

Тишкин Владимир Федорович

КУРС ЛЕКЦИЙ

Методы построения расчетных сеток

Курс лекций для студентов факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова подготовлен при поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики.

Оглавление

Введение.....	3
Лекция 1. Расчетная сетка и ее геометрические элементы. Типы расчетных сеток.....	4
Лекция 2. Способы описания неструктурированных расчетных сеток.....	11
Лекция 3. Использование отображений для построения структурированных сеток.....	16
Лекция 4. Метод Winslow.....	25
Лекция 5. Метод Winslow. Продолжение.....	29
Лекция 6. Способы адаптации структурированных сеток.....	36
Лекция 7. Построение неструктурированных сеток. Метод движущегося фронта.....	41
Лекция 8. Триангуляция Делоне.....	47
Лекция 9. Триангуляция Делоне. Продолжение.....	53
Лекция 10. Некоторые вопросы машинного представления геометрических объектов.....	57
Список литературы	62

Введение

При численном решении многих прикладных задач используются так называемые расчетные сетки. Построение таких сеток является важным этапом общего цикла математического моделирования. В областях сложной формы построение расчетной сетки является нетривиальной задачей и от удачного выбора сетки во многом зависит качество получаемого приближенного решения. Предлагаемый курс посвящен изложению базовых принципов построения структурированных и неструктурированных расчетных сеток и доступен студентам бакалавриата, имеющим математическую подготовку в объеме первых трех университетских курсов. Студенты, освоившие этот курс, будут готовы к изучению имеющейся в настоящее время обширной специализированной литературы по методам построения сеток и к самостоятельной разработке прикладного программного обеспечения для автоматического построения сеток при математическом моделировании широкого класса прикладных задач.

Автор выражает свою благодарность М.Е. Ладонкиной и О.А. Неклюдовой за полезные обсуждения и помощь при подготовке текста лекций.

Лекция 1. Расчетная сетка и ее геометрические элементы. Типы расчетных сеток.

Решение уравнений математической физики представляет элемент бесконечномерного функционального пространства. При поиске приближенного решения с помощью численных методов необходимо провести так называемую дискретизацию, то есть перейти к задаче в конечномерном пространстве. Такое конечномерное пространство может строиться различными способами. Например, при использовании широко распространенного метода конечных разностей [1] область непрерывного изменения аргументов заменяется дискретным множеством точек и вместо функций из исходного функционального пространства рассматриваются функции, определенные в этих точках. Если выбранные точки расположить в узлах прямоугольной решетки, то можно, заменив входящие в исходное уравнение производные на соответствующие конечные разности, получить систему алгебраических уравнений. В этом случае часть прямоугольной решетки, занимающую область, в которой ищется решение, будем называть расчетной сеткой, а функции дискретного аргумента – сеточными функциями.

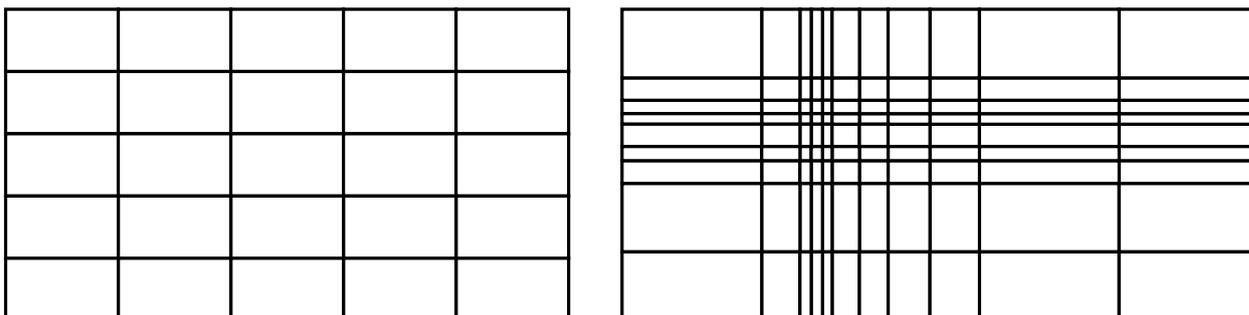


Рис. 1.1. Прямоугольная расчетная сетка. Двумерный случай.

