РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ имени М.В. Келдыша

Волобой А.Г., Ершов С.В., Поздняков С.Г.

Визуализация результатов моделирования

освещения в тонком красящем слое

Москва 2010

Волобой А.Г., Ершов С.В., Поздняков С.Г.

Визуализация результатов моделирования освещения в тонком красящем слое

Аннотация

Данная работа заканчивает цикл работ, описывающих моделирование взаимодействия освещения с тонким красящим слоем. Задача была поставлена для генерации изображений слоя чернил, исходя из внутренней структуры слоя и формы красящих частиц. В отличие от обычных красок слой чернил характеризуется высокими объемными концентрациями частиц. Лучевой подход или лучевое уравнение переноса практически не применимы для решения этой задачи. Поэтому был выбран путь непосредственного решения волновых уравнений, естественно, при некоторых ограничениях и упрощениях. В данной работе описан расчет итогового изображения чернил на белой бумаге и приведены результаты всего проекта.

Voloboy A.G., Ershov S.V., Pozdnyakov S.G.

Rendering of results of lighting simulation in ink or paint layer Abstract

This article is continuation of the description of lighting simulation inside of ink started in previous works [3, 4]. The problem arose in the task of rendering of ink basing on information about shape of ink pigments and layer structure. High pigment volume concentration characterizes ink layer structure. Ray tracing or LTE are hardly applicable here. Therefore it was decided to solve it as a diffraction problem basing on wave optics methods. The final rendering of ink layer on white paper and results of whole project are described in the article.

Работа была поддержана РФФИ, грант 08-01-00649, а также компанией INTEGRA Inc. (Япония).

Содержание

Содержание	3
1. Введение	4
2. ДФО красящего слоя, расположенного на Ламбертовской подложке	5
3. Результаты моделирования.	10
3.1. Физические свойства слоя и подложки	10
3.2. Визуализация результатов моделирования	13
3.3. Анализ результатов моделирования.	17
4. Заключение.	20
Список литературы.	21

1. Введение.

В последние годы в литературе по компьютерной графике опубликовано большое количество работ по моделированию различных красящих субстанций [1, 2]. Подавляющее число таких работ базируется или на методах геометрической оптики, или использует компромиссное приближение известное как лучевое уравнение переноса. Однако в случае, когда расстояние между неоднородностями или их характерный размер меньше или порядка длины волны, эти методы вряд ли применимы.

Постановка задачи моделирования чернил, т.е. красящей среды с высокой концентрацией частиц, и их визуализации была подробно описана в [3]. В работе рассматривается красящий слой, состощий из малых частиц пигмента с размерами ~ 100÷500 нанометров при объемной концентрации пигмента, доходящей до 50%. Малые размеры частиц, высокая концентрация и малая толщина слоя (~ 1 микрона) не позволяют пременять уравнение переноса. Поэтому был выбран путь непосредственного решения волнового уравнения в скалярном приближении – уравнения Гельмгольца.

Моделирование чернил свелось к решению трех задач:

- Решение задачи дифракции на тонком периодическом красящем слое с явным распределением коэффициента преломления конечноразностными методами.
- Генерация геометрии фрагмента красящего слоя, состоящего из частиц заданных форм и размеров и вычисление распределения коэффициента преломления на используемой пространственной сетке.
- 3. Вычисление ДФО красящего слоя, расположенного на Ламбертовской подложке исходя из результатов решения задачи дифракции.

Предложение и реализованное решение для генерации геометрии красящего слоя было описано в [3]. Генерация геометрии для небольших концентраций пигментных зерен достаточно проста. Она может быть осуществлена последовательным случайным разбрасыванием центров и

ориентаций частиц по объему фрагмента слоя. При высоких концентрациях (когда объемная концентрация достигает 30 и более процентов) случайное разбрасывание не дает необходимого результата и следует применять более сложную процедуру подобную методу молекулярной динамики.

В последующей публикации [4] подробно описаны методы решения самой дифракционной задачи. Было предложено решать ее с помощью Борновского разложения. Однако Борновский ряд сходится не всегда. Существуют способы несколько улучшить ситуацию с его сходимостью или совсем без потери точности или с минимальными погрешностями, но они не решают проблему кардинально. Поэтому был разработан оригинальный метод решения с помощью счета на установление, также описанный в работе [4]. В конце работы показано, как получить угловое распределение рассеянного излучения в этой задаче.

