

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ВИЗУАЛИЗАЦИИ ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ ГИБРИДНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ ВЯЗКОСТИ И ТУРБУЛЕНТНОСТИ

**Бондарев А.Е.**

*Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, г. Москва*

e-mail: [bond@keldysh.ru](mailto:bond@keldysh.ru)

## 1. Введение

Данная работа развивает представленные в [1,2] подходы к применению методов научной визуализации для решения нестационарных вычислительных задач математической физики и оптимизации численных методов, применяемых для их решения.

На современном этапе особое значение приобретают алгоритмы решения обратных задач аэрогазодинамики, имеющих своей целью оптимизацию конструктивных параметров при рассмотрении задач обтекания летательных аппаратов или оптимизацию процессов в рабочих камерах и соплах двигательных установок. Эти задачи предъявляют совершенно новые требования к графическому представлению результатов расчетов, и в целом к роли визуализации в задачах вычислительной аэродинамики. На этом этапе средства и методы визуального представления могут быть успешно применены не только к решению задач математического моделирования, но и к совершенствованию и оптимизации вычислительных методов, применяемых для их решения.

В работах [1,2] содержатся описания методологических подходов к оптимизации разностных схем, применяющихся для решения конкретных классов задач, с помощью визуального представления параметров, определяющих аппроксимирующие и стабилизирующие свойства гибридных разностных схем. В простейшем случае гибридную схему можно записать как комбинацию  $GS1 + (1-G)S2$ , где  $G$  – коэффициент гибридности,  $S1$  и  $S2$  – разностные схемы, обладающие различными интересующими исследователя свойствами. Например,  $S1$  – схема первого порядка точности, а  $S2$  – второго порядка и т.п. Большинство применяемых для решения практических задач аэрогазодинамики являются гибридными. Подробное описание и классификация различных типов гибридных разностных схем приведены в [3]. Использование гибридных схем позволяет исследователю использовать наилучшие свойства разных схем. Одновременно необходимо иметь достаточно четкое представление о свойствах и ограничениях коэффициентов гибридности (весовых коэффициентов) для того, чтобы используемое свойство соответствовало физической модели рассматриваемой задачи.

## 2. Описание методологического подхода для невязкого случая

Основные результаты, изложенные в данном разделе, получены и подробно описаны в [1,2]. Для разработки и демонстрации методологического подхода выбирается гибридная конечно-разностная  $WW$ -схема. Эта неявная безусловно устойчивая схема второго порядка по времени и пространству обладает искусственной вязкостью, позволяющей устранить нефизические осцилляции вблизи разрывов путем выбора весового коэффициента  $s_k$ . Решается задача математического моделирования течения в дальнем следе за телом. В общем случае в прямоугольной расчетной области рассматривается течение вязкого сжимаемого теплопроводного газа, описываемое полной системой нестационарных уравнений Навье-Стокса. На входной границе задаются распределения газодинамических параметров, полученные из расчетов обтекания осесимметричного тела и участка следа за ним. Основной целью было тщательное изучение свойств искусственной вязкости, заложенных в гибридной разностной схеме. С этой целью исследовались свойства  $s_k$  на примере задачи о течении в дальнем следе и определялись существующие для  $s_k$  ограничения.

В данном разделе рассматривается случай, когда число Рейнольдса  $Re_\infty \rightarrow \infty$ , и вме-

сто уравнений Навье-Стокса решается система невязких уравнений Эйлера.

С целью анализа численного решения введем понятие «решения без осцилляций». Выберем решение, где не возникает нефизических осцилляций, и проанализируем количество локальных экстремумов в счетной области, обозначив это количество как  $\Phi_j$ . Пусть

$\Phi(s_k, N_x, N_y)$  - функционал, характеризующий количество локальных экстремумов в счетной области в зависимости от выбора веса  $s_k$  и сеточного разбиения (при условии равномерного разбиения) по соответствующим направлениям  $N_x$  и  $N_y$ . Тогда задача формулируется так: определить при каких значениях  $s_k$  для каждого набора  $(N_x, N_y)$  сеточного разбиения выполняется

$$\Phi(s_k, N_x, N_y) = \Phi, \quad (2.1)$$

Схема расчета выглядит следующим образом. При  $Re_\infty \rightarrow \infty$  для каждого сеточного разбиения  $(N_x, N_y)$  решается прямая задача моделирования течения в дальнем следе с помощью WW- схемы при некотором заданном начальном значении  $s_k$ . В счетной области определяется значение  $\Phi(s_k, N_x, N_y)$  - количество локальных экстремумов. Далее решается классическая обратная задача путем вариации  $s_k$  до выполнения условия (2.1). Одновременно проводится в режиме online визуальное представление  $s_k$  в виде поверхности  $s_k^* = s_k(N_x, N_y)$  предельных весовых коэффициентов. При выборе веса  $s_k < s_k^*$  для каждого  $(N_x, N_y)$  в численном решении возникают нефизические осцилляции, которые могут приводить к развалу решения.

