РАБОТЫ Д.Е. ОХОЦИМСКОГО ПО РАЗГОНУ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С МАЛОЙ ТЯГОЙ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПОЛЕТАМ С МАЛОЙ ТЯГОЙ В ИНСТИТУТЕ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

© *Г.Б. Ефимов*

В начале 1960-х годов в механике космического полета возник интерес к использованию двигателей “малой тяги”, плазменных и ионных, со скоростью истечения реактивной струи существенно более высокой, чем у химических двигателей, и поэтому более экономичных. В числе первых работ по исследованию траекторий полетов космических аппаратов (КА) с малой тягой, в большинстве своем наших и американских, появилась работа Д.Е. Охоцимского [1]. Активно исследовались и межпланетные перелеты, и спиральные разгоны в сфере действия планеты, причем последние задачи были особенно популярны, так как допускали различные аналитические решения [2]. В отделе №5 Отделения прикладной математики МИАН СССР им. В.А. Стеклова, который возглавлял Дмитрий Евгеньевич Охоцимский, был выполнен В.В. Белецким и В.А. Егоровым (а позже В.Г. Ершовым и В.В. Голубковым) цикл работ по полетам КА с малой тягой – как по разгону вблизи планеты, так и по межпланетным перелетам [3-6].

1. «Универсальная» траектория Охоцимского в задаче о разгоне с малой тягой

Работа Дмитрия Евгеньевича привлекла к себе внимание целым рядом особенностей – в постановке, методах решения и полученных результатах. Начнем с постановки задачи. Как правило, рассматривались спиральные разгоны с орбиты низкого спутника до достижения местной параболической скорости. У Дмитрия Евгеньевича разгон с малой тягой продолжается за параболическую скорость до получения гиперболического ее избытка. Опыт расчета первых межпланетных полетов, которые проводил Дмитрий Евгеньевич, показал, что следует учитывать не сферу действия планеты, а заметно большую по размеру сферу ее влияния, и параболическая скорость при разгоне достигается внутри этой сферы. Разделение разгона на два этапа, до достижения параболической скорости и затем до гиперболической, для межпланетного полета, может сильно завышать оценку энергетических затрат на весь полет.

Указанная постановка задачи позволяла искать решение иначе, чем это делалось в других работах – не от некоторой заданной круговой спутниковой орбиты до параболы. Участки спирального разгона у планеты и ухода далеко от нее предполагались не конечными, – спираль раскручивалась из особой точки в самом притягивающем центре за бесконечное число витков, а уход от планеты простирался до бесконечного удаления от нее. Это позволяло искать аналитические или приближенные аналитические решения на обоих концах – вблизи центра притяжения и “на бесконечности”. Таким образом, строилось единственное “универсальное решение” или траектория. Траектория конкретного перелета с заданными началом и концом могла быть приближена участком универсальной траектории. Универсальное решение строилось в виде двух приближенных асимптотических решений, формально удовлетворяющих уравнениям движения КА под действием ускорения малой тяги в поле притяжения планеты. Два асимптотических решения, вблизи центра притяжения и вдали от него, объединялись участком численного счета, охватывающего переходную область, в которую попадала точка достижения местной параболической скорости.

Асимптотические решения вблизи центра притяжения и вдали от него строились в виде степенных полиномов по степеням малой величины – безразмерного расстояния от центра притяжения для асимптотики решения вблизи него и обратной величины для асимптотики на бесконечности. Тут был использован опыт расчетов динамики газа в задаче о сильном взрыве, в которых решение строилось из асимптотик в центре взрыва и на бесконечности, объединенных участком численного счета в промежуточной области. Различными сторонами этой задачи тогда усиленно занимались в ОПМ-ИПМ, в том числе и Дмитрий Евгеньевич, вместе с З.П. Власовой и Р.К. Казаковой [7].

Наконец, полиномиальные асимптотические разложения решения получались на вычислительной машине “Стрела” автоматически путем рекуррентной процедуры с помощью программ для действий с полиномами. Это была одна из первых в нашей стране работ по символьным или аналитическим преобразованиям формул на компьютере, или как говорят сейчас, по компьютерной алгебре [8]. Вопрос об автоматизации построения формул был поставлен незадолго перед тем в программном докладе А.А. Дородницына, работавшего в ОПМ с его основания до создания ВЦ АН СССР, на Первой всесоюзной конференции по вычислительной технике [9, 10].