Данная работа завершает этот цикл публикаций, описывающих одну большую разработку, реализованную для моделирования внешнего вида чернил на белой бумаге. В данной работе будет описан подход для получения двунаправленной функции отражения (ДФО) чернильного слоя, нанесенного на бумагу, и представлены результаты всей работы.

2. ДФО красящего слоя, расположенного на Ламбертовской подложке.

В настоящей работе рассматривался тонкий красящий слой (чернила для лазерного принтера), нанесенный на специальную бумагу. Анализ рассеивающих свойств бумаги показал, что с достаточной точностью бумагу можно моделировать как плоскую поверхность, обладающую Ламбертовским отражением с интегральным коэффициентом отражения, близким к 1.

ДФО поверхности с Ламбертовским отражением не зависит от углов и равен одному и тому же коэффициенту отражения *r*. Согласно определению ДФО это означает, что мощность, отраженная элементом такой поверхности *dS*

в элемент телесного угла $d\omega = \sin \theta d\theta d\phi$ при единичном потоке падающей мощности, равна:

$$dE = \pi^{-1} r \cos\theta d\phi \sin\theta d\theta dS \tag{1}$$

где σ – угол падения, θ – полярный угол, а φ – азимут направления наблюдения (угол φ отсчитывается между проекциями на плоскость поверхности направлений падения и наблюдения).

Вычислим ДФО красящего слоя, расположеенного на такой Ламбертовской подложке. В нашем подходе и красящий слой и подложка рассматриваются как поверхности, однозначно характеризующиеся их BDF (суммарной двунаправленной функцией отражения и преломления). Такое рассмотрение является точным для статистически однородного слоя конечной толщины, и предполагает, что отражение от подложки полностью некогерентно.



Рис. 1. Красящий слой, расположенный на диффузной подложке (бумаге) и переотражения света между слоем и подложкой. Для наглядности расстояние между слоем и подложкой сильно преувеличено. Первичное освещение показано жирной стрелкой.

Рассмотрим распределение излучения в области между слоем и подложкой. Обозначим угловое распределение света, падающего на поверхность подложки как *I_s*. Падающий свет "состоит" из двух компонент:

1. первичное освещение, прошедшее через красящий слой

2. свет, отраженный подложкой, а затем отраженный красящим слоем назад в сторону подложки.

Отметим, что возможны переотражения между подложкой и красящим слоем любой кратности. Вычислим эти две компоненты для параллельного первичного освещения при угле падения σ . Ниже ДФО и ДФП (отражение и пропускание, соответственно) красящего слоя обозначены как $R(\sigma, \theta, \varphi)$ и $T(\sigma, \theta, \varphi)$. Площади слоя и подложки считаются равными 1 и в дальнейших выражениях опущены.

По определению мощность, отраженная Ламбертовской подложкой при освещении с угловым распределением *I_s*, равна:

$$G_s(\vartheta, \varphi) = r \frac{\cos \vartheta}{\pi} E_s \tag{2}$$

где

$$E_s \equiv \iint I_s(\vartheta, \varphi) d\varphi \sin \vartheta d\vartheta$$

есть полная мощность, падающая на поверхность подложки.

Эта мощность, как уже было сказано выше, есть сумма мощностей первичного света, прошедшего через слой, и света, пришедшего к слою от подложки и отраженного слоем назад в направлении подложки. В соответствии с определением ДФП полная мощность, прошедшая через, слой равна:

$$E_{\rm tr} = \frac{1}{\pi} \iint T(\sigma, \vartheta, \varphi) \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$$

Мощность света, отраженного слоем в направлении подложки, дается следующим выражением:

$$E_{\text{refl}} = \frac{1}{\pi} \int \left(\iint R(\overline{\sigma}, \vartheta, \varphi) \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \right) \iint G_s(\overline{\sigma}, \varphi) d\varphi \right) \sin \overline{\sigma} d\overline{\sigma}$$

Далее введем величины интегральных пропускания и отражения красящего слоя для угла падения σ

$$\overline{T}(\sigma) = \frac{1}{\pi} \iint T(\sigma, \vartheta, \varphi) d\varphi \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta$$
$$\overline{R}(\sigma) = \frac{1}{\pi} \iint R(\sigma, \vartheta, \varphi) d\varphi \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta$$

