

Преобразования XYZ в спектр для свойств поверхности*

И.В. Валиев, А.Г. Волобой, Е.Ю. Денисов, С.В. Ершов, С.Г. Поздняков

piv@gin.keldysh.ru | voloboy@gin.keldysh.ru | eed@gin.keldysh.ru | measure@spp.keldysh.ru | ysp@gin.keldysh.ru

Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, Москва

Описана процедура вычисления спектрограммы коэффициента отражения или пропускания, соответствующей заданной цветности в пространстве XYZ CIE 1931. Вычисления проводятся с помощью минимизации целевой функции, задающей отклонение заданных величин XYZ и XYZ для искомой спектрограммы.

Ключевые слова: XYZ Cie 1931, спектрограмма отражения.

Transformation of XYZ triplet into spectrum for surface properties*

I. V. Valiev, A. G. Voloboy, E. Yu. Denisov, S. V. Ershov, S. G. Pozdnyakov

The Keldysh Institute of Applied Mathematics Russian Academy of Science

The procedure of calculation of reflection or transmission spectrogram for given chromaticity XYZ CIE 1931 is presented. The calculations are carried out using the minimization of penalty function which is squared difference between required and current values of XYZ.

Keywords: XYZ Cie 1931, reflection spectrogram.

1. Введение

Типичной задачей компьютерной графики является моделирование распространения видимого света и построение изображения на этой основе. В общем случае полностью корректным может быть только спектральное моделирование. Зачастую полные спектрограммы распространяющегося света и (или) спектрограммы оптических атрибутов неизвестны и задаются в “усеченном” виде: либо в виде компонент RGB, либо в виде величин XYZ цветового пространства CIE XYZ. В связи с этим, часто возникает задача нахождения спектрограммы, соответствующей заданным величинам XYZ [1–4].

Преобразование спектрограммы в XYZ хорошо известно. Везде далее мы будем использовать только дискретное преобразование:

$$\begin{aligned} X &= \sum_{m=1}^M w_m^X s(\lambda_m) \equiv \sum_{m=1}^M w_m^X s_m \\ Y &= \sum_{m=1}^M w_m^Y s(\lambda_m) \equiv \sum_{m=1}^M w_m^Y s_m \\ Z &= \sum_{m=1}^M w_m^Z s(\lambda_m) \equiv \sum_{m=1}^M w_m^Z s_m \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь w_m^X, w_m^Y, w_m^Z – известные коэффициенты преобразования CIE 1931 [1], λ_m – длина волны, $s_m \equiv s(\lambda_m)$ – спектрограмма. Ниже мы ограничимся стандартным преобразованием, использующим $M = 81$ длину волны: от 380nm до 780nm с шагом 5nm. Как правило, представления (1) вполне достаточно для целей компьютерной графики. При необходимости (1) можно применить и для непрерывных распределений, используя соответствующую интерполяцию.

Работа поддержана грантами РФФИ № 13-01-00454 и 15-01-01147, а также фирмой Integra Inc. (Япония). Работа опубликована при финансовой поддержке РФФИ, грант 15-07-20347.

В общем случае обратное преобразование — вычисление спектрограммы, соответствующей заданным величинам XYZ, может быть неединственным. Естественно, что вычисленная спектрограмма должна удовлетворять базовым физическим принципам. В случае зеркального или идеально диффузного (распределение Ламберта) отражения или пропускания света спектрограмма должна удовлетворять закону сохранения энергии (случаи переизлучения света с изменением длины волны здесь не рассматриваются):

$$0 \leq s_m \leq 1 \quad (2)$$

Следует особо отметить, что настоящий подход применим только к единственной спектрограмме, то есть или к спектрограмме одного вида отражения или к спектрограмме одного вида пропускания. В случае комбинации нескольких видов отражения и (или) пропускания соответствующие спектрограммы должны находиться совместно, чтобы результаты не нарушали закон сохранения энергии. Случаи диффузного отражения или пропускания, описываемые произвольными BDF, являются еще более сложными и в данной работе также не рассматриваются.

2. Предварительный анализ

В дальнейшем предполагается, что заданная тройка величин XYZ соответствует реальному цвету, то есть величины

$$x = \frac{X}{X+Y+Z}, y = \frac{Y}{X+Y+Z} \quad (3)$$

расположены внутри или на границе криволинейного “треугольника” цветностей CIE 1931 [1]. В противном случае считается, что тройка XYZ тем или

иным образом заменяется на “реальную”. Кроме этого, будем считать “реальной” тройку $X = Y = Z = 0$, соответствующую “нулевому” спектру, т.е. реальному цвету бесконечно малой яркости.