2. Особая универсальная спираль плоского тангенциального разгона с малой тягой

Рассмотрим подробнее ход мысли Дмитрия Евгеньевича, следуя его статье. Уравнения движения плоского разгона космического аппарата под действием постоянного касательного ускорения малой тяги L в оскулирующих элементах будут

$$v\frac{dp}{dt}=2pL\ , \qquad v\frac{de}{dt}=2(e+\cos\theta)L\,, \qquad ve\frac{d\sigma}{dt}=2\cos\theta L\,, \tag{1}$$

где p – фокальный параметр, e – эксцентриситет, σ – угловое расстояние перицентра, θ – истинная аномалия, v – модуль скорости. Радиус r и скорость v определяются формулами

$$r=p\,/\,(1+e\cos\theta)\,, \qquad v=\sqrt{\mu\,/\,p}\sqrt{1+e^2+2e\cos\theta}\,, \tag{2}$$

где μ – произведение константы тяготения на массу притягивающего центра. Полярный угол φ, равный $\sigma+\theta$, определяется из уравнения

$$r^2d\varphi\,/\,dt=\sqrt{\mu p}\,, \qquad d\varphi\,/\,dt=d\sigma\,/\,dt+d\theta\,/\,dt\,. \tag{3}$$

Правые части системы (1) не зависят явно от времени t, поэтому можно принять в качестве независимой переменной параметр p, меняющийся монотонно, как это видно из первого уравнения (1). Приняв за переменную вместо σ истинную аномалию θ, получим из (1) систему

$$de\,/\,dp=(e+\cos\theta)\,/\,p\,, \qquad d\theta\,/\,dp=v\sqrt{\mu p}\,/\,2pr^2L-\sin\theta\,/\,pe\,. \tag{4}$$

Приведем систему (4) к безразмерному виду. Пусть T, P, G – соответственно масштабы времени, длины и ускорения, так что

$$t=T\tau\,, \qquad p=Pz\,, \qquad L=GQ\,. \tag{5}$$

Подставляя эти замены в уравнения, выделяем безразмерные постоянные

$$A = \sqrt{\mu/P}\Big/2GT\,, \qquad B = \mu\Big/2GP^2\,, \qquad C = T\sqrt{\mu\,/\,P^3}\,,$$

две из которых полагаем равными единице, а третья равна единице, так как $AC=B$. Масштабы длины и времени выражаются через μ и G

$$G = \mu\Big/2P^2\,, \qquad T = \sqrt[4]{\mu\,/\,8G^3}\,. \tag{6}$$

Здесь P – расстояние от центра притяжения, на котором сила тяготения вдвое больше L, а $2\pi T$ – период обращения кругового спутника с радиусом орбиты P.

Перейдем от переменных e и θ к компонентам вектора Лапласа $\beta = e\cos\theta$, $\gamma = e\sin\theta$. В безразмерных переменных z, β, γ и φ из системы (3), (4) получаем

$$z\,d\beta\Big/dz = (1+\beta) - \gamma(1+\beta)^2\,\overline{u}\,/\,z^2Q\,, \qquad zd\gamma\,/\,dz = \gamma + (1+\beta)^2\beta\overline{u}\,/\,z^2Q\,, \tag{7}$$

причем полярный угол φ и время τ определяются квадратурами из уравнений

$$z\,d\varphi\Big/dz = (1+\beta)^2\,\overline{u}\,/\,z^2Q\,, \qquad zd\tau\,/\,dz = \overline{u}\,/\,\sqrt{z}\,, \qquad \overline{u} = \sqrt{\gamma^2 + (1+\beta)^2}\,. \tag{8}$$

Вблизи центра притяжения, где z мало, и вдали от него, где z велико (P равно единице около параболической точки), проводится анализ роста переменных β, γ при $z\to 0$, $z\to\infty$, соответственно. В том и другом случае после выделения особенностей система уравнений приводится к рекуррентному виду, строятся асимптотические представления переменных в форме степенных полиномов по степеням малой величины; вблизи центра ею служит независимая переменная z, а вдали от него – обратная величина, $1/z$. Способ получения асимптотических представлений с помощью компьютера обсуждается ниже.

Асимптотическое представление решения вдали от центра имеет одну произвольную постоянную, то есть мы получаем семейство траекторий, для которых оскулирующими коническими сечениями являются гиперболы. Вблизи центра притяжения выделяется решение с монотонным изменением переменных при удалении от центра притяжения. Производная в форме zd/dz не изменяет порядка убывания переменной как полинома по z; при $z\to 0$ и монотонном убывании β, $\gamma\to 0$ имеем малый параметр z^2 при производной в уравнениях (7).

Характер полученного решения на участке спирального разгона оказался непохожим на решения, полученные другими авторами. Монотонное полиномиальное решение для спирали является особенной, исключительной траекторией, оно не вполне охватывает специфику большинства спиральных траекторий разгона. У нее неожиданно поведение оскулирующих переменных вдоль спирали: истинная аномалия θ не растет монотонно вместе с полярным углом φ, а остается близкой к постоянной, $\theta \approx \pi/2$, в то время как вместе с углом φ растет угол σ. Для большинства траекторий естественное представление решения – полиномы Фурье с коэффициентами в виде некоторых функций, например, степенных полиномов, тогда как решение Д.Е. Охоцимского описывает траекторию, представляемую нулевой гармоникой полинома Фурье. Характер набора энергии, рост большой полуоси и эксцентриситета оскулирующей орбиты у этого решения иные, чем у других спиральных решений, учитывающих и остальные гармоники полинома Фурье.

