М. М. Бонгард, И. С. Лосев, В. В. Максимов,
М. С. Смирнов

ФОРМАЛЬНЫЙ ЯЗЫК ОПИСАНИЯ СИТУАЦИЙ, ИСПОЛЬЗУЮЩИЙ ПОНЯТИЕ СВЯЗИ

Любая система, моделирующая разумное поведение, должна использовать свой прошлый опыт. Для этого ей нужно запоминать некоторые описания ситуаций, в которых она находилась. Эти ситуации должны записываться в память на некотором языке. Его мы будем называть внутренним языком системы. Здесь мы изложим идеи, легшие в основу одного варианта внутреннего языка системы, предназначенной для моделирования сложного поведения. Предлагаемый фрагмент языка обладает еще малой выразительной силой, но у него есть ряд свойств, любопытных для обсуждения.

1. Интуитивные обоснования. Мы будем считать, что ситуация описывается при помощи набора показаний элементарных рецепторов. В системе, моделирующей сложное поведение, элементарным рецепторам могут действительно соответствовать воспринимающие органы системы, и в терминах их показаний и будет описываться внешняя ситуация. Другими словами, показание рецептора — это элементарное высказывание о внешней ситуации.

Приведем пример. Для простоты будем считать, что у нас есть рецептор цвета, показаниями которого могут быть цвета — белый (Б), черный (Ч), синий (С) и т. д., и рецептор формы, показаниями которого могут быть геометрические формы — ромб (Р), прямоугольник (П), круг (К) и т. д. Утверждение «имеется белое» («в поле зрения — белое») будет иметь тогда вид Б, утверждение «имеется круг» — К. Естественно записывать утверждение «белый круг» как К $\wedge$ Б (показание рецептора формы принимает значение «круг», а рецептора цвета — значение «белое»). Однако утверждение «белый круг и черный прямоугольник» описать уже сложнее (конечно, если мы хотим, чтобы информация о том, какой цвет сопутствует той или иной форме, не терялась). Здесь имеется четыре показания рецепторов, все они как бы соединены связкой типа $\wedge$. Но записать это выражение как Б $\wedge$ К $\wedge$ Ч $\wedge$ П, сохранив обычные свойства связки $\wedge$ (ассоциативность и коммутативность) — это значит утерять его смысл, так как тогда такому выражению будет соответствовать и ситуация «белый прямоугольник и черный круг».

Видно, что связи между показаниями рецепторов, хотя это суть связи типа $\wedge$, обладают разной степенью тесноты. Более тесно связаны между собой показания рецепторов, относящиеся к одному предмету, и менее тесно — показания, относящиеся к разным предметам. Аналогичное положение имеет место при записи содержимого поля зрения — оно отнюдь не описывается просто списком предметов, а обладает определенной структурой, так что можно, например, представить, что между описаниями предметов, находящихся в близких точках пространства, имеются тесные связи, а между описаниями отдаленных предметов — более рыхлые. Появляется желание формализовать тесноту связи, введя ее явно в язык.

В действительности иерархические структуры со связями разной степени тесноты возникают не только и не столько при описании внешних ситуаций, но и в различных вопросах внутренней мыслительной деятельности [1]. В качестве примера рассмотрим распознавание образов. Алгоритмы обучения распознаванию, в особенности алгоритмы типа «Кора» [2—4], могут рассматриваться как варианты программ обобщения, которые по набору примеров выдают обобщенные описания классов. Алгоритмы типа «Кора» строят выражения, являющиеся логическими функциями утверждений о значениях элементарных признаков. При этом обычно все элементарные признаки равноправны, их совокупности рассматриваются как однородная масса. Однако естественно предположить, что в представлении врача болезнь характеризуется элементарными признаками, объединенными тесными связями в разные группы — синдромы. Между различными группами существуют рыхлые связи, так что целая группа — синдром может рассматриваться в последующих рассуждениях как один элементарный признак. Таким образом, в этом случае также хотелось бы иметь средства для выражения тесноты связи.

Заметим еще, что во фразах русского языка слова между собой связаны тоже с разной степенью тесноты, причем обычно не нужно уточнять грамматические типы связи (связь между субъектом и объектом действия или между определением и определяемым и т. д.), а достаточно указать, какие слова связаны более тесно, чем другие. Часто такие связи задаются пунктуацией. Классическим примером является фраза: «Казнить нельзя, помиловать». При постановке запятой на другое место, что, очевидно, соответствует изменению теснот связей, фраза меняет смысл на противоположный. Важно еще и то, что преобразования, естественно записывающиеся на языке теснот связей (преобразования типа перемещения запятой в предыдущем примере), часто изменяют смысл фразы, но оставляют ее не только грамматически правильной, но и осмысленной. Таким образом, с лингвистической точки зрения эти преобразования вполне естественны.

