

УДК 519.633 533.5

## ОПТИМИЗАЦИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СВОЙСТВ ГИБРИДНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ НА ОСНОВЕ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

А.Е. Бондарев

*Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, г. Москва*

*E-mail bond@keldysh.ru*

### Введение

В данной работе рассматривается применение методов решения обратных задач к оптимизации вычислительных свойств гибридных разностных схем. Применяемый подход [1] основан на многократном решении обратных задач с одновременным построением и визуальным представлением предельных поверхностей для весовых коэффициентов гибридной разностной схемы. Данный подход продемонстрирован на примере конкретной задачи моделирования сверхзвуковых ламинарных и турбулентных течений в дальнем следе.

В работе [1] приведено описание методологического подхода к оптимизации разностных схем, применяющихся для решения конкретных классов задач, с помощью визуального представления параметров, определяющих аппроксимирующие и стабилизирующие свойства гибридных разностных схем. В простейшем случае гибридную схему можно записать как комбинацию  $GS_1 + (1-G)S_2$ , где  $G$  - коэффициент гибридности,  $S_1$  и  $S_2$  - разностные схемы, обладающие различными интересующими исследователя свойствами. Например,  $S_1$  - схема первого порядка точности, а  $S_2$  - второго порядка и т.п. Большинство применяемых для решения практических задач аэрогазодинамики являются гибридными. Классификация различных типов гибридных разностных схем приведена в [2]. Использование гибридных схем позволяет исследователю использовать наилучшие свойства разных схем. Одновременно необходимо иметь достаточно четкое представление о свойствах и ограничениях коэффициентов гибридности (весовых коэффициентов) для того, чтобы используемое свойство соответствовало физической модели рассматриваемой задачи.

### 1. Описание подхода для невязкого случая

Для иллюстрации подхода выбирается гибридная конечно-разностная WW-схема [3]. Эта неявная безусловно устойчивая схема второго порядка по времени и пространству обладает искусственной вязкостью, позволяющей устранять нефизические осцилляции вблизи разрывов путем выбора весового коэффициента  $Sk$ . Решается двумерная задача моделирования участка течения в дальнем следе за телом. В общем случае в прямоугольной расчетной области рассматривается течение вязкого сжимаемого теплопроводного газа, описываемое полной системой нестационарных уравнений Навье-Стокса. На входной границе задаются распределения газодинамических параметров, полученные из расчетов обтекания осесимметричного тела и участка следа за ним. Основной целью являлось изучение свойств искусственной вязкости, заложенных в гибридной разностной схеме. С этой целью исследовались свойства  $Sk$  на примере задачи о течении в дальнем следе и частично определялись существующие для  $Sk$  ограничения. Данная задача была рассмотрена для предельного случая когда

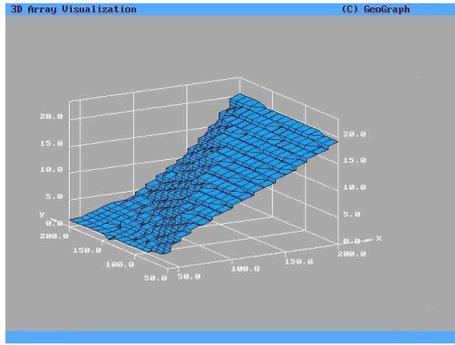


Рис. 1: Исходная поверхность.

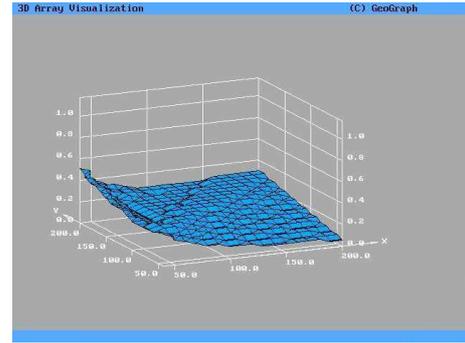


Рис. 2: Преобразованная поверхность.

