

К РАСЧЕТУ ВОЗМУЩЕНИЯ ПОЛЯ ТЕЧЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ КОМПЛЕКСНОГО ВАРИАНТА ПРОГРАММЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА*

А.К. Алексеев¹, А.Е. Бондарев²

¹РКК Энергия, г. Королев, МФТИ, г. Долгопрудный, Моск. обл., Россия; ²ИИМ им М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия

Для расчетов коэффициентов чувствительности в ряде работ используется метод “комплексного шага” [1-4]. Основной идеей этого подхода является расширение кода программы с действительных на комплексные переменные и возмущение комплексных частей решаемого уравнения. Формально этот метод основывается на разложении в ряд Тейлора аналитической (голоморфной) функции $f(x+ih) = f(x) + ihdf/dx - h^2d^2f/dx^2/2! - ih^3d^3f/dx^3/3! + \dots$. Мнимая часть этого разложения $df/dx = \text{Im}[f(x+ih)/h + h^2d^3f/dx^3/3!]$ дает производную со вторым порядком точности, так как действительные члены погрешности первого порядка выпали. При дифференцировании по действительной переменной из аналогичного разложения $f(x+h) = f(x) + hdf/dx + h^2d^2f/dx^2/2! + \dots$ получим выражение первого порядка точности $df/dx = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + hd^2f/dx^2/2!$, имеющее, к тому же, в числителе маленькую разность больших чисел.

С технической стороны основной частью работы является перевод программы, написанной в действительных переменных в комплексные, заменой функций и операторов ввода/вывода. Это позволяет относительно легко модернизировать существующие коды. В работах [2-4] для двумерных и трехмерных течений с помощью этого подхода рассчитана чувствительность коэффициентов сопротивления и подъемной силы профиля к вариации некоторых геометрических параметров.

Представляет также интерес использование этого метода для расчета поля возмущений течения. В особенности это выглядит перспективным в качестве применения к методу коррекции погрешности [5] в котором в качестве возмущающего параметра использованы оценки погрешности аппроксимации и рассчитывается уточненное решение. Очевидным недостатком метода коррекции погрешности является попытка устранения схемной вязкости, играющей существенную конструктивную роль

при решении уравнений Эйлера. С этой точки зрения метод комплексного возмущения может иметь определенные преимущества.

В данной работе представлено сравнение метода “комплексного шага” и метода коррекции погрешности на примере двумерных уравнений Эйлера. Нас здесь интересует дифференциал Гато решения системы уравнений Эйлера по направлению, совпадающему с вектором погрешности аппроксимации. Соответственно, для полной работоспособности этого подхода необходимо, чтобы существовало расширение уравнений Эйлера на комплексное пространство, и их решение имело комплексную производную (голономно) в каждой точке по отношению к источникам. Однако, даже в отсутствие информации о голономности можно показать, что мнимая часть решения соответствует решению уравнений для возмущения.

В качестве тестового примера рассмотрено взаимодействие ударных волн VI типа по классификации Edney [6]. Расчеты проведены с помощью метода [7], программа реализована на языке Фортран-90. На Рис. 1 представлены изолинии плотности для параметров $M = 4$, и двух углов клина $\alpha_1 = 10^\circ$, $\alpha_2 = 15^\circ$, генерирующих скачки уплотнения.

