

Е.С.ГРИЧУК¹, М.Г.КУЗЬМИНА², Э.А.МАНЬКИН³

¹ Московский Инженерно-физический Институт
t-25.ru

² Институт прикладной математики РАН, Москва
mg.kuzmina@gmail.com

³ Российский научный центр «Курчатовский Институт»
edmany@issph.kiae.ru

НЕЛИНЕЙНЫЕ СВЯЗАННЫЕ ОСЦИЛЛЯТОРЫ И ОДНОНАПРАВЛЕННЫЕ КВАНТОВЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Предложена модель системы связанных осцилляторных кубитов с хаотической динамикой, которую можно использовать в задачах построения алгоритмов однонаправленных квантовых вычислений. Осцилляторный кубит смоделирован системой двух связанных осцилляторов предельного цикла, у которых как размеры предельных циклов, так и собственные частоты являются случайными функциями времени. Построенный кубит адекватно имитирует чистое и смешанное состояния квантовой системы.

Введение

Квантовые вычисления – активно развивающаяся область исследований, на которой в настоящий момент сфокусировано внимание физиков и специалистов по теории информации. Открытие П.Шором квантового алгоритма факторизации больших чисел [1] показало, что квантовые алгоритмы могут дать эффективное решение задач, для которых не существует классических эффективных алгоритмов. Развитие области квантовых вычислений стимулировало появление такой новой области, как квантовая информатика [2-4], находящейся на пересечении квантовой физики и теории информации.

Алгоритмы квантовых вычислений реализуются на основе эволюции некоторой квантовой системы с использованием квантовых эффектов для выполнения вычислений. При этом в процессе квантовых вычислений используется вид параллелизма, свойственный исключительно квантовым

системам, который невозможно реализовать в традиционных макроскопических цифровых компьютерах.

Современные схемы квантовых вычислений основаны на создании последовательностей шлюзов (unitary gates) – унитарных операторов, определяющих изменение состояния кубитов (квантовый бит информации) и взаимодействие пар кубитов квантово-механической системы. В 2001 году был предложен принципиально новый тип квантовых вычислений – так называемые однонаправленные, или кластерные квантовые вычисления (one-way QC, или cluster QC) [5-7]. Особенность однонаправленных вычислений состоит в том, что последовательность измерений, производимых над первоначально приготовленным кластером кубитов в максимально сцепленном (entangled) состоянии, явным образом включена в построение квантового вычислительного алгоритма, так что в процессе вычислений происходит необратимая эволюция кластера сцепленных кубитов за счет проведения однокубитных измерений. Именно выбор последовательности измерений и определяет квантовый алгоритм. Таким образом, модель, лежащая в основе однонаправленных вычислений, отличается от моделей логических квантовых сетей. Вычислительный процесс здесь можно представить как процесс распространения информации в системе по каналам, напоминающий перколяцию. (см. рис.1).

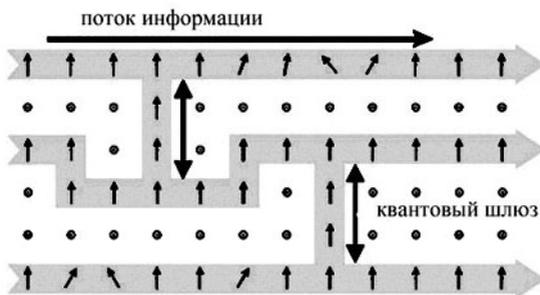


Рис.1 Схема сети для однонаправленных квантовых вычислений [5].

Можно сказать, что обработка информации в кластере кубитов при однонаправленных вычислениях фактически осуществляется на классическом уровне. Тем не менее, квантово-механические принципы используются в «приготовлении» самого сильно сцепленного кластера.

Было показано, что схема однонаправленных квантовых вычислений идеально подходит для реализации алгоритма Гровера [2].