Рассмотрим функцию $\Delta(s_m)$ для заданной тройки XYZ

$$\Delta = \left(\sum_{m=1}^M w_m^X s_m - X \right)^2 + \left(\sum_{m=1}^M w_m^Y s_m - Y \right)^2 + \left(\sum_{m=1}^M w_m^Z s_m - Z \right)^2 \quad (4)$$

Нетрудно видеть, что (4) достигает своего абсолютного минимума, если выполнены уравнения (1).

Для коэффициентов преобразования w_m^X, w_m^Y, w_m^Z и спектрограммы s_m удобно ввести квантовомеханические обозначения “бра-кет” Дирака:

$s_m \rightarrow |s\rangle$, $w_m^X \rightarrow |w^X\rangle$, $w_m^Y \rightarrow |w^Y\rangle \rightarrow |w\rangle$, $w_m^Z \rightarrow |w^Z\rangle$ и определив для них скалярное произведение как: $\langle w^X | s \rangle = \sum_{m=1}^M w_m^X s_m$ и аналогично в других случаях.

Уравнение для искомой спектрограммы можно также сформулировать в следующем виде:

$$\hat{A}|s\rangle = |f\rangle \quad (5)$$

Здесь $\hat{A} = |w^X\rangle\langle w^X| + |w^Y\rangle\langle w^Y| + |w^Z\rangle\langle w^Z|$ – “проекционный оператор”, $|f\rangle = X \cdot |w^X\rangle + Y \cdot |w^Y\rangle + Z \cdot |w^Z\rangle$. Выражения вида $|w^X\rangle\langle w^X|$ следует понимать как прямое произведение.

С формальной точки зрения $\hat{A}$ есть просто симметричная матрица размерности $M \times M$. Ее нормированные собственные вектора образуют ортонормированный базис соответствующего M -мерного пространства.

Для дальнейшего полезно проанализировать собственные значения Λ и собственные векторы оператора $\hat{A}$.

Уравнение для собственных значений есть:

$$\begin{aligned} \hat{A}|\varphi\rangle &= \Lambda \cdot |\varphi\rangle \\ \langle w^X \varphi | \cdot |w^X\rangle + \langle w^Y \varphi | \cdot |w^Y\rangle + \langle w^Z \varphi | \cdot |w^Z\rangle &= \Lambda \cdot |\varphi\rangle \end{aligned} \quad (6)$$

Из (6) следует, что при $\Lambda \neq 0$ собственные векторы $\hat{A}$ представляются в виде

$$|\varphi\rangle = \alpha_X \cdot |w^X\rangle + \alpha_Y \cdot |w^Y\rangle + \alpha_Z \cdot |w^Z\rangle \quad (7)$$

а тройка коэффициентов $\alpha_X, \alpha_Y, \alpha_Z$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\begin{aligned} &(W^{XX}\alpha_X + W^{XY}\alpha_Y + W^{XZ}\alpha_Z) \cdot |w^X\rangle \\ &+ (W^{YX}\alpha_X + W^{YY}\alpha_Y + W^{YZ}\alpha_Z) \cdot |w^Y\rangle \\ &+ (W^{ZX}\alpha_X + W^{ZY}\alpha_Y + W^{ZZ}\alpha_Z) \cdot |w^Z\rangle \\ &= \Lambda\alpha_X|w^X\rangle + \Lambda\alpha_Y|w^Y\rangle + \Lambda\alpha_Z|w^Z\rangle \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $W^{XX} \equiv \langle w^X | w^X \rangle$, $W^{XY} \equiv \langle w^X | w^Y \rangle$, $W^{XZ} \equiv \langle w^X | w^Z \rangle \dots$

“Векторы” $|w^X\rangle, |w^Y\rangle, |w^Z\rangle$ линейно независимы, уравнение (8) преобразуется в задачу на собственные значения и собственные векторы для матрицы размерности 3×3 :

$$\begin{pmatrix} W^{XX} & W^{XY} & W^{XZ} \\ W^{YX} & W^{YY} & W^{YZ} \\ W^{ZX} & W^{ZY} & W^{ZZ} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_X \\ \alpha_Y \\ \alpha_Z \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} \alpha_X \\ \alpha_Y \\ \alpha_Z \end{pmatrix} \quad (9)$$

