Краснознаменная ордена Ленина Военно-Воздушная Инженерная Академия
имени проф. Н. Е. Жуковского



Инженер-капитан БАБЕНКО К.И.

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИЛ И МОМЕНТОВ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА КОЛЕБЛЮЩЕЕСЯ СТРЕЛОВИДНОЕ В ПЛАНЕ КРЫЛО В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ.



ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени кандидата технических наук.

Руководитель
профессор ПУТИЛОВ А.И.



Москва 1948 г.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Краснознаменная ордена Ленина Военно-Воздушная Инженерная Академия
имени проф. Н. Е. Жуковского

# ВВЕДЕНИЕ.

Вопросу вычисления аэродинамических сил при установившихся гармонических колебаниях тонкого крыла посвящена обширная литература. Мы считаем уместным не останавливаться на истории и на важности этого вопроса, потому что это хорошо сделано в книге А.И.Некрасова /1/. Мы затронем только работы, касающиеся вопроса о движении со сверхзвуковой скоростью вибрирующего профиля в сжимаемом газе. Насколько нам известно, впервые в Советском Союзе эта задача была исследована Е.А.Красильщиковой /2/, которая дала формулу для потенциала скоростей линеаризированной задачи. В дальнейшем М.Д.Хаскинд и С.В.Фалькович /3/ решили задачу о вибрациях треугольного крыла, представив потенциал скоростей в виде ряда. Л.А.Галин /4/ исследовал вопрос о колеблющемся крыле прямоугольной формы в плане. Основываясь на известных фактах о конических течениях и используя известное выражение потенциала скоростей прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком, он дал формулу для потенциала скоростей колеблющегося прямоугольного крыла, изогнутого в направлении потока, в виде ряда.

Однако, все эти работы страдают тем дефектом, что они не дают эффективных выражений для сил, действующих на крыло.

Мы поставили себе целью найти эффективные выражения для сил, действующих на колеблющееся крыло, ограничиваясь простыми, но практически важными, формами крыльев в плане, а именно, стреловидного крыла с прямолинейными обрезами и прямоугольного крыла.

В настоящей работе мы проводим идею сведения задачи отыскания потенциала скоростей колеблющегося крыла к задаче отыскания потенциала скоростей при установившемся движении крыла. Эта идея, заимствованная из теории дифференциальных уравнений в частных производных, используется и в работе / 4 /.

Реализуя эту идею, мы в §6 получили формулы для потенциала скоростей колеблющегося стреловидного крыла. В §§ 8,9 мы свели задачу о вибрациях треугольного крыла, находящегося внутри конуса Маха, к задаче об установившемся движении крыла.

В процессе написания этой работы появились заметки Е.А. Красильщиковой, напечатанные в ДАН / 5 /. Результаты одной из этих заметок перекрываются с результатами § 5.

Ясно, что сравнительно простые выражения для потенциала скоростей мы получили потому, что для взятых форм в плане приходится учитывать только концевые кромки, а не вихревую пелену. Заметим, что можно найти эффективно потенциал скоростей и для крыльев с некоторыми иными формами в плане в случае, если нужно будет учитывать только концевые кромки. Для этого придется решать "парные" интегральные уравнения и результаты будут достаточно сложными.

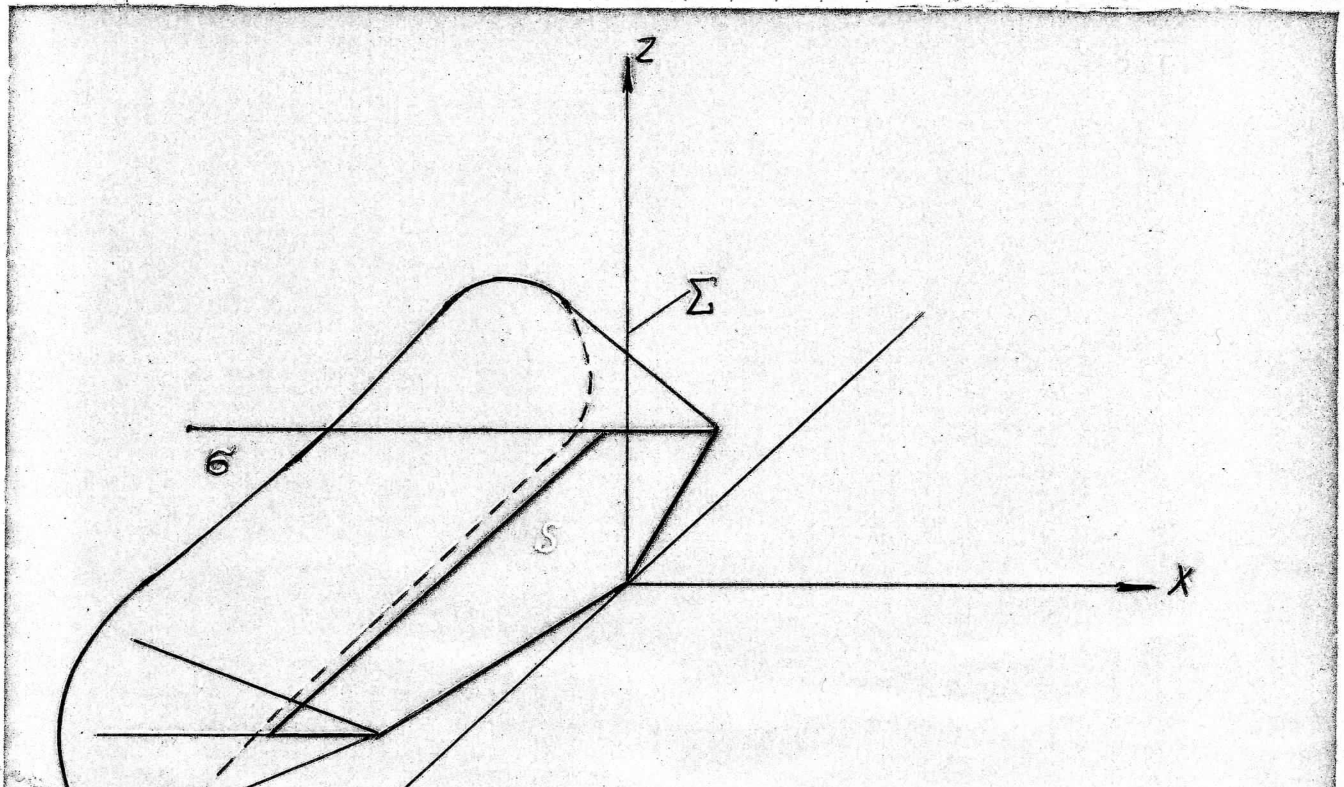
Решение поставленной задачи вылилось в целый ряд, в сущности, очень простых, но громоздких выкладок, за что мы просим извинения у читателей. Но мы думаем, что вряд ли в этом вопросе можно добиться большой элегантности и избежать подобных выкладок.

Как результат проделанных вычислений, в § 10 мы приводим формулы для силы и момента, действующих на прямоугольное колеблющееся крыло, которые при соответствующих изменениях могут быть написаны и для стреловидного крыла в случае, если угол стреловидности больше угла Маха.

Краснознаменная ордена Ленина Военно-Воздушная Инженерная Академия
имени проф. Н. Е. Жуковского

## § I. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

Рассмотрим тонкое крыло произвольной формы в плане, движущееся поступательно с постоянной скоростью $v$ , большей скорости звука, под малым углом атаки. Пусть крыло совершает добавочные малые гармонические колебания около стационарного поступательного движения. Возьмем подвижную систему координат $Oxyz$ , перемещающуюся поступательно со скоростью $v$ (фиг. I). Считая возмущенное движение газа безвихревым, имеем для потенциала скоростей $\varphi$ в подвижной системе координат следующее линеаризированное уравнение




Фиг. 1

Фото № 1

$$(1-M^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+\frac{2V}{a^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial t}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0 \qquad (I.1)$$

где $a$ - скорость звука в покоящемся газе.

Уравнение поверхности крыла можно представить в виде

$$z(x,y,t)=z_0(x,y)+z_1(x,y)\cos\omega t+z_2\sin\omega t=z_0(x,y)+\mathcal{R}\,z(x,y)e^{i\omega t} \qquad (I.2)$$

Предполагая колебания крыла установившимися, положим

$$\varphi(x,y,z,t)=\varphi_0(x,y,z)+\varphi_1(x,y,z)\cos\omega t+\varphi_2(x,y,z)\sin\omega t=$$

$$=\varphi_0(x,y,z)+\mathcal{R}\,\Phi(x,y,z)e^{i\omega t}=\varphi_0(x,y,z)+\mathcal{R}\,\Phi(x,y,z,t) \qquad (I.3)$$

где $\varphi_0$ - потенциал скоростей, отвечающий установившемуся поступательному движению крыла, а $\Phi(x,y,z,t)$ - потенциал скоростей, отвечающий колебаниям крыла.

На поверхности крыла имеем следующие условия обтекания

$$\left.\frac{\partial\varphi_0(x,y,z)}{\partial z}\right|_{z=0}=Z_0(x,y)\,,\qquad \left.\frac{\partial\Phi(x,y,z)}{\partial z}\right|_{z=0}=Z(x,y) \qquad (I.4)$$

Вне огибающей конусов Маха $\Sigma$

$$\varphi(x,y,z,t)=0 \qquad (I.5)$$

Однако, условий (I.4) и (I.5) недостаточно для полного определения $\varphi(x,y,z,t)$. Предположим, что

$$\varphi(x,y,z,t)=-\varphi(x,y,-z,t) \qquad (I.6)$$

что отвечает физической сущности задачи.

Потенциал скоростей терпит разрыв на крыле и на вихревой пелене $\sigma$, которая сходит с крыла. Мы считаем, что вихревая пелена лежит в плоскости $z=0$ , простирается в бесконечность, и что ширина ее равна размаху крыла. На вихревой пелене нормальная составляющая скорости непрерывна, т.е.

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right|_{z=+0} = \left.\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right|_{z=-0} \qquad (I.7)$$

Записывая уравнение Лагранжа в подвижной системе координат и пренебрегая малыми величинами второго порядка, найдем

$$P = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} + V\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right] \approx -\frac{\partial \varphi}{\partial t} + V\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

Так как давление $p$ при переходе через поверхность $\sigma$ остается непрерывным, то на $\sigma$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - V\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{z=+0} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - V\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{z=-0}$$

или на $\sigma$

$$\left.\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}\right|_{z=+0} = \left.\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}\right|_{z=-0} \qquad (I.8)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} - V\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{z=+0} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} - V\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{z=-0} \qquad (I.9)$$

Из условия (I.6) следует, что в плоскости $z=0$ всюду вне крыла и вне вихревой пелены $\sigma$

$$\varphi_0(x,y,0) = 0 \qquad (I.10)$$

$$\Phi(x,y,0,t) = 0 \qquad (I.11)$$

Таким образом, потенциал скоростей определяется уравнением (I.I) и условиями (I.4),(I.5),(I.6),(I.7),(I.8) и (I.9).

Мы займемся отысканием потенциала, отвечающего колебаниям

Краснознаменная ордена Ленина Военно-Воздушная Инженерная Академия имени проф. Н. Е. Жуковского

крыла. Потенциал $\varphi_0(x,y,z)$, отвечающий установившемуся поступательному движению, определяется более просто. Так как

$$\varphi(x,y,z,t) = \varphi_0(x,y,z) + \mathcal{K}\mathcal{F}(x,y,z)e^{i\omega t}$$

то для определения $\mathcal{F}(x,y,z)$ (I.I) дает уравнение

$$(1-M^2)\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial z^2} + \frac{2V\omega i}{a^2}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x} + \frac{\omega^2}{a^2}\mathcal{F} = 0$$

Для того чтобы в этом уравнении избавиться от члена $\frac{2V\omega i}{a^2}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x}$ поступим так, как это принято в теории дифференциальных уравнений в частных производных, а именно, положим

$$\mathcal{F}(x,y,z) = \psi(x,y,z)e^{\beta x}$$

Тогда для функции $\psi(x,y,z)$ получим следующее уравнение

$$(M^2-1)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + k^2\psi = 0 \qquad (I.I2)$$

где

$$\beta = \frac{\omega M i}{a(M^2-1)}, \qquad k = \frac{\omega}{a\sqrt{M^2-1}} \qquad (I.I3)$$

Очевидным образом из условий (I.5)-(I.9) следуют условия для функции $\psi$. Положив

$$x_1 = \frac{x}{\sqrt{M^2-1}}, \quad y_1 = y, \quad z_1 = z \qquad (1.130)$$

и опуская в дальнейшем индексы, мы получим уравнение

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + k^2\psi = 0. \qquad (I.I4)$$

Таким образом, задача определения потенциала скоростей приведена к отысканию решения уравнения (I.I4) такого, что функция

$$\psi(x,y,z)e^{\beta x + i\omega t}$$

удовлетворяет условиям (I.4)-(I.9).

Краснознаменная ордена Ленина Военно-Воздушная Инженерная Академия
имени проф. Н. Е. Жуковского

## § 2. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+k^2\psi=0$

Рассмотрим уравнение

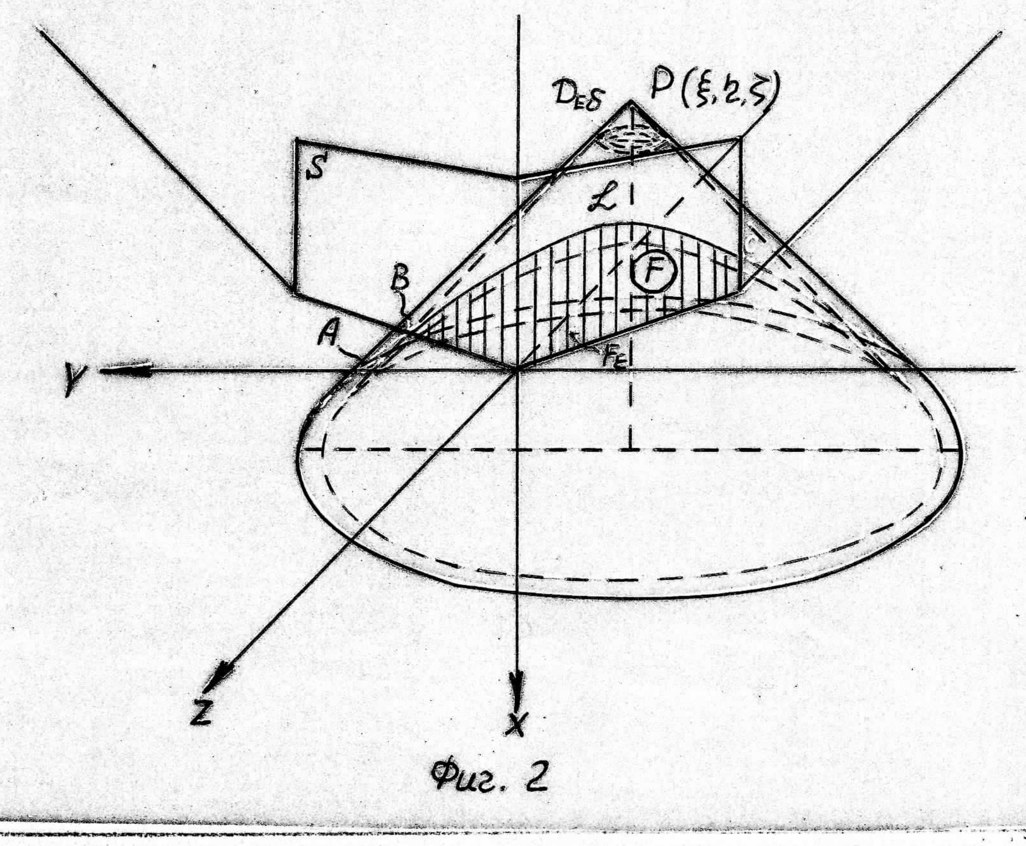
$$\mathcal{L}(\psi)=\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+k^2\psi=0 \qquad (2.I)$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям (I.4), (I.5) и (I.6) дается формулой, полученной Красильщиковой / 2 /.

Так как этой формулой в дальнейшем нам придется часто пользоваться, то для полноты изложения мы позволим себе привести здесь краткий вывод этой формулы.

В сущности, эта формула содержится в формулах, полученных для решения уравнений типа (2.I) / 7, 8 /. При выводе мы будем следовать методу Адамара.

Итак, мы будем искать решение уравнения (2.I), нечетное относительно $Z$ и такое, что $\left.\frac{\partial\psi}{\partial z}\right|_{z=0}=\mathcal{F}(x,y)$ на $S$. (фиг. 2).




Фиг. 2

Фото № 2

Краснознаменная ордена Ленина Военно-Воздушная Инженерная Академия
имени проф. Н. Е. Жуковского

Обозначим $\Gamma = (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2 - (z-\zeta)^2$. Основное решение уравнения (2.I) имеет вид

$$V(\Gamma) = \frac{\cos k\sqrt{\Gamma}}{\sqrt{\Gamma}} \qquad (2.2)$$

Возьмем для фиксированной точки $P$ пространственную область $G$, лежащую в полупространстве $z>0$ и ограниченную характеристическим конусом $\Gamma=0$, огибающей конусов Маха и плоскостью $z=0$. Отсечем вершину этой области секущей плоскостью $x=\xi+\delta$, $\delta>0$.

Возьмем область $\Gamma_\varepsilon = (1-\varepsilon)^2(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2 - (z-\zeta)^2 > 0$ $0<\varepsilon<1$ и рассмотрим область $G_{\varepsilon\delta}$ $(z>0)$, ограниченную конусом $\Gamma_\varepsilon=0$, секущей плоскостью $x=\xi+\delta$ и огибающей конусов Маха и плоскостью $z=0$.