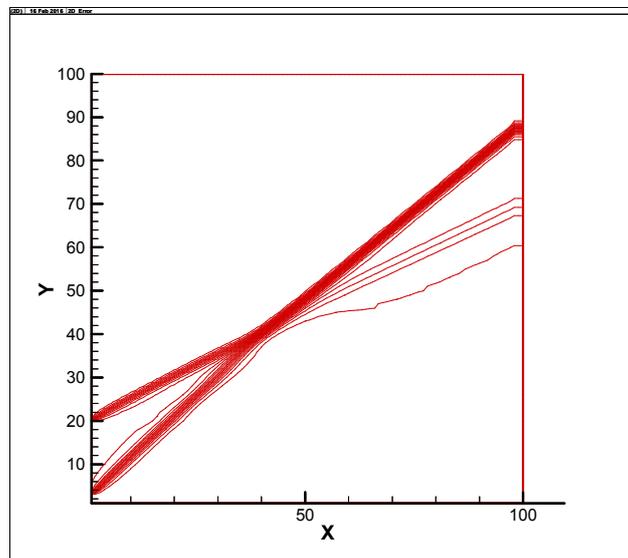


Рис. 1

Для некоторого тестового случая (содержащего источник тепла в поле течения) на Рис. 2 представлено поле возмущения, полученное в действительном случае, на Рис. 3 представлена комплексная часть возмущения, что позволяет сравнить эти два подход.

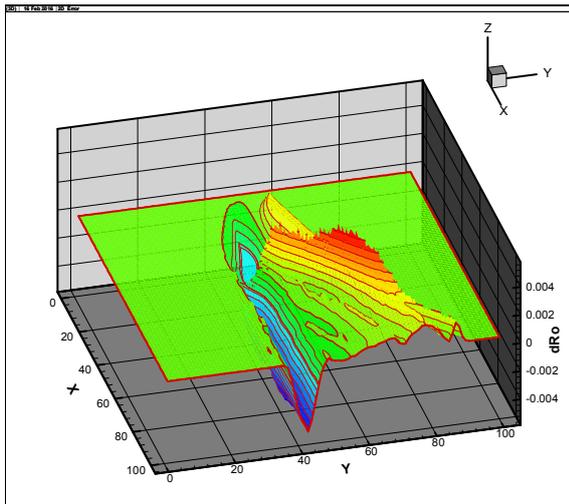


Рис. 2

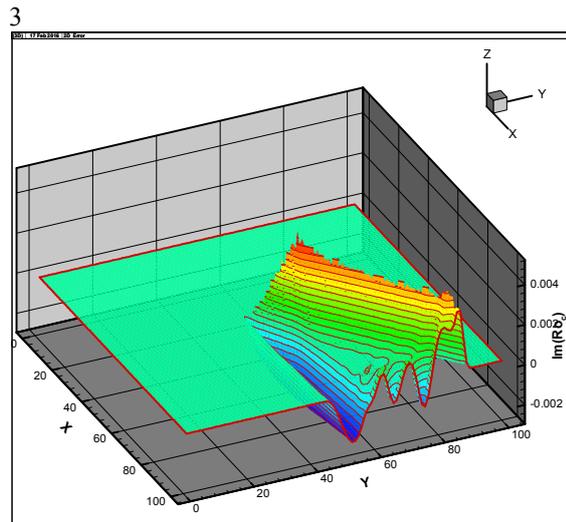


Рис.3

1. Lyness J. N., and Moler, C. B., Numerical Differentiation of Analytic Functions, SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol. 4, No. 2, 1967, pp. 202 – 210.
2. Anderson W. K., Newman J. C., Whitfield D. L., and Nielsen E. J. Sensitivity analysis for Navier-Stokes equations in unstructured meshes using complex variables. AIAA Journal, 39(1):56-63, 2001.
3. Martins J. R. R. A., Sturdza P., and Alonso J. J., The Connection Between the Complex-Step Derivative Approximation and Algorithmic Differentiation, AIAA-2001-0921, p. 1-11
4. Nielsen E. J. and Kleb W. L., Efficient construction of discrete adjoint operators on unstructured grids using complex variables, AIAA J., 44, N 4, (2006), pp. 827–836.
5. Linss T., Kopteva N., A Posteriori Error Estimation for a Defect-Correction Method Applied to Convection-Diffusion Problems, Int. J. of Numerical Analysis and Modeling, V. 1, N. 1, P. 1–16, 2009
6. Боровой В.Я., Течение газа и теплообмен в зонах взаимодействия ударных волн с пограничным слоем. М.: Машиностроение, 1983. 141 с.
7. Sun M., Katayama K. An artificially upstream flux vector splitting for the Euler equations, JCP. 2003. V. 189. P. 305-329.

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 14-01-00769А, № 16-01-00553А)