Матрица в уравнении (9) симметричная и невырожденная, она имеет три ненулевых собственные значения $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ (они также являются тремя ненулевыми собственными значениями (6)) и соответствующие им тройки координат собственных векторов $\alpha_X^k, \alpha_Y^k, \alpha_Z^k, k = 1, 2, 3$. Собственные векторы (6), соответствующие $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ находятся с помощью (7):

$$|\varphi_k\rangle = \alpha_X^k \cdot |w^X\rangle + \alpha_Y^k \cdot |w^Y\rangle + \alpha_Z^k \cdot |w^Z\rangle \quad (10)$$

Все остальные собственные значения оператора $\hat{A}$ равны нулю. Далее считается, что полный ортонормированный базис $|\varphi_k\rangle, k = 1, 2, \dots, M$ оператора $\hat{A}$ вычислен. Векторы $|s\rangle$ и $|f\rangle$ могут быть разложены по этому базису. При этом разложение $|f\rangle$ содержит только три слагаемых:

$$|s\rangle = \sum_{k=1}^M \alpha_k |\varphi_k\rangle, |f\rangle = b_1 |\varphi_1\rangle + b_2 |\varphi_2\rangle + b_3 |\varphi_3\rangle \quad (11)$$

После несложных преобразований с помощью (5) получаем:

$$|s\rangle = X \sum_{k=1}^3 \alpha_X^k |\varphi_k\rangle + Y \sum_{k=1}^3 \alpha_Y^k |\varphi_k\rangle + Z \sum_{k=1}^3 \alpha_Z^k |\varphi_k\rangle + \sum_{k=4}^M \alpha_k |\varphi_k\rangle \quad (12)$$

Вычисление всех величин, входящих в (12), кроме коэффициентов $\alpha_k, k \geq 4$, тривиально и быстро выполняется численно. Первые три слагаемые (12) дают спектрограмму, соответствующую заданной тройке XYZ , однако при этом условие (2) может не выполняться. Суть проблемы состоит в вычислении $\alpha_k, k \geq 4$, за счет которых должны быть выполнены ограничения (2).

3. Область допустимых величин XYZ

Прежде чем описать способ вычисления коэффициентов $\alpha_k, k \geq 4$, необходимо проанализировать область допустимых величин XYZ , точнее ее границу, при ограничениях (2), налагаемых на искомую спектрограмму.

Заметим, что допустимая область является выпуклой. Пусть две спектрограммы $|s^1\rangle$ и $|s^2\rangle$ соответствуют допустимым тройкам XYZ_1 и XYZ_2 и удовлетворяют условиям (2). В этом случае все семейство спектрограмм $t \cdot |s^1\rangle + (1-t) \cdot |s^2\rangle, 0 \leq t \leq 1$ также удовлетворяет (2), а соответствующее семейство

троек $t \cdot XYZ_1 + (1 - t) \cdot XYZ_2, 0 \leq t \leq 1$ является допустимым.

Анализировать границу допустимой области удобно используя “естественное” трехмерное Декартово пространство, оси которого соответствуют величинам, образующим тройки XYZ. Сразу заметим, что вся допустимая область представляет собой наклоненную “призму”. Нижнее и верхнее основания призмы есть одинаковые плоские выпуклые многоугольники, параллельные плоскости $Z = 0$, а ее боковая поверхность состоит из фасеток-параллелограммов, см. Рис. 1.

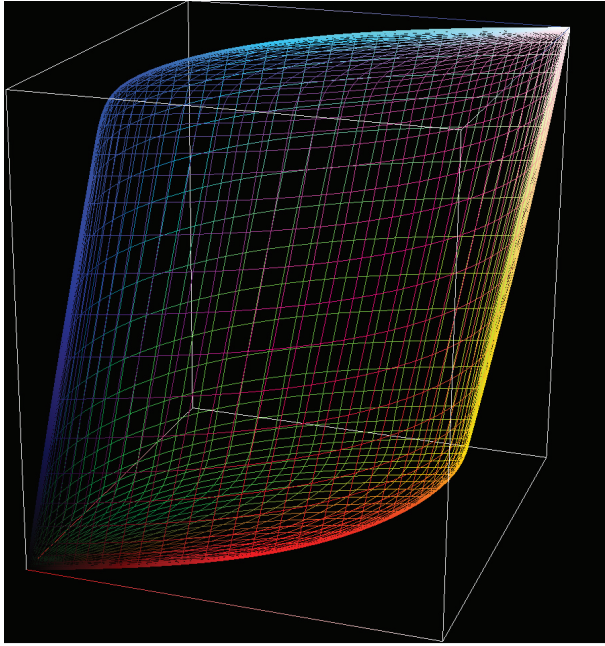


Рис. 1: Граница области допустимых XYZ.