Проинтегрируем по области $G_{\varepsilon\delta}$ выражение

$$VL(\psi) - \psi L(V) = (V\psi_x)_x - (V\psi_y)_y - (V\psi_z)_z -$$

$$-(\psi V_x)_x + (\psi V_y)_y + (\psi V_z)_z \equiv 0$$

где $\psi$ решение уравнения (2.I), а $V$ определяется (2.2). Применяя формулу Грина мы получим соотношение

$$\iint\limits_{S_{\varepsilon\delta}} \{V(\psi_x x_\nu - \psi_y y_\nu - \psi_z z_\nu) - \psi(V_x x_\nu - V_y y_\nu - V_z z_\nu)\} do = 0 \qquad (2.3)$$

где $S_{\varepsilon\delta}$ поверхность области $G_{\varepsilon\delta}$, $x_\nu, y_\nu, z_\nu$ - направляющие косинусы внешней нормали к $S_{\varepsilon\delta}$ и $do$ - элемент поверхности. Обозначим через $D_{\varepsilon\delta}$ - верхнее основание усеченного конуса, через $M_{\varepsilon\delta}$ часть поверхности конуса $\Gamma_\varepsilon$, отсекаемую огибающей конусов Маха и плоскостью $z=0$, и, наконец, через $F_\varepsilon$ область в плоскости $z=0$, вырезаемую конусом $\Gamma_\varepsilon=0$ и огибающей конусов Маха.

Тогда (2.3) можно переписать так:

$$-\iint\limits_{D_{\varepsilon\delta}}\{V\psi_x-\psi V_x\}dzdy+\iint\limits_{F_\varepsilon}\{V\psi_z-\psi V_z\}dxdy+$$

$$+\iint\limits_{M_{\varepsilon\delta}}\{V(\psi_x x_\nu-\psi_y y_\nu-\psi_z z_\nu)-\psi(V_x x_\nu-V_y y_\nu-V_z z_\nu)\}do=0 \qquad (2.4)$$

Если мы обозначим через $\overline{\iint}$ конечную часть интеграла /7,8/, то из ур-я (2.4) получим

$$\overline{\iint\limits_{D_{\varepsilon\delta}}}\{V\psi_x-\psi V_x\}dydz+\overline{\iint\limits_{F_\varepsilon}}\{V\psi_z-\psi V_z\}dxdy+$$

$$+\overline{\iint\limits_{M_{\varepsilon\delta}}}\{V(\psi_x x_\nu-\psi_y y_\nu-\psi_z z_\nu)-\psi(V_x x_\nu-V_y y_\nu-V_z z_\nu)\}do=0$$

Положив $U=\cos\lambda\sqrt{\Gamma}$ и обозначив через $\bar{U}$ значение $U$ на гиперболе $\mathcal{L}$, через $\bar{\psi}$ значение $\psi$ на гиперболе $\mathcal{L}$ и опуская промежуточные вычисления, получим

$$\overline{\iint\limits_{F_\varepsilon}}\{V\psi_z-\psi V_z\}dxdy=\overline{\iint\limits_{F}}\frac{U\psi_z-\psi U_z}{\sqrt{\Gamma}}dxdy+$$

$$+\zeta\iint\limits_{F}\frac{\psi U-\bar{\psi}\bar{U}}{\Gamma^{3/2}}dxdy-\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2}\bar{\psi}\frac{ch\theta\, d\theta}{\sqrt{ch^2\theta_0-ch^2\theta}}, \qquad (2.5)$$

где

$$\frac{x-\xi}{y-\eta}=cth\theta$$

а $x, y$ - координаты точки гиперболы $\mathcal{L}$ ; $\theta_0, \theta_1, \theta_2$ - углы, соответствующие точкам $A$, $B$ и $C$.

Аналогично

$$\lim_{\delta\to0}\overline{\iint\limits_{D_{\varepsilon\delta}}}\{V\psi_x-\psi V_x\}dydz=2\pi\,\psi(\xi,\eta,\zeta) \qquad (2.6)$$

И, наконец, легко видеть, что

$$\lim_{\delta\to0}\overline{\iint\limits_{M_{\varepsilon\delta}}}\{V(\psi_x x_\nu-\psi_y y_\nu-\psi_z z_\nu)-\psi(V_x x_\nu-V_y y_\nu-V_z z_\nu)\}do=0 \qquad (2.7)$$

Складывая (2.5), (2.6) и (2.7), получим

$$-2\pi\psi(\xi,\eta,\zeta)+\iint\limits_{F}\frac{U\psi_z-\psi U_z}{\Gamma^{1/2}}dxdy+\zeta\iint\limits_{F}\frac{\psi U-\bar\psi\bar U}{\Gamma^{3/2}}dxdy-\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\bar\psi\,ch\,\theta\,d\theta}{\sqrt{ch^2\theta_0-ch^2\theta}}=0 \quad (2.8)$$

Если вместо $G_{\varepsilon\delta}$ возьмем область $\bar G_{\varepsilon\delta}$, лежащую в полупространстве $z<0$ и ограниченную конусом $\Gamma_\varepsilon=0$, огибающей конусов Маха, плоскостью $z=0$, и проделаем аналогичные вычисления, то вместо (2.8) получим

$$\iint\limits_{F}\frac{U\psi_z+\psi U_z}{\Gamma^{1/2}}dxdy-\zeta\iint\limits_{F}\frac{\psi U-\bar\psi\bar U}{\Gamma^{3/2}}dxdy+\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2}\bar\psi\frac{ch\,\theta\,d\theta}{\sqrt{ch^2\theta_0-ch^2\theta}}=0 \quad (2.9)$$

Складывая (2.8) и (2.9), найдем искомую формулу

$$\psi(\xi,\eta,\zeta)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{F}\frac{\psi_z(x,y,0)\cos k\sqrt{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2-\zeta^2}}{\sqrt{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2-\zeta^2}}dxdy \quad (2.10)$$

Пользование этой формулой представляет те неудобства, что нам неизвестно значение $\left.\frac{\partial\psi}{\partial z}\right|_{z=0}$ вне крыла. Поэтому в следующих параграфах мы попытаемся обойти эту трудность для крыльев простых форм в плане. Полагая в формуле (2.10) $k=0$, получим формулу для потенциала скоростей установившегося движения крыла.

Так как $\psi(\xi,\eta,0)=0$ вне крыла $S$ и вне вихревой пелены $\sigma$, то формула (2.10) дает нам интегральное уравнение для $\psi_z(x,y,0)$ в указанной области. Для крыльев простой формы в плане это уравнение удается решить. В дальнейшем мы займемся решением этого интегрального уравнения.

Краснознаменная ордена Ленина Военно-Воздушная Инженерная Академия
имени проф. Н. Е. Жуковского

## § 3. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ УР-Я $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+k^2\psi=0$ ЧЕРЕЗ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ $\frac{\partial^2\psi_0}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi_0}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\psi_0}{\partial z^2}=0$.

Пусть в области $G$, ограниченной огибающей $\Sigma$ характеристических конусов уравнения (3.I), вершины которых находятся на некоторой кривой $L$ (фиг. 3), дано $\psi_0(x,y,z)$ - решение уравнения

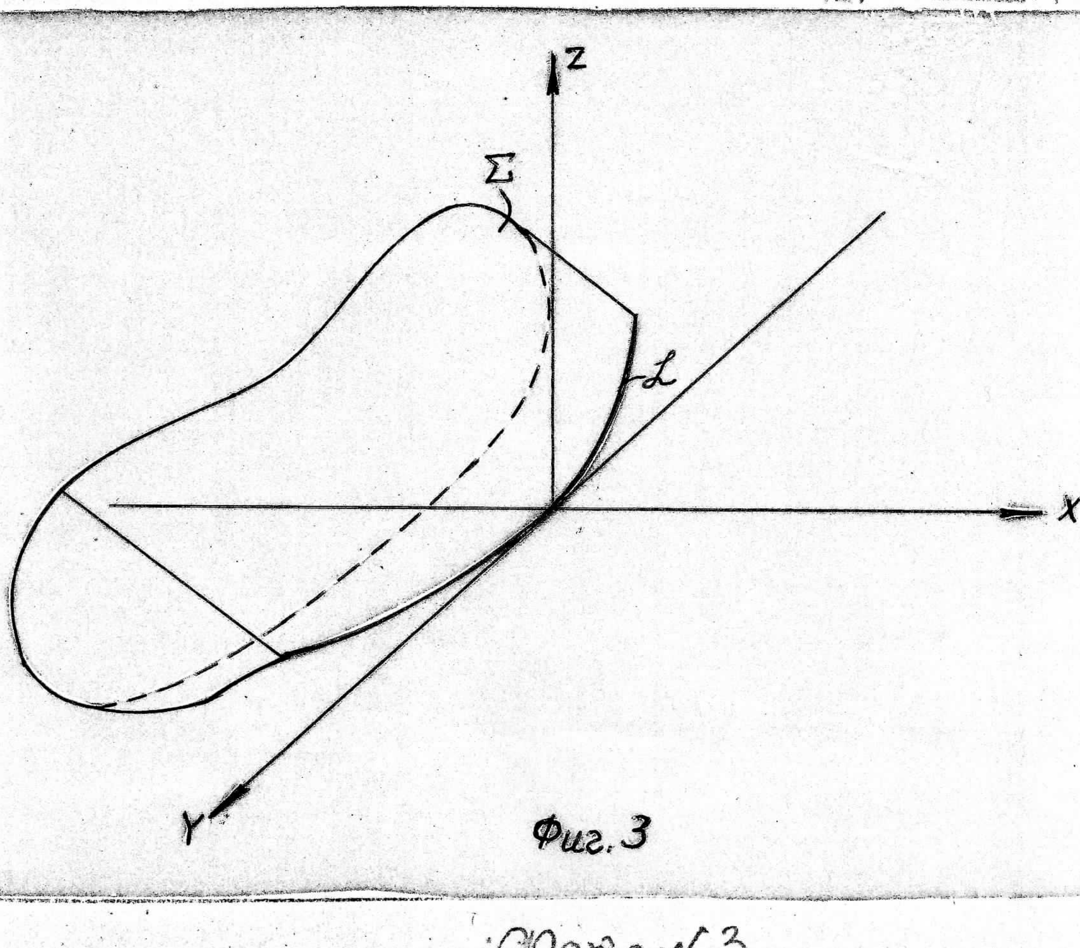
$$\frac{\partial^2\psi_0}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi_0}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\psi_0}{\partial z^2}=0$$

Предположим, что для $z\to 0$

$$\psi_0(x,y,z)\to 0 \qquad (3.I)$$

и

$$\frac{\partial\psi_0(x,y,z)}{\partial x}\to 0,\quad \frac{\partial\psi_0}{\partial y}\to 0,\quad \frac{\partial\psi_0}{\partial z}\to 0 \qquad (3.2)$$




Фиг. 3

Фото №3

когда точка $P(x,y,z)$ стремится к $\Sigma$ по какой либо прямой, параллельной оси $Ox$. Тогда мы утверждаем, что функция

$$\psi(x,y,z)=\psi_0(x,y,z)-\int_0^x \frac{\partial}{\partial\xi}J_0(k\sqrt{x^2-\xi^2})\,\psi_0(\xi,y,z)\,d\xi \tag{3.3}$$

будет решением уравнения (2.I). Так как $\psi_0=0$ вне $\Sigma$, то нижний предел интеграла (3.3) будет функцией от $y$ и $z$. Обозначим его $\theta(y,z)$.

Произведем проверку того, что (3.3) будет решением уравнения (2.I). Для этого вычислим

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\partial\psi_0}{\partial y}-\int_\theta^x \frac{\partial}{\partial\xi}J_0(k\sqrt{x^2-\xi^2})\,\frac{\partial\psi_0}{\partial y}\,d\xi+\psi_0(\theta,y,z)\frac{\partial\theta}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}J_0\right]_{\xi=\theta}=$$

$$=\frac{\partial\psi_0}{\partial y}-\int_\theta^x \frac{\partial}{\partial\xi}J_0(k\sqrt{x^2-\xi^2})\,\frac{\partial\psi_0}{\partial y}\,d\xi$$

в силу (3.I). Далее,

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\psi_0}{\partial y^2}-\int_\theta^x \frac{\partial}{\partial\xi}J_0(k\sqrt{x^2-\xi^2})\,\frac{\partial^2\psi_0}{\partial y^2}\,d\xi+\left[\frac{\partial\psi_0(\theta,y,z)}{\partial y}\frac{\partial J_0}{\partial\xi}\right]_{\xi=\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y}=$$

$$=\frac{\partial^2\psi_0}{\partial y^2}-\int_\theta^x \frac{\partial}{\partial\xi}J_0(k\sqrt{x^2-\xi^2})\,\frac{\partial^2\psi_0}{\partial y^2}\,d\xi \tag{3.4}$$

в силу (3.2).

Аналогично

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=\frac{\partial^2\psi_0}{\partial z^2}-\int_\theta^x \frac{\partial}{\partial\xi}J_0(k\sqrt{x^2-\xi^2})\,\frac{\partial^2\psi_0}{\partial z^2}\,d\xi \tag{3.5}$$

Складывая (3.4) и (3.5) и учитывая то, что

$$\frac{\partial^2\psi_0}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\psi_0}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi_0}{\partial z^2}$$

получим

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=\frac{\partial^2\psi_0}{\partial x^2}-\int_\theta^x \frac{\partial}{\partial\xi}J_0(k\sqrt{x^2-\xi^2})\,\frac{\partial^2\psi_0}{\partial\xi^2}\,d\xi \tag{3.6}$$

Далее

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{\theta}^{x}\frac{\partial}{\partial\xi}J_0(k\sqrt{x^2-\xi^2})\,\psi_0(\xi,y,z)\,d\xi = \frac{k^2}{2}x\,\psi_0(x,y,z) + \int_{\theta}^{x}\frac{\partial^2}{\partial x\partial\xi}J_0(k\sqrt{x^2-\xi^2})\,\psi_0(\xi,y,z)\,d\xi =$$

$$= \frac{k^2}{2}x\,\psi_0(x,y,z) + \frac{\partial}{\partial x}J_0(k\sqrt{x^2-\xi^2})\,\psi_0(\xi,y,z)\Big|_{\xi=\theta}^{\xi=x} - \int_{\theta}^{x}\frac{\partial}{\partial x}J_0(k\sqrt{x^2-\xi^2})\,\frac{\partial\psi_0}{\partial\xi}(\xi,y,z)\,d\xi =$$

$$= -\int_{\theta}^{x}\frac{\partial}{\partial x}J_0(k\sqrt{x^2-\xi^2})\,\frac{\partial\psi_0(\xi,y,z)}{\partial\xi}\,d\xi$$

в силу (3.I). Далее

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_{\theta}^{x}\frac{\partial}{\partial\xi}J_0(k\sqrt{x^2-\xi^2})\,\psi_0(\xi,y,z)\,d\xi = \frac{k^2x}{2}\,\frac{\partial\psi_0(x,y,z)}{\partial x} -$$

$$- \int_{\theta}^{x}\frac{\partial^2}{\partial x^2}J_0(k\sqrt{x^2-\xi^2})\,\frac{\partial\psi_0(\xi,y,z)}{\partial\xi}\,d\xi\,. \qquad (3.7)$$

Легко проверить, что имеет место соотношение

$$\frac{\partial^2 J_0(k\sqrt{x^2-\xi^2})}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 J_0(k\sqrt{x^2-\xi^2})}{\partial\xi^2} - k^2 J_0(k\sqrt{x^2-\xi^2}).$$

и, следовательно, (3.7) можно переписать так

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_{\theta}^{x}\frac{\partial}{\partial\xi}J_0(k\sqrt{x^2-\xi^2})\,\psi_0(\xi,y,z)\,d\xi = \frac{k^2x}{2}\,\frac{\partial\psi_0(x,y,z)}{\partial x} -$$

$$-\int_{\theta}^{x}\frac{\partial^2 J_0(k\sqrt{x^2-\xi^2})}{\partial\xi^2}\,\frac{\partial\psi_0(\xi,y,z)}{\partial\xi}\,d\xi + k^2\int_{\theta}^{x}J_0(k\sqrt{x^2-\xi^2})\,\frac{\partial\psi_0(\xi,y,z)}{\partial\xi}\,d\xi =$$

$$= \frac{k^2x}{2}\,\frac{\partial\psi_0(x,y,z)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial\xi}J_0(k\sqrt{x^2-\xi^2})\,\frac{\partial\psi_0}{\partial\xi}\Big|_{\theta}^{x} + \int_{\theta}^{x}\frac{\partial}{\partial\xi}J_0(k\sqrt{x^2-\xi^2})\,\frac{\partial^2\psi_0(\xi,y,z)}{\partial\xi^2}\,d\xi +$$

$$+ k^2 J_0(k\sqrt{x^2-\xi^2})\,\psi_0(\xi,y,z)\Big|_{\theta}^{x} - k^2\int_{\theta}^{x}\frac{\partial J_0(k\sqrt{x^2-\xi^2})}{\partial\xi}\,\psi_0(\xi,y,z)\,d\xi =$$

$$= \int_{\theta}^{x}\frac{\partial}{\partial\xi}J_0(k\sqrt{x^2-\xi^2})\,\frac{\partial^2\psi_0(\xi,y,z)}{\partial\xi^2}\,d\xi + k^2\psi_0(x,y,z) - k^2\int_{\theta}^{x}\frac{\partial J_0(k\sqrt{x^2-\xi^2})}{\partial\xi}\,\psi_0(\xi,y,z)\,d\xi =$$

$$= k^2\psi(x,y,z) + \int_{\theta}^{x}\frac{\partial}{\partial\xi}J_0(k\sqrt{x^2-\xi^2})\,\frac{\partial^2\psi_0(\xi,y,z)}{\partial\xi^2}\,d\xi\,,$$

в силу (3.I), (3.2) и (3.3). Таким образом

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^x \frac{\partial}{\partial \xi} J_0\left(k\sqrt{x^2-\xi^2}\right)\psi_0(\xi,y,z)\,d\xi = k^2\psi + \int_0^x \frac{\partial}{\partial \xi} J_0\left(k\sqrt{x^2-\xi^2}\right)\frac{\partial^2\psi_0(\xi,y,z)}{\partial \xi^2}\,d\xi \qquad (3.8)$$

Соединяя (3.6) и (3.8) убедимся, что функция $\psi(x,y,z)$ удовлетворяет уравнению (2.I):

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + k^2\psi = \frac{\partial^2\psi_0}{\partial x^2} - k^2\psi - \int_0^x \frac{\partial}{\partial \xi} J_0\left(k\sqrt{x^2-\xi^2}\right)\frac{\partial^2\psi_0(\xi,y,z)}{\partial \xi^2}\,d\xi -$$

$$- \frac{\partial^2\psi_0}{\partial x^2} + \int_0^x \frac{\partial}{\partial \xi} J_0\left(k\sqrt{x^2-\xi^2}\right)\frac{\partial^2\psi_0(\xi,y,z)}{\partial \xi^2}\,d\xi + k^2\psi \equiv 0$$

Формулой (3.3) пользовался Галин в работе / 4 /, но его доказательство, данное для случая прямоугольного крыла, некорректно без некоторых предположений, не оговоренных при доказательстве. В работе Магнарадзе / 6 / содержится подобная формула, но выведенная в других предположениях.