С их помощью величины E_{refl} и E_{tr} можно выразить следующим образом:

$$E_{\text{refl}} = 2E_s r \int \overline{R}(\overline{\sigma}) \cos \overline{\sigma} \sin \overline{\sigma} d\overline{\sigma}$$
$$E_{\text{tr}} = \overline{T}(\sigma)$$

Их сумма есть полная мощность света, падающего на подложку - E_s

$$E_s = 2E_s r \int \overline{R}(\overline{\sigma}) \cos \overline{\sigma} \sin \overline{\sigma} d\overline{\sigma} + \overline{T}(\sigma)$$

Отсюда получаем

$$E_s = \frac{\overline{T}(\sigma)}{1 - 2r \int \overline{R}(\overline{\sigma}) \cos \overline{\sigma} \sin \overline{\sigma} d\overline{\sigma}}$$

Для углового распределения мощности света, отраженного подложкой и прошедшего через слой назад, находим:

$$dE = \frac{\cos \vartheta}{\pi} \iint T(\vartheta', \vartheta, \varphi - \varphi') G_s(\vartheta', \varphi') \sin \vartheta' d\vartheta' d\varphi'$$
$$= \frac{rE_s \cos \vartheta}{\pi} \frac{1}{\pi} \iint T(\vartheta', \vartheta, \varphi - \varphi') \cos \vartheta' \sin \vartheta' d\vartheta' d\varphi'$$

Благодаря Гельмгольцевской обратимости:

$$T(\sigma, \vartheta, \phi) = T(\vartheta, \sigma, -\phi)$$

выражение для этого углового распределения принимает вид:

$$dE = rE_s \frac{\cos \vartheta}{\pi} \overline{T}(\vartheta) = r \frac{\cos \vartheta}{\pi} \frac{\overline{T}(\vartheta)\overline{T}(\sigma)}{1 - 2r \int \overline{R}(\sigma') \cos \sigma' \sin \sigma' d\sigma'}$$
(3)

Добавляя к (3) собственное отражение красящего слоя

$$dE = \pi^{-1} R(\sigma, \theta, \varphi) \cos\theta d\varphi \sin\theta d\theta$$

окончательно находим угловое распределение мощности света, отраженного системой "слой+подложка":

$$dE = \frac{\cos \vartheta}{\pi} \left(R(\sigma, \vartheta, \varphi) + \frac{r\overline{T}(\vartheta)\overline{T}(\sigma)}{1 - 2r\int \overline{R}(\sigma')\cos\sigma'\sin\sigma'd\sigma'} \right)$$
(4)

Сравнивая это выражение с определением ДФО, получаем что ДФО красящего слоя на подложке равно:

$$R_{\text{слой}+nodnowcka}(\sigma, \vartheta, \varphi) = R(\sigma, \vartheta, \varphi) + \frac{r\overline{T}(\vartheta)\overline{T}(\sigma)}{1 - 2r\int \overline{R}(\sigma')\cos\sigma'\sin\sigma'd\sigma'}$$

Функции $\overline{T}(\sigma)$, $\overline{R}(\sigma)$, описывающие полную рассеянную мощность для угла падения σ , могут быть вычислены интегрированием BDF красящего слоя по всем направлениям рассеяния. Для BDF, полученных в результате решения дифракционной задачи, эти функции имеют простой вид и вычисляются элементарно:

$$\overline{R}(\sigma) = \sum_{\substack{m,n \neq 0; \text{ Im } k_z = 0}} k_z |\alpha_{m,n}|^2$$

$$\overline{T}(\sigma) = \sum_{\substack{m,n \neq 0; \text{ Im } k_z = 0}} k_z |\beta_{m,n}|^2$$
(5)

Здесь α и β есть амплитуды Фурье-гармоник поля на верхней и нижней поверхностях красящего слоя:

$$u\Big|_{z=0} = \sum_{m,n} \alpha_{m,n} e^{ik_x x + ik_y y}$$
$$u\Big|_{z=H} = \sum_{m,n} \beta_{m,n} e^{ik_x x + ik_y y}$$
(6)

где

$$k_x = \frac{2\pi m + q}{L}, \quad k_y = \frac{2\pi n}{L}, \quad k_z = \sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2} \tag{7}$$

 $k_0 = 2\pi/\lambda$ есть волновое число в вакууме

$$q = k_0 L \sin \sigma$$
.

