

# О ЛОКАЛИЗАЦИИ ИСТИННОГО РЕШЕНИЯ НА АНСАМБЛЕ РАСЧЕТОВ \*

А.К. Алексеев<sup>1</sup>, А.Е.Бондарев<sup>2</sup>

<sup>1</sup>РКК Энергия, г. Королев, МФТИ, г. Долгопрудный, Моск. обл., Россия;

<sup>2</sup>ИПМ им М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия.

Рассмотрена возможность определения окрестности численного решения, содержащей истинное решение, основанная на использовании ансамбля расчетов, полученных схемами разного порядка аппроксимации на одной и той же сетке.

Мы будем рассматривать численное решение как вектор  $u^{(i)} \in R^N$  ( $i$ -порядковые номера схем,  $N$  число узлов сетки). Значения неизвестного истинного решения в узлах сетки (“истинное решение”) обозначим  $\tilde{u} \in R^N$ . Нас интересует отклонение расчета от истинного решения в виде значения нормы погрешности решения  $\|u^{(k)} - \tilde{u}\|_{L_2} = r_k$ .

При наличии априорной информации о том, что одна из схем существенно точнее другой  $r_1 > 2r_2$ , можно показать, что истинное решение находится внутри гиперсферы радиуса  $\|du_{1,2}\|_{L_2} = \|u^{(1)} - u^{(2)}\|_{L_2}$  с центром в  $u^{(2)}$ :  $\|\tilde{u} - u^{(2)}\|_{L_2} \leq \|du_{1,2}\|_{L_2}$ .

В отсутствие количественной информации о соотношении погрешности решений можно сформулировать следующий эвристический критерий:

*Локализация истинного решения возможна, если множество расстояний между численными решениями  $\|du_{i,j}\|_{L_2} = \|u^{(i)} - u^{(j)}\|_{L_2}$  распадается на кластеры, связанные с точными и с одним неточным решениями, а расстояние между кластерами больше размера кластера более точных расчетов.*

В качестве тестового примера рассмотрено взаимодействие ударных волн VI типа по классификации Edney [1], описываемое уравнениями Эйлера. На Рис. 1 представлено изолинии плотности для параметров течения  $M = 4$ ,  $C_p / C_v = 1.4$  и двух последовательных углов отклонения потока  $\alpha_1 = 10^\circ$ ,  $\alpha_2 = 15^\circ$ . Для этой задачи достаточно просто построить точное аналитическое решение. С другой стороны, наличие скачков уплотнения и интенсивного слоя смешения позволяют надеяться на получение в расчете заметной ошибки. В работе использовалась схема 1 порядка точности типа Courant Isaacson Rees в варианте [2], обозначенная как S1, схема второго

порядка точности [3] ( $S_2$ ), схема 3 порядка точности [4] ( $S_3$ ) и схема 4 порядка точности [5] ( $S_4$ ).