Если функция $\psi_0(x,y,z)$ определяется равенством

$$\psi_0(x,y,z) = \frac{1}{\pi}\iint_F \frac{f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2-z^2}}$$

где площадь интегрирования $F$ определена как в § 2 и если функция $f(\xi,\eta)$ обладает первыми производными, удовлетворяющими условию $Lip\,\alpha,\ \alpha>0$, то условия (3.I) и (3.2) выполняются.*)

В нашем случае $f(\xi,\eta)$ будет обладать ограниченными вторыми производными за исключением двух отрезков прямых $\eta=\pm a$, в окрестности которых она растет как $\frac{1}{|\eta-a|^{3/2}}$. Можно показать, что и в этом случае условия (3.I) и (3.2) будут выполняться, и, стало быть, функция $\psi(x,y,z)$, определяемая равенством (3.3), будет решением уравнения (2.I).

Формула (3.3) является интегральным уравнением для $\frac{\partial\psi_0}{\partial z}\Big|_{z=0}$ в случае, если $\frac{\partial\psi}{\partial z}\Big|_{z=0}$ известно. А именно

*) Как нам заметил Л.И. Седов условия (3.2) не всегда будут выполняться, но если учесть, что $\frac{\partial\psi_0}{\partial x} + \frac{\partial\psi_0}{\partial y}\frac{\partial\theta}{\partial y} + \frac{\partial\psi_0}{\partial z}\frac{\partial\theta}{\partial z} = 0$ на огибающей конусов Маха, то мы найдем, что формула (3.3) всегда имеет место, коль скоро выполнено условие (3.1).

$$\frac{\partial\psi(x,y,z)}{\partial z}\Big|_{z=0} = \frac{\partial\psi_0}{\partial z}\Big|_{z=0} - \int_\theta^x \frac{\partial}{\partial\xi} J_0(k\sqrt{x^2-\xi^2}) \left[\frac{\partial\psi_3(\xi,y,z)}{\partial z}\right]_{z=0} d\xi$$

## § 4. РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

$$\mathcal{F}(x) = f(x) - \int_a^x \frac{\partial}{\partial\xi} J_0(k\sqrt{x^2-\xi^2}) f(\xi) d\xi$$

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\mathcal{F}(x) = f(x) - \int_a^x \frac{\partial}{\partial\xi} J_0(k\sqrt{x^2-\xi^2}) f(\xi) d\xi \tag{4.I}$$

где $0 \leq a \leq x < \infty$ . Предположим, что $\mathcal{F}(x)$ дифференцируемая функция и будем искать решение уравнения (4.I) среди дифференцируемых функций. Перепишем (4.I) так

$$\mathcal{F}(x) = f(x) - J_0(k\sqrt{x^2-\xi^2}) f(\xi)\Big|_a^x + \int_a^x J_0(k\sqrt{x^2-\xi^2}) f'(\xi) d\xi$$

или

$$\mathcal{F}(x) - J_0(k\sqrt{x^2-a^2}) f(a) = \int_a^x J_0(k\sqrt{x^2-\xi^2}) f'(\xi) d\xi \tag{4.2}$$

Так как $\mathcal{F}(a) = f(a)$ , то обозначив левую часть уравнения (4.2) через $\varphi(x)$ получим

$$\varphi(x) = \int_a^x J_0(k\sqrt{x^2-\xi^2}) f'(\xi) d\xi \tag{4.3}$$

Доопределив функцию $\varphi(x)$ на интервале $(0, a)$ положив ее равной нулю, уравнение (4.3) мы перепишем так

$$\varphi(x) = \int_0^x J_0(k\sqrt{x^2-\xi^2})\, \Phi_1(\xi) d\xi \tag{4.4}$$

Сделаем замену переменных $\xi^2 = t$ , $x^2 = \tau$ и введя обозначения

$$\varphi(\sqrt{\tau}) = \Psi(\tau) \quad , \quad \frac{1}{2\sqrt{t}} \Phi_1(\sqrt{t}) = \Phi(t)$$

мы уравнение (4.4) представим в виде

$$\Psi(\tau) = \int_0^\tau J_0(k\sqrt{\tau - t})\, \Phi(t)\, dt \tag{4.5}$$

Взяв непрерывную функцию $H(\tau)$ $(0 \le \tau < \infty)$ мы можем написать

$$\int_0^\sigma H(\sigma-\tau)\Psi(\tau)d\tau = \int_0^\sigma H(\sigma-\tau)d\tau \int_0^\tau J_0(k\sqrt{\tau-t})\Phi(t)dt \tag{4.6}$$

Переменив порядок интегрирования в правой части (4.6) получим

$$\int_0^\sigma H(\sigma-\tau)\Psi(\tau)d\tau = \int_0^\sigma \Phi(t)dt \int_t^\sigma H(\sigma-\tau) J_0(k\sqrt{\tau-t})d\tau$$

Выберем $H(\tau)$ так, чтобы имело место равенство

$$\int_0^y H(y-x) J_0(k\sqrt{x})dx = y \tag{4.7}$$

Для определения $H(\tau)$ найдем трансформацию Лапласа от обеих частей равенства (4.7)

$$\int_0^\infty e^{-zy}dy \int_0^y H(y-x) J_0(k\sqrt{x})dx = \frac{1}{z^2}, \quad \mathcal{R} z > 0$$

Меняя порядок интегрирования в левой части найдем

$$\int_0^\infty J_0(k\sqrt{x})e^{-zx}dx \int_0^\infty H(y)e^{-zy}dy = \frac{1}{z^2}$$

Известно, что

$$\int_0^\infty J_0(k\sqrt{x})\, e^{-xz}dx = \frac{1}{z} e^{-\frac{k^2}{4z}}$$

и, следовательно,

$$\int_0^\infty H(y)e^{-yz}dy = \frac{1}{z} e^{\frac{k^2}{4z}}$$

т.е.

$$H(y) = J_0(ik\sqrt{y})$$

Краснознаменная ордена Ленина Военно-Воздушная Инженерная Академия имени проф. Н. Е. Жуковского

Возвращаясь к равенству (4.6) найдем

$$\int_0^v H(v-t)\Phi(t)dt = \int_0^v J_0(ik\sqrt{v-\tau})\Psi(\tau)d\tau.$$

$$\int_0^v \Phi(t)dt = \Psi(v) + k\int_0^v \frac{J_1(ik\sqrt{v-\tau})}{2i\sqrt{v-\tau}}\Psi(\tau)d\tau.$$

Переходя к прежним обозначением, получим

$$\int_0^{\sqrt{v}} \Phi_1(\xi)d\xi = \varphi(\sqrt{v}) + k\int_0^{\sqrt{v}} \frac{J_1(ik\sqrt{v-x^2})}{2i\sqrt{v-x^2}}2x\varphi(x)dx$$

Полагая $\sqrt{v}=y$, будем иметь

$$\int_0^y \Phi_1(\xi)d\xi = \varphi(y) + k\int_0^y \frac{J_1(ik\sqrt{y^2-x^2})}{i\sqrt{y^2-x^2}}x\varphi(x)dx$$

или

$$\int_a^y f'(\xi)d\xi = F(y) - J_0(k\sqrt{y^2-a^2})F(a) + k\int_a^y \frac{J_1(ik\sqrt{y^2-x^2})}{i\sqrt{y^2-x^2}}xF(x)dx -$$

$$-kF(a)\int_a^y \frac{J_1(k\sqrt{y^2-x^2})}{i\sqrt{y^2-x^2}}J_0(k\sqrt{x^2-a^2})xdx$$

Но

$$k\int_a^y \frac{J_1(ik\sqrt{y^2-x^2})}{i\sqrt{y^2-x^2}}J_0(k\sqrt{x^2-a^2})xdx = 1 - J_0(k\sqrt{y^2-a^2})$$

и, следовательно,

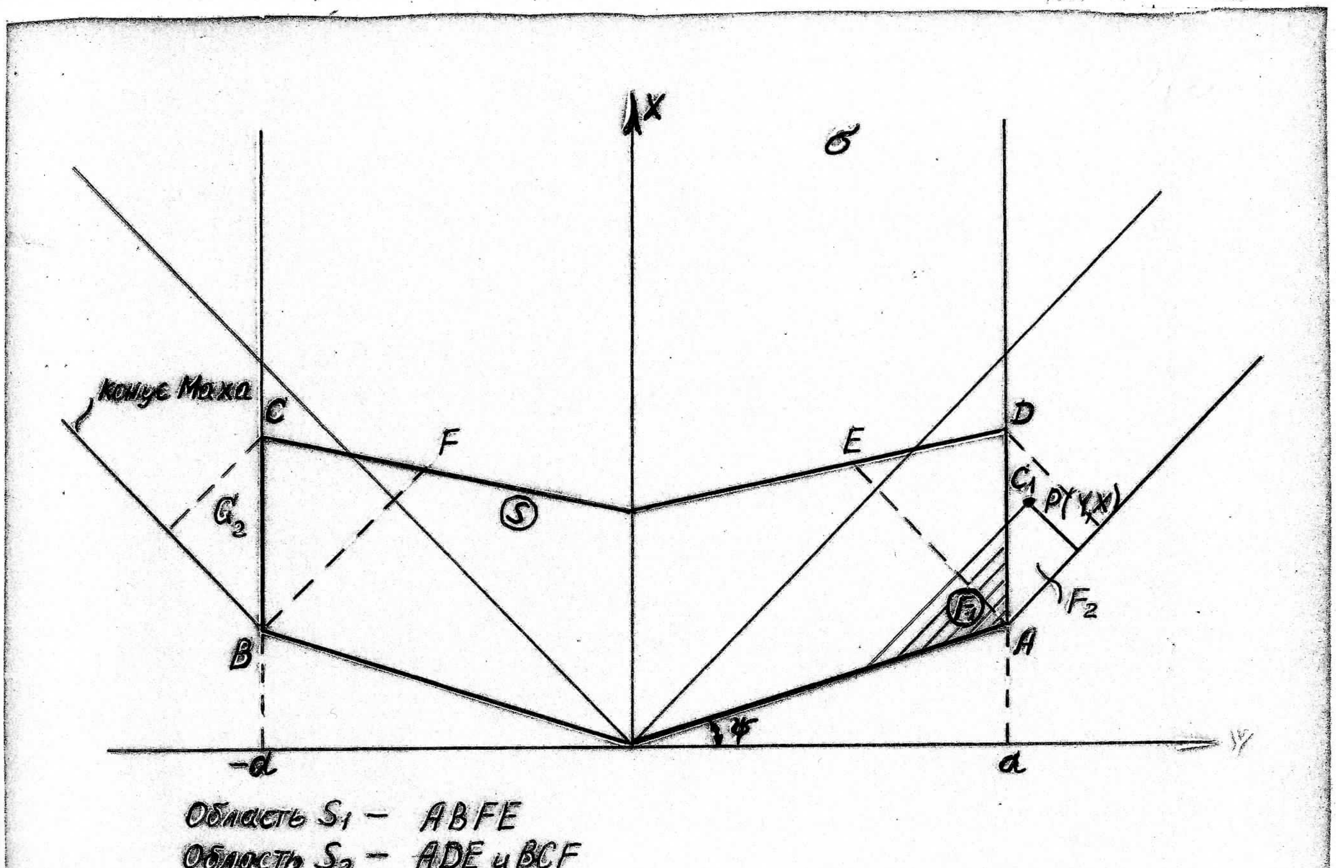
$$f(x) = F(x) + k\int_a^x \frac{J_1(ik\sqrt{x^2-\xi^2})}{i\sqrt{x^2-\xi^2}}\xi F(\xi)d\xi =$$

$$= F(x) - \int_a^x \frac{\partial J_0(ik\sqrt{x^2-\xi^2})}{\partial\xi}F(\xi)d\xi. \qquad (4.8)$$

Краснознаменная ордена Ленина Военно-Воздушная Инженерная Академия
имени проф. Н. Е. Жуковского

## § 5. СТРЕЛОВИДНОЕ В ПЛАНЕ КРЫЛО В СТАЦИОНАРНОМ СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ.

Рассмотрим стреловидное в плане крыло, обтекаемое стационарным сверхзвуковым потоком, и предположим, что угол стреловидности больше угла Маха (фиг. 4)




Фиг. 4

Фото № 4

Потенциал скоростей определяется уравнением

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0.$$

Нам известно, что на крыле

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=0}=f(x,y).$$

По формуле (2.10)

$$\psi(x,y,z) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{F} \frac{\psi_z(\xi,\eta,0)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2-z^2}} \tag{5.I}$$

Для определения $\psi(x,y,z)$ на крыле нам нужно знать $\psi_z(x,y,0)$ в областях $G_1$ и $G_2$. Так как $\psi(x,y,0)=0$ вне крыла и вихревой пелены $\sigma$, то формула (5.I) дает нам интегральное уравнение для $\psi_z(x,y,0)$ в областях $G_1$ и $G_2$. Обозначив $\psi_z(x,y,0) = F(x,y)$ если точка $(x,y)$ находится в областях $G_1, G_2$, запишем интегральное уравнение следующим образом

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_{F_2} \frac{F(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}} = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{F_1} \frac{f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}} \tag{5.2}$$

Введем новые переменные

$$u = \xi+\eta \;, \quad v = \xi-\eta$$
$$u_1 = x+y \;, \quad v_1 = x-y \tag{5.3}$$

Тогда уравнение (5.2) запишется:

$$\iint\limits_{F_2} \frac{F\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)du\,dv}{\sqrt{(u_1-u)(v_1-v)}} = -\iint\limits_{F_1} \frac{f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)du\,dv}{\sqrt{(u_1-u)(v_1-v)}} \tag{5.4}$$

Координаты точки $A$ : $a$, $a\,tg\psi$ или в переменных $(u,v)$ $\alpha = a(1+tg\psi)$, $\beta = -a(1-tg\psi)$. Тогда уравнение (5.4) можно записать так

$$\int_{\beta}^{v_1} \frac{dv}{\sqrt{v_1-v}} \int_{\alpha+v-\beta}^{u_1} \frac{F\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)}{\sqrt{u_1-u}}du = -\int_{\beta}^{v_1} \frac{dv}{\sqrt{v_1-v}} \int_{-\frac{v}{k}}^{\alpha+v-\beta} \frac{f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)}{\sqrt{u_1-u}}du \tag{5.5}$$

где $k = tg\left(\frac{\pi}{4}-\psi\right)$. Из (5.5) ясно, что

$$\int_{\alpha+v_1-\beta}^{u_1} \frac{F\left(\frac{u+v_1}{2}, \frac{u-v_1}{2}\right)}{\sqrt{u_1-u}}du = -\int_{-\frac{v_1}{k}}^{\alpha+v_1-\beta} \frac{f\left(\frac{u+v_1}{2}, \frac{u-v_1}{2}\right)du}{\sqrt{u_1-u}}$$

Это уравнение типа Абеля, и его решение будет

$$\int_{\alpha+v_1-\beta}^{u_1} F\left(\frac{u+v_1}{2}, \frac{u-v_1}{2}\right)du = -\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{v_1}{k}}^{\alpha-\beta+v_1}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{2(\alpha-\beta+v_1)-u_1-u}{u_1-u}\right) f\left(\frac{u+v_1}{2}, \frac{u-v_1}{2}\right)du$$

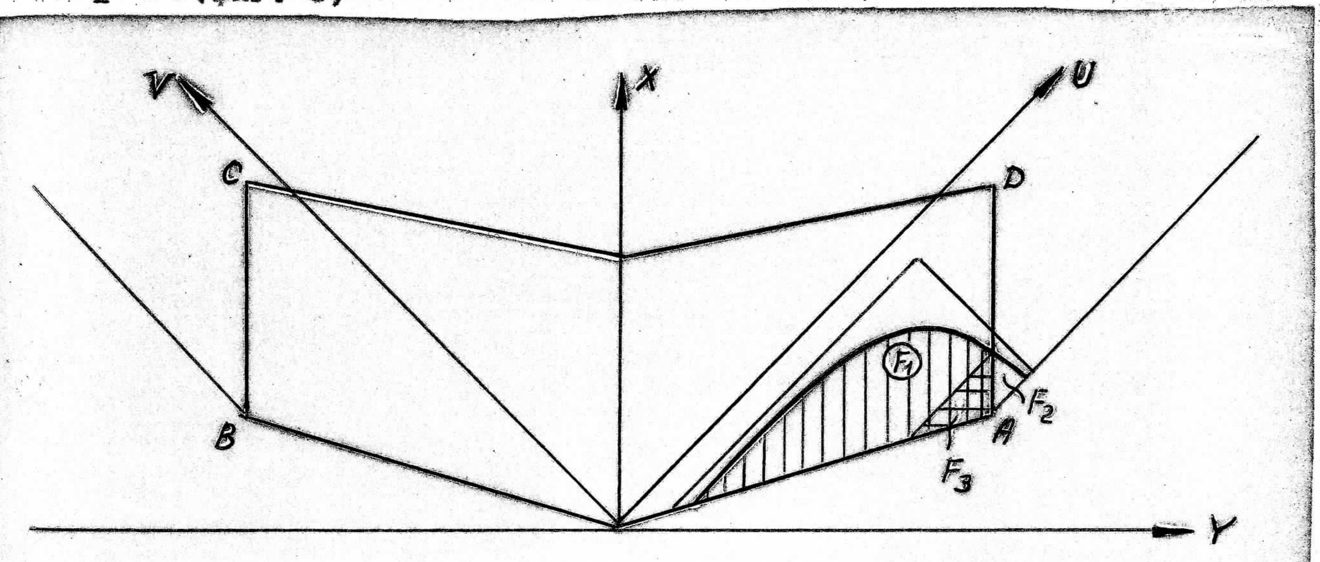
Дифференцируя, найдем

$$\mathcal{F}\left(\frac{u_1+v_1}{2},\frac{u_1-v_1}{2}\right)=-\frac{1}{\pi\sqrt{u_1-\alpha+\beta-v_1}}\int\limits_{-v_1/k}^{\alpha-\beta+v_1} f\left(\frac{u+v_1}{2},\frac{u-v_1}{2}\right)\frac{\sqrt{\alpha-\beta+v_1-u}}{u_1-u}\,du \qquad (5.6)$$