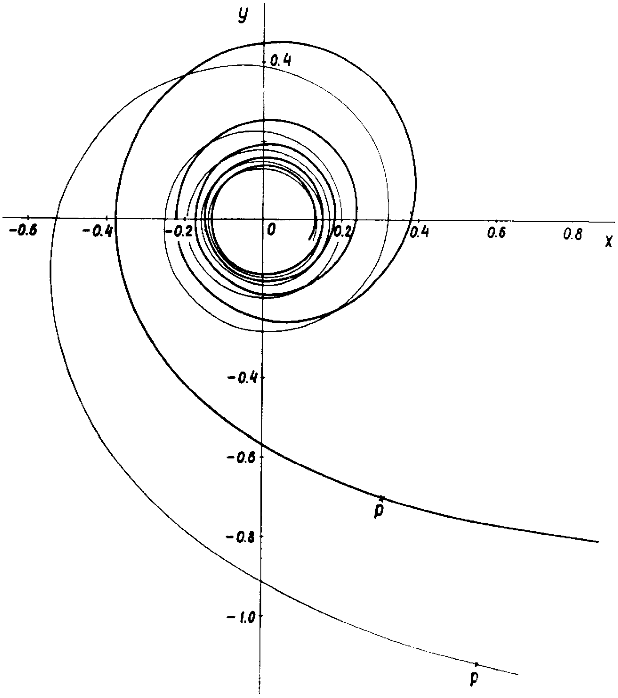

Рис.1. Траектории разгона с малой тягой вблизи центра притяжения: оптимальная траектория *O* (жирная линия) и универсальная траектория *У* с касательным направлением тяги (тонкая линия).

Для анализа эффективности разгона, описываемого универсальной траекторией, была построена траектория спирального разгона, оптимального по скорости набора энергии [11]. На рис.1 представлены траектории оптимального разгона “*O*” и универсальной траектории “*У*”. Видно, что спираль оптимального разгона имеет меняющийся на витке эксцентриситет, тогда как на универсальной траектории он растет монотонно. Еще ярче это видно на рис.2, где даны изменения радиуса $r(t)$ и эксцентриситета $e(t)$ на нескольких витках разгона вблизи достижения местной параболической скорости для спиралей *O* и *У*.

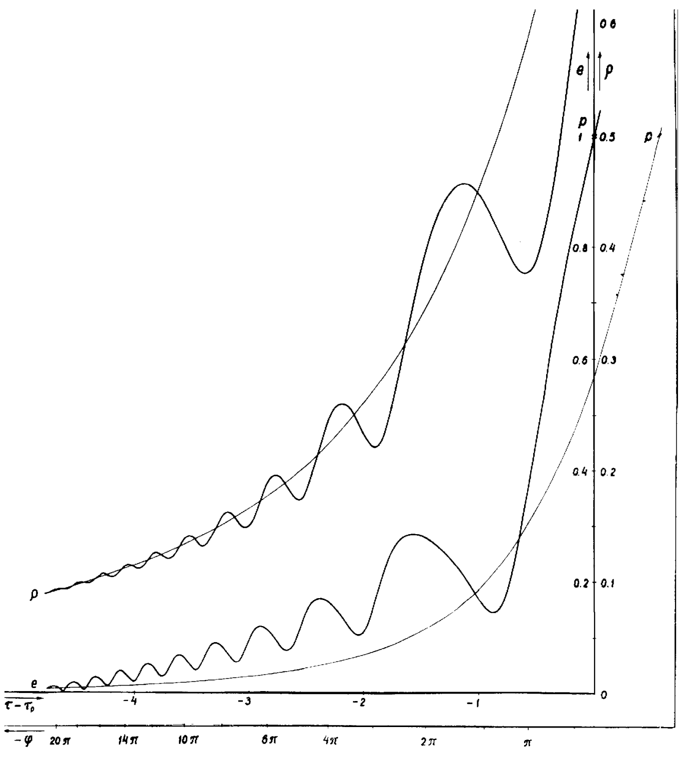

Рис.2. Рост радиуса-вектора ρ и эксцентриситета *e* оскулирующей орбиты для универсальной траектории *У* (тонкая линия) и оптимальной траектории *O* (жирная линия) вблизи точки достижения параболической скорости.

Объединение асимптотических представлений решения вблизи центра и вдали от него в единую универсальную траекторию было проведено с помощью численного интегрирования в промежуточной области. Вблизи центра построенная спираль с монотонным ростом радиуса и эксцентриситета единственна; начальные данные для численного интегрирования в точке перехода к нему от асимптотики определяются однозначно. При стыковке с асимптотикой вдали от центра подбирается значение имеющейся у асимптотики произвольной постоянной. Для большинства траекторий спирального разгона рост переменных не монотонный, как видно у спирали *О* на рис.1, 2. Особая спираль *У* является устойчивой, – при начальном эксцентриситете, отличном от нуля, эксцентриситет вначале убывает, траектория приближается к особой спирали *У*, а затем эксцентриситет растет вместе с ростом его вдоль особой универсальной спирали.