В суммах (6.5) исключены гармоники, соответствующие затухающим волнам (для которых k_z комплексно), и гармоника, соответствующая падающей волне (m = n = 0).

3. Результаты моделирования.

3.1. Физические свойства слоя и подложки.

В данной работе при описании свойст красящего слоя и подложки бли использованы следующие входные данные:

• Оптические свойства подложки (бумага): идеальная белая Ламбертовская поверхность с интегральным коэффициентом диффузного отражения 0.9.

Коэффициент преломления связующего вещества слоя η=1.558.
 Связующее вещество является прозрачным, дисперсия коэффициента преломления мала.

Пигменты. В расчетах были использованы три реальных пигмента Red, Yellow, Blue, а также искусственный пигмент Green.

 Действительная часть коэффициента преломления всех пигментов Re(η) = 1.4.

Мнимая часть коэффициента преломления пигментов Im(η) представлена на Рис. 2.



Рис. 2. Спектрограммы мнимых частей коэффициентов преломления использованных пигментов.

В расчетах были использованы различные объемные концентрации пигментов, а также смеси Yellow и Blue при полной концентрации 15%, 30% и 50%. Пигмент Green был "сконструирован" как молекулярная смесь пигментов Blue и Yellow, чтобы определить разницу результатов для смеси частиц, состоящих из разных пигментов, от результатов для частиц, состоящих из смеси пигментов.

В работе было исследовано влияние многочисленных параметров на визуальное отображение красящего слоя. К ним относятся:

- о Объемная концентрация частиц пигмента
- о Размер частиц
- Форма частиц
- о Ориентация частиц
- Агглютинация

• Шероховатость передней поверхности красящего слоя.

Параметры изменялись в достаточно широких пределах – были промоделированы около 260 выриантов различных комбинаций параметров.

Формы и размеры частиц. Были использованы шарообразные и цилиндрические зерна пигментов. Диаметр шарообразных зерен изменялся от бескочно (молеклярная смесь) 450 малой величины ДО nm. Длина цилиндрических частиц была равна 6 радиусам цилиндров. Размер цилиндрических частиц определялся с помощью "эффективного диаметра", т.е. диаметра равновеликого шара. Были использованы цилиндры со следующими значениями эффективного диаметра: 100nm, 200nm и 300 nm.

Ориентация частиц. Для цилиндрических частиц были использованы три типа ориентации: хаотическая, в плоскости слоя и перпендикулярно плоскости слоя. Расположение частиц в слое при этих ориентациях показаны на рис. 3.



Рис. 3. Ориентации цилиндрических частиц: хаотическая, преимущественно вдоль слоя, преимущественно поперек слоя.

Агглютинация. Для шарообразных частиц диаметром 100 nm была смоделирована агглютинация: неоднородное пространственное распределение частиц (частицы пигмента образуют кластеры), вызванное их взаимным притяжением. Соответствующее пространственное распределение частиц представлено на рис. 4.



Рис. 4. Структура красящего слоя с агглютинацией и без агглютинации. Горизонтальное сечение слоя, состоящего из шарообразных частиц диаметром 100nm. Объемные концентрации пигментов: 7.5% Blue + 7.5% Yellow.

Шероховатость передней поверхности Для красящего слоя. 300nm был шарообразных частиц диаметром промоделирован эффект шероховатости (частицы могут "выступать" за плоскую переднюю поверхность слоя). Рис. 5 иллюстрирует этот эффект. Заметим, что все частицы имеют один и тот же диаметр, различие в диаметрах их сечений связано с различным удалением центров частиц от плоскости избражения.



Рис. 5. Микрошероховатость передней поверхности красящего слоя. На левом рисунке нет шероховатости, на правом она присутствует. Вертикальное поперечное сечение красящего слоя с частицами диаметром 300 nm. Связующее вещество показано серым цветом, воздух – белым, частицы – зеленым.

3.2. Визуализация результатов моделирования.