Итак, при построении алгоритмов однонаправленного QC возникает задача анализа эволюции когерентного состояния кластера сцепленных кубитов и изменения степени его сцепленности. Нам кажется возможным сформулировать эту задачу на языке эволюции состояния синхронизации в системе связанных осцилляторов, подверженных специальной последовательности внешних воздействий. Для построения модели прежде всего необходимо предложить модель одиночного «осцилляторного кубита», который способен адекватно имитировать состояние двухуровневой квантово-механической системы. Перед тем, как описать модель, кратко напомним о способах описания состояний поляризации ансамблей поперечных фотонов.

Матрица плотности и параметры Стокса

Состояние кубита – двухуровневой квантово-механической системы – в общем случае понимаемое как состояние статистического ансамбля одинаково приготовленных систем, описывается оператором (матрицей) плотности ρ , удовлетворяющим условиям

$$\det \rho \geq 0, \quad \text{Tr} \rho = 1.$$

В случае, когда имеем чистое состояние, описываемое вектором-столбцом волновой функции $|\psi\rangle$, оператор плотности превращается в одномерный проектор на состояние $|\psi\rangle$

$$\rho_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|,$$

где, как обычно, использованы обозначения: оператор $A = |\psi\rangle\langle\varphi|$ ранга 1 действует на $|\chi\rangle$ по формуле $A|\chi\rangle = |\psi\rangle\langle\varphi|\chi\rangle$, $\langle\varphi|\psi\rangle$ - скалярное произведение. Если использовать базис $\{e_x, e_y\} = \{(1 \ 0)^T, (0 \ 1)^T\}$, удобно ввести базис матриц Паули в вещественном пространстве эрмитовых матриц и представить оператор плотности в виде

$$\rho = \frac{1}{2}(I + \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & 1 - p_z \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

а $P = (p_x, p_y, p_z)$ - параметры Стокса. Условие $\det \rho \geq 0$ накладывает на P ограничение $p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \leq 1$. Чистые состояния характеризуются условием $p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = 1$ и составляют сферу Блоха.

Параметры Стокса используются для описания состояния поляризации электромагнитного излучения. Поток квазимонохроматического излучения, распространяющийся в направлении \mathbf{k} , можно описывать как статистический ансамбль фотонов с импульсом $\mathbf{p} = (ch\omega/c) \cdot \mathbf{k}$ и состоянием поляризации, определяемым двумерным вектором поляризации \mathbf{e} единичной длины, лежащим в плоскости, ортогональной \mathbf{k} . Параметры Стокса характеризуют свойства ансамбля в смешанном состоянии с точки зрения представления его в виде суперпозиции двух подансамблей в чистых состояниях с векторами поляризации \mathbf{e}_x и \mathbf{e}_y .

Эквивалентным описанием является описание такого ансамбля как потока классического квазимонохроматического электромагнитного излучения с поперечным вектором электрического поля, расположенным в плоскости, ортогональной \mathbf{k} . Вектор электрического поля при этом рассматривается как двумерный стационарный случайный процесс, корреляционная матрица которого связана с параметрами Стокса, для которых приняты обозначения Q, U, V и которые связаны с определенными в (1) p_x, p_y, p_z соотношениями

$$p_x = U/I, \quad p_y = V/I, \quad p_z = Q/I, \quad (3)$$

где I - интенсивность излучения. Степень поляризации $p = (Q^2 + U^2 + V^2)^{1/2} / I$ определяют долю компоненты излучения в состоянии полной поляризации (долю подансамбля в чистом состоянии), так что $I - p$ - доля компоненты излучения в неполяризованном состоянии. Вектор электрического поля полностью поляризованной компоненты - случайный процесс, среднее которого в общем случае описывает эллипс в плоскости, ортогональной \mathbf{k} . Вектор электрического поля неполяризованной компоненты - случайная функция с нулевым средним (ансамбль фотонов, для которого все направления спинов равновероятны). Такое смешенное состояние называется хаотическим и определяется оператором плотности $\rho = 0.5 \cdot \text{diag}(1, 1)$. Форма и расположение эллипса поляризации полностью поляризованной компоненты излучения определяется параметрами Стокса (см. рис. 1)

$$\theta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{U}{Q} \quad \varepsilon = \frac{1}{2} \operatorname{arcsin} \left(\frac{V}{(Q^2 + U^2 + V^2)^{1/2}} \right) \quad (4)$$