В проекционных методах [2] конечномерное пространство выбирается как некоторое подпространство исходного функционального пространства. При этом приближенное решение ищется как элемент этого подпространства. Однако и в этом случае наиболее эффективные их варианты, такие как метод конечных элементов [3] и разрывный метод Галеркина [4] используют разбиение исходной области на части (элементы), которые также образуют расчетную сетку, в общем случае непрямоугольную.

Как видно из Рис. 1.1, в случае двух пространственных измерений наряду с узлами расчетная сетка содержит такие геометрические элементы как ребра, соединяющие узлы сетки и ячейки, представляющие части исходной области. В трехмерном случае число различных типов геометрических

элементов увеличивается, к ним теперь относятся узлы, ребра, грани и ячейки сетки (см. Рис. 1.2).

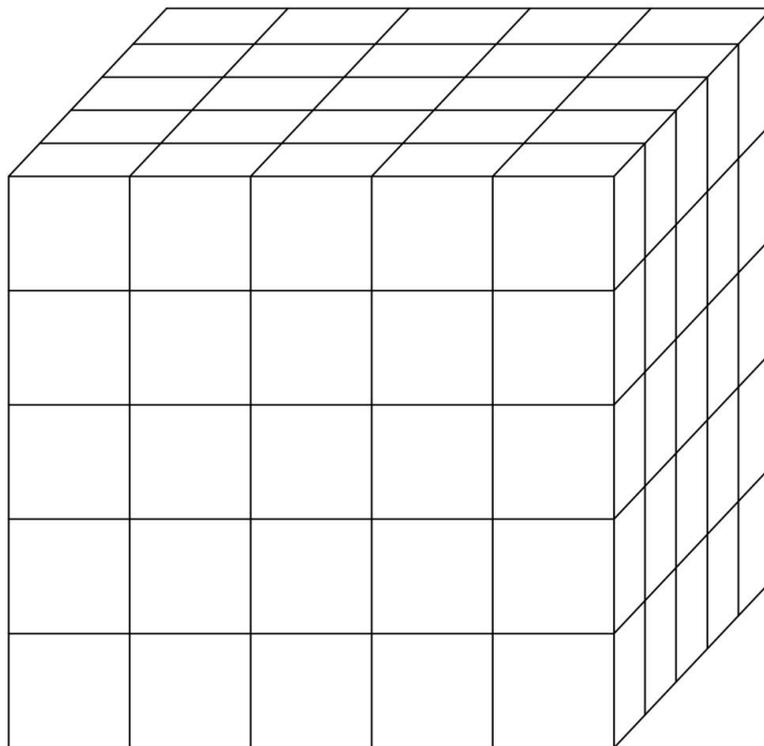


Рис. 1.2 Прямоугольная равномерная сетка в трехмерном случае.

Каждый из элементов сетки имеет свою размерность. По определению положим размерность узла сетки равной нулю, размерности ребер, граней и ячеек соответственно равны 1, 2 и 3.

При построении вычислительных алгоритмов важным оказывается понятие границы элемента сетки. Для определения этого понятия введем так называемые коэффициенты инцидентности. Такой коэффициент определяется для произвольной упорядоченной пары элементов и принимает значения -1, 0 и +1. При этом ненулевые значения он принимает только в том случае, если размерность первого элемента пары на единицу превосходит размерность второго элемента и второй элемент принадлежит замыканию первого. Эти коэффициенты мы будем обозначать $ki(a_1, a_2)$. Здесь через a_1 и a_2 обозначены первый и второй элемент пары. На коэффициенты инцидентности накладывается дополнительное требование:

$$\sum_b (ki(a,b)) \sum_c (ki(b,c)) \quad (1.1)$$

Множество элементов, каждый из которых имеет определенную размерность и для которых определены коэффициенты инцидентности, удовлетворяющие указанным выше условиям, называется полиэдральным комплексом. Как определить коэффициенты инцидентности будет рассказано ниже. Здесь отметим, что расчетные сетки (и не только прямоугольные) представляют собой такие структуры.