Или в прежних обозначениях

$$\mathcal{F}(x,y)=-\frac{1}{\pi\sqrt{y-a}}\int\limits_{\frac{tg\psi}{tg\psi-1}(y-x)}^{a+x-y} f(t,t-x+y)\,\frac{\sqrt{a+x-y-t}}{x-t}\,dt \qquad (5.7)$$

Пользуясь формулой (5.6), мы выведем формулу для потенциала скоростей. Если точка $(x,y)$ лежит в области $S_1$, то $\psi(x,y,z)$ получаем по формуле (5.I). Если точка $(x,y)$ лежит в области $S_2$, то для того, чтобы получить нужную нам формулу, область интегрирования $F$ разобьем на две части $F_1$ и $F_2$ (фиг. 5)




Фиг. 5

Фото № 5

Тогда

$$\psi(x,y,z)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{F}\frac{\psi_z(\xi,\eta,0)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2-z^2}}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{F_1}\frac{f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2-z^2}}+\frac{1}{\pi}\iint\limits_{F_2}\frac{\mathcal{F}(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2-z^2}}=J_1+J_2$$

Перейдя в интеграле $J_2$ к переменным $u, v$ по формулам (5.3) и подставляя вместо $\mathcal{F}(\xi,\eta)$ ее значение из формулы (5.6), получим

$$\psi(x,y,z) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{F_1}\frac{f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2-z^2}} -$$

$$-\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{\beta}^{w} dv \int\limits_{\alpha-\beta+v}^{u_1-\frac{z^2}{v_1-v}} \frac{du}{\sqrt{(u_1-u)(v_1-v)-z^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{u-\alpha+\beta-v}}\int\limits_{-v/k}^{\alpha-\beta+v} f\left(\frac{t+v}{2},\frac{t-v}{2}\right)\frac{\sqrt{\alpha-\beta+v-t}}{u-t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\iint\limits_{F_1}\frac{f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2-z^2}} -$$

$$-\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{\beta}^{w} dv \int\limits_{-v/k}^{\alpha-\beta+v} f\left(\frac{t+v}{2},\frac{t-v}{2}\right)\sqrt{\alpha-\beta+v-t}\,dt \int\limits_{\alpha-\beta+v}^{u_1-\frac{z^2}{v_1-v}} \frac{du}{\sqrt{[(u_1-u)(v_1-v)-z^2][u-\alpha+\beta-v]}}\cdot\frac{1}{u-t}$$

где $(w,\ell)$ - координаты точки $\mathcal{E}$ в системе $(v,u)$.

Как известно

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{\alpha-\beta+v}^{u_1-\frac{z^2}{v_1-v}}\frac{1}{\sqrt{[(u_1-u)(v_1-v)-z^2][u-\alpha+\beta-v]}}\cdot\frac{dt}{u-t} = \frac{1}{\sqrt{(u_1-t)(v_1-v)-z^2}\,\sqrt{\alpha-\beta+v-t}}$$

Тогда

$$\psi(x,y,z) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{F_1}\frac{f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2-z^2}} - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\beta}^{w} dv\int\limits_{-v/k}^{\alpha-\beta+v} f\left(\frac{t+v}{2},\frac{t-v}{2}\right)\frac{dt}{\sqrt{(u_1-t)(v_1-v)-z^2}} =$$

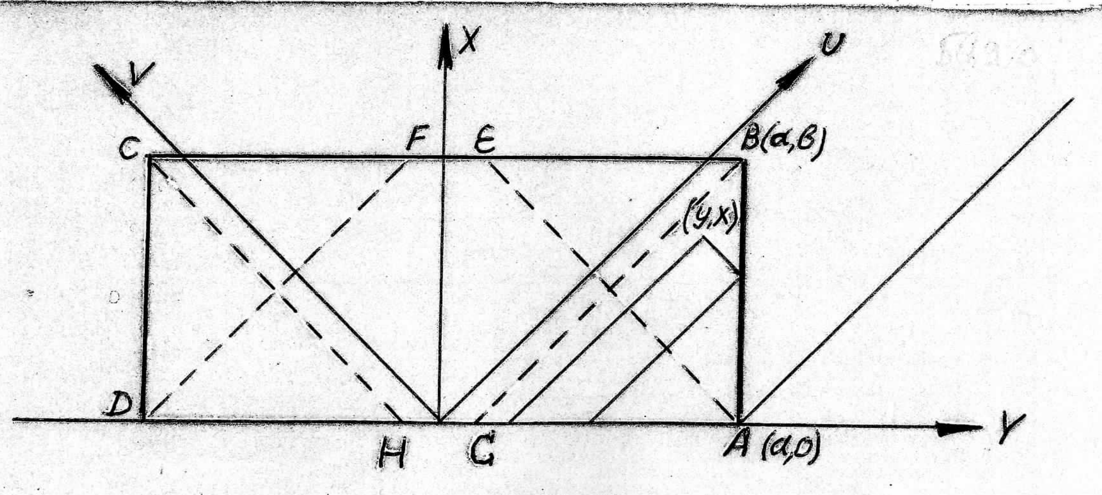
$$= \frac{1}{\pi}\iint\limits_{F_1}\frac{f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2-z^2}} - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{F_3}\frac{f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2-z^2}} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\iint\limits_{F^*}\frac{f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2-z^2}}, \qquad (5.8)$$

где $F^*$ - область, являющаяся разностью областей $F_1$ и $F_3$.

Для проверки формулы (5.8) вычислим под'емную силу прямоугольной пластинки (фиг. 6)






Фиг. 6

Для этого вычислим потенциал скоростей на крыле пластинке. Считая, что пластинка наклонена на малый угол атаки, $\beta$, имеем

$$\frac{\partial \psi}{\partial z}\Big|_{z=0} = -V\beta$$

В области $AEFD$ найдем

$$\psi(x,y,+0) = -\frac{V\beta}{\pi}\iint\limits_{F}\frac{d\xi\, d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 (y-\eta)^2}} = -\frac{V\beta}{2\pi}\iint\limits_{F}\frac{du\, dv}{\sqrt{(u_1-u)(v_1-v)}} =$$

$$= -\frac{V\beta}{2\pi}\int\limits_{-v_1}^{u_1}\frac{du}{\sqrt{u_1-u}}\int\limits_{-u}^{v_1}\frac{dv}{\sqrt{v_1-v}} = -\frac{V\beta}{\pi}\int\limits_{-v_1}^{u_1}\sqrt{\frac{u+v_1}{u_1-u}}\,du = -V\beta\,\frac{u_1+v_1}{2} = -V\beta x$$

В области $ABE$ получим

$$\psi(x,y,+0) = -\frac{V\beta}{\pi}\iint\limits_{F^*}\frac{d\xi\, d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 (y-\eta)^2}} = -\frac{V\beta}{2\pi}\int\limits_{u_1-2a}^{v_1}\frac{dv}{\sqrt{v_1-v}}\int\limits_{-v}^{u_1}\frac{du}{\sqrt{u_1-u}} =$$

$$= -\frac{V\beta}{\pi}\int\limits_{u_1-2a}^{v_1}\sqrt{\frac{u_1+v}{v_1-v}}\,dv = -\frac{V\beta}{\pi}x\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(1+2\frac{y-a}{x}\right) + \right.$$

$$\left. + \sqrt{1-\left(1+2\frac{y-a}{x}\right)^2}\right) = -\frac{V\beta}{\pi}x\left[\cancel{\frac{\pi}{2} - \arcsin}\ \arccos\left(1+2\frac{y-a}{x}\right) + \sqrt{1-\left(1+2\frac{y-a}{x}\right)^2}\right].$$

Разность давлений сверху и снизу пластинки будет

$$p_- - p_+ = -2\rho V\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Под'ёмная сила

$$Y = -2\rho V\iint\limits_{S}\frac{\partial \psi}{\partial x}\,ds$$

Интеграл в выражении для под'емной силы разобьем на сумму трех интегралов, распространенных соответственно на области $AEFD$, $ABE$ и $DCF$. Тогда

$$\iint\limits_{S_{AEFD}}\frac{\partial \psi}{\partial x}\,ds = -V\beta(2a-b)b\,,$$

$$\iint\limits_{S_{AED}} \frac{\partial\psi}{\partial x} ds = \iint\limits_{S_{DCF}} \frac{\partial\psi}{\partial x} ds = -\frac{V\beta}{\pi} \iint\limits_{S_{AED}} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(1+2\frac{y-a}{x}\right)\right) ds$$

так как

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{V\beta}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(1+2\frac{y-a}{x}\right)\right),$$

что совпадает с ранее полученным результатом / 4 /. Таким образом

$$\iint\limits_{S_{AED}} \frac{\partial\psi}{\partial x} ds = -\frac{V\beta}{\pi} \int\limits_0^b dx \int\limits_{a-x}^{a} \arccos\left(1+2\frac{y-a}{x}\right) dy = -\frac{V\beta b^2}{4}$$

И для под'емной силы получаем

$$Y = 2\rho V^2\beta(2a-b)b + \rho V^2\beta b^2 = \rho V^2\beta(4ab - b^2)$$

Положив ~~шшшшш~~ $b = \frac{t}{\sqrt{M^2-1}}$, так как мы в § I сделали замену переменных $x_1 = \frac{x}{\sqrt{M^2-1}}$, получим

$$Y = \rho V^2\beta\left(4a\frac{t}{\sqrt{M^2-1}} - \frac{t^2}{M^2-1}\right) = \rho V^2\beta\, tg\alpha(4at - t^2 tg\alpha)$$

$$c_y = \frac{Y}{\frac{\rho V^2}{2} S} = \beta\, tg\alpha\left(4 - \frac{t}{a} tg\alpha\right)$$

что совпадает с известным результатом / 9 /.

Аналогично можно вычислить и момент, действующий на пластинку

$$M = \rho V^2 \beta\, tg\alpha\left[2at^2 - \frac{2}{3}t^3 tg\alpha\right]$$

Краснознаменная ордена Ленина Военно-Воздушная Инженерная Академия
имени проф. Н. Е. Жуковского

## § 6. КОЛЕБЛЮЩЕЕСЯ СТРЕЛОВИДНОЕ В ПЛАНЕ КРЫЛО В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ.

Рассмотрим колеблющееся стреловидное в плане крыло в сверхзвуковом потоке и предположим, что угол стреловидности больше угла Маха (фиг. 4).

Потенциал скоростей определяется функцией $\Psi(x,y,z)$, удовлетворяющей уравнению (2.I). В § 3 мы свели решение уравнения (2.I) к решению уравнения

$$\frac{\partial^2\psi_0}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi_0}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\psi_0}{\partial z^2}=0 \qquad (6.\text{I})$$

где $\psi_0(x,y,z)$ должна быть нечетной функцией относительно $z$. Для того, чтобы удовлетворить граничным условиям на крыле между функциями $\frac{\partial\Psi}{\partial z}\Big|_{z=0}$ и $\frac{\partial\psi_0}{\partial z}\Big|_{z=0}$ должна иметь место зависимость

$$\left[\frac{\partial\psi_0(x,y,z)}{\partial z}\right]_{z=0}=\left[\frac{\partial\Psi(x,y,z)}{\partial z}\right]_{z=0}-\int_a^x\frac{\partial J_0(ik\sqrt{x^2-\xi^2})}{\partial\xi}\left[\frac{\partial\Psi(\xi,y,z)}{\partial z}\right]_{z=0}d\xi, \qquad (6.2)$$

где $a=y\,\mathrm{tg}\,\psi$ (см. фиг. 4).

Так как нас интересует значение потенциала скоростей на крыле, то мы можем воспользоваться формулой (5.8) и представить решение уравнения (2.I) так:

$$\Psi(x,y,z)=\psi_0(x,y,z)-\int_0^x\frac{\partial}{\partial\xi}J_0(k\sqrt{x^2-\xi^2})\,\psi_0(\xi,y,z)\,d\xi\,. \qquad (6.3)$$

Пусть на крыле

$$\frac{\partial\psi_0}{\partial z}\Big|_{z=0}=f(x,y)\,,\quad \frac{\partial\Psi}{\partial z}\Big|_{z=0}=F(x,y).$$

Теперь мы можем подставить вместо $\psi_0(x,y,z)$ ее выражение из формулы (5.8), поменять местами порядок интегрирования и вместо $f(x,y)$ подставить ее выражение через $\mathcal{F}(x,y)$, доставляемое формулой (6.2). В результате, вместо ряда неуклюжих формул, не решающих задачу прямо, мы получим изящную формулу, дающую эффективное решение для потенциала скоростей.

Нам удобнее весь вывод провести для прямоугольного крыла, так как запись в этом случае будет более простой, а все рассуждения остаются в силе и для стреловидного крыла. Итак,

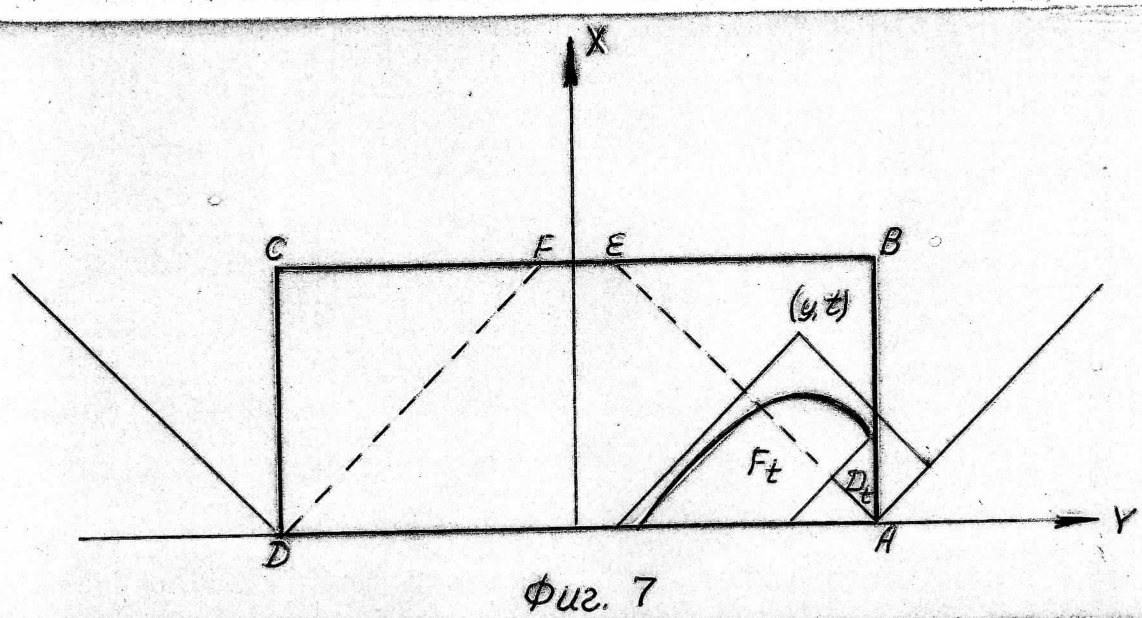
$$\psi(x,y,z)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{F^*}\frac{f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2-z^2}}-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^x\frac{\partial J_0(k\sqrt{x^2-t^2})}{\partial t}dt\iint\limits_{F_t^*}\frac{f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2-z^2}}. \tag{6.4}$$

Второй интеграл в формуле (6.4) можно представить в виде интеграла по некоторому об'ему и поменять местами порядок интегрирования. Предполагая, что точка $(x,y,0)$ находится в области $ABE$ (см. фиг. 6), найдем

$$\psi(x,y,\overset{0}{\cancel{z}})=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{F_x}\frac{f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2-z^2}}-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^x\frac{\partial}{\partial t}J_0(k\sqrt{x^2-t^2})dt\iint\limits_{F_t}\frac{f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(t-\xi)^2-(y-\eta)^2-z^2}}-$$

$$-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{D_x}\frac{f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2-z^2}}+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^x\frac{\partial}{\partial t}J_0(k\sqrt{x^2-t^2})dt\iint\limits_{D_t}\frac{f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(t-\xi)^2-(y-\eta)^2-z^2}},$$

где $F_t$ и $D_t$ обозначены на фиг. 7.