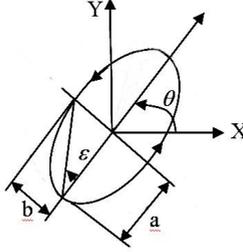


Рис. 1 Эллипс поляризации

Имеется также связь параметров Стокса с временными средними для электрического поля $E(t) = E_x e^{i\alpha} \cdot e_x + E_y e^{i(\alpha+\delta)} \cdot e_y$ полностью поляризованной компоненты излучения:

$$I = \langle E_x \rangle^2 + \langle E_y \rangle^2, \quad Q = \langle E_x \rangle^2 - \langle E_y \rangle^2,$$

$$U = 2\langle E_x E_y \cos(\delta) \rangle, \quad V = 2\langle E_x E_y \sin(\delta) \rangle.$$

Кубит как система двух связанных осцилляторов

Мы строим модель кубита как систему двух связанных осцилляторов предельного цикла с собственными частотами $\tilde{\omega}_1$ и $\tilde{\omega}_2$. Считаем, что предельные циклы являются окружностями радиусов ρ_1 и ρ_2 с «наложенными» на них стационарными случайными процессами с нулевым средним, так что ρ_1 и ρ_2 являются статистическими значениями средними радиусов. Аналогичное предположение делаем относительно собственных частот осцилляторов. Систему управляющих уравнений записываем в виде

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= [\tilde{\rho}_1^2 + i\tilde{\omega}_1 - |u_1|^2]u_1 + \kappa(u_2 - u_1), \\ \dot{u}_2 &= [\tilde{\rho}_2^2 + i\tilde{\omega}_2 - |u_2|^2]u_2 - \kappa(u_2 - u_1), \quad \tilde{\rho}_{1,2} = \rho_{1,2} + \xi_{1,2}(t), \quad \tilde{\omega}_{1,2} = \omega_{1,2} + \eta_{1,2}(t), \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$u_1 = u_1^1 + iu_2^1, \quad u_2 = u_1^2 + iu_2^2, \quad \kappa = |\kappa| e^{i\delta}, \quad (6)$$

а $\xi_{1,2}(t)$ и $\eta_{1,2}(t)$ - стационарные случайные процессы с нулевым средним. Поскольку для наших целей основной интерес представляет функция $U = u_1 + u_2$, определяющая суперпозицию колебаний, систему уравнений (5),(6), отражающую логику построения модели кубита, удобнее переписать в переменных $v_1 = 0.5(u_1 + u_2)$, $v_2 = 0.5(u_1 - u_2)$:

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= 0.5\{[\tilde{\rho}_1^2 + i\tilde{\alpha}_1 - |v_1 + v_2|^2](v_1 + v_2) + [\tilde{\rho}_1^2 + i\tilde{\alpha}_1 - |v_1 - v_2|^2](v_1 - v_2)\} \\ \dot{v}_2 &= 0.5\{[\tilde{\rho}_2^2 + i\tilde{\alpha}_2 - |v_1 + v_2|^2](v_1 + v_2) - [\tilde{\rho}_1^2 + i\tilde{\alpha}_1 - |v_1 - v_2|^2](v_1 - v_2)\} - 4\kappa v_2, \quad (7) \end{aligned}$$

где

$$v_1 = x + iy, \quad v_2 = z + iu. \quad (8)$$

Проекция траектории четырехмерной динамической системы (7) на плоскость (x, y) моделирует поведение вектора электрического поля потока электромагнитного излучения, являющегося суперпозицией двух потоков в состояниях правой и левой циркулярной поляризации. На рис. 2 – 4 представлены типичные картины когерентной суперпозиции колебаний, соответствующей чистому состоянию, а на рис. 5 показан пример некогерентной суперпозиции (смешанное состояние).