В трехмерном пространстве компоненте спектрограммы s_m соответствует трехмерный вектор $\mathbf{w}_\lambda \equiv \mathbf{w}_m = \{w_m^X, w_m^Y, w_m^Z\}$. Векторы $\mathbf{w}_m$ для пары $\lambda = 730nm$ и $\lambda = 750nm$ параллельны друг другу.

Также параллельны друг другу векторы для тройки $\lambda = 755nm$, $\lambda = 765nm$ и $\lambda = 775nm$. При дальнейшем анализе следует модифицировать множество векторов $\mathbf{w}_m$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_\lambda^* &= \mathbf{w}_\lambda, \lambda \neq 730, 750, 755, 765, 775nm \\ \mathbf{w}_{730}^* &= \mathbf{w}_{730} + \mathbf{w}_{750} \\ \mathbf{w}_{755}^* &= \mathbf{w}_{755} + \mathbf{w}_{765} + \mathbf{w}_{775} \\ \mathbf{w}_{750}^*, \mathbf{w}_{765}^*, \mathbf{w}_{775}^* &\text{отсутствуют} \end{aligned}$$

Модифицированный набор содержит 78 векторов $\mathbf{w}_m^*$, в нем отсутствуют векторы для следующих длин волн: 750, 765 и 775nm. Коэффициенты спектрограмм s_m^* для модифицированного множества векторов удовлетворяют соотношению, аналогичному (2):

$$0 \leq s_m^* \leq 1 \quad (2')$$

Элементарный анализ показывает, что области допустимых значений XYZ для исходного $\mathbf{w}_m$ и модифицированного $\mathbf{w}_m^*$ наборов векторов при выполнении условий (2) и (2') полностью совпадают. С помощью непосредственных вычислений можно убедиться, что среди векторов модифицированного набора $\mathbf{w}_m^*$ нет ни одной пары параллельных векторов.

Векторы $\mathbf{w}_\lambda$ при $\lambda \geq 650nm$ имеют нулевую Z компоненту.

Поэтому допустимые тройки XYZ ($Z = 0$), соответствующие спектрам, содержащим только длины волн $\lambda \geq 650nm$, образуют “основание” всей допустимой области.

Преобразование (1) линейно, а область допустимых троек XYZ ($Z = 0$) является выпуклой, поэтому границей основания будет ломаная линия, состоящая из отрезков прямых линий, образуемых векторами $\mathbf{w}_m^*$ для $\lambda \geq 650nm$.

Нетрудно видеть, что последовательность векторов $\mathbf{w}_m^*$, образующих границу основания, диктуется углами между векторами и осью абсцисс. Ближняя к оси абсцисс часть границы состоит из векторов в порядке возрастания этого угла, дальняя — в порядке убывания. Практически очевидно, что верхнее основание допустимой области, соответствующее

$$Z_{max} = \sum_{k=1}^{81} w_k^Z = \sum_{k=1}^{78} w_k^{*Z}$$

может быть получено простым параллельным переносом нижнего основания на вектор, равный $\sum_m \mathbf{w}_m, \lambda_m \leq 645nm$.

Чтобы проанализировать структуру боковой поверхности допустимой области, выберем два вектора $\mathbf{w}_m^*$ и $\mathbf{w}_k^*$. При этом хотя бы у одного из них должна быть ненулевая Z компонента. Пусть $\mathbf{n}$ есть нормаль к плоскости, образованной $\mathbf{w}_m^*$ и $\mathbf{w}_k^*$. Для определенности выберем направление нормали, для которого $n_Z > 0$. Возможность такого определения нормали для всех пар $\mathbf{w}_m^*$ и $\mathbf{w}_k^*$ легко проверить с помощью непосредственных вычислений. Рассмотрим два семейства спектрограмм $|s^{*1}\rangle$ и $|s^{*2}\rangle$, удовлетворяющих (2'):

$$s_j^{*1} = \begin{cases} 1, (\mathbf{n} \cdot \mathbf{w}_j^*) > 0, j \neq m, k \\ 0, (\mathbf{n} \cdot \mathbf{w}_j^*) < 0, j \neq m, k \end{cases} \quad s_j^{*2} = 1 - s_j^{*1}, j \neq m, k \quad (13)$$

$$0 \leq s_m^{*1}, s_k^{*1} \leq 1 \quad 0 \leq s_m^{*2}, s_k^{*2} \leq 1$$

Компоненты m и k обеих спектрограмм есть произвольные числа на отрезке от 0 до 1.