Полученное Дмитрием Евгеньевичем оригинальное решение и метод его построения произвели в свое время большое впечатление на специалистов. Оно полностью было включено в книгу Г.Л. Гродзовского, Ю.Н. Иванова, В.В. Токарева [2] – своего рода энциклопедию по механике полета с малой тягой тех лет, и в популярный обзор механики космического полета В.В. Белецкого [12].

3. Символьные преобразования формул на компьютере

Расчет асимптотических разложений в автоматическом режиме с помощью рекуррентной процедуры на компьютере происходил по следующей схеме. В области действия асимптотик (вблизи центра притяжения и вдали от него) имеется малый параметр (переменная) – расстояние от центра притяжения $\xi \approx z$ в первом случае и величина, ему обратная $\xi \approx 1/z$ – во втором. Асимптотики в той и другой области строятся в виде степенных полиномов по степеням этого малого параметра. Выяснив порядок роста переменных, масштабированием их преобразуют к величинам ~ const. Оператор производной в форме $\xi\, d/d\xi$ преобразует степенной полином $\sum a_i \xi^i$ в полином $\sum i a_i \xi^i$ с коэффициентами, умноженными на показатель степени каждого монома. В левых частях уравнений движения собираются старшие относительно малого параметра члены, а в правых частях – переменные и их комбинации, имеющие множителем положительную степень малого параметра. Таким образом, уравнения преобразовываются к рекуррентному виду, и их левые части, линейные относительно входящих в них переменных, образуют систему уравнений относительно переменных.

Вычисление переменных в виде полиномов начинаются заданием нулевых их коэффициентов, – постоянных. Одни из них определены при выделении особенностей, другие суть произвольные постоянные (их значения определяются в процессе решения краевой задачи). Таким образом, нулевые коэффициенты полиномов известны, а остальные полагаем равными нулю. Подставив полиномы в правые части уравнений, в силу рекуррентного их вида в правой части имеем известные коэффициенты при первой степени ξ, как функции нулевых коэффициентов. Для определения коэффициентов при первой степени ξ имеем линейную систему уравнений в левой части со свободными членами, полученными из правых частей системы уравнений. Если определитель этой системы не равен нулю, все коэффициенты при первой степени ξ определяются. Процедуру повторяем и определяем нужное число коэффициентов полиномов вплоть до заданной степени ξ.

Когда определитель левой части системы уравнений обращается в нуль независимо от номера степени ξ, имеет место вырождение системы уравнений, например, резонанс, и она должна быть преобразована к невырожденному виду. Если имеет место вырождение при определенной степени параметра ξ (из-за переменных коэффициентов от $\xi\, d/d\xi$), то один из коэффициентов при этой степени ξ – произвольная постоянная; ее значение задает траекторию из семейства, представляемого асимптотикой.

Построение асимптотик в виде полиномов было автоматизировано с помощью системы программ для работы со степенными полиномами одной переменной на вычислительной машине "Стрела". Полиномы задавались в виде вектора коэффициентов с фиксированным положением коэффициента при заданной степени ξ, начиная с нулевой. Система программ в машинных кодах была разработана Т.И. Фроловой при консультации А.С. Фролова. Это была одна из первых отечественных программ по работе с формулами на вычислительной машине по, так называемой, компьютерной алгебре или символьным преобразованиям на компьютере.

Продолжением этой задачи уже для оптимального (по набору энергии) разгона стала диссертация Г.Б. Ефимова, аспиранта Дмитрия Евгеньевича. Спираль разгона была уже не единственной особой траекторией, а включала целое семейство с монотонным в среднем ростом эксцентриситета и колебательными составляющими. Переменные задачи и компоненты сопряженной вектор функции представлялись полиномами Фурье по полярному углу φ с коэффициентами в виде полиномов по степеням ξ − монотонной функции расстояния до центра притяжения. В компьютерной алгебре эти объекты носят название рядов Пуассона. Совместно с Т.И. Фроловой был разработан достаточно сложный комплекс программ для работы с этими рядами на вычислительной машине "М-20" и решена серьезная и громоздкая задача [13].

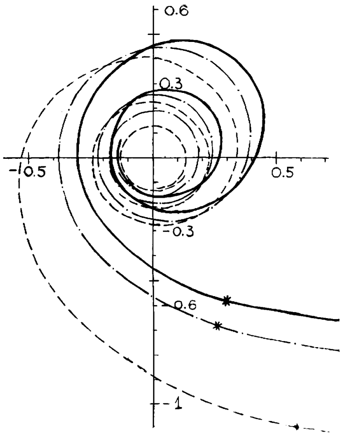

Рис.3. Три траектории разгона с малой тягой: особая универсальная *У* – пунктир, оптимальная численно построенная *О* – штрих-пунктир, оптимальная универсальная *ОУ* – сплошная линия. Она имеет наибольшую “эксцентричность” спирали. Звездочка – точка достижения местной параболической скорости.