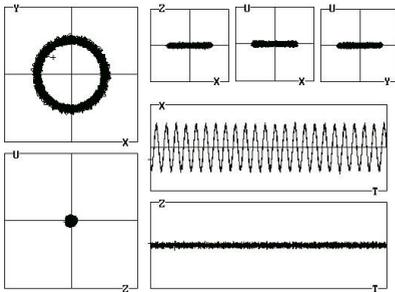


Рис. 2. Чистое состояние $|1\rangle$
(ансамбль фотонов в состоянии
циркулярной поляризации)

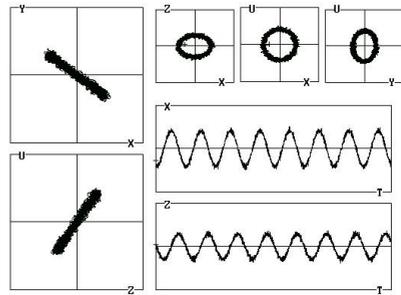


Рис. 3. Чистое состояние $|1\rangle + |0\rangle$
(ансамбль фотонов в состоянии
линейной поляризации)

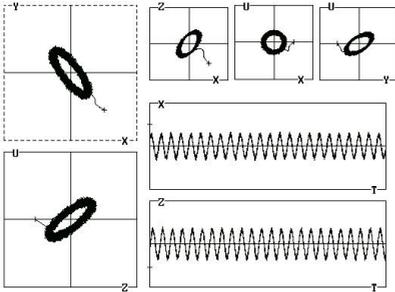


Рис. 4 Чистое состояние $\alpha |1\rangle + \beta |0\rangle$
(ансамбль фотонов в состоянии
Эллиптической поляризации)

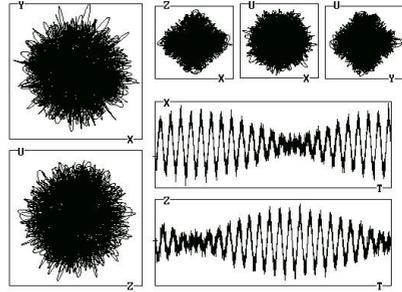


Рис. 5 Смешанное состояние с
матрицей плотности $\hat{\rho} = 0.5 \cdot \text{diag}[1, 1]$
(ансамбль фотонов в
неполяризованном состоянии)

Кластер сцепленных кубитов

Как уже говорилось, построение алгоритмов однонаправленных вычислений требует управления кластерами кубитов в чистом (сцепленном) состоянии. Так, в [7] операция произвольного вращения на кубита сфере Блоха построена на языке последовательности измерений в цепи из пяти кубитов в сцепленном состоянии. В качестве важных частных случаев при этом получены шлюз Адамара и шлюз создания сдвига фазы на $\pi/2$. В нашей модели любые операции по изменению состояния кластера осцилляторных кубитов можно заложить, опираясь на систему уравнений, управляющую совокупностью связанных кубитов. Такую систему уравнений для кластера из N кубитов можно записать в виде:

$$V^j = f(V^j; \alpha^j) + F(V^j, t; \beta) + \sum_{k=1}^N \hat{W}^{jk} \cdot (V^k - V^j), \quad j=1, \dots, N,$$

где $V^j = (x^j, y^j, z^j, u^j)^T$ - $4D$ - вектор состояния j -того кубита кластера, $\alpha^j = \{\tilde{\rho}_1^j, \tilde{\rho}_2^j, \tilde{\omega}_1^j, \tilde{\omega}_2^j, \kappa^j\}$ - совокупность внутренних параметров кубита, $f(V, \alpha)$ - $4D$ вектор-функция, определяющая внутреннюю динамику