В работе было проведено моделирование около 260 вариантов различных комбинаций параметров слоя. Цветные изображения для части таких вариантов приведены в таблицах (см. ниже).

Каждое изображение в таблицах состоит из двух частей (Рис. 6). Левая вертикальная полоса изображает красящий слой на бумаге при естественном освещении. Вертикальная координата задает угол наблюдения, меняющийся от 0° (верх) до 60° (низ). Квадратное изображение справа представляет диффузную BRDF при освещении параллельным светом под заданным углом. Вертикальная координата есть такой же угол наблюдения, горизонтальная координата задает угол освещения, изменяющийся от 0° до 60° слева направо. Для лучшего сравнения яркость всех изображений одинаковаг и выбрана так, чтобы чисто Ламбертовская поверхность (с интегральным коэффициентом диффузного отражения, равным 1) давала цвет (255,255,255) в цветовом пространстве RGB.



Рис. 6. Визуальное представление результатов моделирования. Левая часть (прямоугольник) представляет красящий слой при естественном освещении, правая часть(квадрат) представляет слой при освещении параллельным светом.

Результаты моделирования были объединены в таблицу, показывающую влияние размеров частиц (рис. 7). Изображения содержат визуальное представление BRDF красящего слоя на бумаге (белая Ламбертовская поверхность с коэффициентом диффузного отражения 0.9).



Рис. 7. Результаты моделирования.

Каждая строка таблицы содержит результаты моделирования для одного и того же пигмента (смеси пигментов) и объемной концентрации. В самой левой колонке таблицы приведен состав пигментов красящего слоя и их объемные концентрации. Пигменты обозначены первыми буквами их названий. Каждая колонка частицы соответствует определенному размеру частиц и их ориентации. В колонке "бесконечно малые частицы" (infinitesimal particles) приведены результаты для однородного слоя (молекулярная смесь связующего вещества и пигментов) при соответствующих объемных концентрациях.

Влияние агглютинации представлено на рис. 8. Визуальное представление BRDF красящего слоя на бумаге (белая Ламбертовская поверхность с коэффициентом диффузного отражения 0.9).



Рис. 8. Результаты моделирования. Влияние агглютинации.

Каждая строка таблицы (рис. 8.) содержит результаты моделирования для одного и того же пигмента (смеси пигментов) и объемной концентрации. В самой левой колонке таблицы приведен состав пигментов красящего слоя и их

объемные концентрации. Пигменты обозначены первыми буквами их названий. Каждая колонка частицы соответствует определенному размеру частиц.

3.3. Анализ результатов моделирования.

Таблица на рис. 7 дает общее представление о влиянии размеров частиц. Нетрудно видеть, что цвет красящего слоя становится более насыщенным при росте концентрации пигмента (что вполне естественно) и при уменьшении поведение размеров частиц (такое цвета трудно предположить без моделирования). Кроме этого, влияние размеров сильнее при малых ослабевает концентрациях пигмента И С ростом концентрации. Для шарообразных и цилиндрических частиц роль размера практически одна и та же.

Такая роль размеров частиц может быть объяснена с помощью анализа спектрограмм пропускания красящего слоя, которые представлены на рис. 9.1-9.4 для случая шарообразных частиц.



Рис. 9.1. Спектрограммы пропускания красящего слоя для зеленого пигмента в зависимости от размера частиц и объемной концентрации (освещение по нормали к поверхности слоя).



Рис. 9.2. Спектрограммы пропускания красящего слоя для синего пигмента в зависимости от размера частиц и объемной концентрации (освещение по нормали к поверхности слоя).



Рис. 9.3. Спектрограммы пропускания красящего слоя для желтого пигмента в зависимости от размера частиц и объемной концентрации.



Рис. 9.4. Спектрограммы пропускания красящего слоя для красного пигмента в зависимости от размера частиц и объемной концентрации.

На рис. 9.1-9.4 представлены результаты расчетов для бесконечно малых частиц (молекулярная смесь) и шаров диаметром 300nm. Нетрудно видеть, что для концентрации 15% пропускание красящего слоя для частиц конечного размера значительно отличается от пропускания молекулярной смеси. Причина такого эффекта заключается в сильных флуктуациях коэффициента преломления в объеме красящего слоя, особенно важны флуктуации мнимой части коэффициента преломления, определяющей поглощение в слое.