При построении семейства спиральных траекторий имели место три случая вырождения в левой части рекуррентной системы при построении рядов Пуассона: вследствие резонанса между переменными задачи и компонентами сопряженной вектор-функции, при появлении произвольных постоянных в рядах Пуассона. Третий тип вырождения привел к усложнению степенных полиномов – кроме аргумента ξ еще по дополнительному аргументу $\ln\xi$. Построенная универсальная оптимальная траектория охватывала семейство спиралей разгона, а не единственную особую траекторию. Область хорошего представления решения асимптотическими рядами у нее была намного лучше, чем у особой спирали. Три спирали разгона – особая универсальная спираль *У*, оптимальное численное решение *О* и оптимальная универсальная спираль *ОУ* представлены на рис.3. Эксцентричность последней спирали особенно заметна, так как она представляет траекторию из семейства с эксцентриситетом, в среднем постоянно растущим и в начале изображаемой области достигшего заметного значения, тогда как у двух других он в начале этой области мал.

4. Использование универсальных траекторий разгона с малой тягой

Полученное Д.Е. Охоцимским представление универсальной траектории разгона до гиперболических скоростей и его отдельных частей оказалось полезным при выяснении ряда вопросов в механике полета с малой тягой. Кратко упомянем некоторые их них.

4.1. Простота и универсальность полученного Дмитрием Евгеньевичем представления решения (и его развития [13]) позволяла использовать его для быстрых приближенных оценок энергетики и времени перелетов со спутниковых орбит на другие спутниковые орбиты или траектории ухода из сферы действия планеты и т.п., при этом нередко оказывалось достаточно одного-двух членов степенных представлений.

Пусть начальная и конечная (индексы “0” и “k”) точки разгона определяются значением энергии h или большой полуоси a оскулирующей орбиты $h_{0,k}=-1/a_{0,k}$. Безразмерные величины энергии $\hat{h}$, большой полуоси $\bar{a}$, скорости V и расстояния ρ получаем с учетом масштабов (5)

$$r=\rho P,\quad V=v\sqrt{\mu/P},\quad P=\sqrt{\mu/2G},\quad \rho=z/(1+\beta),\quad \bar{a}_0=a_0/P,\quad \hat{h}_0=-1/a_0.$$

Для использования формул разложения на спиральном участке траектории необходимо знать значение угла φ, отвечающего $\hat{h}$. Связь их для малых значений безразмерного значения большой полуоси $\bar{a}_0$ получаем приближенно из асимптотических представлений $\xi=\bar{a}(1+\ldots)$, где $\xi=\sqrt{-1/2\varphi}$ [13].

В случае ухода КА из сферы действия по гиперболе в конечной точке t_k задана полная энергия $h_k=h(t_k)$, ее удобно задавать через величину V_∞ оскулирующей скорости "на бесконечности" $h_k=V_\infty^2$, $\hat{h}_k=V_\infty^2 P/\mu=V_\infty^2\big/\sqrt{2\mu G}$. Значения остальных параметров получаем из полиномов по $\xi=\xi(\hat{h})$, асимптотически представляющих решение, при $\hat{h}=\hat{h}_k$. (из [1] или [13]). Размерные величины определяются с помощью масштабирования по (5), а угловая дальность Δφ, энергетические затраты величины J (интеграла от квадрата ускорения реактивной тяги за время полета), ΔJ и время полета Δt – через разность безразмерных переменных j,τ в начальной и конечной точках полета и масштабы

$$\Delta\varphi=\varphi_k-\varphi_0,\qquad \Delta t=T(\tau_k-\tau_0),\qquad \Delta J=G^2T(j_k-j_0). \tag{9}$$

Представления предельной траектории использовались для оценок параметров разгона или скрутки КА с малой тягой в поле тяготения больших планет и их естественных спутников, например, на орбиту искусственного спутника Каллипсо, спутника Юпитера или Титана, спутника Сатурна. Заметим, что энергетическая эффективность разгона в разных решениях задачи о спиральном разгоне близка, так что в приближенных оценках можно пользоваться различными их представлениями.

4.2. Особенности полученного Дмитрием Евгеньевичем решения на участке спирального разгона, у которого на витке оборота вокруг центра притяжения вместе с полярным углом изменяется не истинная аномалия оскулирующей траектории, а угол перигея, позволяют прояснить проблемы, возникающие при осреднениях траекторий спирального разгона. Вдали от особой траектории истинная аномалия изменяется как полярный угол и может служить переменной, по которой проводится осреднение. Однако, особая траектория, на которой изменения переменных происходят иначе, является устойчивой. Другие траектории сходятся к ней, эксцентриситет при спиральном разгоне, как показано Дмитрием Евгеньевичем и другими, вначале уменьшается, так что траектория подходит к особой траектории, а потом идет уже вблизи нее с ростом эксцентриситета.