2. О синтаксисе и о правилах интерпретации. Итак, рассмотрим язык, в котором явно формализовано понятие тесноты связи. Элементарными символами языка будут, во-первых, буквы, во-вторых, правая и левая скобки и, в-третьих, связки, которые обозначаются $\underset{n}{\wedge}$, где n — целое положительное число, и называются «и» n-го порядка. Будем считать, что связки «и» разных порядков обозначают связи разной степени тесноты, так что с ростом n связь становится все менее тесной.

Ниже язык излагается как логическое исчисление, т. е. формулируются аксиомы и правила вывода, но ничего не говорится об интерпретации строящихся выражений. Однако выбор тех или иных аксиом и правил вывода оправдывается на различных примерах, в которых, хотя это явно и не оговорено, принимаются правила, устанавливающие соответствия между выражениями описываемого языка и некоторыми русскими фразами [1].

Пример 1. Утверждение «белый ромб и черный прямоугольник» будет при наших соглашениях описываться как $(\text{Б} \underset{1}{\wedge} \text{Р}) \underset{2}{\wedge}$ $\underset{2}{\wedge} (\text{Ч} \underset{1}{\wedge} \text{П})$.

Здесь мы через Б обозначили показание рецептора цвета «белый», через Р — показание рецептора формы «ромб», через Ч — показание рецептора цвета «черный» и через П — показание рецептора формы «прямоугольник». Так как показания рецепторов Б и Р относятся к одному предмету, то мы соединили их более тесной связкой 1-го порядка, а описания различных предметов соединили связкой 2-го порядка.

В данном примере, как и в ряде следующих, мы будем соединять связкой второго порядка показания рецепторов, если нам известно, что они относятся к разным предметам, либо если не известно, характеризуют ли они один и тот же предмет или разные предметы. Это значит, что одна и та же ситуация может быть описана и как $a \underset{1}{\wedge} b$ и как $a \underset{2}{\wedge} b$, в зависимости от наших знаний о ней, т. е. $a \underset{1}{\wedge} b$ — это описание, не противоречащее описанию $a \underset{2}{\wedge} b$, а уточняющее его (аналогично тому, как высказывание «в поле зрения имеется красный шар» уточняет, а не противоречит высказыванию «в поле зрения — нечто красное и шар»).

3. Синтаксические преобразования, сохраняющие смысл. ***3.1. Неформальное обсуждение.*** Два выражения русского языка могут, вообще говоря, описывать одно и то же множество ситуаций. В этом случае мы говорим, что выражения равносмысленны. Ясно, что во внутреннем языке системы, моделирующей сложное поведение, отношение равносмысленности должно быть формализовано. Простейшее решение этого вопроса состоит в том, чтобы считать, что равносмысленны лишь тождественные выражения. Однако такой язык, в котором не существует разных способов выражения одного смысла, интуитивно кажется нам крайне неудобным и неестественным: «...множественность в выражении одного смысла представляет собой принципиальную особенность языков вообще, в частности естественных языков, и присуща им в гораздо большей степени, чем это обычно принято думать» [5]. Иными словами, язык допускает много различных преобразований, меняющих форму вы-

[1] Вообще же нам кажется, что правила интерпритации должны изменяться и устанавливаться самой системой, использующей этот язык для внутренних целей. При этом смысл, который приписывается данному выражению языка, зависит от решаемой в настоящее время задачи. Человек поступает так не только с логическими системами, но и с естественными языками и, вероятно, система, моделирующая мышление, должна поступать так же.

ражения, но сохраняющих его смысл. Нам кажется, что такое свойство естественных языков вовсе не случайно, и язык, используемый в процессах мышления, должен с необходимостью обладать этим свойством. Этот вопрос будет обсуждаться в заключении, а пока сформулируем преобразования такого типа в нашем языке. Мы будем пытаться формулировать их так, чтобы они соответствовали некоторым преобразованиям русского языка. Строго говоря, в русском языке два выражения считаются имеющими одинаковый или разный смысл в зависимости от того, в каких рассуждениях они используются. Тем не менее можно попытаться выделить самые простые и широко применяемые преобразования, меняющие форму, но сохраняющие смысл выражения.

Итак, введем на множестве выражений формального языка отношение эквивалентности (будем обозначать его $\sim$) и наделим его такими свойствами, чтобы оно воспринималось как формализация отношения равносмысленности.

3.2. Связки типа «и». Пример 2. Рассмотрим фразы:

I *Черный ромб и прямоугольник.*

II *Черный ромб и черный прямоугольник.*

III *Черные ромб и прямоугольник.*

Если мы переведем их на наш язык, пользуясь теми соглашениями, которые приняли в примере 1, то получим: 1. $(Ч \underset{1}{\wedge} Р) \underset{2}{\wedge} П$. 2. $(Ч \underset{1}{\wedge} Р) \underset{2}{\wedge} (Ч \underset{1}{\wedge} П)$. 3. $Ч \underset{1}{\wedge} (Р \underset{2}{\wedge} П)$.

Пояснения требует лишь выражение 3. Оно означает, что показание рецептора цвета относится к каждому из тех предметов, форма которых описана символами, заключенными в скобки.