Далее нам понадобится использовать так понятие цепи. Цепью будем называть формальную сумму вида

$$\sum \alpha_i a_i$$

Здесь a_i – произвольные элементы сетки, а α_i – целочисленные коэффициенты.

Формальные суммы можно складывать, приводя коэффициенты при одинаковых элементах сетки и умножать на целые числа. Цепь, у которой все коэффициенты равны нулю будем называть нулевой цепью.

Границей элемента a будем называть формальную сумму

$$\partial a = \sum_b (ki(a,b)) b$$

Здесь буквой ∂ обозначен оператор взятия границы.

Границей элементов с размерностью 0 по определению считать нулевую цепь. Можно определить границу произвольного множества элементов одинаковой размерности, для этого достаточно просуммировать границы всех входящих в это множество элементов, суммируя коэффициенты при одинаковых членах.

Отметим важное свойство оператора взятия границы – граница от границы представляет собой нулевую цепь.

$$\partial \partial a = 0 \quad (1.2)$$

Это непосредственно следует из (1.1). Множество, являющееся границей какого-то другого множества элементов, называется ограничивающим множеством. Множество, граница которого является нулевой цепью, называется циклом. Таким образом, любое ограничивающее множество является циклом, но, в общем случае, не наоборот.

Прямоугольные сетки представляют простейший тип расчетных сеток, и, хотя они эффективно применяются для решения задач в областях простой формы, для многих прикладных задач удобнее использовать другое расположение узлов и остальных элементов сетки. Один из способов построения таких сеток заключается в следующем. Рассмотрим взаимно однозначное, непрерывное с обратным отображение квадрата (в трехмерном случае куба) на некоторую конечную область, которое переводит границу квадрата (куба) в границу области. Образ прямоугольной сетки при этом даст некоторую криволинейную сетку, покрывающую рассматриваемую область. Сетки такого вида изображены на рис. 1.3. Если такое отображение задается в явном виде (рис. 1.3 а), то построение такой сетки не представляет трудностей. Однако в более сложном случае (рис. 1.3 б), когда результирующая область имеет неправильную форму, функции, осуществляющие такое отображение в явном виде выписать не удастся, их определение составляет одну из задач автоматического построения сеток.

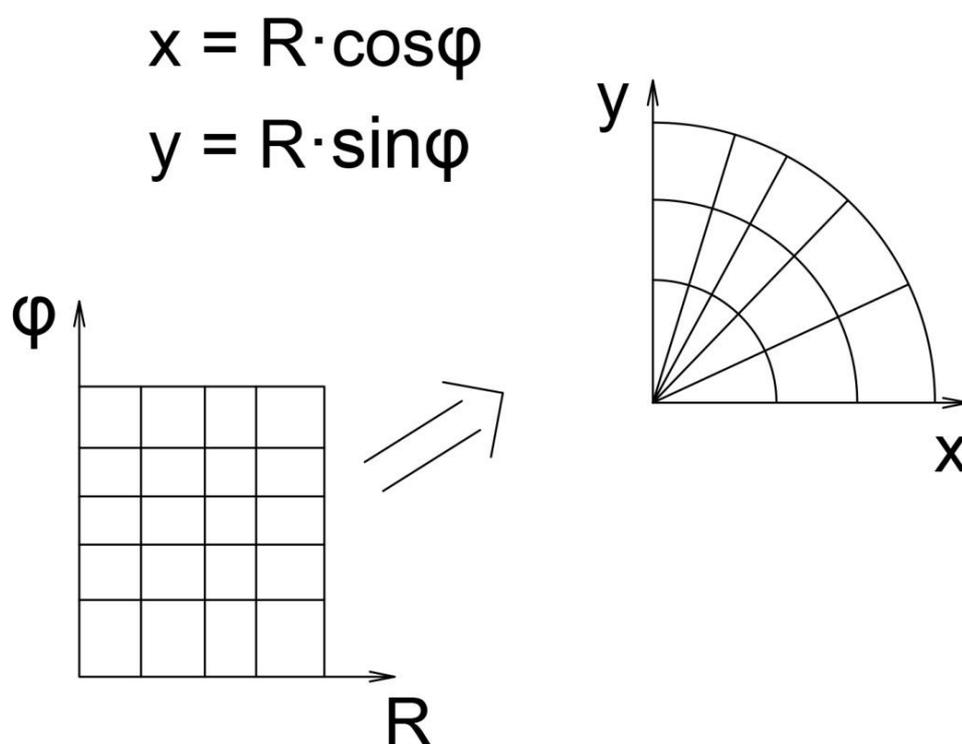


Рис 1.3. а) Отображения двумерных прямоугольных сеток. Отображение задано явно.