Спектрограммы (13) в пространстве XYZ соответствуют двум параллельным параллелограммам. Простой анализ показывает, что все допустимые тройки XYZ находятся в плоскостях, проходящих

через эти два параллелограмма, или лежат между этими плоскостями. Таким образом, параллелограммы, соответствующие спектрограммам (13) являются частью боковой поверхности допустимой области.

Можно показать, что вся боковая поверхность состоит из 5454 параллелограммов, соответствующих 2727 возможных пар $\mathbf{w}_m^*$ и $\mathbf{w}_k^*$, у которых хотя бы один из векторов имеет ненулевую Z компоненту.

4. Вычисление спектрограммы

Вначале проверяем, лежит ли “входная” тройка XYZ внутри допустимой области. Если нет, то берём ближайшую к ней точку границы; её спектрограмма уже известна.

Если же XYZ лежит внутри области, начинаем вычисление спектрограммы $|s\rangle$. Алгоритм вычисления использует метод наискорейшего спуска. Стартовав в некоторой точке внутри M -мерного гиперкуба, мы движемся против градиента Δ (4). Движение продолжается до тех пор, пока либо будет найдено удовлетворительное решение, либо траектория не пересечет какую-либо гиперплоскость. Если возникает пересечение, то траектория меняется: далее движение происходит внутри этой гиперплоскости (которая также есть гиперкуб меньшей размерности).

Как правило, такой итерационный процесс позволяет вычислить решение. Однако иногда сходимости нет. В этом случае процесс просто повторяется из другой стартовой точки. Наши численные эксперименты показали, что для большинства комбинаций XYZ 3–5 стартов более чем достаточно. А 100 попыток всегда дают необходимый результат. При вычислениях удобно использовать сумму первых трех слагаемых (12), которая формально дает необходимый минимум (4), но соотношения (2) могут не выполняться:

$$|s^*\rangle = X \cdot \sum_{k=1}^3 \alpha_X^k \cdot |\varphi_k\rangle + Y \cdot \sum_{k=1}^3 \alpha_Y^k \cdot |\varphi_k\rangle + Z \cdot \sum_{k=1}^3 \alpha_Z^k \cdot |\varphi_k\rangle$$

Движение вдоль траектории происходит против направления градиента или его проекции на соответствующее гиперпространство,

$$\frac{\partial(|s\rangle - |s^*\rangle)}{\partial t} = -\hat{\mathbf{A}}(|s\rangle - |s^*\rangle) \quad (14)$$

Разложим (14) по базису $|\varphi\rangle, k = 1, 2, \dots, M$

$$|s\rangle - |s^*\rangle = \sum_m s_m(t) \cdot |\varphi_m\rangle, \quad \frac{\partial c_m}{\partial t} = \Lambda_m c_m \quad (15)$$

В случае гиперпространства с меньшей размерностью (15) приобретает вид:

$$\frac{\partial(|s\rangle - |s^*\rangle)}{\partial t} = -\hat{\mathbf{P}} \cdot \hat{\mathbf{A}}(|s\rangle - |s^*\rangle) \quad (16)$$

где $\hat{\mathbf{P}}$ – соответствующий проекционный оператор. Вектор $\hat{\mathbf{A}}(|s\rangle - |s^*\rangle)$ принадлежит подпространству, порожденному тройкой $|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, |\varphi_3\rangle$, поэтому движение происходит в подпространстве, порожденном проекциями этой тройки: $\hat{\mathbf{P}} \cdot |\varphi_1\rangle, \hat{\mathbf{P}} \cdot |\varphi_2\rangle, \hat{\mathbf{P}} \cdot |\varphi_3\rangle$. Следовательно,

$$|s(t)\rangle = |s(0)\rangle + \sum_{k=1}^3 c_m(t) \cdot \hat{\mathbf{P}} \cdot |\varphi_m\rangle$$

Отсюда получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_m}{\partial t} &= \Lambda_m [\langle s(t) | \varphi_m \rangle - \langle s^* | \varphi_m \rangle] = \\ &= -\Lambda_m [\langle s(0) | \varphi_m \rangle - \langle s^* | \varphi_m \rangle] - \\ &- \Lambda_m \sum_{k=1}^3 c_n(t) \langle \varphi_n | \hat{\mathbf{P}} | \varphi_m \rangle \end{aligned} \quad (17)$$