Фиг. 7

Фото № 7

Краснознаменная ордена Ленина Военно-Воздушная Инженерная Академия
имени проф. Н. Е. Жуковского

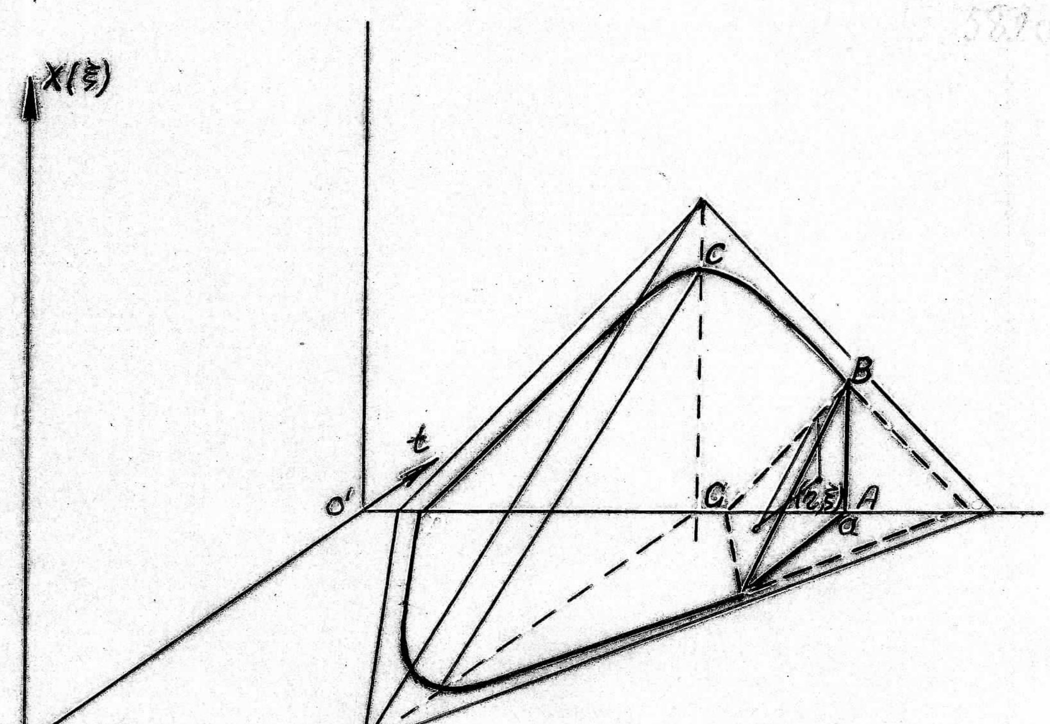
Поменяв местами порядок интегрирования в тройных интегралах, получим

$$\Psi(x,y,z)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{F_x}\frac{f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2-z^2}}-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{F_x}f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\int\limits_{x+\sqrt{(y-\eta)^2+z^2}}^{x}\frac{\partial}{\partial t}J_0\left(k\sqrt{x^2-t^2}\right)\frac{dt}{\sqrt{(t-\xi)^2-(y-\eta)^2-z^2}}-$$

$$-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{D_x}\frac{f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2-z^2}}+\frac{1}{\pi}\iint\limits_{D_x}f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\int\limits_{\rho(\xi,\eta)}^{x}\frac{\partial}{\partial t}J_0\left(k\sqrt{x^2-t^2}\right)\frac{dt}{\sqrt{(t-\xi)^2-(y-\eta)^2-z^2}}, \quad (6.5)$$

где $\rho(\xi,\eta)$ - нижний предел интегрирования, который мы сейчас определим. Для ясности мы здесь укажем, что площадь $F_x$ - площадь $ABCD$, а $D_x$ - площадь $ABC$. Пусть $AB=\gamma$. Из фиг. 8 видно, что

$$\rho(\xi,\eta)=x-\gamma+a-\eta+\xi.$$




Фиг. 8

Фото № 8

Обозначим в формуле (6.5) сумму двух первых интегралов через $\mathcal{J}_1$, а сумму двух вторых интегралов через $\mathcal{J}_2$. Рассмотрим сначала $\mathcal{J}_1$. Подставим вместо $f(\xi,\eta)$ ее значение из (6.2). Тогда

$$\mathcal{J}_1 = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{F_x}\frac{f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2-z^2}} - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{F_x} f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\int\limits_{\xi+\sqrt{(y-\eta)^2+z^2}}^{x}\frac{\partial}{\partial t}J_0\left(k\sqrt{x^2-t^2}\right)\frac{dt}{\sqrt{(t-\xi)^2-(y-\eta)^2-z^2}} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\iint\limits_{F_x}\frac{\mathcal{F}(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2-z^2}} - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{F_x}\frac{d\xi\,d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2-z^2}}\int\limits_0^{\xi}\frac{\partial J_0\left(ik\sqrt{\xi^2-\lambda^2}\right)}{\partial\lambda}\mathcal{F}(\lambda,\eta)\,d\lambda -$$

$$-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{F_x}\mathcal{F}(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\int\limits_{\xi+\sqrt{(y-\eta)^2+z^2}}^{x}\frac{\partial}{\partial t}J_0\left(k\sqrt{x^2-t^2}\right)\frac{dt}{\sqrt{(t-\xi)^2-(y-\eta)^2-z^2}} +$$

$$+\frac{1}{\pi}\iint\limits_{F_x}d\xi\,d\eta\int\limits_{\xi+\sqrt{(y-\eta)^2+z^2}}^{x}\frac{\partial}{\partial t}J_0\left(k\sqrt{x^2-t^2}\right)\frac{dt}{\sqrt{(t-\xi)^2-(y-\eta)^2-z^2}}\int\limits_0^{\xi}\frac{\partial J_0\left(ik\sqrt{\xi^2-\lambda^2}\right)}{\partial\lambda}\mathcal{F}(\lambda,\eta)\,d\lambda \qquad (6.6)$$

Поменяв местами порядок интегрирования во втором и четвертом интегралах формулы (6.6), получим

$$\mathcal{J}_1 = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{F_x}\frac{\mathcal{F}(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2-z^2}} - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{F_x}\mathcal{F}(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\int\limits_{\xi}^{x-\sqrt{(y-\eta)^2+z^2}}\frac{\frac{\partial}{\partial\xi}J_0\left(ik\sqrt{\lambda^2-\xi^2}\right)d\lambda}{\sqrt{(x-\lambda)^2-(y-\eta)^2-z^2}} -$$

$$-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{F_x}\mathcal{F}(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\int\limits_{\xi+\sqrt{(y-\eta)^2+z^2}}^{x}\frac{\partial}{\partial\xi}J_0\left(k\sqrt{x^2-t^2}\right)\frac{dt}{\sqrt{(t-\xi)^2-(y-\eta)^2-z^2}} +$$

$$+\frac{1}{\pi}\iint\limits_{F_x}\mathcal{F}(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\int\limits_{\xi}^{x-\sqrt{(y-\eta)^2+z^2}}\frac{\partial}{\partial\xi}J_0\left(ik\sqrt{\lambda^2-\xi^2}\right)d\lambda\int\limits_{\lambda+\sqrt{(y-\eta)^2+z^2}}^{x}\frac{\frac{\partial}{\partial t}J_0\left(k\sqrt{x^2-t^2}\right)dt}{\sqrt{(t-\lambda)^2-(y-\eta)^2-z^2}} =$$

$$=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{F_x}\mathcal{F}(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\,\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{\int\limits_{\xi}^{x-\sqrt{(y-\eta)^2+z^2}}J_0\left(ik\sqrt{\lambda^2-\xi^2}\right)d\lambda\int\limits_{\lambda+\sqrt{(y-\eta)^2+z^2}}^{x}\frac{\frac{\partial}{\partial t}J_0\left(k\sqrt{x^2-t^2}\right)dt}{\sqrt{(t-\lambda)^2-(y-\eta)^2-z^2}} - \int\limits_{\xi}^{x-\sqrt{(y-\eta)^2+z^2}}\frac{J_0\left(ik\sqrt{\lambda^2-\xi^2}\right)d\lambda}{\sqrt{(x-\lambda)^2-(y-\eta)^2-z^2}}\right\} \qquad (6.7)$$

Аналогичным образом преобразовав сумму $\mathcal{J}_2$, найдем

$$J_2 = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{D_x} \frac{f(\xi,\eta)\,d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2-z^2}} + \frac{1}{\pi}\iint\limits_{D_x} f(\xi,\eta)\,d\xi d\eta \int\limits_{\rho(\xi,\eta)}^{x} \frac{\partial}{\partial t} J_0(k\sqrt{x^2-t^2}) \frac{dt}{\sqrt{(t-\xi)^2-(y-\eta)^2-z^2}} =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{D_x} \frac{F(\xi,\eta)\,d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2-z^2}} + \frac{1}{\pi}\iint\limits_{D_x} \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2-z^2}} \int\limits_{0}^{\xi} \frac{\partial}{\partial\lambda} J_0(ik\sqrt{\xi^2-\lambda^2})\, F(\lambda,\eta)\,d\lambda +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\iint\limits_{D_x} F(\xi,\eta)\,d\xi d\eta \int\limits_{\rho(\xi,\eta)}^{x} \frac{\partial}{\partial t} J_0(k\sqrt{x^2-t^2}) \frac{dt}{\sqrt{(t-\xi)^2-(y-\eta)^2-z^2}} -$$

$$- \frac{1}{\pi}\iint\limits_{D_x} d\xi d\eta \int\limits_{0}^{\xi} \frac{\partial}{\partial\lambda} J_0(ik\sqrt{\xi^2-\lambda^2})\, F(\lambda,\eta)\,d\lambda \int\limits_{\rho(\xi,\eta)}^{x} \frac{\partial}{\partial t} J_0(k\sqrt{x^2-t^2}) \frac{dt}{\sqrt{(t-\xi)^2-(y-\eta)^2-z^2}} =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{D_x} \frac{F(\xi,\eta)\,d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2-z^2}} + \frac{1}{\pi}\iint\limits_{D_x} F(\xi,\eta)\,d\xi d\eta \int\limits_{\xi}^{\eta-a+\gamma} \frac{\frac{\partial}{\partial\xi} J_0(ik\sqrt{\lambda^2-\xi^2})}{\sqrt{(x-\lambda)^2-(y-\eta)^2-z^2}}\,d\lambda +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\iint\limits_{D_x} F(\xi,\eta)\,d\xi d\eta \int\limits_{\rho(\xi,\eta)}^{x} \frac{\partial}{\partial t} J_0(k\sqrt{x^2-t^2}) \frac{dt}{\sqrt{(t-\xi)^2-(y-\eta)^2-z^2}} -$$

$$- \frac{1}{\pi}\iint\limits_{D_x} F(\xi,\eta)\,d\xi d\eta \int\limits_{\xi}^{\eta-a+\gamma} \frac{\partial}{\partial\xi} J_0(ik\sqrt{\lambda^2-\xi^2})\,d\lambda \int\limits_{\rho(\lambda,\eta)}^{x} \frac{\frac{\partial}{\partial t} J_0(k\sqrt{x^2-t^2})\,dt}{\sqrt{(t-\lambda)^2-(y-\eta)^2-z^2}} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\iint\limits_{D_x} F(\xi,\eta)\,d\xi d\eta\, \frac{\partial}{\partial\xi}\left\{ \int\limits_{\xi}^{\eta-a+\gamma} \frac{J_0(ik\sqrt{\lambda^2-\xi^2})\,d\lambda}{\sqrt{(x-\lambda)^2-(y-\eta)^2-z^2}} - \int\limits_{\xi}^{\eta-a+\gamma} J_0(ik\sqrt{\lambda^2-\xi^2})\,d\lambda \int\limits_{\rho(\lambda,\eta)}^{x} \frac{\frac{\partial}{\partial t} J_0(k\sqrt{x^2-t^2})\,dt}{\sqrt{(t-\lambda)^2-(y-\eta)^2-z^2}} \right\}$$

(6.8)

Выражения

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{ \int\limits_{\xi}^{x-\sqrt{(y-\eta)^2+z^2}} J_0(ik\sqrt{\lambda^2-\xi^2})\,d\lambda \int\limits_{\lambda+\sqrt{(y-\eta)^2+z^2}}^{x} \frac{\frac{\partial}{\partial t} J_0(k\sqrt{x^2-t^2})\,dt}{\sqrt{(t-\lambda)^2-(y-\eta)^2-z^2}} - \int\limits_{\xi}^{x-\sqrt{(y-\eta)^2+z^2}} \frac{J_0(ik\sqrt{\lambda^2-\xi^2})\,d\lambda}{\sqrt{(x-\lambda)^2-(y-\eta)^2-z^2}} \right\} \qquad (6.9)$$

и

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{ \int\limits_{\xi}^{\eta-a+\gamma} \frac{J_0(ik\sqrt{\lambda^2-\xi^2})}{\sqrt{(x-\lambda)^2-(y-\eta)^2-z^2}}\,d\lambda - \int\limits_{\xi}^{\eta-a+\gamma} J_0(ik\sqrt{\lambda^2-\xi^2})\,d\lambda \int\limits_{\rho(\lambda,\eta)}^{x} \frac{\frac{\partial}{\partial t} J_0(k\sqrt{x^2-t^2})}{\sqrt{(t-\lambda)^2-(y-\eta)^2-z^2}}\,dt \right\} \qquad (6.10)$$

Краснознаменная ордена Ленина Военно-Воздушная Инженерная Академия
имени проф. Н. Е. Жуковского

мы вычислим в следующем параграфе.

Подставив значения (6.9) и (6.10), которые даются формулами (7.9) и (7.10), мы найдем

$$J_1 = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{F_x} \mathcal{F}(\xi,\eta)\frac{\cos k\sqrt{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2-z^2}}{\sqrt{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2-z^2}}\,d\xi d\eta ,$$

$$J_2 = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{D_x} \mathcal{F}(\xi,\eta)\frac{\cos k\sqrt{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2-z^2}}{\sqrt{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2-z^2}}\,d\xi d\eta - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{D_x}\mathcal{F}(\xi,\eta)\,d\xi d\eta \int\limits_{x-\sqrt{(y-\eta)^2+z^2}}^{\eta-a+\gamma}\frac{\frac{\partial}{\partial t}J_0\left(k\sqrt{(x-\xi)^2-(x-t)^2}\right)}{\sqrt{(x-t)^2-(y-\eta)^2-z^2}}\,dt .$$

Суммируя, получим

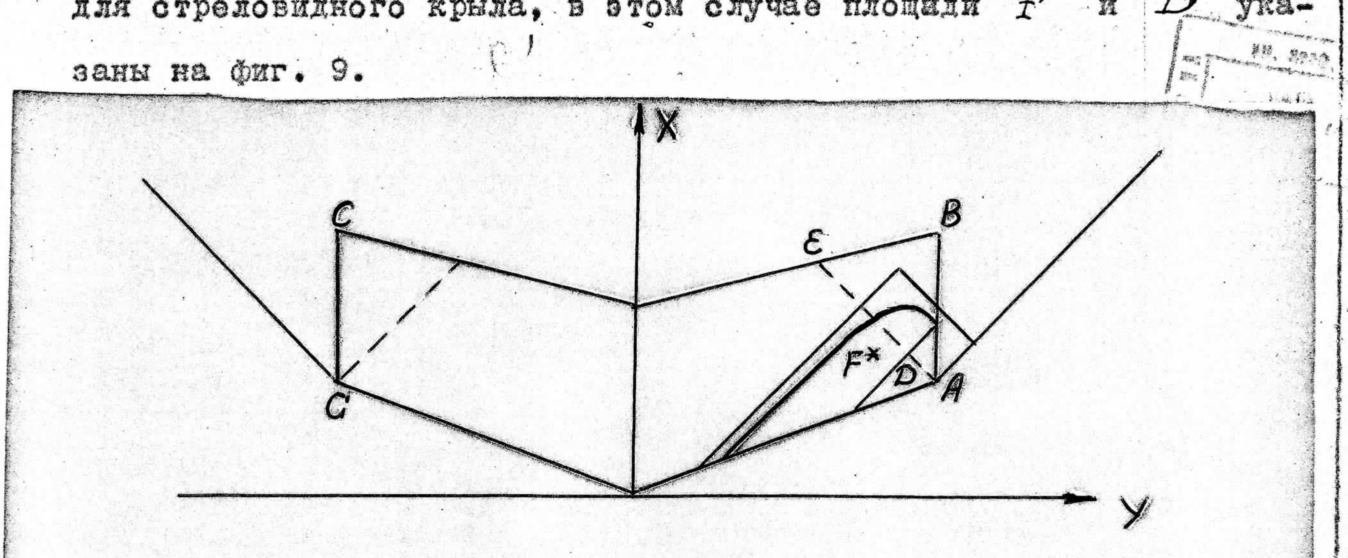
$$\psi(x,y,z) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{F^*}\mathcal{F}(\xi,\eta)\frac{\cos k\sqrt{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2-z^2}}{\sqrt{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2-z^2}}\,d\xi d\eta - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{D}\mathcal{F}(\xi,\eta)\,\mathcal{H}(x,y,z;\xi,\eta)\,d\xi d\eta \qquad (6.11)$$

где площади $F^*$ и $D$ нами определены выше, а через $\mathcal{H}(x,y,z;\xi,\eta)$ обозначен интеграл

$$\int\limits_{x-\sqrt{(y-\eta)^2+z^2}}^{\eta-a+\gamma}\frac{\frac{\partial}{\partial t}J_0\left(k\sqrt{(x-\xi)^2-(x-t)^2}\right)}{\sqrt{(x-t)^2-(y-\eta)^2-z^2}}\,dt \qquad (6.12)$$

Значение выражения (6.9) можно было бы сразу определить на основании формулы (2.10), но мы произведем в § 7 вычисление этого выражения для проверки правильности наших рассуждений.

Из доказательства ясно, что формула (6.11) справедлива и для стреловидного крыла, в этом случае площади $F^*$ и $D$ указаны на фиг. 9.




Фиг. 9

фото № 9

Если в (6.I2) сделать замену переменных $x-t=u$ и вместо $\gamma$ подставить ее значение, то

$$\mathcal{H}(x,y,z;\xi,\eta)=\int\limits_{\sqrt{(y-\eta)^2+z^2}}^{\sqrt{z^2+(y-a)^2}-\eta+a}\frac{\frac{\partial}{\partial u}J_0\left(k\sqrt{(x-\xi)^2-u^2}\right)}{\sqrt{u^2-(y-\eta)^2-z^2}}\,du$$

Если точка $(x,y)$ лежит в области $AEFG$, то для решения уравнения (2.I) будем иметь формулу

$$\psi(x,y,z)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{F}F(\xi,\eta)\frac{\cos k\sqrt{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2-z^2}}{\sqrt{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2-z^2}}\,d\xi\, d\eta \qquad (6.I3)$$

Формулами (6.II) и (6.I3) эффективно решается задача отыскания потенциала скоростей колеблющегося крыла.