кубита, $F(V, \beta)$ - $4D$ вектор-функция, определяющая внешнее воздействие на кубит (однокубитный шлюз), $[\hat{W}^{jk}]$ - совокупность матриц связей, определяемая при построении квантового вычислительного алгоритма (двухкубитные шлюзы). Для модели кубита, определенной уравнениями (7)-(8) компоненты функции $f(V, \alpha)$ легко выписываются в явном виде (мы не приводим здесь этих выражений). Построение $F(V, \beta)$ и $[\hat{W}^{jk}]$, конечно, является наиболее существенным моментом в построении всей схемы квантовых вычислений. В этом отношении работа находится в начальной стадии. Можно напомнить, что квантовые сети с магнитными спинами в качестве кубитов были разработаны и экспериментально реализованы на основе ЯМР. Управление одиночными кубитами здесь производится импульсами электромагнитного излучения (резонансные импульсы в радиочастотном диапазоне), под воздействием которых происходит изменение состояния кубита (поворот на сфере Блоха). Этому соответствует возникновение нутации спина в лабораторной системе координат. Двухкубитные шлюзы построены в виде специальных последовательностей импульсов. Так была создана сеть из семи кубитов, реализующая алгоритм Шора [9,10].

Заключительные замечания

Построенная модель кубита имитирует поведение электрического поля потока квазимонохроматического электромагнитного излучения, образованного суперпозицией двух потоков во взаимно противоположных состояниях правой и левой циркулярной поляризации. Это соответствует суперпозиции ансамблей фотонов со спинами ± 1 . Возможны как когерентная суперпозиция колебаний, соответствующая кубиту в чистом состоянии, так и частично когерентная и некогерентная суперпозиция (кубит в смешенном состоянии). Выписана динамическая система, управляющая системой связанных кубитов. Модель может оказаться полезной, например, в задачах управления квантовыми системами, а также в задачах построения алгоритмов однонаправленных квантовых вычислений.

Список литературы

1. P.W.Shor, "Polynomial time algorithms for prime factorization and discrete algorithms on a quantum computer, *SIAM J. Sci. Statist. Comput.* v.26, p. 1484, 1997.
2. А.С.Холево, «Вероятностные и статистические основы квантовой теории», М., Наука, 1980.
3. А.С.Холево, «Квантовая вероятность и квантовая статистика», *Итоги науки и техн., Совр. проблемы матем., Фунд. Напр., ВИНТИ*, т.83, с. 3 – 132, 1991.
4. M.A.Nielsen and I.L.Chuang, *Quantum computation and quantum information*, Cambridge Univ. Press, 2000.
5. R.Raussendorf and H.J.Breigel, "A one way quantum computer", *Phys. Rev. Lett.* V.86, p.5188, 2001.
6. R.Raussendorf and H.J.Breigel, "Computational model underlying the one-way quantum computer", *Quant. Inf. Comp.*, v.6, p. 443, 2002; *quant-ph/0108063* (2001).
7. R.Raussendorf and H.J.Breigel, "Computational model underlying the one-way quantum computer: concepts and summary", in: Th.Beth and G. Leuch, *Quantum Information processing*, Wiley-VCH, 2003.
8. L.K.Grover, "A fast quantum mechanical algorithm for database search", *Proc. 28 Annual ACM Symp. on Theory of Computing*, p.22, 1996.
9. I.L.Chuang, L.M.K.Vandersypen, X.Zhou, D.W.Leung, S.Lloyd, "Experimental realization of a quantum algorithm", *Nature* v. 393, p.143, 1998.
10. L.M.K. Vandersypen, I.L.Chuang, "NMR technique for quantum control and computation", *arXiv: quant-ph/0404064* v.2, 2004/