Мы видим, что предложения II и III обладают одинаковым смыслом. Следовательно, должно выполняться соотношение $(Ч \underset{1}{\wedge} Р) \underset{2}{\wedge} (Ч \underset{1}{\wedge} П) \sim Ч \underset{1}{\wedge} (Р \underset{2}{\wedge} П)$ — дистрибутивный закон $\underset{1}{\wedge}$ относительно $\underset{2}{\wedge}$.

Посмотрим на том же примере, существенны ли для дистрибутивности порядки связок. Для этого к выражению 1 применим дистрибутивный закон $\underset{2}{\wedge}$ относительно $\underset{1}{\wedge}$ и посмотрим, имеет ли выражение $(Ч \underset{1}{\wedge} Р) \underset{2}{\wedge} П$ тот же смысл (согласно правилам интерпретации, описанным в примере 1), что и выражение $(Ч \underset{2}{\wedge} П) \underset{1}{\wedge} \underset{1}{\wedge} (Р \underset{2}{\wedge} П)$. Первое выражение означает, что имеется черный ромб, а также некий прямоугольник. Учитывая сделанное выше замечание, мы видим, что перевод второго выражения должен звучать примерно так: «ромб и прямоугольник, каждый черный и прямоугольный». Но это значит, что утверждается существование «черного прямоугольного ромба», т. е. черного объекта, являющегося одновременно ромбом и прямоугольником. В геометрии прямоугольный ромб называется квадратом. Итак, в выражении $(Ч \underset{1}{\wedge} Р) \underset{2}{\wedge} П$

ничего не говорится о квадрате, а в выражении (Ч $\underset{2}{\wedge}$ П) $\underset{1}{\wedge}$ (Р $\underset{2}{\wedge}$ П) утверждается присутствие квадрата. Следовательно, они не равносмысленны, и в этом примере $\underset{2}{\wedge}$ не дистрибутивно относительно $\underset{1}{\wedge}$. Порядки связок существенны для преобразований, сохраняющих смысл. Итак, надо сформулировать в общем виде преобразование, которое переводит выражение 3 в выражение 2, но не выражение 2 в выражение 1.

Определение. Назовем *рангом выражения* A максимальный из порядков входящих в него связок, и обозначим его $|A|$. Если выражение не содержит связок, то будем говорить, что оно имеет ранг 0.

Тогда можно записать следующую аксиому: $A \underset{k}{\wedge} (B \underset{n}{\wedge} C) \sim (A \underset{k}{\wedge} B) \underset{n}{\wedge} (A \underset{k}{\wedge} C)$, если и только если $k \leqslant n$, $|A| \leqslant n$.

Заметим, что порядок, в котором перечисляются выражения, соединенные связкой, несуществен, поэтому запишем еще одну аксиому $A \underset{k}{\wedge} B \sim B \underset{k}{\wedge} A$ для любого k.

3.3. Связки типа «или». Прежде чем выписать другие аксиомы, относящиеся к $\wedge$, обсудим вопрос о введении связок типа $\vee$. Такие связки практически не нужны для описания непосредственных наблюдений, но необходимы на первых же шагах в процессе обработки воспринимаемой информации. По целому ряду причин разумно ввести связки $\vee$ различных порядков, не интерпретируя, однако, их порядок как тесноту связи. Обсудим это с точки зрения синтаксических преобразований, сохраняющих смысл выражения.

Дополним пример 2 следующими фразами:

IV. *Черные круг и ромб или синие круг и ромб.*

V. *Круг и ромб, оба черные или оба синие.*

Ясно, что эти две фразы отличаются только формой. Предположим, что мы не будем вводить связки «или» различных порядков. Тогда эти фразы, естественно, запишутся так: 4. (Ч $\underset{1}{\wedge}$ (К $\underset{2}{\wedge}$ Р)) $\vee$ (С $\underset{1}{\wedge}$ (К $\underset{2}{\wedge}$ Р)). 5. (К $\underset{2}{\wedge}$ Р) $\underset{1}{\wedge}$ (Ч $\vee$ С).

Так как эти фразы равносмысленны, то (Ч $\underset{1}{\wedge}$ (К $\underset{2}{\wedge}$ Р)) $\vee$ (С $\underset{1}{\wedge}$ (К $\underset{2}{\wedge}$ Р)) $\sim$ (К $\underset{2}{\wedge}$ Р) $\underset{1}{\wedge}$ (Ч $\vee$ С).

Рассмотрим еще фразу:

VI. *Черный или синий круг и черный или синий ромб.*

Смысл фразы VI отличен от смысла фразы IV, и запись она будет иметь другую, а именно:

6. ((Ч $\vee$ С) $\underset{1}{\wedge}$ К) $\underset{2}{\wedge}$ ((Ч $\vee$ С) $\underset{1}{\wedge}$ Р).