## § 7. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ (6.9) И (6.I0).

Сначала найдем выражение (6.I0):

$$\mathcal{L}_2=\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{\int\limits_{\xi}^{\eta-a+\gamma}\frac{J_0\left(ik\sqrt{\lambda^2-\xi^2}\right)}{\sqrt{(x-\lambda)^2-(y-\eta)^2-z^2}}\,d\lambda-\int\limits_{\xi}^{\eta-a+\gamma}J_0\left(ik\sqrt{\lambda^2-\xi^2}\right)d\lambda\int\limits_{x-(\eta-a+\gamma)+\lambda}^{x}\frac{\frac{\partial}{\partial t}J_0\left(k\sqrt{x^2-t^2}\right)dt}{\sqrt{(t-\xi)^2-(y-\eta)^2-z^2}}\right\} \qquad (7.I)$$

Для этого вычислим следующее выражение

$$\mathcal{L}(x,\xi,b,c)=\int\limits_{\xi}^{b}\frac{J_0\left(ik\sqrt{\lambda^2-\xi^2}\right)}{\sqrt{(x-\lambda)^2-c^2}}\,d\lambda-\int\limits_{\xi}^{b}J_0\left(ik\sqrt{\lambda^2-\xi^2}\right)d\lambda\int\limits_{x-b+\lambda}^{x}\frac{\frac{\partial}{\partial t}J_0\left(k\sqrt{x^2-t^2}\right)dt}{\sqrt{(t-\lambda)^2-c^2}} \qquad (7.2)$$

Найдем $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial b}$:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial b}=\frac{J_0\left(ik\sqrt{b^2-\xi^2}\right)}{\sqrt{(x-b)^2-c^2}}-\int\limits_{\xi}^{b}\frac{J_0\left(ik\sqrt{\lambda^2-\xi^2}\right)\frac{\partial}{\partial\lambda}J_0\left(k\sqrt{x^2-(x-b+\lambda)^2}\right)}{\sqrt{(x-b)^2-c^2}}\,d\lambda$$

или

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial b}=\frac{1}{\sqrt{(x-b)^2-c^2}}\left\{J_0\left(ik\sqrt{b^2-\xi^2}\right)-\int\limits_{\xi}^{b}J_0\left(ik\sqrt{\lambda^2-\xi^2}\right)\frac{\partial}{\partial\lambda}J_0\left(k\sqrt{x^2-(x-b+\lambda)^2}\right)d\lambda\right\} \qquad (7.3)$$

Вычислим интеграл

$$\mathcal{K}(b)=\int\limits_{\xi}^{b}J_0\left(ik\sqrt{\lambda^2-\xi^2}\right)\frac{\partial}{\partial\lambda}J_0\left(k\sqrt{(a+b)^2-(a+\lambda)^2}\right)d\lambda \qquad (7.4)$$

Положив в интеграле (7.4) $k=1$, что не ограничивает общности, и применив к обеим частям трансформацию Лапласа, получим

$$\int_{\xi}^{\infty} K e^{-s\theta} d\theta = \int_{\xi}^{\infty} e^{-s\theta} d\theta \int_{\xi}^{\theta} J_0(i\sqrt{\lambda^2-\xi^2}) \frac{\partial}{\partial\lambda} J_0(\sqrt{(a+\theta)^2-(a+\lambda)^2})\, d\lambda =$$

$$= \int_{\xi}^{\infty} J_0(i\sqrt{\lambda^2-\xi^2})\, d\lambda \int_{\lambda}^{\infty} \frac{\partial}{\partial\lambda} J_0(\sqrt{(a+\theta)^2-(a+\lambda)^2})\, e^{-s\theta} d\theta$$

Внутренний интеграл перепишем так:

$$\int_{\lambda}^{\infty} \frac{\partial}{\partial\lambda} J_0(\sqrt{(a+\theta)^2-(a+\lambda)^2})\, e^{-s\theta} d\theta = \frac{\partial}{\partial\lambda} \int_{\lambda}^{\infty} J_0(\sqrt{(a+\theta)^2-(a+\lambda)^2})\, e^{-s\theta} d\theta + e^{-s\lambda}$$

Известно, что

$$J_0(\sqrt{(a+\theta)^2-(a+\lambda)^2}) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{a\zeta + \frac{\theta}{2}(\zeta-\frac{1}{\zeta}) + \frac{\lambda}{2}(\zeta+\frac{1}{\zeta})} \frac{d\zeta}{\zeta},$$

где $C$ - произвольный замкнутый контур, содержащий внутри точку $\zeta=0$. Взяв за путь интегрирования окружность единичного радиуса с центром в точке $\zeta=0$ и считая, что $\mathcal{R}s>1$, подставляя вместо функции $J_0(\sqrt{(a+\theta)^2-(a+\lambda)^2})$ ее значение и меняя порядок интегрирования, получим

$$\int_{\lambda}^{\infty} J_0(\sqrt{(a+\theta)^2-(a+\lambda)^2})\, e^{-s\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda}^{\infty} e^{-s\theta} d\theta \int_C e^{a\zeta + \frac{\theta}{2}(\zeta-\frac{1}{\zeta}) + \frac{\lambda}{2}(\zeta-\frac{1}{\zeta})} \frac{d\zeta}{\zeta} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{a\zeta + \lambda\frac{\zeta+\frac{1}{\zeta}}{2}} \frac{d\zeta}{\zeta} \int_{\lambda}^{\infty} e^{-\theta(s-\frac{\zeta-\frac{1}{\zeta}}{2})} d\theta =$$

$$= \frac{e^{-\lambda s}}{2\pi i} \int_C \frac{e^{a\zeta+\lambda\zeta}}{\zeta(s-\frac{\zeta-\frac{1}{\zeta}}{2})} d\zeta = -\frac{e^{-\lambda s}}{\pi i} \int_C \frac{e^{a\zeta+\lambda\zeta}}{\zeta^2-2s\zeta-1} d\zeta .$$

Корень знаменателя подинтегрального выражения $\zeta = s-\sqrt{s^2+1}$ лежит внутри единичной окружности и, следовательно,

$$\int\limits_{\lambda}^{\infty} J_0\left(\sqrt{(a+b)^2-(a+\lambda)^2}\right) e^{-sb}\,db = \frac{e^{a(s-\sqrt{s^2+1})-\lambda\sqrt{s^2+1}}}{\sqrt{s^2+1}} .$$

Далее

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\int\limits_{\lambda}^{\infty} J_0\left(\sqrt{(a+b)^2-(a+\lambda)^2}\right) e^{-sb}\,db = -e^{a(s-\sqrt{s^2+1})-\lambda\sqrt{s^2+1}} .$$

Таким образом

$$\int\limits_{\xi}^{\infty} K e^{-sb}\,db = \int\limits_{\xi}^{\infty} J_0(i\sqrt{\lambda^2-\xi^2})\, e^{-\lambda s}\,d\lambda - e^{a(s-\sqrt{s^2+1})}\int\limits_{\xi}^{\infty} J_0(i\sqrt{\lambda^2-\xi^2})\, e^{-\lambda\sqrt{s^2+1}}\,d\lambda .$$

Вычислим

$$\int\limits_{\xi}^{\infty} J_0(i\sqrt{\lambda^2-\xi^2})\, e^{-\lambda\sqrt{s^2+1}}\,d\lambda .$$

Известно, что

$$J_0(i\sqrt{\lambda^2-\xi^2}) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C} e^{\frac{\xi}{2}(\zeta-\frac{1}{\zeta})+\frac{\lambda}{2}(\zeta+\frac{1}{\zeta})}\frac{d\zeta}{\zeta} .$$

Возьмем за $C$ окружность $|\zeta|=1$. Тогда

$$\int\limits_{\xi}^{\infty} J_0(i\sqrt{\lambda^2-\xi^2})\, e^{-\lambda\sqrt{s^2+1}}\,d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C} e^{\frac{\xi}{2}(\zeta-\frac{1}{\zeta})}\frac{d\zeta}{\zeta}\int\limits_{\xi}^{\infty} e^{-\lambda\left(\sqrt{s^2+1}-\frac{\zeta+\frac{1}{\zeta}}{2}\right)}d\lambda =$$

$$= -\frac{e^{-\xi\sqrt{s^2+1}}}{\pi i}\int\limits_{C}\frac{e^{\xi\zeta}}{\zeta^2-2\sqrt{s^2+1}\,\zeta+1}\,d\zeta = \frac{e^{-\xi s}}{s} .$$

Окончательно получим

$$\int\limits_{\xi}^{\infty} K e^{-sb}\,db = \int\limits_{\xi}^{\infty} J_0(i\sqrt{\lambda^2-\xi^2})\, e^{-\lambda s}\,d\lambda - \frac{1}{s}e^{-\xi s+a(s-\sqrt{s^2+1})} . \tag{7.5}$$

Из формулы (7.5) известным образом получаем

$$K(b) = J_0(i\sqrt{b^2-\xi^2}) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{k-i\infty}^{k+i\infty}\frac{e^{(b-\xi)s+a(s-\sqrt{s^2+1})}}{s}\,ds .$$

Для того, чтобы вычислить интеграл в последнем равенстве, возьмем следующую функцию

$$\mathcal{F}(a,b,\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int_C e^{\frac{a+b}{2}(\zeta-\frac{1}{\zeta})+\frac{a+\lambda}{a}(\zeta+\frac{1}{\zeta})}\frac{(\zeta+\frac{1}{\zeta})}{(\zeta-\frac{1}{\zeta})}\frac{d\zeta}{\zeta},$$

где интегрирование ведется по окружности $|\zeta|=\rho<1$. Ясно, что

$$\mathcal{F}(a,\lambda,\lambda)=-1$$

Для того, чтобы вычислить функцию $\mathcal{F}(a,b,\lambda)$, найдем сначала ее производную по $b$:

$$\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial b}=\frac{1}{4\pi i}\int_C e^{\frac{a+b}{2}(\zeta-\frac{1}{\zeta})+\frac{a+\lambda}{2}(\zeta+\frac{1}{\zeta})}\frac{(\zeta+\frac{1}{\zeta})}{\zeta}d\zeta=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial a}J_0\left(\sqrt{(a+b)^2-(a+\lambda)^2}\right)+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2a+b+\lambda}{b-\lambda}}J_1\left(\sqrt{(a+b)^2-(a+\lambda)^2}\right)=\frac{a+\lambda}{\sqrt{(a+b)^2-(a+\lambda)^2}}J_1\left(\sqrt{(a+b)^2-(a+\lambda)^2}\right).$$

Следовательно

$$\mathcal{F}=\int_\lambda^b\frac{a+\lambda}{\sqrt{(a+t)^2-(a+\lambda)^2}}J_1\left(\sqrt{(a+t)^2-(a+\lambda)^2}\right)dt-1.$$

Положив $\lambda=0$ найдем

$$\mathcal{F}(a,b,0)=a\int_0^b\frac{J_1\left(\sqrt{(a+t)^2-a^2}\right)}{\sqrt{(a+t)^2-a^2}}dt-1.$$

Аналогично тому, как это мы делали выше, легко убедиться, что

$$\int_0^\infty\mathcal{F}(a,b,0)e^{-sb}db=-\frac{1}{s}e^{a(s-\sqrt{s^2+1})}.$$

Итак

$$\mathcal{K}=J_0\left(i\sqrt{b^2-\xi^2}\right)+a\int_0^{b-\xi}\frac{J_1\left(\sqrt{(a+t)^2-a^2}\right)}{\sqrt{(a+t)^2-a^2}}dt-1. \tag{7.6}$$

Выше мы положили $k=1$; если возвратимся к общему случаю, то найдем, что

$$\mathcal{K}=J_0\left(ik\sqrt{b^2-\xi^2}\right)+ka\int_0^{b-\xi}\frac{J_1\left(k\sqrt{(a+t)^2-a^2}\right)}{\sqrt{(a+t)^2-a^2}}dt-1$$

Здесь $a$ произвольно; положим $a=x-b$, тогда

Краснознаменная ордена Ленина Военно-Воздушная Инженерная Академия имени проф. Н. Е. Жуковского

$$\frac{\partial J}{\partial b}=\frac{1}{\sqrt{(x-b)^2-c^2}}\left\{1-k(x-b)\int\limits_0^{b-\xi}\frac{J_1\left(k\sqrt{(x-b+t)^2-(x-b)^2}\right)}{\sqrt{(x-b+t)^2-(x-b)^2}}dt\right\} \qquad (7.7)$$

Отсюда

$$\frac{\partial^2 J}{\partial\xi\partial b}= k(x-b)\frac{J_1\left(k\sqrt{(x-\xi)^2-(x-b)^2}\right)}{\sqrt{(x-\xi)^2-(x-b)^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{(x-b)^2-c^2}}.$$

Итак

$$\frac{\partial J}{\partial\xi}=k\int(x-t)\frac{J_1\left(k\sqrt{(x-\xi)^2-(x-t)^2}\right)}{\sqrt{(x-\xi)^2-(x-t)^2}\sqrt{(x-t)^2-c^2}}dt+\psi(x,\xi,c) \qquad (7.8)$$

Для того, чтобы определить $\psi(x,\xi,c)$, рассмотрим

$$\mathcal{L}_1=\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{\int\limits_\xi^{x-\sqrt{(y-\eta)^2+z^2}}J_0\left(ik\sqrt{\lambda^2-\xi^2}\right)d\lambda\int\limits_{\lambda+\sqrt{(y-\eta)^2+z^2}}^{x}\frac{\frac{\partial}{\partial t}J_0\left(k\sqrt{x^2-t^2}\right)}{\sqrt{(t-\lambda)^2-(y-\eta)^2-z^2}}dt-\int\limits_\xi^{x-\sqrt{(y-\eta)^2+z^2}}\frac{J_0\left(ik\sqrt{\lambda^2-\xi^2}\right)}{\sqrt{(x-\lambda)^2-(y-\eta)^2-z^2}}d\lambda\right\}$$

Обозначив $\sqrt{(y-\eta)^2+z^2}=c$, положим

$$\mathcal{L}_3=\int\limits_\xi^{x-c}J_0\left(ik\sqrt{\lambda^2-\xi^2}\right)d\lambda\int\limits_{\lambda+c}^{x}\frac{\frac{\partial}{\partial t}J_0\left(k\sqrt{x^2-t^2}\right)}{\sqrt{(t-\lambda)^2-c^2}}dt-\int\limits_\xi^{x-c}\frac{J_0\left(ik\sqrt{\lambda^2-\xi^2}\right)}{\sqrt{(x-\lambda)^2-c^2}}d\lambda$$

Сделав замену переменных $t-\lambda=y$ во внутреннем интеграле и изменив порядок интегрирования будем иметь

$$\mathcal{L}_3=\int\limits_c^{x-c}\frac{dy}{\sqrt{y^2-c^2}}\int\limits_\xi^{x-y}J_0\left(ik\sqrt{\lambda^2-\xi^2}\right)\frac{\partial}{\partial\lambda}J_0\left(k\sqrt{x^2-(y+\lambda)^2}\right)d\lambda-\int\limits_\xi^{x-c}\frac{J_0\left(ik\sqrt{\lambda^2-\xi^2}\right)}{\sqrt{(x-\lambda)^2-c^2}}d\lambda.$$

Воспользовавшись формулой (7.6), последнее выражение можно преобразовать так:

$$\mathcal{L}_3=\int\limits_c^{x-\xi}\frac{J_0\left(ik\sqrt{(x-y)^2-\xi^2}\right)}{\sqrt{y^2-c^2}}dy+k\int\limits_c^{x-\xi}y\,dy\int\limits_0^{x-y-\xi}\frac{J_1\left(k\sqrt{(y+t)^2-y^2}\right)dt}{\sqrt{(y+t)^2-y^2}\sqrt{y^2-c^2}}-\int\limits_c^{x-\xi}\frac{dy}{\sqrt{y^2-c^2}}-$$

$$-\int\limits_\xi^{x-c}\frac{J_0\left(ik\sqrt{\lambda^2-\xi^2}\right)}{\sqrt{(x-\lambda)^2-c^2}}d\lambda=k\int\limits_0^{x-\xi}y\,dy\int\limits_0^{x-y-\xi}\frac{J_1\left(k\sqrt{(y+t)^2-y^2}\right)dt}{\sqrt{(y+t)^2-y^2}\sqrt{y^2-c^2}}-\int\limits_0^{x-\xi}\frac{dy}{\sqrt{y^2-c^2}}.$$

Сделав во внутреннем интеграле замену переменных $y+t=\lambda$ и поменяв порядок интегрирования, получим

$$\mathcal{L}_3 = k\int_c^{x-\xi} d\lambda \int_0^{\lambda} \frac{J_1(k\sqrt{\lambda^2-y^2})\, y\, dy}{\sqrt{(y^2-c^2)(\lambda^2-y^2)}} - \int_c^{x-\xi} \frac{dy}{\sqrt{y^2-c^2}}$$

Легко показать, что

$$k\int_c^{\lambda} \frac{J_1(k\sqrt{\lambda^2-y^2})\, y\, dy}{\sqrt{(\lambda^2-y^2)(y^2-c^2)}} = \frac{1-\cos k\sqrt{\lambda^2-c^2}}{\sqrt{\lambda^2-c^2}}$$

и, следовательно,

$$\mathcal{L}_3 = -\int_c^{x-\xi} \frac{\cos k\sqrt{\lambda^2-c^2}}{\sqrt{\lambda^2-c^2}}\, d\lambda$$

Стало быть

$$\mathcal{L}_1 = \frac{\cos k\sqrt{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2-z^2}}{\sqrt{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2-z^2}} \tag{7.9}$$

Возвратимся к соотношению (7.8). Для того, чтобы определить $\psi(x,\xi,c)$, заметим, что если в (7.2) положить $b=x-c$, то в силу (7.9)

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\xi} = -\frac{\cos k\sqrt{(x-\xi)^2-c^2}}{\sqrt{(x-\xi)^2-c^2}}$$

Значит

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\xi} = k\int_{x-c}^{b} (x-t)\frac{J_1(k\sqrt{(x-\xi)^2-(x-t)^2})\,dt}{\sqrt{(x-t)^2-c^2}\sqrt{(x-\xi)^2-(x-t)^2}} - \frac{\cos k\sqrt{(x-\xi)^2-c^2}}{\sqrt{(x-\xi)^2-c^2}}$$

или

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\xi} = -\int_{x-c}^{b} \frac{\frac{\partial}{\partial t}J_0(k\sqrt{(x-\xi)^2-(x-t)^2})}{\sqrt{(x-t)^2-c^2}}\, dt - \frac{\cos k\sqrt{(x-\xi)^2-c^2}}{\sqrt{(x-\xi)^2-c^2}}.$$

Окончательно

$$\mathcal{L}_2 = -\int_{x-\sqrt{(y+\eta)^2+z^2}}^{x-a+\gamma} \frac{\frac{\partial}{\partial t}J_0(k\sqrt{(x-\xi)^2-(x-t)^2})}{\sqrt{(x-t)^2-(y-\eta)^2-z^2}}\, dt - \frac{\cos k\sqrt{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2-z^2}}{\sqrt{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2-z^2}}. \tag{7.10}$$

## § 8. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+\psi=0$ ВНУТРИ КОНУСА $x^2-y^2-z^2=0$ ЧЕРЕЗ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ $\frac{\partial^2\psi_0}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi_0}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\psi_0}{\partial z^2}=0$.

