot x1) \cdot (x0 - x1) - (p0 \cdot x0 - p1 \cdot x1) \cdot (x2 - x1)}$$

$$a1 = \frac{(p0 - p1) \cdot (x2 - x1) + a \cdot (p0 \cdot x0 - p1 \cdot x1) \cdot (x2 - x1)}{(x0 - x1) \cdot (x2 - x1)}$$

$$c1 = p0 + a \cdot p0 \cdot x0 - a1 \cdot x0$$

При известных параметрах a, a1, c1 значение координаты x для данного p равно: $x = \frac{p-c1}{a1-a \cdot p}$

Проективное преобразование плоскости на прямоугольник

Проективное отображение координат {x, y} двумерной плоскости в координаты другой плоскости {p, q} описывается дробно-линейными выражениями с восьмью коэффициентами [1,2,3,4]

$$p = \frac{a1x + b1y + c1}{(ax + by + 1)}$$

 $q = \frac{a2x + b2y + c2}{(ax + by + 1)}$

Коэффициенты этих уравнений являются элементами матрицы однородных координат отображения, причём знаменатель дроби отражает условие нормирования однородной последней координаты результата. (подробнее

Поэтому для определения искомых восьми параметров $\{a_1,b_1,c_1,\ a_2,b_2,c_2,\ a,b\}$ достаточно выбрать в каждой плоскости по 4 точки с известными координатами.

В качестве таких точек выберем углы прямоугольника кадра с их номерами пикселов $\{0,0,P,0,0,Q,P,Q\}$, а в плоскости сцены возьмём видимые координаты точек $\{x0,y0,x1,y1,x2,y2,x3,y3\}$ отображения углов кадра на плоскость. Тогда имеем более простую систему линейных уравнений относительно искомых коэффициентов преобразования:

$$\begin{array}{l} a1\cdot x0 + b1\cdot y0 + c1 - P\cdot (a\cdot x0 + b\cdot y0 + 1) = 0 \\ a2\cdot x0 + b2\cdot y0 + c2 - Q\cdot (a\cdot x0 + b\cdot y0 + 1) = 0 \\ a1\cdot x1 + b1\cdot y1 + c1 = 0 \\ a2\cdot x1 + b2\cdot y1 + c2 - Q\cdot (a\cdot x1 + b\cdot y1 + 1) = 0 \\ a1\cdot x2 + b1\cdot y2 + c1 - P\cdot (a\cdot x2 + b\cdot y2 + 1) = 0 \\ a2\cdot x2 + b2\cdot y2 + c2 = 0 \\ a1\cdot x3 + b1\cdot y3 + c1 = 0 \\ a2\cdot x3 + b2\cdot y3 + c2 = 0 \end{array}$$

Эта система уравнений состоит из двух частей: четырёх однородных и четырёх неоднородных уравнений.

Выделим сначала однородную часть системы уравнений,

$$a1 \cdot x1 + b1 \cdot y1 + c1 = 0$$

 $a1 \cdot x3 + b1 \cdot y3 + c1 = 0$
 $a2 \cdot x2 + b2 \cdot y2 + c2 = 0$
 $a2 \cdot x3 + b2 \cdot y3 + c2 = 0$

и решив её относительно параметров a1, b1, a2, b2 найдем их связь с параметрами c1, c2 и координатами $\{x1,y1\}$, $\{x2,y2\}$, $\{x3,y3\}$. Имеем:

a1
$$b1 = \begin{bmatrix}
-c1 \cdot \frac{(y3 - y1)}{(x1 \cdot y3 - y1 \cdot x3)} \\
-c1 \cdot \frac{(-x3 + x1)}{(x1 \cdot y3 - y1 \cdot x3)} \\
-c2 \cdot \frac{(-y2 + y3)}{(x2 \cdot y3 - y2 \cdot x3)} \\
-c2 \cdot \frac{(x2 - x3)}{(x2 \cdot y3 - y2 \cdot x3)}
\end{bmatrix}$$