Но было бы неплохо уметь передавать тот же смысл и в сокращенной форме, аналогично фразе V, являющейся сокращением фразы IV. Русский язык справляется с этой задачей, например, так:

VII. *Круг и ромб, каждый черный или синий.*
Эту фразу, естественно, выразить как 7. $(К \bigwedge_2 Р) \bigwedge_1 (Ч \bigvee_1 С)$.

Но это выражение совпадает с выражением 5, и мы видим, что при таком способе записи разным по смыслу фразам V и VII соответствуют равносмысленные выражения 5 и 7.

Чтобы обойти это неудобство и иметь возможность сокращенно записать выражение 4 и выражение 6 так, чтобы эти сокращения отличались друг от друга, и вводятся связки типа «или» различных порядков. При этом

выражение 4 перепишется как $(Ч \bigwedge_1 (К \bigwedge_2 Р)) \bigvee_3 (С \bigwedge_1 (К \bigwedge_2 Р))$,

выражение 5 как $(К \bigwedge_2 Р) \bigwedge_1 (Ч \bigvee_3 С)$,

выражение 6 как $((Ч \bigvee_1 С) \bigwedge_1 К) \bigwedge_2 ((Ч \bigvee_1 С) \bigwedge_1 Р)$,

выражение 7 как $(К \bigwedge_2 Р) \bigwedge_1 (Ч \bigvee_1 С)$.

Аксиомы, формализующие отношение равносмысленности, должны быть такими, чтобы из них следовало, что

$$(Ч \bigwedge_1 (К \bigwedge_2 Р)) \bigvee_3 (С \bigwedge_1 (К \bigwedge_2 Р)) \sim (К \bigwedge_2 Р) \bigwedge_1 (Ч \bigvee_3 С),$$

$$((Ч \bigvee_1 С) \bigwedge_1 К) \bigwedge_2 ((Ч \bigvee_1 С) \bigwedge_1 Р) \sim (К \bigwedge_2 Р) \bigwedge_1 (Ч \bigvee_1 С),$$

но не следовало, что

$$(К \bigwedge_2 Р) \bigwedge_1 (Ч \bigvee_3 С) \sim (К \bigwedge_2 Р) \bigwedge_1 (Ч \bigvee_1 С).$$

3.4. ***Формализация.*** Сформулируем, наконец, множество аксиом и правил вывода такое, что те соотношения, выполнения которых мы требовали выше, являлись бы следствием этим аксиом.

Выражения языка образуются из букв при помощи связок, рассматриваемых как бинарные операции, так что если A_1 и A_2 — правильно построенные выражения, то $(A_1 \bigwedge_k A_2)$ — тоже правильно построенное выражение. Далее внешние скобки в записи выражений мы будем опускать.

Пусть A, B, C обозначают произвольные, а **0** и **1** — некоторые выделенные правильно построенные выражения языка.

3.4.1. Аксиомы

1. $A \sim A$.
2. $A \bigwedge_k B \sim B \bigwedge_k A$, где k — любое.
3. $A \bigwedge_k (B \bigwedge_k C) \sim (A \bigwedge_k B) \bigwedge_k C \sim A \bigwedge_k B \bigwedge_k C$,

где $k \geqslant \max(|A|, |B|, |C|)$.

4. $A \bigwedge_k (B \bigwedge_s C) \sim (A \bigwedge_k B) \bigwedge_s (A \bigwedge_k C)$, где $k \leqslant s$, $|A| \leqslant s$.
5. $A \bigvee_k B \sim B \bigvee_k A$, где k — любое.

6. $A \bigvee_k (B \bigvee_k C) \sim (A \bigvee_k B) \bigvee_k C \sim A \bigvee_k B \bigvee_k C,$

где $k \geqslant \max(|A|, |B|, |C|)$.

7. $A \bigvee_k (B \bigvee_s C) \sim (A \bigvee_k B) \bigvee_s (A \bigvee_k C)$, где $k \leqslant s$, $|A| \leqslant s$.

8. $A \bigwedge_k (B \bigvee_s C) \sim (A \bigwedge_k B) \bigvee_s (A \bigwedge_k C)$, где $|A| \leqslant s$.

9. $A \bigvee_k (B \bigwedge_s C) \sim (A \bigvee_k B) \bigwedge_s (A \bigvee_k C)$, где $|A| \leqslant s$.

10. $A \bigwedge_k 1 \sim A,$ где k — любое.

11. $A \bigwedge_k 0 \sim 0,$ где k — любое.

12. $A \bigvee_k 1 \sim 1,$ где k — любое.

13. $A \bigvee 0 \sim A,$ где k — любое.

Замечание. В аксиоме 3 выражение $A \bigwedge_k B \bigwedge_k C$ не является правильно построенным выражением, а рассматривается как сокращение любого из соединенных с ним знаком $\sim$ выражений.

3.4.2. П р а в и л а   в ы в о д а.

1. Симметричность. Если выводимо $A \sim B$, то выводимо и $B \sim A$.