Рассмотрим уравнения

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+\psi=0 \qquad (8.1)$$

и

$$\frac{\partial^2\psi_0}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi_0}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\psi_0}{\partial z^2}=0. \qquad (8.2)$$

Будем строить решение уравнения (8.1) внутри характеристического конуса через решение уравнения (8.2) так, чтобы $\psi(x,y,z)$ зависела от значений $\psi_0(x,y,z)$ вдоль луча, проведенного через точки $(0,0,0)$ и $(x,y,z)$.

Функцию $\psi(x,y,z)$ возьмем в таком виде

$$\psi(x,y,z)=\psi_0(x,y,z)-\int_0^1\frac{\partial}{\partial\theta}K(\sqrt{\Gamma},\theta)\,\psi_0(x\theta,y\theta,z\theta)\,d\theta \qquad (8.3)$$

где

$$\Gamma=x^2-y^2-z^2$$

а функция $K(\sqrt{\Gamma},\theta)$ подлежит определению. Соображения, в силу которых мы ищем решение в виде (8.3), мы опустим.

Обозначим через $\mathcal{L}(\varphi)$ оператор

$$\mathcal{L}(\varphi)=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

Краснознаменная ордена Ленина Военно-Воздушная Инженерная Академия имени проф. Н. Е. Жуковского

и вычислим $\mathcal{L}(\psi)+\psi$. Положим

$$\mathcal{J}=\int_0^1 \frac{\partial}{\partial\theta}\mathcal{K}(\sqrt{\Gamma},\theta)\,\psi_0(x\theta,y\theta,z\theta)\,d\theta$$

Найдем вторые частные производные от $\mathcal{J}$ по $x, y, z$.

$$\frac{\partial\mathcal{J}}{\partial x}=\int_0^1\frac{\partial^2\mathcal{K}}{\partial x\,\partial\theta}\psi_0(x\theta,y\theta,z\theta)\,d\theta+\int_0^1\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial\theta}\frac{\partial\psi_0(x\theta,y\theta,z\theta)}{\partial x}\,d\theta=$$

$$=\frac{\partial\mathcal{K}(\sqrt{\Gamma},\theta)}{\partial x}\psi_0\Big|_0^1-\int_0^1\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial x}\frac{\partial\psi_0}{\partial\theta}\,d\theta+\int_0^1\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial\theta}\frac{\partial\psi_0}{\partial x}\,d\theta$$

Потребуем, чтобы $\left.\dfrac{\partial\mathcal{K}(\sqrt{\Gamma},\theta)}{\partial\sqrt{\Gamma}}\right|_{\theta=1}=0$ и $\psi_0(0,0,0)=0$. Тогда

$$\frac{\partial^2\mathcal{J}}{\partial x^2}=-\int_0^1\frac{\partial^2\mathcal{K}}{\partial x^2}\frac{\partial\psi_0}{\partial\theta}\,d\theta-\int_0^1\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial x}\frac{\partial^2\psi_0}{\partial x\,\partial\theta}\,d\theta+\int_0^1\frac{\partial^2\mathcal{K}}{\partial x\,\partial\theta}\frac{\partial\psi_0}{\partial x}\,d\theta+\int_0^1\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial\theta}\frac{\partial^2\psi_0}{\partial x^2}\,d\theta=$$

$$=-\int_0^1\frac{\partial^2\mathcal{K}}{\partial x^2}\frac{\partial\psi_0}{\partial\theta}\,d\theta-2\int_0^1\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial x}\frac{\partial^2\psi_0}{\partial x\,\partial\theta}\,d\theta+\int_0^1\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial\theta}\frac{\partial^2\psi_0}{\partial x^2}\,d\theta+\left[\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial x}\frac{\partial\psi_0}{\partial x}\right]_0^1.$$

Так как

$$\frac{\partial\psi_0(x\theta,y\theta,z\theta)}{\partial x}=\theta\,\frac{\partial\psi_0(x\theta,y\theta,z\theta)}{\partial x\theta}$$

и предположив, что

$$\left|R^{\frac{1}{2}}\frac{\partial\psi_0}{\partial R}\right|<C$$

получим, что последнее слагаемое равно нулю.

Аналогично определив $\dfrac{\partial^2\mathcal{J}}{\partial y^2}$ и $\dfrac{\partial^2\mathcal{J}}{\partial z^2}$ мы можем написать

$$\mathcal{L}(\mathcal{J})=-\int_0^1\mathcal{L}(\mathcal{K})\frac{\partial\psi_0}{\partial\theta}\,d\theta-2\int_0^1\left\{\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial x}\frac{\partial^2\psi_0}{\partial x\,\partial\theta}-\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial y}\frac{\partial^2\psi_0}{\partial y\,\partial\theta}-\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial z}\frac{\partial^2\psi_0}{\partial z\,\partial\theta}\right\}d\theta+$$

$$+\int_0^1\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial\theta}\left\{\frac{\partial^2\psi_0(x\theta,y\theta,z\theta)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi_0}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\psi_0}{\partial z^2}\right\}d\theta.$$

В силу (8.2) и того, что

$$\mathcal{L}(\mathcal{K}) = \frac{\partial^2 \mathcal{K}(\sqrt{\Gamma},\theta)}{\partial \sqrt{\Gamma}^2} + \frac{2}{\sqrt{\Gamma}}\frac{\partial \mathcal{K}(\sqrt{\Gamma},\theta)}{\partial\sqrt{\Gamma}}$$

$\mathcal{L}(\mathcal{J})$ примет вид

$$\mathcal{L}(\mathcal{J}) = -\int_0^1\left\{\frac{\partial^2\mathcal{K}}{\partial\sqrt{\Gamma}^2} + \frac{2}{\sqrt{\Gamma}}\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial\sqrt{\Gamma}}\right\}\frac{\partial\psi_0}{\partial\theta}d\theta - 2\int_0^1\left\{\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial x}\frac{\partial^2\psi_0}{\partial x\partial\theta} - \frac{\partial\mathcal{K}}{\partial y}\frac{\partial^2\psi_0}{\partial y\partial\theta} - \frac{\partial\mathcal{K}}{\partial z}\frac{\partial^2\psi_0}{\partial z\partial\theta}\right\}d\theta.$$

Легко проверить, что

$$\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial x}\frac{\partial^2\psi_0}{\partial x\partial\theta} - \frac{\partial\mathcal{K}}{\partial y}\frac{\partial^2\psi_0}{\partial y\partial\theta} - \frac{\partial\mathcal{K}}{\partial z}\frac{\partial^2\psi_0}{\partial z\partial\theta} = \frac{1}{\sqrt{\Gamma}}\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial\sqrt{\Gamma}}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\theta\frac{\partial\psi_0}{\partial\theta}\right)$$

Подставляя это в выражение для $\mathcal{L}(\mathcal{J})$ и проинтегрировав по частям во втором интеграле, получим

$$\mathcal{L}(\mathcal{J}) = -\int_0^1\left\{\frac{\partial^2\mathcal{K}(\sqrt{\Gamma},\theta)}{\partial\sqrt{\Gamma}^2} + \frac{2}{\sqrt{\Gamma}}\frac{\partial\mathcal{K}(\sqrt{\Gamma},\theta)}{\partial\sqrt{\Gamma}}\right\}\frac{\partial\psi_0}{\partial\theta}d\theta -$$

$$-2\int_0^1\frac{1}{\sqrt{\Gamma}}\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial\sqrt{\Gamma}}\left\{\frac{\partial\psi_0}{\partial\theta} + \theta\frac{\partial^2\psi_0}{\partial\theta^2}\right\}d\theta =$$

$$= -\int_0^1\left\{\frac{\partial^2\mathcal{K}}{\partial\sqrt{\Gamma}^2} + \frac{2}{\sqrt{\Gamma}}\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial\sqrt{\Gamma}}\right\}\frac{\partial\psi_0}{\partial\theta}d\theta + 2\int_0^1\frac{\theta}{\sqrt{\Gamma}}\frac{\partial^2\mathcal{K}}{\partial\sqrt{\Gamma}\partial\theta}\frac{\partial\psi_0}{\partial\theta}d\theta =$$

$$= -\int_0^1\left\{\frac{\partial^2\mathcal{K}(\sqrt{\Gamma},\theta)}{\partial\sqrt{\Gamma}^2} + \frac{2}{\sqrt{\Gamma}}\frac{\partial\mathcal{K}(\sqrt{\Gamma},\theta)}{\partial\sqrt{\Gamma}} - \frac{2\theta}{\sqrt{\Gamma}}\frac{\partial^2\mathcal{K}(\sqrt{\Gamma},\theta)}{\partial\sqrt{\Gamma}\partial\theta}\right\}\frac{\partial\psi_0}{\partial\theta}d\theta.$$

Далее

$$\mathcal{L}(\psi) = \mathcal{L}(\psi_0) - \mathcal{L}(\mathcal{J}) = -\mathcal{L}(\mathcal{J})$$

и, следовательно,

$$\mathcal{L}(\psi) + \psi = -\mathcal{L}(\mathcal{J}) + \psi_0 - \mathcal{J} =$$

$$= \int_0^1\left\{\frac{\partial^2\mathcal{K}}{\partial\sqrt{\Gamma}^2} + \frac{2}{\sqrt{\Gamma}}\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial\sqrt{\Gamma}} - \frac{2\theta}{\sqrt{\Gamma}}\frac{\partial^2\mathcal{K}}{\partial\sqrt{\Gamma}\partial\theta}\right\}\frac{\partial\psi_0}{\partial\theta}d\theta + \psi_0 - \int_0^1\frac{\partial}{\partial\theta}\mathcal{K}\,\psi_0\,d\theta =$$

$$= \psi_0 + \int_0^1\left\{\frac{\partial^2\mathcal{K}}{\partial\sqrt{\Gamma}^2} + \frac{2}{\sqrt{\Gamma}}\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial\sqrt{\Gamma}} - \frac{2\theta}{\sqrt{\Gamma}}\frac{\partial^2\mathcal{K}}{\partial\sqrt{\Gamma}\partial\theta} + \mathcal{K}\right\}\frac{\partial\psi_0}{\partial\theta}d\theta - \mathcal{K}(\sqrt{\Gamma},\theta)\psi_0\Big|_0^1$$

Таким образом, чтобы функция $\psi(x,y,z)$, определяемая (8.3), удовлетворяла уравнению (8.I), функция $\mathcal{K}(\sqrt{\Gamma},\theta)$ должна удовлетворять следующему дифференциальному уравнению гиперболического типа

$$\frac{\partial^2\mathcal{K}}{\partial\sqrt{\Gamma}^2}+\frac{2}{\sqrt{\Gamma}}\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial\sqrt{\Gamma}}-\frac{2\theta}{\sqrt{\Gamma}}\frac{\partial^2\mathcal{K}}{\partial\sqrt{\Gamma}\partial\theta}+\mathcal{K}(\sqrt{\Gamma},\theta)=0 \tag{8.4}$$

и начальным значениям

$$\left.\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial\sqrt{\Gamma}}\right|_{\theta=1}=0\,,\quad \mathcal{K}\big|_{\theta=1}=1 \tag{8.5}$$

Полагая $\sqrt{\Gamma}=u$ и $\theta=v$, уравнение (8.4) и условия (8.5) примут вид

$$\frac{\partial^2\mathcal{K}}{\partial u^2}+\frac{2}{u}\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial u}-\frac{2v}{u}\frac{\partial^2\mathcal{K}}{\partial u\partial v}+\mathcal{K}=0 \tag{8.6}$$

$$\left.\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial u}\right|_{u=1}=0\,,\quad \mathcal{K}\big|_{u=1}=1 \tag{8.7}$$

В уравнении (8.6) сделаем замену переменных

$$\xi=\sqrt{v}\,,\quad \eta=u\sqrt{v}\,.$$

В новых переменных уравнение (8.6) примет вид

$$\xi^3\frac{\partial^2\mathcal{K}}{\partial\eta\partial\xi}-\xi^2\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial\eta}-\eta\mathcal{K}=0\,. \tag{8.8}$$

С помощью метода Фурье можно убедиться, что частным решением уравнения (8.8) будет функция

$$\xi e^{-\frac{\eta^2}{2\lambda}+\frac{\lambda}{2\xi^2}}=\sqrt{v}\,e^{-\frac{u^2v}{2\lambda}+\frac{\lambda}{2v}}$$

где $\lambda$ произвольное количество.

Интеграл уравнения (8.6), удовлетворяющий условиям (8.7), будем искать в виде:

$$\mathcal{K}(u,v) = \frac{\sqrt{v}}{2\pi i}\int_C f(z)\, e^{-\frac{u^2 v}{2z} + \frac{z}{2v}} dz$$

Из условий (8.7) определим функцию $f(z)$ и контур интегрирования $C$. Ясно, что $C$ может быть произвольным замкнутым контуром, содержащим внутри точку $z=0$, а функция $f(z)$ должна быть

$$f(z) = \frac{1}{z} e^{-\frac{z}{2}}$$

Тогда

$$\mathcal{K}(u,v) = \frac{\sqrt{v}}{2\pi i}\int_C e^{-\frac{u^2 v}{2z} + \frac{z}{2}\frac{(1-v)}{v}} \frac{dz}{z} \tag{8.9}$$

и легко выдеть, что условия (8.7) выполняются.

Из (8.9) следует, что

$$\mathcal{K}(u,v) = \sqrt{v}\, J_0(u\sqrt{1-v})$$

Следовательно, формула (8.3) примет вид

$$\Psi(x,y,z) = \Psi_0(x,y,z) - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial\theta}\sqrt{\theta}\, J_0(\sqrt{\Gamma(1-\theta)})\,\Psi_0(x\theta, y\theta, z\theta)\,d\theta \tag{8.10}$$

Я получил формулу (8.10) не будучи знакомым с работами других авторов по подобному вопросу. Когда я познакомился с работой Магнарадзе / 6 /, я у него нашел формулу, выражающую решение уравнения (8.1) через решение уравнения (8.2) внутри характеристического конуса, которая в наших обозначениях запишется так:

$$\Psi(x,y,z) = \Psi_0(x,y,z) - \int_0^1 \sqrt{\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta} J_0(\sqrt{\Gamma(1-\theta)})\,\Psi_0(x\theta, y\theta, z\theta)\,d\theta \tag{8.11}$$

Формулы (8.10) и (8.11) "почти" тождественны с первого взгляда.

Однако, различие их заключается не только в отличии подинтегральных выражений, но и в том, что функция $\psi(x,y,z)$, определяемая (8.10), не равна, вообще говоря, $\psi_0(x,y,z)$ на характеристическом конусе $x^2-y^2-z^2=0$, а функция $\psi(x,y,z)$, определяемая (8.11), совпадает с $\psi_0(x,y,z)$ на характеристическом конусе. Последнее обстоятельство естественно, так как Магнарадзе строил свою формулу, исходя из классической формулы, дающей решение задачи Коши для уравнения (8.2), в том случае, когда начальные данные заданы на характеристическом конусе. Метод, которым мы получили формулу (8.10) позволяет строить подобные формулы для случая $n$ переменных, а также некоторые интересные соотношения для уравнений эллиптического типа.

Из вида формулы (8.10) ясно, что ею можно пользоваться и для таких функций $\psi_0(x,y,z)$, которые в точке $(0,0,0)$ отличны от нуля.

Заметим, что формулу (8.11) можно получить вышеприведенным способом и тем самым избавиться от ограничений, которые пришлось сделать автору при ее выводе.

Краснознаменная ордена Ленина Военно-Воздушная Инженерная Академия
имени проф. Н. Е. Жуковского

## § 9. СВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ О КОЛЕБЛЮЩЕМСЯ ТРЕУГОЛЬНОМ КРЫЛЕ К ЗАДАЧЕ О СТАЦИОНАРНОМ ОБТЕКАНИИ ТРЕУГОЛЬНОГО КРЫЛА.