Оставшиеся уравнения с неизвестными с1, с2, а и b теперь имеют вид:

$$\frac{-1}{2} \left[\frac{c1}{P} \right] \cdot \left[1 + \frac{(x1 - x3) \cdot y0}{(-y3 \cdot x1 + x3 \cdot y1)} + \frac{-1 \cdot [(y1 - y3) \cdot x0]}{(-y3 \cdot x1 + x3 \cdot y1)} \right] = (a \cdot x0 + b \cdot y0 + 1)$$

$$\overline{\left(\frac{c1}{P}\right)} \cdot \left[1 + \frac{(x1 - x3) \cdot y2}{(-y3 \cdot x1 + x3 \cdot y1)} + \frac{-1 \cdot [(y1 - y3) \cdot x2]}{(-y3 \cdot x1 + x3 \cdot y1)}\right] = (a \cdot x2 + b \cdot y2 + 1)$$

$$\left(\frac{c2}{Q}\right) \cdot \left[1 + \frac{-y3 + y2}{x2 \cdot y3 - y2 \cdot x3} \cdot x0 - \frac{(x2 - x3)}{(x2 \cdot y3 - y2 \cdot x3)} \cdot y0\right] = (a \cdot x0 + b \cdot y0 + 1)$$

$$= \left[\frac{c2}{Q} \right) \cdot \left[1 + \frac{-y3 + y2}{x2 \cdot y3 - y2 \cdot x3} \cdot x1 - \frac{(x2 - x3)}{(x2 \cdot y3 - y2 \cdot x3)} \cdot y1 \right] = (a \cdot x1 + b \cdot y1 + 1)$$

Приведение к общему знаменателю и учёт подобных членов в квадратных скобках приводят в числителе дроби к трём из четырех (в соответствии с числом сочетаний из четырёх по три) выражениям второго порядка, имеющим скобочно-симметричный вид с циклическими круговыми подстановками трёх индексов. Обозначим их как С*** и заметим, что любая единичная перестановка цифр в С*** меняет знак этих выражений:

$$C013 = x0 (y1 - y3) + x1 (y3 - y0) + x3 (y0 - y1)$$

$$C032 = x0 (y3 - y2) + x3 (y2 - y0) + x2 (y0 - y3)$$

$$C132 = x1 (y3 - y2) + x3 (y2 - y1) + x2 (y1 - y3)$$

$$C021 = x0 (y2 - y1) + x2(y1 - y0) + x1 (y0 - y2)$$

(выражение С021 возникнет ниже).

В геометрическом смысле параметры С*** суть суммарные площади совокупности прямоугольников, построенных из координат с индексами ***.

Удобное свойство этих циклических выражений (помимо удобства правильности выкладок) заключается в TOM, превращаются в нуль при любых совпадениях координат невырожденного (т.е. - имеющего площадь) четырёхугольника поля зрения. Это свойство весьма важно, т.к. (это будет видно в дальнейшем) все четыре циклические трёх-индексные выражения являются знаменателями элементов решения, и их отличие от нуля позволяет избежать неопределённостей.

Тогда имеем:

$$-c1 \cdot \frac{C013}{(-y3 \cdot x1 + x3 \cdot y1) \cdot P} = (a \cdot x0 + b \cdot y0 + 1)$$

$$-c1 \cdot \frac{C213}{(-y3 \cdot x1 + x3 \cdot y1) \cdot P} = (a \cdot x2 + b \cdot y2 + 1)$$

$$-c2 \cdot \frac{C032}{(x2 \cdot y3 - y2 \cdot x3) \cdot Q} = (a \cdot x0 + b \cdot y0 + 1)$$

$$-c2 \cdot \frac{C132}{(x2 \cdot y3 - y2 \cdot x3) \cdot Q} = (a \cdot x1 + b \cdot y1 + 1)$$

Эти 4 уравнения относительно неизвестных с1, с2, а, в также доставляют связь коэффициентов а и b с коэффициентами c1 и c2:

$$a := \frac{1}{(-y0 \cdot x2 + x0 \cdot y2)} \cdot \left[\frac{(-y0 \cdot C213 + C013 \cdot y2)}{(x1 \cdot y3 - y1 \cdot x3) \cdot P} \cdot c1 - (y2 - y0) \right]$$

$$b = \frac{1}{(-y0 \cdot x2 + x0 \cdot y2)} \cdot \left[\frac{(-x2 \cdot C013 + C213 \cdot x0)}{(x1 \cdot y3 - y1 \cdot x3) \cdot P} \cdot c1 + (-x0 + x2) \right]$$