Уравнения (17) есть система трех обыкновенных линейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} = \mathbf{f} + \hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{c} \quad (18)$$

где трехмерный вектор $\mathbf{f}$ и 3×3 матрица $\hat{\mathbf{B}}$ есть:

$$f_m \equiv -\Lambda_m [|s(0)\rangle - |s^*\rangle], B_{mn} = \langle \varphi_m | \hat{\mathbf{P}} | \varphi_n \rangle.$$

Пусть $\mathbf{c}^* = -\hat{\mathbf{B}}^{-1} \cdot \mathbf{f}$, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ есть собственные значения матрицы $\hat{\mathbf{B}}$, а соответствующие нормированные собственные вектора есть $\mathbf{q}^1, \mathbf{q}^2, \mathbf{q}^3$. Если вектор $\mathbf{c}^*$ не дает искомую спектрограмму с необходимой точностью, тогда спуск продолжается:

$$\frac{\partial [\mathbf{c}(t) - \mathbf{c}^*]}{\partial t} = \hat{\mathbf{B}} \cdot [\mathbf{c}(t) - \mathbf{c}^*]$$

где $\mathbf{c}(t) - \mathbf{c}^* = p_1(t) \cdot \mathbf{q}^1 + p_2(t) \cdot \mathbf{q}^2 + p_3(t) \cdot \mathbf{q}^3$. Далее

$$\sum_{m=1}^3 \frac{\partial p_m}{\partial t} \mathbf{q}^m = \sum_{m=1}^3 p_m \hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{q}^m = \sum_{m=1}^3 p_m \beta_m \mathbf{q}^m, \quad \frac{\partial p_m}{\partial t} = p_m \beta_m$$

В результате получаем:

$$p_m(t) = p_m(0) \exp(\beta_m t), \quad \mathbf{c}(t) = \mathbf{c}^* + \sum_{m=1}^3 p_m(0) \exp(\beta_m t) \mathbf{q}^m$$

Окончательно

$$\begin{aligned} |s(t)\rangle &= |s(0)\rangle + \sum_{m=1}^3 c_m(t) \cdot \hat{\mathbf{P}} \cdot |\varphi_m\rangle = \\ &= |s(0)\rangle + \sum_{m=1}^3 c_m^* \cdot \hat{\mathbf{P}} \cdot |\varphi_m\rangle + \\ &+ \sum_{m,n=1}^3 p_n(0) \cdot \exp(\beta_m t) q_m^n \cdot \hat{\mathbf{P}} |\varphi_m\rangle \end{aligned} \quad (19)$$

Далее численно определяется момент t пересечения траектории (19) с поверхностью гиперкуба, т.е. когда одна из компонент $|s(t)\rangle$ становится равной 0 или 1. Следующая итерация стартует из точки пересечения в пространстве меньшей размерности.

Процесс продолжается до тех пор пока, либо решение не будет найдено, либо решение уравнения

$\mathbf{f} + \hat{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{c} = 0$ перестанет существовать, т.е. когда размерность подпространства станет менее 3. Если решение не получено, то повторяем процедуру с другой начальной точкой, и т.д.

5. Заключение

Описанная процедура вычисления спектрограммы отражения является устойчивой, вычисления с помощью этой процедуры быстры и позволяют достичь высокой точности. Вместе с тем следует отметить один ее недостаток: спектрограммы для близких троек XYZ могут значительно различаться. Это вызвано как неоднозначностью решения, так и случайным выбором стартовой точки. Как правило, этот недостаток не играет большой роли, но в некоторых случаях его нельзя игнорировать. В дальнейшем предполагается изменить алгоритм,

чтобы устранить этот недостаток для большей части допустимой области.

Литература

- [1] http://en.wikipedia.org/wiki/CIE_1931_color_space.
- [2] Жданов Д.Д., Потемин И.С. Построение спектрального представления из RGB данных в задачах спектрального моделирования // Труды 20-ой международной конференции по компьютерной графике и зрению ГРАФИКОН-2010, 20-24 сентября 2010, Санкт-Петербург, Россия, С.144-147
- [3] Brian Smits. An RGB to Spectrum Conversion for Reflectances / University of Utah, January 21, 2000
- [4] Glassner A.S. How to derive a spectrum from an RGB triplet / IEEE Computer Graphics and Applications 9, 4 (July 1989), pp.95–99