Вопросы выбора переменной для осреднения и другие тонкие моменты исследования спирального разгона с малой тягой были предметом исследований В.В. Ларичевой и подробно рассматривались в ряде ее статей. Не всеми эти работы были поняты вследствие их несоответствия классической схеме осреднения по Н.Н. Боголюбову, в которой колебания происходят вокруг нулевого значения. Универсальная спираль Охоцимского явно обнаруживала особенность поведения колебаний при разгоне с малой тягой. В отличие от задач радиофизики, на примере которых строился классический метод осреднения Н.Н. Боголюбова, в случае разгона с малой тягой центром колебаний является не нулевое значение, а особая траектория, спираль. Дмитрий Евгеньевич, который занимался задачей осреднения при исследовании времени существования спутника, тормозящегося в атмосфере Земли [14], оценил исследования В.В. Ларичевой и был инициатором подробного обзора этого и близких вопросов, изложенного в виде препринтов ИПМ им. М.В. Келдыша [15].

5. Дальнейшие исследования траекторий полетов с малой тягой в ИПМ

Исследованием траекторий полетов с малой тягой, как спиральных разгонов вблизи центра притяжения, так и межпланетных полетов к планетам, одновременно с Д.Е. Охоцимским занимались в ОПМ В.В. Белецкий, В.А. Егоров, В.Г. Ершов и В.В. Голубков. Для межпланетных перелетов был использован метод транспортирующей траектории, предложенный Т.М. Энеевым. Построение предельной траектории для оптимального разгона с малой тягой было проведено Г.Б. Ефимовым. Однако актуальность полученных решений разгонов с малой тягой в практическом плане вскоре заметно снизилась. Возникли трудности при создании электроракетных двигателей малой тяги (ЭРД), особенно с достаточно большой величиной тяги для использования их в качестве маршевых при разгоне у Земли и в межпланетных полетах. Надолго затянулось и создание источников энергии для ЭРД – бортовых ядерных реакторов и солнечных батарей достаточной мощности. В период первых исследований траекторий полетов с малой тягой реальные ЭРД только создавались и представления о них были излишне оптимистичны. В статьях Д.Е. Охоцимского и других рассматриваются ускорения малой тяги в 1-3 мм^2/с и больше, а для энергозатрат J при перелетах к ближним планетам приемлемыми считались величины J~10 м^2/с^3. В 1980-90-х годах, когда были разработаны и испытаны ЭРД и источники энергии для них, оказалось, что реальными для тех же полетов являются величины ускорений малой тяги и энергозатрат на порядок меньшие: для ускорений ~ 0.1 мм^2/с, для энергозатрат J~1-1.5 м^2/с^3 [16-18].

Тем не менее, советские ЭРД были первыми и надолго оставались единственными, работавшими в космосе, – для коррекции орбит спутников связи. Первыми и единственными были и космические ядерные реакторы. В качестве маршевых двигателей ЭРД стали применяться только в наши дни, 30 лет спустя в американских, европейских и японских проектах (с использованием нашего опыта и наших разработок). Интерес к спиральным разгонам у Земли упал и в связи с их продолжительностью, и из-за опасности нахождения КА в радиационных поясах Земли.

За прошедшие десятилетия механика полетов с малой тягой не стояла на месте. Развивались исследования и в ИПМ им. М.В. Келдыша, в отделе Дмитрия Евгеньевича. Большой цикл работ по полетам к малым телам, к кометам и астероидам Главного пояса, КА с МТ был выполнен в 1980-е годы в ИПМ им. М.В.Келдыша под руководством В.А. Егорова и Т.М. Энеева в сотрудничестве с рядом организаций [16-20]. Изменились и цели полетов – ими, после посещения кометы Галлея в 1980 году, стали в первую очередь, малые тела, причем требовалось их “сопровождение”, то есть выравнивание скоростей КА и цели для возможности посадки на нее и забора образцов грунта. Важность доставки реликтового вещества с малых тел была принята, опираясь на исследования Т.М. Энеева по формированию Солнечной системы [21]. Рассмотрены были и многоцелевые полеты к малым телам с сопровождениями и попутными пролетами, которые в наши дни становятся реальностью, правда, в экспедициях других стран. Изменились и подходы исследования, и результаты анализа в сравнении с тем, что было сделано в 60-х годах.

Новый цикл работ по полетам с малой тягой проведен был в 1990-1995 годы в под руководством Т.М. Энеева в кооперации с коллегами из МАИ и других организаций. Прогресс в разработке солнечных батарей позволил рассматривать их как источник энергии для полетов с малой тягой. Исследовались в первую очередь траектории межпланетных полетов, возможности доставки образцов грунта с малых тел [22-30]. Объединенная исследовательская группа под руководством профессора Х. Леба и академика РАН Г.А. Попова подготовила большой Российско-Германский (Европейский) проект "Фортуна" [22]. Полет КА с малой тягой был включен, как один из вариантов, в Российский проект "Фобос-Грунт", являющийся частью Российской федеральной космической программы [25].