2. Транзитивность. Если выводимо $A \sim B$ и выводимо $B \sim C$, то выводимо $A \sim C$.

3. Подстановочность. Если выводимо $B \sim C$ и B — правильно построенное подвыражение A, то выводимо $A \sim S^B_C \llcorner A \lrcorner$, где $S^B_C \llcorner A \lrcorner$ — результат подстановки C вместо B в выражение A.

3.4.3. О б с у ж д е н и е   а к с и о м. Можно показать, что для любых двух равносмысленных выражений A и B из примера 2 можно вывести, что $A \sim B$, применяя только аксиомы 1—9. Для чего же нужны аксиомы 10—13? Сейчас мы покажем, что эти аксиомы позволяют осуществлять еще один весьма полезный тип синтаксических преобразований, сохраняющих смысл, а именно исключение повторений, т. е. избыточных упоминаний о показаниях рецепторов. В самом деле, ясно, например, что утверждение «имеется прямоугольник и имеется прямоугольник» обладает тем же смыслом, что и утверждение «имеется прямоугольник», т. е. $\Pi \bigwedge_k$ $\bigwedge_k \Pi \sim \Pi$.

Докажем, что имеет место

Лемма 1. Если $k \geqslant |A|$, то

а) $A \bigwedge_k A \sim A,$ б) $A \bigvee_k A \sim A.$

Докажем утверждение п.а. В соответствии с аксиомой 13 $A \bigvee_s 0 \sim A$.

Так как из аксиомы 11 следует, что $0 \underset{k}{\wedge} 0 \sim 0$, то, заменяя в (1) 0 на $0 \underset{k}{\wedge} 0$, получаем $A \sim A \underset{s}{\vee} (0 \underset{k}{\wedge} 0)$. Но в соответствии с аксиомой 9:

$$A \underset{s}{\vee} (0 \underset{k}{\wedge} 0) \sim (A \underset{s}{\vee} 0) \underset{k}{\wedge} (A \underset{s}{\vee} 0),$$

так как $k \geqslant |A|$ по условию. Пользуясь транзитивностью, получаем:

$$A \sim (A \underset{s}{\vee} 0) \underset{k}{\wedge} (A \underset{s}{\vee} 0).$$

Но в силу (1) и правила подстановочности имеем:

$$(A \underset{s}{\vee} 0) \underset{k}{\wedge} (A \underset{s}{\vee} 0) \sim A \underset{k}{\wedge} A.$$

Еще раз пользуясь транзитивностью, заключаем, что $A \underset{k}{\wedge} A \sim A$. Аналогично с использованием аксиом 8, 10, 12 доказывается п. *б*.

Эта лемма как раз и позволяет исключать повторения. Из нее, в частности, следует, что любое повторное упоминание показания рецептора можно опустить (так как для показания рецептора условие леммы выполняется). Интересно, однако, что, если A — не показание рецептора, а более сложное выражение, то его повторное упоминание в отличие от логики высказываний можно опустить не всегда. Покажем на примере, что ограничение, наложенное в условии леммы, вполне соответствует нашей интерпретации связок различных порядков.

Пример 3. Выражение $\Pi \underset{k}{\wedge} P$ означает, что в поле зрения находятся прямоугольник и ромб. Выражение $(\Pi \underset{2}{\wedge} P) \underset{1}{\wedge} (\Pi \underset{2}{\wedge} P)$ означает, что имеется прямоугольник и ромб, причем и к тому и к другому относится все содержимое второй скобки, т. е., во-первых, показание рецептора формы «прямоугольник», а, во-вторых, показание «ромб». Из этого следует, что существует прямоугольник, к которому относится показание «ромб», т. е., говоря обычным языком, прямоугольник, одновременно являющийся ромбом, или квадрат. Ясно, что утверждение, включающее в себя высказывание о наличии квадрата, не эквивалентно по смыслу $\Pi \underset{2}{\wedge} P$ и, стало быть, в нашей интерпретации $\Pi \underset{2}{\wedge} P \not\sim (\Pi \underset{2}{\wedge} P) \underset{1}{\wedge} (\Pi \underset{2}{\wedge} P)$.

Итак, мы показали, что введение аксиом 10—13, а вместе с ними и объектов 1 и 0, приводит к разумным следствиям. Однако для того, чтобы ввести объекты в язык, попросту постулировать их существование, как это сделано в аксиомах 10—13, еще недостаточно. Для системы, которая пользуется языком, определить некий объект языка означает ввести в нее правила, порождающие этот объект. Правила такого типа рассмотрены частично в [1], где описаны некоторые способы использования предложенного языка.

4. Отношение уточнения описания. ***4.1. Формализация.*** Систему аксиом можно рассматривать как формализацию понятия равносмысленности высказываний в нашем языке. Однако для того, чтобы эффективно использовать язык, нужно иметь и другие типы отношений между высказываниями. Например, выше мы уже упоминали отношение уточнения описаний (когда речь шла о том, что $a \underset{1}{\wedge} b$ уточняет $a \underset{2}{\wedge} b$). Это отношение, являющееся разновидностью отношения следствия, очень важно, в частности, для использования в алгоритмах предсказания будущего на основе прошлого опыта [1].