$$\begin{split} &\text{Используя подстановку} \\ &\text{u1} := \frac{\text{C013}}{(-\text{y3} \cdot \text{x1} + \text{x3} \cdot \text{y1}) \cdot \text{P}} \\ &\text{w1} := \frac{\text{C213}}{(-\text{y3} \cdot \text{x1} + \text{x3} \cdot \text{y1}) \cdot \text{P}} \\ &\text{u2} := \frac{\text{C032}}{(\text{x2} \cdot \text{y3} - \text{y2} \cdot \text{x3}) \cdot \text{Q}} \\ &\text{w2} := \frac{\text{C132}}{(\text{x2} \cdot \text{y3} - \text{y2} \cdot \text{x3}) \cdot \text{Q}} \end{split}$$

имеем

$$u1 \cdot c1 + x0 \cdot a + y0 \cdot b = -1$$

 $w1 \cdot c1 + x2 \cdot a + y2 \cdot b = -1$

$$u2 \cdot c2 + x0 \cdot a + y0 \cdot b = -1$$

 $w2 \cdot c2 + x1 \cdot a + y1 \cdot b = -1$

Тогда решение для а и b имеет вид:

$$a := \frac{\frac{(y2 - y0)}{C032} + \left[\frac{(-y1 + y0)}{C013} + \frac{(-y2 + y1)}{C132}\right]}{\frac{(-x0 \cdot y2 + y0 \cdot x2)}{C032} + \left[\frac{(-y0 \cdot x1 + x0 \cdot y1)}{C013} + \frac{(-x2 \cdot y1 + y2 \cdot x1)}{C132}\right]}$$

$$b := \frac{\frac{(x0 - x2)}{C032} + \left[\frac{(-x0 + x1)}{C013} + \frac{(-x1 + x2)}{C132}\right]}{\frac{(-x0 \cdot y2 + y0 \cdot x2)}{C032} + \left[\frac{(-y0 \cdot x1 + x0 \cdot y1)}{C013} + \frac{(-x2 \cdot y1 + y2 \cdot x1)}{C132}\right]}$$

Для упрощения получаемого решения оставшихся уравнений относительно c1 и c2 удобно использовать подстановку четвёртого циклического выражения, упомянутого выше:

$$C021 = x0 (y2 - y1) + x2(y1 - y0) + x1 (y0 - y2)$$

Тогда

$$c1 := \frac{\frac{\text{C021}}{\text{C132}} \cdot \frac{(-\text{x1} \cdot \text{y3} + \text{y1} \cdot \text{x3})}{\text{C013}}}{\frac{(-\text{x0} \cdot \text{y2} + \text{y0} \cdot \text{x2})}{\text{C032}} + \left[\frac{(-\text{y0} \cdot \text{x1} + \text{x0} \cdot \text{y1})}{\text{C013}} + \frac{(-\text{x2} \cdot \text{y1} + \text{y2} \cdot \text{x1})}{\text{C132}} \right]}{\text{C132}} \cdot P$$

$$c2 := \frac{\frac{C021}{C132} \cdot \frac{(x2 \cdot y3 - y2 \cdot x3)}{C032}}{\frac{(-x0 \cdot y2 + y0 \cdot x2)}{C032} + \left[\frac{(-y0 \cdot x1 + x0 \cdot y1)}{C013} + \frac{(-x2 \cdot y1 + y2 \cdot x\overline{1})}{C132}\right]} \cdot Q$$

$$a1 := \left[-c1 \cdot \frac{(y3 - y1)}{(x1 \cdot y3 - y1 \cdot x3)} \right]$$

$$a1 := \frac{\frac{\text{C021}}{\text{C132}} \cdot \frac{(\text{y3} - \text{y1})}{\text{C013}}}{\frac{(-\text{x0} \cdot \text{y2} + \text{y0} \cdot \text{x2})}{\text{C032}} + \left[\frac{(-\text{y0} \cdot \text{x1} + \text{x0} \cdot \text{y1})}{\text{C013}} + \frac{(-\text{x2} \cdot \text{y1} + \text{y2} \cdot \text{x1})}{\text{C132}} \right]}{\text{C132}} \cdot \mathbf{P}$$