В последние годы спиральные разгоны в сфере действия планет снова стали привлекать внимание. Среди рассматриваемых задач – проблемы экономии энергии или выигрыша в полезной массе при выводе (доразгоне) КА на геостационарные орбиты, а также в проектах экспедиций с особенно большими массами КА: для обитаемого полета на Марс, для доставки оборудования по добыче He^3 на Луну, и его продукта с Луны к Земле. В некоторых из этих разгонов спиральные траектории иные, чем рассмотренные ранее: например, они должны возможно быстрее проходить радиационные пояса. В связи с этим рассматриваются спиральные разгоны с большими значениями оскулирующего эксцентриситета [27]. При расчете траекторий межпланетных полетов наряду с малой тягой и вместе с нею широко применяются гравитационные маневры у планет – в проектах экспедиций к малым телам [26, 28], к планетам гигантам и для приближения к Солнцу, на орбиту Меркурия, солнечного зонда.

Символьные вычисления на компьютере, у истоков которых стоит работа Дмитрия Евгеньевича, также на время замерли у нас в стране из-за проблем с машинными ресурсами, а затем стали интенсивно развиваться, причем активную роль в их развитии играли механики и небесные механики [8]. В ИПМ методы компьютерной алгебры развивались А.П. Маркеевым, А.Г. Сокольским, М.Ю. Шашковым, И.Б. Щенковым и другими, но не получили особенно широкого применения, так как требовали больших ресурсов, затрат труда на разработку и адаптацию к особенностям конкретной задачи, средств стыковки с численными пакетами, – так что для реальных сложных задач применять их было сложно. Разрабатывались языки и системы, идейно близкие к методам символьных вычислений, заменяющие и как бы имитирующие их [8, 31]. В настоящее время широко используют известные коммерческие системы компьютерной алгебры – MAPLE и другие.

Подведем итоги. Статья Дмитрия Евгеньевича была одной из первых, открывавших новое направление в динамике космического полета – динамику полетов с двигателями малой тяги. От других, современных ей работ по полетам с малой тягой, ее отличал целый ряд интересных особенностей и новаторских подходов. Эти особенности оказались полезными при решении ряда вопросов механики полета с малой тягой. Разработанные в ней методы символьных вычислений на компьютере и их применение оказались у истоков важной и интересной области нечисленного программирования, активно используемой и для задач механики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Охоцимский Д.Е.* Исследование движения в центральном поле сил под действием постоянного касательного ускорения // Космич. исслед., 1964, т.2, №6, с.817-842.
2. *Гродзовский Г.Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В.* Механика космического полета с малой тягой. - М.: Наука, 1978, 485 с.
3. *Белецкий В.В., Егоров В.А.* Межпланетные полеты с двигателем постоянной мощности // Космич. исслед., 1964, т.2, №3. с.360-391.
4. *Белецкий В.В., Егоров В.А.* Разгон космического аппарата в сфере действия планеты // Космич. исслед., 1964, т.2, №3, с.392-407.
5. *Белецкий В.В., Егоров В.А.*, *Ершов В.Г.* Анализ траекторий межпланетных полетов с двигателями постоянной мощности // Космич. исслед., 1965, т.3, №4, с.507-522.
6. *Белецкий В.В., Голубков В.В., Егоров В.А.*, *Ершов В.Г.* Исследование траекторий полета с малой тягой // Второй Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике. Аннотации докладов. - М.: Изд-во АН СССР, 1964.
7. *Охоцимский Д.Е., Кондрашова И.Л., Власова З.П., Казакова Р.К.* Расчет точечного взрыва с учетом противодавления // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. - М.: Изд-во АН СССР, 1957, т.L, 65 с.
8. *Грошева М.В., Ефимов Г.Б., Самсонов В.А.* История использования аналитических вычислений в задачах механики. - М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2005, 87 с.
9. *Дородницын А.А.* Решение математических и логических задач на быстродействующих ЭВМ // Всесоюзная конференция «Пути развития советского математического машиностроения и приборостроения», Москва, март 1956 г. Пленарные доклады. – М.: ВИНИТИ, 1956.