Итак, надо определить понятие уточнения описания. Для этого нами будет введена функция $\rho(A, B)$ (A и B — выражения языка) такая, что $\rho(A, B) = 0$, если и только если B, с интуитивной точки зрения, есть уточненное описание A. Сначала мы дадим точное определение функции $\rho(A, B)$, к сожалению, довольно пространное (набрано петитом), а затем обсудим его свойства и целесообразность такого определения.

Определение. Мы будем говорить, что выражение языка A имеет *канонический вид*, если выполняется следующее условие: для любого правильно построенного подвыражения B в A внешняя связка в B обладает порядком, максимальным среди порядков связок в B.

Пример 4. Выражение (Ч $\underset{1}{\wedge}$ Р) $\underset{2}{\wedge}$ (Ч $\underset{1}{\wedge}$ П) имеет канонический вид, в отличие от равносмысленного ему (см. стр. 175) выражения Ч $\underset{1}{\wedge}$ (Р $\underset{2}{\wedge}$ П).

Грубо говоря, выражение принимает канонический вид, если в нем раскрыты все скобки, которые можно раскрыть, пользуясь аксиомами языка.

Легко доказать следующее утверждение. Существует алгоритм α, определяющий отображение множества правильно построенных выражений языка в себя, такой, что результат его применения к выражению A, т. е. $\alpha(A)$ обладает следующими свойствами:

1) $\alpha(A)$ имеет канонический вид,
2) высказывание $\alpha(A) \sim A$ есть теорема нашей системы,
3) если A имеет канонический вид, то $\alpha(A) \equiv A$,
4) если $A \equiv A_1 \underset{k}{\wedge} A_2$ и $k \geqslant \max(|A_1|, |A_2|)$, то $\alpha(A) \equiv \alpha(A_1) \underset{k}{\wedge} \underset{k}{\wedge} \alpha(A_2)$.

Замечание. Удобно считать, что все связки типа $\wedge$ нумеруются четными числами, а связки типа $\vee$ — нечетными. Поскольку, с содержательной точки зрения, неважно, как именно занумерованы связки, то в дальнейшем будем предполагать, что это условие выполняется.

Введем теперь функцию $\rho(A, B)$, определенную на парах выражений языка и принимающую неотрицательные целочисленные значения.

По определению $\rho(A, B) = \rho(\alpha(A), \alpha(B))$. Определим теперь $\rho(A, B)$ для A и B, имеющих канонический вид, индукцией по сумме количеств связок в выражениях A и B.

Базис. Пусть a и b — буквы. Тогда $\rho(a, b) = 0$, если и только если $a \equiv \equiv b$. Если $a \not\equiv b$, то $\rho(a, b) = 1$. Далее $\rho(1, a) = 0$, где a — любая буква или 0, или 1; $\rho(a, 0) = 0$, где a — любая буква или 0; $\rho(a, 1) = 1$, где a — любая буква или 0; $\rho(0, a) = 1$, где a = любая буква.

Индукционный переход. Предположим, что мы уже умеем определять функцию $\rho(C, D)$ для всех C и D в каноническом виде, причем таких, что суммарное число связок, имеющихся в C и D, меньше, чем суммарное число связок в A и B. Определим теперь $\rho(A, B)$. Рассмотрим отдельно следующие случаи.

1. $|A| > |B|$. В данном случае вид формулы, по которой вычисляется функция $\rho(A, B)$, зависит только от вида A:

а) при $A \equiv A_1 \underset{k}{\wedge} \ldots \underset{k}{\wedge} A_n$, $\rho(A, B) = \sum_1^n \rho(A_i, B)$,

б) при $A \equiv A_1 \underset{k}{\vee} \ldots \underset{k}{\vee} A_n$, $\rho(A, B) = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \rho(A_i, B)$.

В обоих вариантах $\rho(A_i, B)$ определена, так как 1) из определения канонического вида следует, что A_i тоже имеет канонический вид и 2) суммарное число связок в A_i и B меньше, чем число связок в A и B.

2. $|A| < |B|$. В данном случае вид формулы, по которой вычисляется функция $\rho(A, B)$, зависит только от вида B

а) при $B \equiv B_1 \underset{k}{\vee} \ldots \underset{k}{\vee} B_n$, $\rho(A, B) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \rho(A, B_i)$,

б) при $B \equiv B_1 \underset{k}{\wedge} \ldots \underset{k}{\wedge} B_n$, $\rho(A, B) = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \rho(A, B_i)$.

Здесь аналогично предыдущему функция $\rho(A, B_i)$ тоже определена.

3. $|A| = |B|$. Так как (см. замечание на стр. 180) связки различного типа не могут иметь равные порядки, то в этом случае возможны лишь два варианта:

а) $A \equiv A_1 \underset{k}{\wedge} \ldots \underset{k}{\wedge} A_n$, $\quad B \equiv B_1 \underset{k}{\wedge} \ldots \underset{k}{\wedge} B_m$.