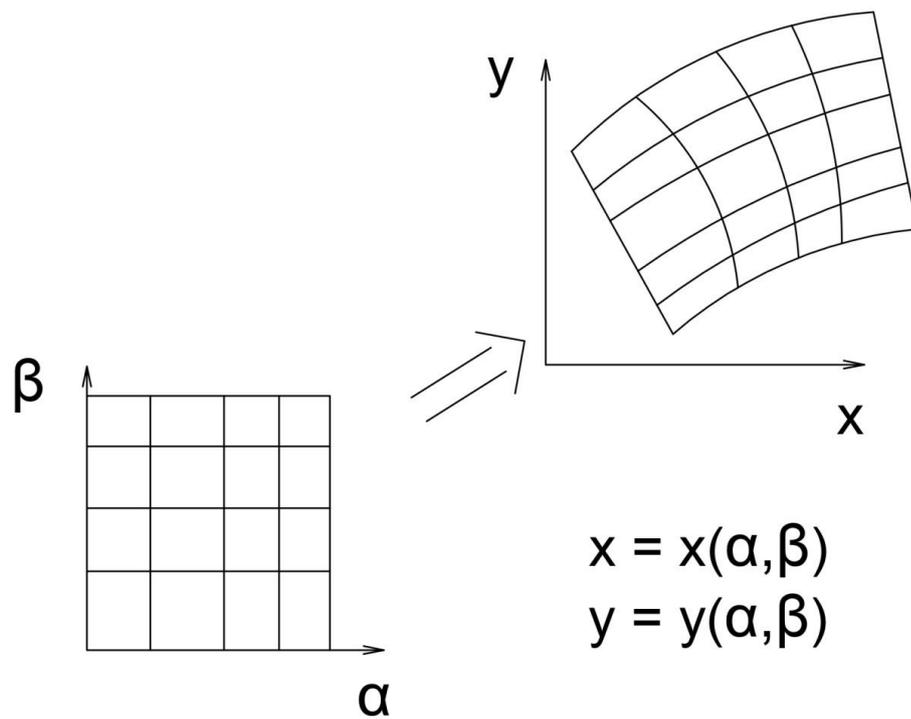


Рис 1.3. Отображения двумерных прямоугольных сеток. б) Функции, определяющие отображение априори неизвестны.

Прямоугольные сетки и сетки, полученные из них путем отображений, образуют класс так называемых структурированных сеток. Элементам можно поставить в соответствие два в случае двух измерений или три в трехмерном случае три индекса. При этом соседние элементы однозначно определяются как имеющие один или несколько индексов, отличающихся от индексов выбранного элемента на единицу см. рис. 1.4

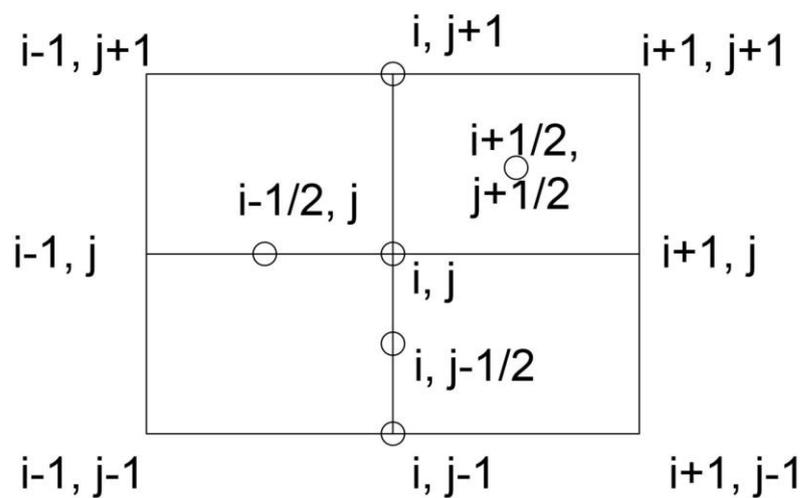


Рис.1.4.