При невысоких концентрациях пигмента и достаточно крупных частицах в объеме слоя возникают участки, поглощение в которых ослаблено за счет флуктуаций. За счет этих участков слой пропускает заметно больше света в тех частях видимого спектра, которые хорошо поглощаются при более однородной структуре слоя. Естественно, что размеры областей с уменьшенным поглощением уменьшаются с ростом концентрации или при уменьшении размеров пигментных зерен (за счет их более однородного пространственного распределения).

Анализ результатов, приведенных на рис. 8, подтверждает данное утверждение. Нетрудно видеть, что насыщенность цвета при агглютинации соответствует насыщенности цвета для частиц большего размера, что вполне естественно, поскольку образование кластеров увеличивает эффективный размер пигментных зерен.

К такому же выводу можно прийти, анализируя изображения для смеси шарообразных частиц пигментов Blue и Yellow при равных концентрациях в 7.5% и аналогичным результатом для пигмента Green при концентрации 15%. Для более крупных частиц с диаметрами 300nm и 500nm различие в цветах заметно, хотя и невелико. При уменьшении диаметра пигментных зерен это различие пропадает.

При моделировании мы также оценили роль возможной шероховатости поверхности красящего слоя. Результаты моделирования показали, что эта роль очень мала. Наличие микрорельефа несколько изменяет цвет слоя, но

изменение столь мало, что в рамках точности моделирования сделать какойлибо вывод не представляется возможным.

4. Заключение.

В данной и предыдущих [3, 4] работах был описан оригинальный подхода к моделированию взаимодействия освещения с тонким красящим слоем. Задача была поставлена для генерации изображений слоя чернил, исходя из внутренней структуры слоя и формы красящих частиц. В результате проекта был разработан программный комплекс, состоящий из генератора явной геометрии чернил, решения дифракционной задачи в скалярном приближении постпроцессора, вычисляющего И результирующее взаимодействие красящего слоя с бумагой. Поскольку реальная геометрия чернил неизвестна, а мы обладаем скорее статистическими данными о ней, то итоговый результат вычисляется усреднением нескольких выходных данных решения дифракционной задачи для набора явных геометрий, полученных из исходных статистических данных. Большее количество просчитанных явных геометрий увеличивает точность результата программного комплекса.

Программный продукт, построенный на описанных алгоритмах, используется производителем комплексов печати фотографий и цветных принтеров. С помощью программного моделирования возможно отследить тенденции изменения итогового цвета в зависимости от использования частиц различной формы и при различных концентрациях, влияния выравнивания частиц в процессе высыхания и т.д. Это существенно снижает затраты при разработке нового вида чернил.

Электронная версия статьи с цветными иллюстрациями размещена по aдpecy http://www.keldysh.ru/pages/cgraph/publications/cgd_publ.htm.

Список литературы.

[1] Ershov, S., Kolchin, K., Myszkowski, K., Rendering pearlescent appearance based on paint-composition modeling. Computer Graphics Forum, Vol. 20, No 3, 2001, pp. 227-238.

[2] Durikovic, R., Kolchin, K., Ershov, S., Rendering of Japanese artcraft. In Proceeding of the EUROGRAPHICS, short presentations, 2002, pp. 131-138.

[3] А.Г. Волобой, С.В. Ершов, Э.С. Клышинский, С.Г. Поздняков, Об одном подходе к моделированию взаимодействия освещения с тонким красящим слоем. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН № 92, 2008.

[4] А.Г. Волобой, С.В. Ершов, С.Г. Поздняков, Решение дифракционной задачи для моделирования освещения тонкого красящего слоя. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН № 75, 2009.

[5] Рытов, С.М., Кравцов, Ю.А., Татарский, В.И., Введение в статистическую радиофизику. Ч.2. Случайные поля — М.:Наука, 1978

[6] Kuz'min, V.L., Meglinskii, I.V., Numerical Simulation of Coherent Effects under Conditions of Multiple Scattering. Optics and Spectroscopy, Vol. 97, No. 1, 2004, pp. 100-106.

[7] Yee, K.S.: "Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media." IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. 14, No. 3, 1966, pp. 302-307.

[8] Исимару И., Распространение и рассеяние волн в случайнонеоднородных средах. М.: Мир, 1981.