Здесь будем пользоваться п. 1а, т. е. $\rho(A, B) = \sum_1^n \rho(A_i, B)$.

б) $A \equiv A_1 \underset{k}{\vee} \ldots \underset{k}{\vee} A_n$, $\quad B \equiv B_1 \underset{k}{\vee} \ldots \underset{k}{\vee} B_m$.

Здесь будем пользоваться п. 2а, т. е. $\rho(A, B) = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \rho(A, B_i)$.

Хотя выражение типа $A_1 \underset{k}{\wedge} \ldots \underset{k}{\wedge} A_n$ не является правильно построенным выражением, и определяемая функция, в принципе, могла бы зависеть от расстановки скобок в этом выражении, для данных выше формул легко заметить, что это не так, и определение функции $\rho(A, B)$ корректно.

Определение. Мы будем говорить, что A *следует из* B или B *уточняет* A, если $\rho(A, B) = 0$.

Заметим еще, что если $\rho(A, B) = \beta \neq 0$, то число β можно рассматривать как некую достаточно разумную меру числа требований, которые имеются в A, но не выполняются в B.

4.2. Свойства отношения уточнения описания.

Определение. Введем обозначение $C \to K$ или *C формально уточняет K*. В соответствии с предыдущим $C \to K$, если и только если $\rho(K, C) = 0$.

Покажем, что определенное нами понятие уточнения обладает естественными свойствами. Оно является аналогом понятия импликации в логике высказываний, в том смысле, что справедлива

Лемма 2. Если $\varphi(A)$ — отображение, ставящее в соответствие выражению A нашего языка формулу логики высказываний, полученную заменой всех вхождений $\underset{n}{\wedge}$ в A на $\wedge$, а всех вхождений $\underset{k}{\vee}$ в A на $\vee$ (для всех n и k), то из $B \to A$ следует истинность $\varphi(B) \supset \varphi(A)$.

Другими словами, если «забыть» о порядках, то наше уточнение превратится в простую импликацию.

Верны и следующие свойства.

Лемма 3. Транзитивность отношения уточнения. Если $C \to B$ и $B \to A$, то $C \to A$.

Лемма 4. Рефлексивность отношения уточнения. $A \to A$.

Лемма 5. Монотонность отношения уточнения.

Из $B \to A$ следует, что $B \bigwedge_k C \to A$ и $B \to A \bigvee_k C$ для любого k и любого C.

Лемма 6. Подстановочность отношения уточнения.

Если $C \to B$ и B — правильно построенное подвыражение в A, то $S^B_C\llcorner A \lrcorner \to A$, где $S^B_C\llcorner A \lrcorner$ есть результат подстановки в A выражения C вместо B.

4.3. Отношение уточнения описания и равносмысленность. Теперь оказываются определенными два отношения: аксиоматически заданное отношение равносмысленности $A \sim B$ и задаваемое равенством $\rho(A, B) = 0$ отношение уточнения $B \to A$. Между этими отношениями существует следующая связь.

Лемма 7. Если $B \to A$, то $A \bigwedge_k B \sim B$ — теорема в нашей системе аксиом для $k \geqslant \max(|A|, |B|)$.

Из этой леммы следуют интересные теоремы.

Теорема 1. Если $B \to A$ и $A \to B$, то $A \sim B$ — теорема в нашей системе аксиом.

Действительно, если $B \to A$, то по лемме 7 существует такое k, что $A \bigwedge_k B \sim B$. Аналогично, из $A \to B$ для того же k следует, что $B \bigwedge_k A \sim A$. Пользуясь аксиомой коммутативности и тем, что отношение $\sim$ транзитивно, получаем $A \sim B$.

Теорема 2. Если $A \sim B$ — теорема в нашей системе аксиом, то $B \to A$ и $A \to B$.

Эта теорема доказывается индукцией по построению вывода равенства $A \sim B$. Для этого с помощью лемм 2—7 и определения алгоритма приведения к каноническому виду доказывается, что утверждение теоремы выполняется для системы аксиом. Кроме того показывается, что при применении правил вывода к равенствам, для которых утверждение теоремы верно, мы тоже получаем равенства, удовлетворяющие теореме.

Теоремы 1 и 2 показывают, что в наших определениях выражения a и b равносмысленны тогда и только тогда, когда каждое из них является уточнением другого. Этот факт вполне соответствует нашим представлениям и может рассматриваться как довод в пользу разумности наших определений.

Заметим, что для вычисления функции ρ у нас есть эффективная процедура. Тем самым, из теорем 1 и 2 следует, что мы имеем алгоритм, проверяющий, является ли $A \sim B$ теоремой для любых двух выражений A и B языка. Другими словами, теоремы 1 и 2 утверждают, что наша система аксиом разрешима, и дают разрешающий алгоритм.