число Рейнольдса  $Re \rightarrow \infty$ . В этом случае вместо уравнений Навье-Стокса решается система невязких уравнений Эйлера. С целью анализа численного решения введем понятие "решения без осцилляций". Выберем решение, где не возникает нефизических осцилляций, и проанализируем количество локальных экстремумов  $Fe$  в счетной области. Пусть  $F(Sk, Nx, Ny)$  - функционал, характеризующий количество локальных экстремумов в счетной области в зависимости от выбора веса  $Sk$  и равномерного сеточного разбиения по направлениям  $Nx$  и  $Ny$ . Тогда задача формулируется так: для каждого набора сеточного разбиения  $(Nx, Ny)$  определить, при каких значениях  $Sk$  выполняется условие

$$F(Sk, Nx, Ny) = Fe \quad (1)$$

Схема расчета выглядит следующим образом. Для каждого сеточного разбиения  $(Nx, Ny)$  решается прямая задача моделирования течения в дальнем следе с помощью WW-схемы при некотором заданном начальном значении  $Sk$ . В счетной области определяется количество локальных экстремумов  $F(Sk, Nx, Ny)$ . Далее решается классическая обратная задача путем вариации  $Sk$  до выполнения условия (1). Одновременно проводится в режиме online визуальное представление  $Sk$  в виде поверхности  $S^* = Sk(Nx, Ny)$  предельных весовых коэффициентов. При выборе веса  $Sk < S^*$  для каждого варианта  $(Nx, Ny)$  в численном решении возникают нефизические осцилляции.

Пример полученной в результате расчетов поверхности значений предельных весовых коэффициентов  $S^* = Sk(Nx, Ny)$  представлен на Рис. 1. Визуальный анализ полученной в расчетах поверхности предельных весовых коэффициентов позволяет согласно [3] применить к поверхности преобразование  $A = S^* Ny / Nx^2$ . Из вида преобразованной поверхности Рис. 2 следует, что для  $(Nx, Ny)$  при условии  $Nx \approx Ny$  выполняется  $A = const$ .

Следовательно, значения предельного веса  $Sk$ , при котором не возникает нефизических осцилляций, может определяться при  $Nx = 1/h_x$ ,  $Ny = 1/h_y$ , как

$$S^* = h_y const / h_x^2 \quad (2)$$

Наиболее сильные отклонения от полученной зависимости наблюдаются там, где соотношение между размерами вычислительной ячейки наиболее велико.

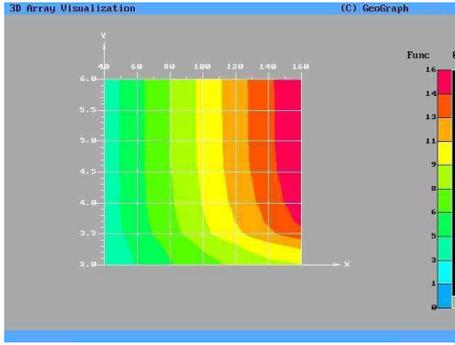


Рис. 3: Исходная поверхность в виде изолиний.

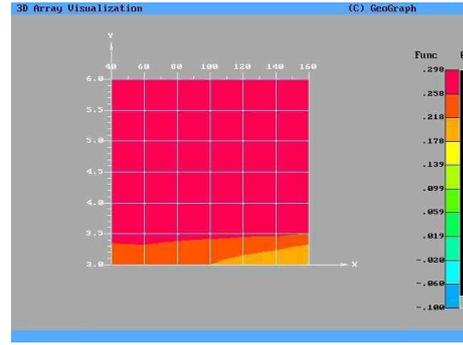


Рис. 4: Преобразованная поверхность в виде изолиний.

## 2. Применение к вязким ламинарным и турбулентным течениям.

Рассматриваемый подход был применен к сверхзвуковым вязким течениям, где число Рейнольдса  $Re$  служит одним из основных определяющих параметров задачи. Учитывая результаты, полученные для невязкого случая, положим  $Nx \approx Ny = N$ . Нас интересует поведение коэффициента  $Sk$  в зависимости от изменения параметров  $N$  и  $Re$ . Тогда, сохраняя введенное в предыдущем разделе понятие "решения без осцилляций" задача формулируется следующим образом: определить при каких значениях  $Sk$  для каждого набора  $(N, Re)$  выполняется