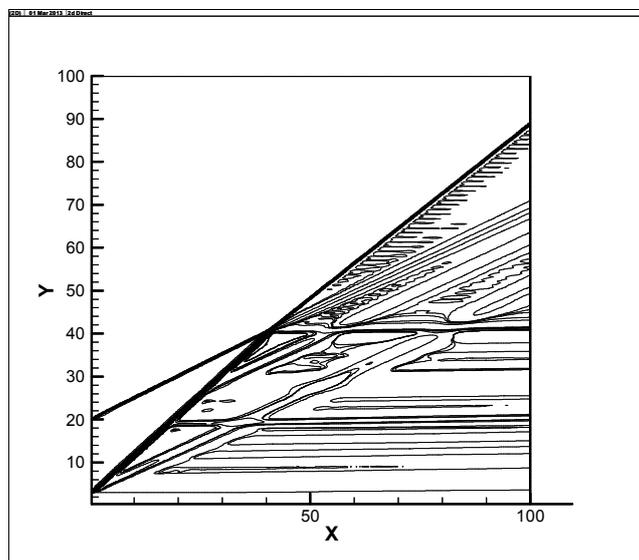


Рис. 1

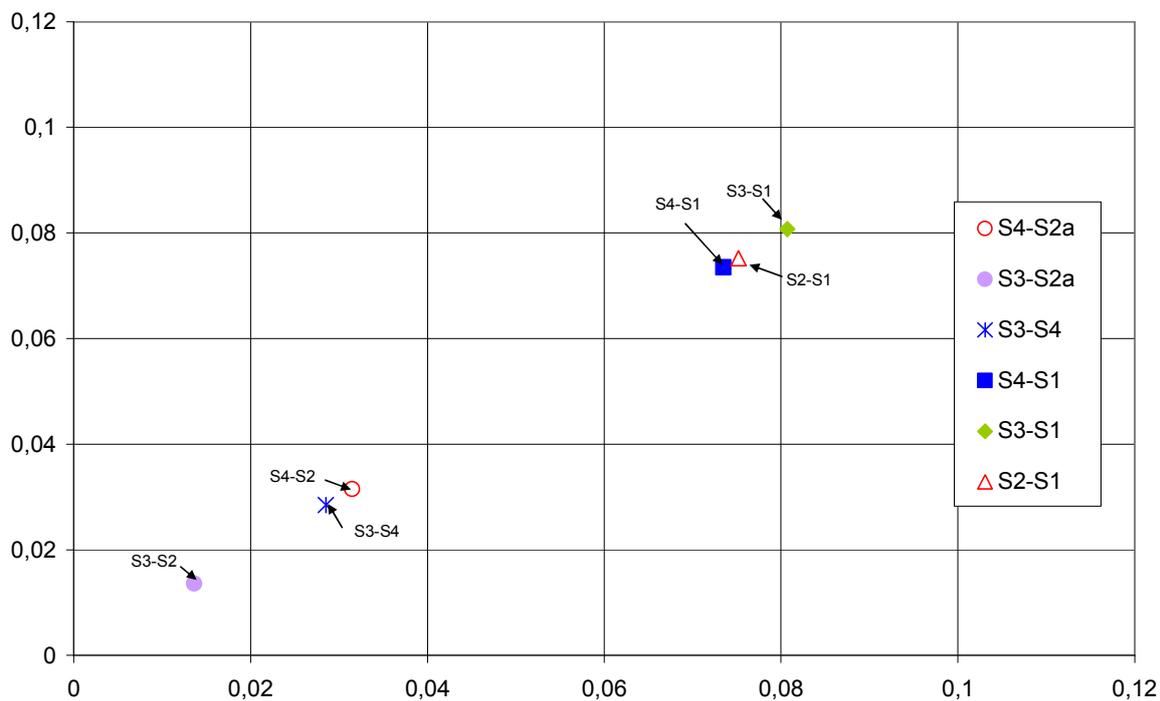


Рис. 2

Расчеты проводились на равномерных сетках, содержащих  $100 \times 100$  и  $400 \times 400$  пространственных узлов. Рис. 2 демонстрирует, что набор расстояний (для удобства

отложенных по обеим осям) между решениями

$$\|du_{i,k}\|_{L_2} = \|u^{(i)} - u^{(k)}\|_{L_2}$$

распадается на два кластера, один из которых связан с “неточной” схемой  $S1$ .

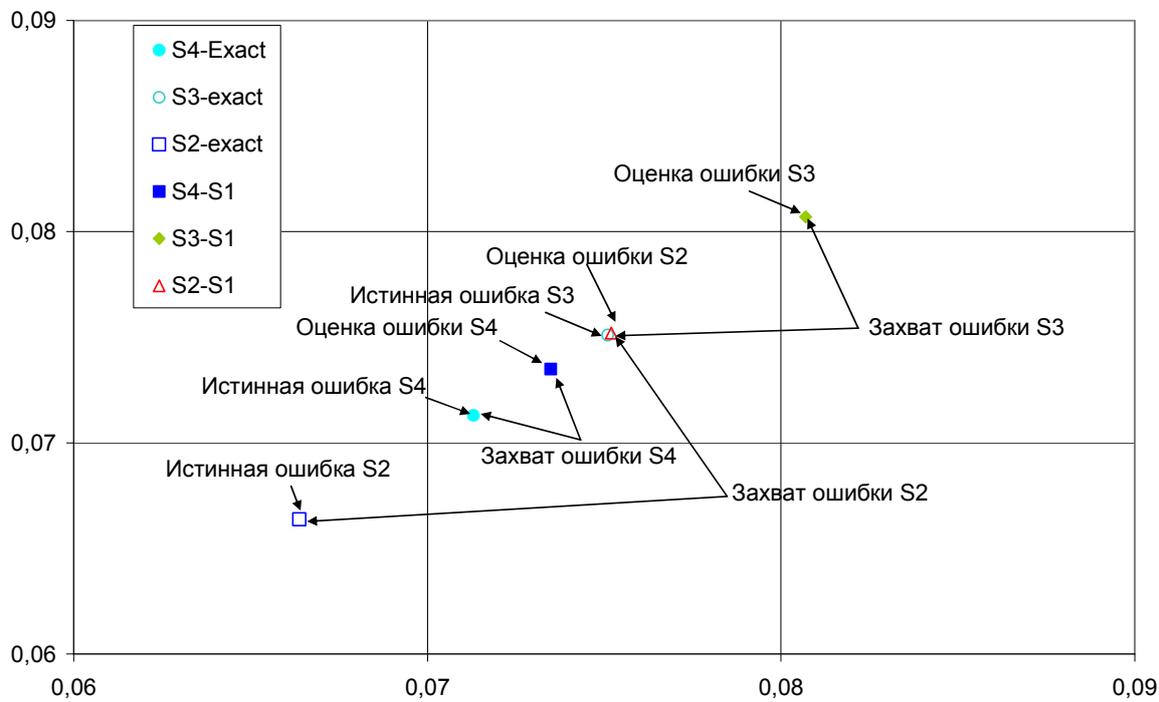


Рис. 3

Сравнение с аналитическим решением указывает на то, что использование схемы  $S1$  (как “неточной”) и схем  $S2$ ,  $S3$ ,  $S4$  (как “точных”) позволяет найти окрестность “точных” решений, в которой расположено истинное решение (Рис. 3).

1. Боровой В.Я., Течение газа и теплообмен в зонах взаимодействия ударных волн с пограничным слоем. М.: Машиностроение, 1983. 141 с.
2. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
3. Sun M., Katayama K. An artificially upstream flux vector splitting for the Euler equations, JCP. 2003. V. 189. P. 305-329.
4. Osher S., Chakravarthy S., Very high order accurate TVD schemes. ICASE Report, No. 84-144, 1984, pp. 229–274
5. Yamamoto S., Daiguji H. Higher-order-accurate upwind schemes for solving the compressible Euler and Navier-Stokes equations//Computers and Fluids. 1993. V. 22. P. 259-270.