10. *Ершов А.П., Шура-Бура М.Р.* Становление программирования в СССР. Ч.1. Начальное развитие. Ч.2. Переход ко второму поколению языков и машин. – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1976, препр. №12, 42 с.; №13, 41с. Также: Кибернетика, 1976, №6, с.141-160.
11. *Ефимов Г.Б., Охоцимский Д.Е.* Об оптимальном разгоне в центральном поле // Космич. исслед., 1965, т.3, №6, с.811-835.
12. *Белецкий В.В.* Очерки по механике космического полета. Изд. 3-е. - М.: Изд-во ЛКИ, 2009, 432 с.
13. *Ефимов Г.Б.* Предельное решение в задаче об оптимальном разгоне аппарата с малой тягой в центральном поле // Космич. исслед., 1970, т.8, №1, с.26-45.
14. *Охоцимский Д.Е., Энеев Т.М., Таратынова Г.П.* Определение времени существования искусственного спутника Земли и исследование вековых возмущений его орбиты // Успехи физ. наук, 1957, т.63, №1а, с.33-50.
15. *Ларичева В.В., Ефимов Г.Б.* Асимптотика несимметричных колебаний маятника и разнотипность решений уравнений разгона точки с малой тягой в центральном поле притяжения. - М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 1983, препр. №56, 27с.; №57, 25 с.; №108, 28 с.
16. *Егоров В.А., Ефимов Г.Б., Ахметшин Р.З. и др.* О перелетах КА с малой тягой к кометам и астероидам // Исследование творчества основоположников космонавтики и ее современные проблемы. - М.: Наука, 1989, с.134-143.
17. *Егоров В.А., Ефимов Г.Б., Ахметшин Р.З и др.* Энергетические затраты и особенности траекторий одноцелевых и многоцелевых перелетов КА с малой тягой к телам Солнечной системы // Исследование творчества основоположников космонавтики и ее современные проблемы. - М.: Наука, 1989, с.144-152.
18. *Егоров В.А., Энеев Т.М., Ефимов Г.Б., Ахметшин Р.З. и др.* Траекторно-баллистический анализ полетов к астероидам и кометам космических аппаратов с малой тягой // Интеллектуальные системы автономных аппаратов для космоса и океана. – Ред. В.В. Бугровский. М.: Изд.-во Инст. проблем управления РАН, 1997, с.40-72.
19. *Eneev T.M., Akhmetshin R.Z., Efimov G.B., Yegorov V.A.* Asteroid and Comet rendezvous missions using low-thrust nuclear propulsion // Space Forum. International Journal of Space Politic, Science, Technology, 2000, v.5, p.279-305.
20. *Ефимов Г.Б.* Проблемы управления при нештатной ситуации в полете космического аппарата с двигателем малой тяги // Известия РАН. Теория и системы управления, 2008, т.47, №4. с.109-117.
21. *Энеев Т.М.* Актуальные задачи исследования дальнего космоса // Космич. исслед., 2005, т.43, №6, с.403-407.
22. *Попов Г.А., Леб Х.В., Энеев Т.М., Ефимов Г.Б., Константинов М.С. и др.* Advanced interplanetary missions using nuclear-electric propulsion // Study report. (Перспективные межпланетные полеты с использованием электроракетных двигателей и ядерных энергетических установок. Отчет Объединенной Россий-

ско-Германской группы). - Bonn-Moscow-Paris, June 1995, 202 p.

23. *Энеев Т.М., Ахметшин Р.З., Ефимов Г.Б., Егоров В.А.* Межпланетные полеты космических аппаратов с электроракетными двигателями // Пространства жизни. К 85-летию акад. Б.В.Раушенбаха. – М.: Наука, 1999, с.164-172.
24. *Энеев Т.М., Ефимов Г.Б., Константинов М.С. и др.* Баллистический анализ межпланетных полетов космических аппаратов с электроракетными двигателями // Математич. моделир., 2000, т.12, №5, с.33-38.
25. *Авдуевский В.С., Аким Э.Л., Маров М.Я., Попов Г.А., Энеев Т.М. и др*. Космический проект "Фобос-Грунт": основные характеристики и стратегия развития // Космонавтика и ракетостроение, 2000, т.19, №1, с.8–21.
26. *Akhmetshin R.Z., Eneev T.M.* Main belt asteroid missions with low thrust and gravity assist of Mars // 17th International Symposium on Space Flight Dynamics. - M., 2003. Proceedings. - M.: KIAM, 2003, v.2, p.307-313.
27. *Ахметшин Р.З.* Плоская задача оптимального перелета КА с малой тягой с высокоэллиптической орбиты на геостационар // Космич. исслед., 2004, т.42, №3, с.248-259.
28. *Ефимов Г.Б.* О возможности доставки образцов реликтового вещества с астероидов Главного пояса космическим аппаратом с ЭРД // Космич. исслед., 2007, т.45, №3, с.226-235.
29. *Ахметшин Р.З., Ефимов Г.Б.* О некоторых задачах в проекте "Фобос-Грунт" // Актуальные проблемы авиационных и аэрокосмических систем, 2007, v.12, №1(23), с.40-50.
30. *Энеев Т.М., Ахметшин Р.З., Ефимов Г.Б.* Траектории экспедиций космических аппаратов с двигателем малой тяги по доставке образцов грунта с астероидов Главного пояса и Фобоса // Космич. исслед., 2009, т.47, №1, с.38-47.
31. *Ефимов Г.Б., Зуева Е.Ю., Щенков И.Б.* Компьютерная алгебра в Институте прикладной математики им. М.В.Келдыша // Математич. моделир., 2001, v.13, №6, с.11-18. Также: *Ефимов Г.Б.* Из истории развития и применения Компьютерной алгебры в ИПМ им. М.В. Келдыша // Математич. машины и системы, - Киев, 2003, №2, с.96-105.