Пример полученной в результате расчетов поверхности значений предельных весовых коэффициентов  $s_k^* = s_k(N_x, N_y)$  представлен на рис.1. Визуальный анализ полученной в результате расчетов поверхности предельных весовых коэффициентов позволяет согласно [1,2] применить к поверхности преобразование  $F = s_k^* N_y / N_x^2$ . Вид поверхности после применения преобразования представлен на рис.2 в виде преобразованной предельной поверхности. Из вида преобразованной поверхности следует, что для  $(N_x, N_y)$  при условии  $N_x \approx N_y$  выполняется  $F = const$ . Следовательно, значения предельного веса  $s_k$ , при котором не возникает нефизических осцилляций, может определяться как  $s_k^* = h_y const / h_x^2$ , учитывая, что  $N_x = 1/h_x$ ,  $N_y = 1/h_y$ .

### 3. Применение к ламинарным сверхзвуковым вязким течениям

Рассматриваемый подход и результаты предыдущего раздела применяются к ламинарным сверхзвуковым вязким течениям, где число  $Re_\infty$  служит одним из основных определяющих параметров задачи. Учитывая результаты, полученные для невязкого случая, положим  $N_x \approx N_y = N$ . Нас интересует поведение коэффициента  $s_k$  в зависимости от изменения параметров  $N$  и  $Re_\infty$ . Тогда, сохраняя введенное в предыдущем разделе понятие «решения без осцилляций», задача формулируется как определение при каких значениях  $s_k$  для каждого набора  $(N, Re_\infty)$  сеточного разбиения выполняется

$$\Phi(s_k, N, Re_\infty) = \Phi, \quad (3.1)$$

Аналогично предыдущему разделу для каждого набора  $(N, Re_\infty)$  решается прямая задача моделирования течения в дальнем следе с помощью WW- схемы при некотором заданном начальном значении  $s_k$ . В счетной области определяется количество локальных экстремумов  $\Phi(s_k, N, Re_\infty)$ . Решается обратная задача путем вариации  $s_k$  до выполнения условия (3.1). Аналогично предыдущему разделу проводится визуальное представление

$s_k$  в виде поверхности  $s^*_k = s_k(N, Re_\infty)$  и применяется преобразование данных  $F = s^*_k / N$ . Вид поверхности после применения преобразования представлен на рис.3,4 в виде преобразованной предельной поверхности и изолиний соответственно. Здесь и далее по оси  $Y$  отмечены координаты после преобразования  $Y = \lg Re_\infty$ .

Данные на рис.3,4 свидетельствуют о том, что для каждого набора значений  $(N, Re_\infty)$  при условии  $\lg Re_\infty \geq 3.5$  выполняется соотношение  $F = const$ . Следовательно, значения предельного веса  $s_k$ , при котором не возникает нефизических осцилляций, может определяться как  $s^*_k = Nconst$  или  $s^*_k = const / h$ .

#### 4. Введение модели турбулентности. Результаты расчетов

Построение предельной поверхности весовых коэффициентов для турбулентного течения на участке дальнего следа за телом проводится полностью аналогично разделу 3. Для моделирования турбулентного течения применяется полуэмпирическая модель Бондарева-Лисичко [4]. Данная полуэмпирическая модель турбулентности хорошо зарекомендовала себя в практических приложениях к течениям подобного типа.

Общая схема расчетов аналогична представленной в предыдущем разделе для ламинарных вязких течений. В результате расчетов получаем поверхность  $s^*_k = s_k(N, Re_\infty)$  предельных весовых коэффициентов для турбулентного случая, изображенную в виде поверхности на рис.7 и в виде изолиний на рис.8. Из рис.7, 8 следует, что для случая турбулентного течения значение  $s^*_k$  практически не зависит от числа  $Re_\infty$ , что согласуется с известными экспериментальными данными.

Аналогично предыдущему разделу применяется преобразование данных, представленных на рис. 7, 8. Это преобразование выглядит как  $F = s^*_k / N^2$ . Значения предельного веса  $s_k$ , при котором не возникает нефизических осцилляций, может определяться как  $s^*_k = const / h^2$ .

#### 5. Заключение

Задача оптимизации и управления вычислительными свойствами гибридных конечно-разностных схем является как весьма актуальной и интересной с практической точки зрения, так и достаточно трудоемкой. Развитие вычислительных средств и появление возможности параллельных расчетов позволяют теперь проводить анализ вычислительных свойств конечно-разностных схем с применением подобного подхода.

Применение изложенного выше вычислительного подхода может быть полезно для практических задач, используемых в промышленных проектах. Здесь можно выделить два основных направления применения подобного подхода.

1. Контроль, оптимизация и управление вычислительными свойствами применяемых конечно-разностных схем в зависимости от выбранных групп геометрических и физических параметров задачи.

