Кроме прямого статистического моделирования для минимизации времени применялась нейронная сеть в простейшем варианте (многослойный персептрон с минимальным набором слоев) [7]. Обучение проводилось на тестовых расчетах методом Монте-Карло и аналитических результатах в свободномолекулярном потоке.

Хотя расчеты проводились лишь для отдельных значений параметров и форм каналов, их практическая ценность состоит в том, что они подтверждают полученные ранее аналитические результаты [2–5], т. е. позволяют в первом приближении указать возможное возникновение неустойчивости течений разреженных газов на основе простых аналитических формул. Полученные результаты могут найти разнообразные приложения как в области движения космических аппаратов в верхних слоях атмосферы (при моделировании течений в соплах, щелях, зазорах и т. п.), так и в аэрогазодинамике микротечений, так как число Кнудсена в подобных течениях достаточно велико уже при неглубоком вакууме — для нанотехнологических масштабов вплоть до нормального атмосферного давления.

1. *Aksenova O. A.*, *Khalidov I. A.* Unstable Rarefied Gas Flow Conditions in a Channel // Rarefied Gas Dynamics. American Institute of Physics. AIP Conf. Proc. — 2016. — V. 1786, 100009. — P. 1–8.
2. *Аксенова О. А.* О влиянии вида аппроксимации коэффициентов обмена на поверхности на характер неустойчивости течения разреженного газа в канале // Вестник Санкт-Петербургского государственного Университета. Сер. 1. — 2014. — №3. — С. 410–418.
3. *Aksenova O. A.*, *Khalidov I. A.* Comparison of Analytic Models of Instability of Rarefied Gas Flow in a Channel // Rarefied Gas Dynamics. American Institute of Physics. AIP Conf. Proc. — 2014. — V. 1628. — P. 828–836.
4. *Мирошин Р. Н.*, *Халидов И. А.* Локальные методы в механике сплошных сред. — СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского ун-та, 2002. — 304 с.
5. *Аксенова О. А.*, *Халидов И. А.* Шероховатость поверхности в аэродинамике разреженного газа: фрактальные и статистические модели. — СПб.: Изд-во «ВВМ» С.-Петербургского ун-та, 2004. — 120 с.
6. *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. — М.: Мир, 1978. — 495 с.
7. *Тархов Д. А.* Нейросетевые модели и алгоритмы. — М.: Радиотехника, 2014. — 350 с.

О ВЫБОРЕ ОПТИМАЛЬНОЙ МЕТРИКИ ДЛЯ ЗАДАЧ ВЕРИФИКАЦИИ*

А. К. Алексеев[1,2]***, А. Е. Бондарев***[3]

[1]*РКК «Энергия», Королев, Московская обл., Россия;* [2]*МФТИ, Долгопрудный, Московская обл., Россия;* [3]*ИПМ им. М. В. Келдыша, Москва, Россия*

Внедряемые в настоящее время Федеральным агентством по техническому регулированию и метрологии ГОСТы (например, [1]) предполагают верификацию и валидацию численных методов, схем и программ вычислительной газовой динамики с опорой на набор тестовых задач, соответствующих либо точным решениям, либо «эталонным» численными решениям. Подробный обзор работ в этом направлении можно найти в [2]. Данные ГОСТы в значительной степени определят ближайшее будущее вычислительной газовой динамики в РФ. Однако, подход, применяемый при их разработке, обладает очевидным недостатком, а именно, в них не указан способ количественного сопоставления верифицируемого расчета с

*Работа выполнена при поддержке гранта РНФ №18-11-00215.

тестовой задачей. В рамках же существующей практики сопоставление решений зачастую производится визуальным сравнением двух полей течений, что оставляет большой простор для субъективизма. Например, достаточно часто численные решения сравнивают по наличию осцилляций у скачка и степени его размазывания. Решения, полученные TVD-схемами, лучше всего выглядят именно с этой точки зрения. Однако, осциллирующие решения могут сходиться в нормах L_1, L_2 лучше, чем монотонные (TVD) [3].

Выбор нормы (или метрики) для количественного сравнения течений осложняется тем, что в общем случае норма отклонения одного решения от другого не имеет выраженного физического смысла (содержит, например, сумму погрешностей плотности и температуры), и напрямую не связана с используемыми на практике ценными функционалами течения, такими, например, как подъемная сила или сопротивление. Конечно, количественные критерии верификации можно получить с использованием таких ценных функционалов, для которых наличествует информация о допустимой погрешности и физический смысл которых прозрачен. Однако из близости решений с точки зрения одного функционала не следует близость с точки зрения другого, что ограничивает общность.

Использование норм отклонений численного решения от точного (или эталонного) позволяет получить более общие результаты. Например, в [4] представлены результаты сравнительного анализа погрешности (отклонения от эталонного решения) нескольких солверов из комплекса OpenFOAM в нормах L_1, L_2 для невязкого сверхзвукового обтекания конуса.