$$b1 := -c1 \cdot \frac{(-x3 + x1)}{(x1 \cdot y3 - y1 \cdot x3)}$$

$$b1 := \frac{\frac{\text{C021}}{\text{C132}} \cdot \frac{(-\text{x3} + \text{x1})}{\text{C013}}}{\frac{(-\text{x0} \cdot \text{y2} + \text{y0} \cdot \text{x2})}{\text{C032}} + \left[\frac{(-\text{y0} \cdot \text{x1} + \text{x0} \cdot \text{y1})}{\text{C013}} + \frac{(-\text{x2} \cdot \text{y1} + \text{y2} \cdot \text{x1})}{\text{C132}}\right]}{\text{C132}} \cdot \mathbf{P}$$

$$a2 := -c2 \cdot \frac{(y2 - y3)}{(-x2 \cdot y3 + y2 \cdot x3)}$$

$$a2 := \frac{\frac{\text{C021}}{\text{C132}} \cdot \frac{(\text{y2} - \text{y3})}{\text{C032}}}{\frac{(-\text{x0} \cdot \text{y2} + \text{y0} \cdot \text{x2})}{\text{C032}} + \left[\frac{(-\text{y0} \cdot \text{x1} + \text{x0} \cdot \text{y1})}{\text{C013}} + \frac{(-\text{x2} \cdot \text{y1} + \text{y2} \cdot \text{x1})}{\text{C132}} \right]}{\text{C132}} \cdot Q$$

$$b2 := c2 \cdot \frac{(x2 - x3)}{(-x2 \cdot y3 + y2 \cdot x3)}$$

$$b2 := \frac{\frac{C021}{C132} \cdot \frac{(x3 - x2)}{C032}}{\frac{(-x0 \cdot y2 + y0 \cdot x2)}{C032} + \left[\frac{(-y0 \cdot x1 + x0 \cdot y1)}{C013} + \frac{(-x2 \cdot y1 + y2 \cdot x1)}{C132}\right]} \cdot Q$$

Решение той же системы уравнений (но уже - с известными коэффициентами a, b, a1, b1, c1, a2, b2, c2)

$$a1 \cdot x + b1 \cdot y + c1 = p \cdot (a \cdot x + b \cdot y + 1)$$

 $a2 \cdot x + b2 \cdot y + c2 = q \cdot (a \cdot x + b \cdot y + 1)$

для получения перспективного *обратного* отображения точки $\{p,q\}$ плоскости кадра на точку $\{x,y\}$ плоскости сцены имеет простой вид:

$$(a1 - a \cdot p) \cdot x + (b1 - b \cdot p) \cdot y = p - c1$$

 $(a2 - a \cdot q) \cdot x + (b2 - b \cdot q) \cdot y = q - c2$

Тогда:

$$x = \frac{(b2 - b \cdot q) \cdot (p - c1) - (b1 - b \cdot p) \cdot (q - c2)}{(b2 - b \cdot q) \cdot (a1 - a \cdot p) - (b1 - b \cdot p) \cdot (a2 - a \cdot q)}$$

или

$$x = \frac{b \cdot (c1 \cdot q - c2 \cdot p) + b2(p - c1) - b1 \cdot (q - c2)}{(b \cdot a2 - b2 \cdot a) \cdot p + (b1 \cdot a - b \cdot a1) \cdot q + (b2 \cdot a1 - b1 \cdot a2)}$$

Это выражение интересно в следующей форме:

$$x = \frac{p-c1}{a1-a\cdot p} + \frac{(b1-b\cdot p)[(q-c2) - \frac{(a2-a\cdot q)(p-c1)}{a1-a\cdot p}}{(a1-a\cdot p)(b2-b\cdot q) + (a2-a\cdot q)(b1-b\cdot p)},$$

где первое слагаемое соответствует одномерному преобразованию. Соответственно

$$y = -\frac{(a2 - a \cdot q) \cdot (p - c1) - (a1 - a \cdot p) \cdot (q - c2)}{(b2 - b \cdot q) \cdot (a1 - a \cdot p) - (b1 - b \cdot p) \cdot (a2 - a \cdot q)}$$

$$y = -\frac{a \cdot (c1 \cdot q - c2 \cdot p) + a2(p - c1) - a1 \cdot (q - c2)}{(b \cdot a2 - b2 \cdot a) \cdot p + (b1 \cdot a - b \cdot a1) \cdot q + (b2 \cdot a1 - b1 \cdot a2)}$$

Напомним, что эти выражения получены для отображения на любую прямоугольную область с границами, *параллельными границам кадра*