2. Построение взаимозависимостей определяющих параметров задачи и их визуальное представление.

С помощью вышеизложенного способа можно быстро и эффективно анализировать свойства гибридных разностных схем, что важно для верификации результатов математического моделирования. Концептуальный подход к анализу свойств разностной схемы заключается в сочетании решения обратной задачи для каждого набора определяющих параметров с одновременным визуальным построением предельных весовых поверхностей. Данный подход имеет важное методологическое значение, т.к. позволяет эффективно изучать и представлять свойства гибридных разностных схем в процессе их конструирования.

## Литература

1. *Бондарев А.Е.* Применение методов визуализации для оптимизации конечно-разностных схем// Научная визуализация в прикладных задачах: Сб. науч. тр. – М.:Изд.МГУ, 2003. – С. 34 – 39.
2. *Бондарев А.Е.* Оптимизация вычислительных свойств гибридных разностных схем с помощью методов визуального представления для ламинарных и турбулентных течений в дальнем следе // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН.– М., 2007. – №21. – 21с.
3. *Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. – М.: Физматлит, 2001. – 608 с.
4. *Бондарев Е.Н., Лисичко И.Д.* Распространение недорасширенной турбулентной струи в спутном сверхзвуковом потоке // Механика жидкости и газа.– 1974. – № 4. – С. 36 – 41.

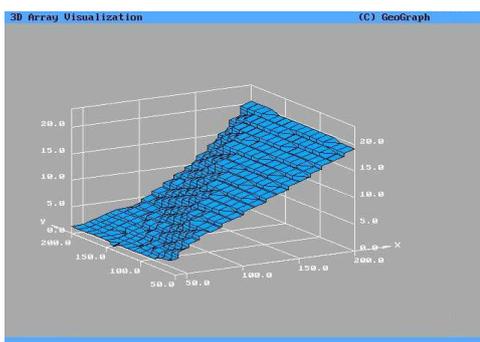


Рис.1

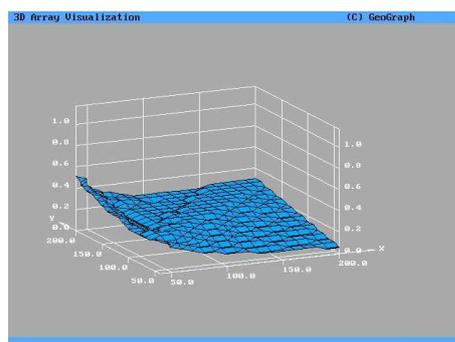


Рис.2

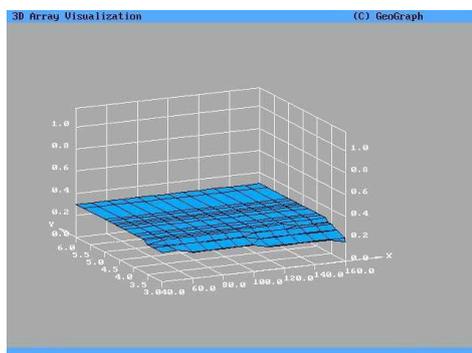


Рис.3

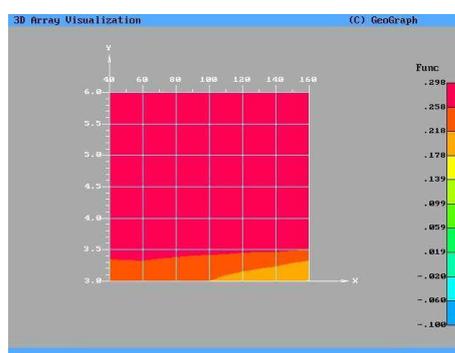


Рис.4

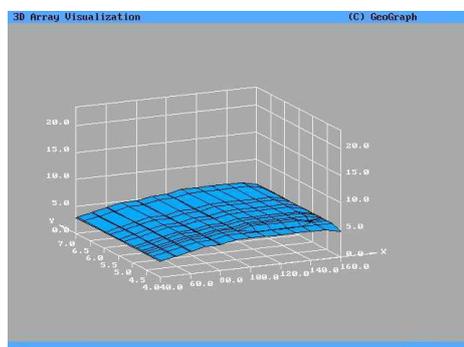


Рис.5

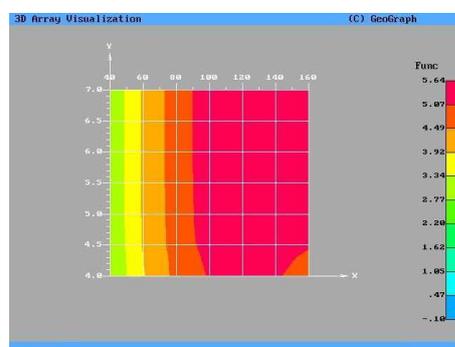


Рис.6