$$F(Sk, N, Re) = Fe \quad (3)$$

Аналогично предыдущему разделу для каждого набора  $(N, Re)$  решается прямая задача моделирования ламинарного вязкого течения в дальнем следе с помощью WW-схемы при некотором заданном начальном значении  $Sk$ . В счетной области определяется значение  $F(Sk, N, Re)$  - количество локальных экстремумов. Решается обратная задача путем вариации  $Sk$  до выполнения условия (3). Одновременно проводится в режиме online визуальное представление  $Sk$  в виде поверхности  $S^* = Sk(N, Re)$ . Полученная в результате расчетов поверхность  $S^*$  представлена на рис. 3 в виде изолиний. Здесь и далее по оси  $Y$  отмечены координаты после преобразования  $Y = \lg Re$ . Аналогично разделу 1 применяется преобразование данных  $A = S^*/N$ . Вид поверхности после применения преобразования представлен на рис. 4 в виде изолиний. Данные на рис. 4 свидетельствуют о том, что для каждого набора значений  $(N, Re)$  при условии  $\lg Re < 3.5$  выполняется соотношение  $A = const$ . Следовательно, значения предельного веса  $Sk$ , при котором не возникает нефизических осцилляций, может определяться как  $S^* = N * const$  или  $S^* = const/h$  с учетом  $N = 1/h$ .

Построение предельной поверхности весовых коэффициентов для турбулентного течения на участке дальнего следа за телом проводится полностью аналогично ламинарному случаю. Для моделирования турбулентного течения применяется полуэмпирическая модель [4], хорошо зарекомендовавшая себя в практических приложениях к подобным течениям.

Общая схема расчетов аналогична представленной выше для ламинарных вязких течений. В результате расчетов получаем поверхность  $S^* = Sk(N, Re)$  предельных весовых коэффициентов для турбулентного случая, изображенную в виде изолиний

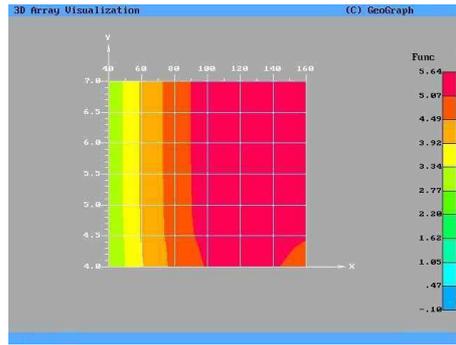


Рис. 5: Преобразованная поверхность для турбулентного случая.

на рис. 5. Рис. 5 показывает, что для турбулентного случая значение  $S^*$  практически не зависит от числа  $Re$ , что согласуется с известными экспериментальными данными. Аналогично предыдущему разделу применяется преобразование данных, представленных на рис. 5. Это преобразование выглядит как  $A = S^*/N^2$ . Аналогично предыдущему разделу значения предельного веса  $Sk$ , при котором не возникает нефизических осцилляций, может определяться как  $S^* = const/h^2$ .

### Заключение

Задача оптимизации и управления вычислительными свойствами гибридных конечно-разностных схем является как весьма актуальной и интересной с практической точки зрения, так и достаточно трудоемкой. Появление возможности параллельных расчетов позволяют теперь проводить анализ вычислительных свойств конечно-разностных схем с применением подобного подхода. Здесь можно выделить два основных направления применения подобного подхода.

1. Контроль, оптимизация и управление вычислительными свойствами применяемых конечно-разностных схем в зависимости от выбранных групп геометрических и физических параметров задачи.

2. Построение взаимозависимостей определяющих параметров задачи и их визуальное представление. С помощью вышеизложенного способа можно быстро и эффективно анализировать свойства гибридных разностных схем, что важно для верификации результатов математического моделирования.

### Список литературы

1. **Бондарев А.Е.** Оптимизация гибридной разностной схемы с учетом влияния вязкости и турбулентности на основе решения обратных задач // Сборник трудов конференции "Высокопроизводительные вычисления в задачах механики и физики". М.: Изд.ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. – 2009. – С.39-44.
2. **Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.** Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит. – 2001. – 608 с.
3. **Бондарев А.Е.** Применение методов визуализации для оптимизации конечно-разностных схем // Научная визуализация в прикладных задачах: Сб. науч. тр. М.: Изд.МГУ. – 2003. – С.34-39.

4. **Бондарев Е.Н., Лисичко И.Д.** Распространение недорасширенной турбулентной струи в спутном сверхзвуковом потоке // Механика жидкости и газа – №4, 1974. – С.36-41.