Для того, чтобы найти потенциал скоростей колеблющегося треугольного крыла, находящегося целиком внутри конуса Маха, нужно найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + k^2\psi = 0 \tag{9.1}$$

такое что

$$\psi(x,y,z) = 0, \text{ если } x^2 - y^2 - z^2 = 0, \tag{9.2}$$

$$\psi(x,y,z) = -\psi(x,y,-z) \tag{9.3}$$

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial z}\right|_{z=0} = F(x,y) \text{ на крыле.} \tag{9.4}$$

Решение уравнения (9.1) можно искать в виде (8.10) либо (8.11), где $\psi_0(x,y,z)$ удовлетворяет условиям (9.2) и (9.3). Пользуясь соотношением (9.4), мы получим интегральное уравнение относительно $\left.\frac{\partial\psi_0}{\partial z}\right|_{z=0}$. Найдя $\left.\frac{\partial\psi_0}{\partial z}\right|_{z=0}$ из этого уравнения, мы тем самым будем иметь достаточное число условий для определения функции $\psi_0(x,y,z)$.

Таким образом, случай колеблющегося крыла эффективно сводится к случаю стационарного обтекания. Проделаем все выкладки для того, чтобы закончить доказательство.

Мы воспользуемся формулой (8.11), чтобы избежать более громоздких вычислений, которые получаются, если пользоваться

Краснознаменная ордена Ленина Военно-Воздушная Инженерная Академия
имени проф. Н. Е. Жуковского

формулой (8.10). Результаты в обоих случаях получаются равноэффективными.

Итак, обозначив $\frac{\partial \psi_0}{\partial z}\Big|_{z=0} = f(x,y)$, мы можем условие (9.4) записать так:

$$\mathcal{F}(x,y) = f(x,y) - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial\theta} J_0\left(k\sqrt{(x^2-y^2)(1-\theta)}\right)\theta^{3/2} f(x\theta, y\theta)\,d\theta$$

Введя полярные координаты $x = r\sin\vartheta$, $y = r\cos\vartheta$ и положив $k^2(\sin^2\vartheta - \cos^2\vartheta) = a^2$, мы получим

$$\mathcal{F}(r,\vartheta) = f(r,\vartheta) - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial\theta} J_0\left(a r\sqrt{1-\theta}\right)\theta^{3/2} f(r\theta,\vartheta)\,d\theta. \qquad (9.5)$$

В дальнейшем мы не будем писать аргумент $\vartheta$, что не приведет к неясности. Можно положить $a=1$, так как заменой переменных к этому можно привести общий случай.

В интеграле (9.5) положим $r\theta = \rho$, тогда

$$\mathcal{F}(r) = f(r) - \int_0^r \frac{\partial}{\partial\rho} J_0\left(\sqrt{r^2-r\rho}\right)\left(\frac{\rho}{r}\right)^{3/2} f(\rho)\,d\rho$$

или

$$\mathcal{F}(r) r^{3/2} = \int_0^r J_0\left(\sqrt{r^2-r\rho}\right)\frac{d}{d\rho}\left(\rho^{3/2} f(\rho)\right)d\rho \qquad (9.6)$$

Пусть

$$\varphi(\rho) = \frac{d}{d\rho}\left(\rho^{3/2} f(\rho)\right), \quad \mathcal{F}_1(r) = r^{3/2}\mathcal{F}(r)$$

и

$$\Phi(s) = \int_0^\infty e^{-s\rho}\varphi(\rho)\,d\rho, \quad \Psi(s) = \int_0^\infty e^{-s\rho}\mathcal{F}_1(\rho)\,d\rho$$

Применив к равенству (9.6) трансформацию Лапласа и используя известный факт, что

$$\int_\rho^\infty e^{-sr} J_0\left(\sqrt{r^2-r\rho}\right)dr = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\, e^{-\frac{\rho}{2}\left(s+\sqrt{s^2+1}\right)}$$

Краснознаменная ордена Ленина Военно-Воздушная Инженерная Академия
имени проф. Н. Е. Жуковского

мы можем написать

$$\Phi(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\,\Psi\left(\frac{s+\sqrt{s^2+1}}{2}\right)$$

или

$$\left(\zeta+\frac{1}{4\zeta}\right)\Phi\left(\zeta-\frac{1}{4\zeta}\right) = \Psi(\zeta)\,,\quad \Re\zeta>0 \tag{9.7}$$

Из (9.7) известным образом найдем, что

$$\int_0^z \varphi(\rho)\,d\rho = F_1(z) + z\int_0^z \frac{F_1(t)}{t}\,\frac{\partial J_0\left(i\sqrt{(z-t)t}\right)}{\partial z}\,dt$$

или

$$z^{3/2} f(z) = z^{3/2} F(z) + z\int_0^z \sqrt{t}\,F(t)\,\frac{\partial J_0\left(i\sqrt{(z-t)t}\right)}{\partial z}\,dt\,.$$

Таким образом

$$f(z,\vartheta) = F(z,\vartheta) + \int_0^z \sqrt{\frac{t}{z}}\,F(t,\vartheta)\,\frac{\partial J_0\left(i\sqrt{(z-t)t}\right)}{\partial z}\,dt$$

В общем случае

$$f(z,\vartheta) = F(z,\vartheta) + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\theta^{3/2}}{1-2\theta}\,F(z\theta,\vartheta)\,\frac{\partial J_0\left(ik\sqrt{(x^2-y^2)(1-\theta)\theta}\right)}{\partial\theta}\,d\theta \tag{9.10}$$

Итак, интегральное уравнение (9.5) решено и тем самым показано, что задача отыскания потенциала скоростей колеблющегося треугольного крыла может быть эффективно сведена к задаче отыскания потенциала скоростей при стационарном обтекании.

## § 10. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИЛ И МОМЕНТОВ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА КОЛЕБЛЮЩЕЕСЯ КРЫЛО.

В этом параграфе мы вычислим силы и моменты, действующие на колеблющееся прямоугольное крыло. В случае стреловидного не возникнут дополнительные принципиальные трудности, но выкладки будут более длинные.

Возвращаясь к результатам § 1, мы можем представить потенциал скоростей в виде

$$\varphi(x,y,z,t) = R\,\psi(x,y,z)\,e^{\beta x + i\omega t} \qquad (10.1)$$

где $\psi(x,y,z)$ определяется формулами (6.11) и (6.13).

Следуя Н.Е.Кочину, выведем формулу для разностей давлений, действующих сверху и снизу на крыло. Пренебрегая величинами второго порядка малости в уравнении Лагранжа, записанном в подвижной системе координат, получим

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{\partial\varphi}{\partial t} + V\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

где $\rho$ - плотность невозмущенного потока. В силу (1.6) давления сверху и снизу крыла отличаются знаками

$$p_- = -p_+$$

и, следовательно,

$$p_- - p_+ = -2p_+ = +2\rho\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} - V\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_+ {}^{*} \qquad (10.2)$$

Используя (10.1), формулу (10.2) мы можем записать

$$p_- - p_+ = -2\rho V R e^{\beta x + i\omega t}\left[\frac{i\omega}{V(M^2-1)}\psi + \gamma\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]_{+0} \qquad (10.3)$$

Поэтому для вычисления под'емной силы и момента относительно

* В дальнейшем перейдем к переменным (1.13) § 1, опустим везде индексы и положим $\gamma = \frac{1}{\sqrt{M^2-1}}$, $\beta = \frac{\omega M_i}{a\sqrt{M^2-1}}$, $\beta_1 = \frac{\omega M_i}{a(M^2-1)}$

оси $OY$ имеем формулы

$$\gamma(Y-Y_0)=\iint_S (p_- - p_+)\,ds = -2\rho V \mathcal{R}e^{i\omega t}\iint_S e^{\beta x}\left[\frac{i\omega}{V(M^2-1)}\psi+\gamma\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]ds, \qquad (10.4)$$

$$\gamma^2(M-M_0)=\iint_S (p_- - p_+)\,x\,ds = -2\rho V \mathcal{R}e^{i\omega t}\iint_S e^{\beta x}\left[\frac{i\omega}{V(M^2-1)}\psi+\gamma\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]x\,ds \qquad (10.5)$$

где $Y_0$ и $M_0$ - под'емная сила и момент крыла, соответствующие поступательному движению крыла со скоростью $V$. Формулы (10.4) и (10.5) можно преобразовать так (см. фиг. 6):

$$\gamma(Y-Y_0)=-2\rho V \mathcal{R}e^{i\omega t}\left[\frac{i\omega}{V(M^2-1)}-\beta\right]\iint_S e^{\beta x}\psi\,ds - 2\rho V \mathcal{R}e^{i\omega t+\beta b}\gamma\int_{-a}^{a}\psi(b,y)\,dy \qquad (10.6)$$

$$\gamma^2(M-M_0)=-2\rho V \mathcal{R}e^{i\omega t}\left\{\left(\frac{i\omega}{V(M^2-1)}-\beta\right)\iint_S e^{\beta x}\psi x\,ds-\iint_S e^{\beta x}\psi\,ds\right\}-2\rho V \mathcal{R}e^{i\omega t+\beta b}\gamma\, b\int_{-a}^{a}\psi(b,y)\,dy \qquad (10.7)$$

В дальнейшем мы будем рассматривать прямоугольное крыло с удлинением $\lambda \geq \frac{2}{\sqrt{M^2-1}}$. На крыле нам известно

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial z}\right|_{z=0} = f(x,y)\,e^{-i\beta x}$$

Преобразуем формулы (10.6) и (10.7) так, чтобы в этих формулах фигурировал не потенциал скоростей, а известная нам функция $f(x,y)$. Мы вывод произведем кратко, опуская все промежуточные преобразования, так как они довольно громоздки, а по существу подобны преобразованиям § 6.

Ясно, что нам нужно преобразовать следующие три интеграла:

$$J_1=\iint_S e^{\beta x}\psi\,ds, \quad J_2=\iint_S e^{\beta x}x\,\psi\,ds, \quad J_3=\int_{-a}^{a}\psi(b,y)\,dy \qquad (10.8)$$

Начнем с $J_1$. Подставим вместо функции $\psi(x,y,+0)$ ее выражение либо по формуле (6.13) либо по формуле (6.17), в зависимости ти от того, лежит ли точка $(x,y,0)$ в области $AEFD$ или в областях $ABE$ и $DCF$ (см. фиг. 6). Интегрируя сначала по $x$, а потом по $y$, и меняя порядок интегрирования подобно тому, как мы это делали в § 6, мы получим

$$J_1=\iint\limits_S f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\int\limits_0^{b-\xi} e^{\beta t}J_0(\kappa t)\,dt-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{S_{ABE}} f(\xi,\eta)N_1(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{S_{DCH}} f(\xi,\eta)N_2(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \qquad (10.9)$$

где

$$N_1(\xi,\eta)=2(a-\eta)\int\limits_{a-\eta}^{b-\xi} e^{\beta t}dt\int\limits_{a-\eta}^{t} J_0(\kappa\sqrt{t^2-u^2})\frac{du}{u\sqrt{u^2-(2(a-\eta)-u)^2}} \qquad (10.10)$$

$$N_2(\xi,\eta)=2(a+\eta)\int\limits_{a+\eta}^{b-\xi} e^{\beta t}dt\int\limits_{a+\eta}^{t} J_0(\kappa\sqrt{t^2-u^2})\frac{du}{u\sqrt{u^2-(2(a+\eta)-u)^2}} \qquad (10.11)$$

Для получения соотношений (10.10) и (10.11) мы использовали известную формулу

$$\int\limits_x^y \frac{\frac{\partial}{\partial t}J_0(\kappa\sqrt{y^2-t^2})}{\sqrt{t^2-x^2}}\,dt=\frac{1-\cos\kappa\sqrt{y^2-x^2}}{\sqrt{y^2-x^2}}$$

Аналогично вычисляя $J_2$, найдем

$$J_2=\iint\limits_S f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\int\limits_\xi^b e^{\beta(t-\xi)}t\,J_0(\kappa(t-\xi))\,dt-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{S_{ABE}} f(\xi,\eta)L_1(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{S_{DCH}} f(\xi,\eta)L_2(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \qquad (10.12)$$

где

$$L_1(\xi,\eta)=2(a-\eta)\int\limits_{a-\eta+\xi}^{b} e^{\beta(t-\xi)}t\,dt\int\limits_{a-\eta}^{t-\xi} J_0(\kappa\sqrt{(t-\xi)^2-u^2})\frac{du}{u\sqrt{u^2-(2(a-\eta)-u)^2}} \qquad (10.13)$$

$$L_2(\xi,\eta)=2(a+\eta)\int\limits_{a+\eta+\xi}^{b} e^{\beta(t-\xi)}t\,dt\int\limits_{a+\eta}^{t-\xi} J_0(\kappa\sqrt{(t-\xi)^2-u^2})\frac{du}{u\sqrt{u^2-(2(a-\eta)-u)^2}} \qquad (10.14)$$

Вычисление $J_3$ значительно проще. В результате получим

$$J_3=\iint\limits_S e^{-\beta\xi}J_0(\kappa(b-\xi))f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{S_{ABE}} e^{-\beta\xi}f(\xi,\eta)R_1(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{S_{DCH}} e^{-\beta\xi}f(\xi,\eta)R_2(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \qquad (10.15)$$

где

$$R_1(\xi,\eta)=2(a-\eta)\int\limits_{a-\eta}^{b-\xi} J_0\left(k\sqrt{(b-\xi)^2-t^2}\right)\frac{dt}{t\sqrt{t^2-(2(a-\eta)-t)^2}} \qquad (IO.I6)$$

$$R_2(\xi,\eta)=2(a+\eta)\int\limits_{a+\eta}^{b-\xi} J_0\left(k\sqrt{(b-\xi)^2-t^2}\right)\frac{dt}{t\sqrt{t^2-(2(a+\eta)-t)^2}} \qquad (IO.I7)$$

Окончательно для силы и момента получатся следующие формулы

$$\gamma(Y-Y_0)=-2\rho V Re^{i\omega t}\left(\frac{i\omega}{V(M^2-1)}-\beta_1\right)\left[\iint\limits_S f(\xi,\eta)d\xi d\eta\int\limits_0^{b-\xi}e^{\beta t}J_0(kt)dt-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{S_{ABG}}f(\xi,\eta)N_1(\xi,\eta)d\xi d\eta-\right. \qquad (IO.I8)$$

$$\left.-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{S_{DCH}}f(\xi,\eta)d\xi d\eta N_2(\xi,\eta)\right]-2\rho V Re^{i\omega t+\beta b}\left[\iint\limits_S f(\xi,\eta)e^{-\beta\xi}J_0(k(b-\xi))d\xi d\eta-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{S_{ABG}}f(\xi,\eta)R_1(\xi,\eta)d\xi d\eta-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{S_{DCH}}f(\xi,\eta)R_2(\xi,\eta)d\xi d\eta\right]$$

$$\gamma^2(M-M_0)=-2\rho V Re^{i\omega t}\left\{\iint\limits_S f(\xi,\eta)\left[\left(\frac{i\omega}{V(M^2-1)}-\beta_1\right)\int\limits_{\xi}^{b}te^{\beta(t-\xi)}J_0(k(t-\xi))dt-\gamma\int\limits_0^{b-\xi}e^{\beta t}J_0(kt)dt\right]d\xi d\eta-\right. \qquad (IO.I9)$$

$$\left.-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{S_{ABG}}\left[\left(\frac{i\omega}{V(M^2-1)}-\beta_1\right)L_1(\xi,\eta)+\gamma N_1(\xi,\eta)\right]f(\xi,\eta)d\xi d\eta-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{S_{DCH}}\left[\left(\frac{i\omega}{V(M^2-1)}-\beta_1\right)L_2(\xi,\eta)+\gamma N_2(\xi,\eta)\right]f(\xi,\eta)d\xi d\eta\right\}-$$

$$-2\rho V Re^{i\omega t+\beta b}\gamma b\left\{\iint\limits_S f(\xi,\eta)e^{-\beta\xi}J_0(k(b-\xi))d\xi d\eta-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{S_{ABG}}e^{-\beta\xi}f(\xi,\eta)R_1(\xi,\eta)d\xi d\eta-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{S_{DCH}}e^{-\beta\xi}R_2(\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\xi d\eta\right\}$$

Эти формулы дают возможность найти силу и момент, действующие на колеблющееся тонкое прямоугольное крыло. Конечно, вычисление по этим формулам сложно, но можно заметить следующее. Если поверхность крыла задавать в виде полинома по $\xi$ с коэффициентами, зависящими от $\eta$, а это всегда будет иметь место при расчете на флаттер, то расчет будет сравнительно прост.

Как известно, интегралы типа $\iint\limits_S$ можно вычислять с помощью реккурентных формул. Слагаемые типа $\iint\limits_{S_{ABG}}$, $\iint\limits_{S_{DCH}}$ тоже вычисляются сравнительно несложно.

Заметим в конце, что подобные формулы имеют место и для стреловидного крыла.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

В работе даны эффективные выражения для сил и моментов, действующих на колеблющееся тонкое стреловидное крыло в сверхзвуковом потоке.

Рассмотрено произвольное распределение нормальных скоростей колебательного движения по крылу, что охватывает случаи деформирующегося крыла и крыла с элероном.

Полученные формулы дают возможность произвести расчет критической скорости флаттера крыла и оперения.

Краснознаменная ордена Ленина Военно-Воздушная Инженерная Академия
имени проф. Н. Е. Жуковского

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА.


I. Некрасов А.И.. Теория крыла в нестационарном потоке.

2. Красильщикова Е.А. Возмущенное движение воздуха при вибрациях крыла, движущегося со сверхзвуковой скоростью. ПММ, том XI, вып. I, I947г.

3. Хаскинд М.Д., Фалькович С.В. Колебания крыла конечного размаха в сверхзвуковом потоке. ПММ, том XI, вып. 3, I947г.

4. Галин Л.А. Крыло прямоугольной формы в плане в сверхзвуковом потоке. ПММ, том XI, вып. 4, I947г.

5. Красильщикова Е.А. ДАН, том LVIII , № 4,5,6.

6. Магнарадзе Л. Сообщения АН Грузинской ССР, том У, № 3, I944г.

7. [illegible]

7. Курант Р. и Гильберт Д. Методы математической физики, том П.

8. Hadamard Leçons sur le problème de Cauchy.

9. Фалькович С.В. Подъемная сила крыла в сверхзвуковом потоке. ПММ, том XI, вып. 1, 1947г.