Следует отметить, что количество возможных метрик и норм, потенциально пригодных для сравнения решений, очень велико и их свойства существенно различаются. Например, сходимость численных решений в нормах L_1, L_2 существенно зависит от регулярности рассматриваемого решения. С другой стороны, вариацию ценного функционала $\varepsilon(u)$ можно связать с нормой погрешности решения через неравенство Коши–Буняковского $|\Delta\varepsilon(u)| \leq \|\nabla\varepsilon\| \cdot \|\Delta u\|$, что позволяет объединить два подхода к сравнению решений.

В данной работе рассмотрены возможности количественного сравнения численных полей течений с использованием различных метрик. Оптимальная метрика должна позволять надежно различать структуру течения и обеспечивать сравнение качественно близких полей течений, полученных на разных сетках или разными методами. Рассмотрены метрики, порожденные стандартными нормами L_1, L_2, а также метрики типа Махаланобиса, соответствующие сглаживанию поля течения или использованию относительной погрешности (REM). Метрики этого типа соответствуют эвклидовой метрике в трансформированном пространстве, порождаются скалярным произведением и допускают обобщенную форму неравенства Коши-Буняковского, поэтому могут быть сопоставлены с распространенными ценными функционалами. Метрики сравнены на примере численных расчетов взаимодействия ударных волн I и VI типа по классификации Edney, описываемого уравнениями Эйлера и имеющих достаточно просто аналитическое решение. Численное решение (сеточная функция) рассматривалось как вектор $u^{(i)} \in R^N$ (i — порядковый номер схемы, N — число узлов сетки). Значения точного решения в узлах сетки $\widetilde{u} \in R^N$ формируют такой же по размеру вектор. Мы сравниваем эти вектора, используя сеточные метрики, порожденные нормами L_1, L_2 а также метрику REM и метрику IMED работы [5]. Рассмотрено отклонение расчета от точного решения в виде значения расстояния от истинного до численного решений для набора численных схем разного порядка, сеток разного размера, различных схем течения. Все использованные метрики позволяют различать погрешности аппроксимации различных схем (отношение нормы погрешности к норме решения исчисляется в единицах процентов, изредка около десятка процентов), незначительные отклонения параметров течения (десятки процентов) и сильные изменения структуры течения (сотни процентов). Представлено также сравнение погрешности ценных функционалов (подъемной силы и сопротивления) с нормой ошибки на наборе расчетов для тонкой пластины под углом атаки). «Точные» значения коэффициентов приняты в соответствии с линейной теорией. Оценки норм погрешности получены с использованием неравенства треугольника [6].

В целом, для задач верификации наиболее перспективно использование расстояний между решениями IMED [5]. При относительном отклонении от эталонного решения в IMED, L_1 или L_2 в несколько процентов можно считать задачу верификации выполненной.

В отсутствие эталонного решения наличие ансамбля независимых решений позволяет выполнить верификацию расчетов при норме разброса между ними в несколько процентов с использованием метода [6] для оценки нормы погрешности.

1. ГОСТ Р 57700.12–2018. Численное моделирование сверхзвуковых течений невязкого газа. Верификация ПО / Национальный стандарт РФ по численному моделированию физических процессов. 2018. — 20 с. URL: http://protect.gost.ru.
2. *Железнякова А. Л.* Технологии верификации и валидации в численном газодинамическом моделировании // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. — 2018. — Т. 19 (2).
3. *Ковыркина О. А.*, *Остапенко В. В.* О реальной точности разностных схем сквозного счета // Матем. моделирование. — 2013. — Т. 25, №9. — С. 63–74.
4. *Бондарев А. Е.*, *Кувшинников А. Е.* Сравнительный анализ точности солверов пакета OpenFOAM для задачи невязкого обтекания конуса // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2017. №12. 16 с.
5. *Wang L.*, *Zhang Y.*, *Feng J.* On the Euclidean Distance of Images // IIEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. — 2005. — V. 27, Iss. 8. — P. 1334–1339.
6. *Alekseev A. K.*, *Bondarev A. E.*, *Navon I. M.* On Triangle Inequality Based Approximation Error Estimation // arXiv:1708.04604. 2017.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО МАССООБМЕНА НА ПОВЕРХНОСТИ С ТУРБУЛЕНТНЫМ ПРИСТЕННЫМ ТЕЧЕНИЕМ*

В. А. Алексин

ИПМех РАН, Москва, Россия

При численном исследовании совместного воздействия турбулентности набегающего потока, гармонических колебаний во времени внешней скорости и параметра массового расхода на характеристики течения и теплопереноса в нестационарных пограничных слоях определяется влияние их параметров колебаний и проницаемости. Расчетные результаты, полученные при задании переменного во времени параметра проницаемости на поверхности, сопоставляются с распределениями для постоянного его значения. Анализируются механизмы воздействия вдува и отсоса на проницаемом участке и вниз по потоку.

*Исследование выполнено по теме №АААА-А17-117021310376-4 и при частичной поддержке грантом РФФИ №16-01-00172.