Из теоремы 2 и леммы 7 следует

Теорема 3. Для $k \geqslant \max(|A|, |B|)$

$$A \bigwedge_k B \sim B \tag{1}$$

тогда и только тогда, когда $B \to A$.

Достаточность этого условия следует из леммы 7, а его необходимость доказывается так: если $A \bigwedge_k B \sim B$, то согласно теореме 2 $B \to A \bigwedge_k B$, т. е. по определению отношения уточнения

$$\rho(A \bigwedge_k B, B) = 0. \tag{2}$$

Но в соответствии с определением функции ρ и свойством 4 алгоритма α приведения к каноническому виду

$$\rho(A \bigwedge_k B, B) = \rho(\alpha(A \bigwedge_k B), \alpha(B)) = \rho(\alpha(A) \bigwedge_k \alpha(B), \alpha(B)) =$$
$$= \rho(\alpha(A), \alpha(B)) + \rho(\alpha(B), \alpha(B)).$$

Из этого в силу (2) и с учетом того, что всегда $\rho \geqslant 0$, следует, что $\rho(\alpha(A), \alpha(B)) = 0$, а так как по определению $\rho(A, B) = \rho(\alpha(A), \alpha(B))$, то теорема доказана.

Эта теорема утверждает, что данное нами конструктивное определение отношения уточнения эквивалентно выполнению равенства (1). Заметим, что (1) — это стандартное определение следствия, как оно дается в теории структур, модифицированное для нашего случая. Это еще раз подтверждает естественность выбранного нами определения.

Теперь мы развили формальный аппарат, пригодный для использования нашего языка. Примеры такого использования приведены в [1], где рассматриваются уже содержательные преобразования — преобразования, меняющие смысл.

5. **Зачем нужна множественность в выражении смысла?** Мы мотивировали желательность введения в наш язык преобразований, сохраняющих смысл выражения, аналогиями с естественным языком. Но почему в искусственной системе должна существовать множественность выражения одного смысла? И вообще, что означает равносмысленность для такой системы?

Говорить о выражениях, которые с точки зрения системы равносмысленны, но не тождественны, можно лишь в том случае, когда действия системы разделяются на внутренние и внешние. Действительно, система должна различным образом реагировать (точнее, быть способной к различным реакциям) на нетождественные для нее выражения. С другой стороны, если наблюдатель может заметить, что реакции на разные выражения отличаются, то он не сочтет эти выражения равносмысленными для системы. Таким образом, наблюдатель может говорить, что данные выражения равносмысленны, но не тождественны для системы, если некоторые внешние, доступные ему реакции системы на эти выражения тождественны, но ему известно, что некоторые из ее внутренних реакций, вообще говоря, могут отличаться. Это по существу определение равносмысленных, но не тождественных выражений (разумеется, не единственно возможное).

В системе, моделирующей сложное поведение, внутренними действиями естественно оказываются действия по переработке информации — действия, моделирующие мышление. Ясно, что для разных мыслительных задач удобны разные формы записи одного и того же выражения. Например, форма, оптимальная для хранения в памяти, может оказаться слишком неудобной для обработки ввиду необходимости в слишком сложном устройстве операции обработки. Другими словами, при переходе от одного блока системы к другому или от одной задачи к другой внутри данного блока требуются преобразования типа перекодирования. Выходной результат блока или конечный ответ при решении задачи не будут зависеть от формы выражений на входе, поскольку внутри блока все равно произойдет необходимое преобразование в наиболее удобную форму. Поэтому, согласно нашему определению, такие выражения действительно будут иметь один смысл — внутреннему языку системы будет свойственна множественность выражения одного смысла. Ясно, что наиболее существенные преобразования, меняющие лишь форму выражения, будут отражаться у человека и в его внешнем языке — языке общения. Поэтому, анализируя естественные языки, можно надеяться получить некоторую информацию для моделирования преобразований подобного рода, встречающихся в мыслительных процессах.

Литература

1. *И. С. Лосев, В. В. Максимов.* О задаче обобщения начальных ситуаций.— Наст. сб.
2. *М. М. Бонгард, М. Н. Вайнцвайг, Ш. А. Губерман, М. Л. Извекова, М. С. Смирнов.* Использование обучающейся программы для выявления нефтеносных пластов.— Геология и геофизика, 1966, № 6.
3. *И. М. Гельфанд, Ш. А. Губерман, М. П. Житков, М. С. Калецкая, В. И. Кейлис-Борок, Е. Я. Ранцман, И. М. Ротвайн.* Прогноз места возникновения сильных землетрясений как задача распознавания.— Наст. сб.
4. *В. П. Карп, П. Е. Кунин.* Метод направленного обучения в переборной схеме М. М. Бонгарда и онкологическая диагностика.— Наст. сб.
5. *А. К. Жолковский, И. А. Мельчук.* О семантическом синтезе.— Сб. «Проблемы кибернетики», вып. 19. М., «Наука», 1967.