Соседние элементы структурированной сетки и их индексы

Отметим также, что элементы структурированной сетки можно перенумеровать таким образом, что индексы легко вычисляются по номеру элемента. Например, для двумерной прямоугольной сетки такая нумерация показана на рис. 1.5.

	28	29	30	31	32	33	34
21	22	23	24	25	26	27	
14	15	16	17	18	19	20	
7	8	9	10	11	12	13	
0	1	2	3	4	5	6	

Рис. 1.5. Нумерация элементов структурированной сетки.

В этом случае индексы элемента с номером n определяются как

$$i = n - [n/N] * N \quad j = [n/N]$$

Здесь $[k]$ – целая часть действительного числа k .

Существование такой нумерации, когда по номеру элемента можно определить номера его ближайших соседей можно принять за определение структурированной сетки.

В случае произвольной сетки такой нумерации может не существовать. Сетки такого типа называют неструктурированными.

Структурированные сетки не всегда удобны для использования в областях сложной формы. Иногда в этом случае прибегают к использованию так называемых блочно-структурированных сеток. Эти сетки составлены из отдельных блоков, каждый из которых представляет собой структурированную сетку (см. рис. 1.6).

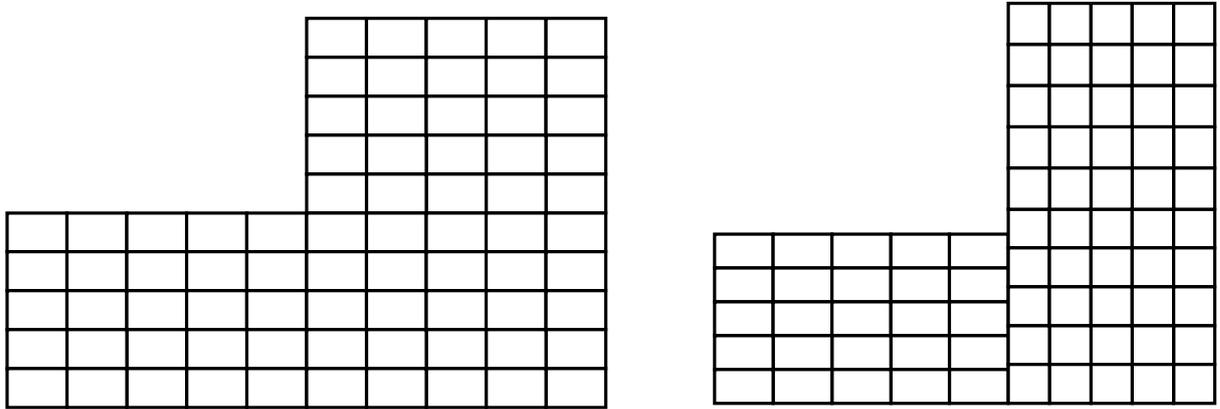


Рис. 1.6.

Блочнo-структурированные сетки. а) конформная б) неконформная

Узлы на стыках блоков такой сетки могут в общем случае не совпадать. Такая сетка (см. рис. 6.1) называется неконформной (этот термин не имеет отношения к конформным преобразованиям). Если сетка не имеет «висячих» узлов, мы будем называть такую сетку конформной.

В общем случае ячейки неструктурированных сеток могут быть произвольными многоугольниками (в трехмерном случае – произвольными многогранниками). Однако обычно используются неструктурированные сетки, имеющие своими ячейками ограниченный набор многоугольников или многогранников. Наибольшее распространение получили двумерные треугольные и трехмерные тетраидальные сетки. Часто также используют сетки из треугольников и четырехугольников и трехмерные сетки из тетраэдров, треугольных призм, четырехугольных пирамид и гексаэдров. Такие наборы позволяют в определенных областях оставлять структурированную сетку из четырехугольников и гексаэдров.

Лекция 2. Способы описания неструктурированных расчетных сеток.

Пример двумерной неструктурированной сетки приведен на рис. 2.1.

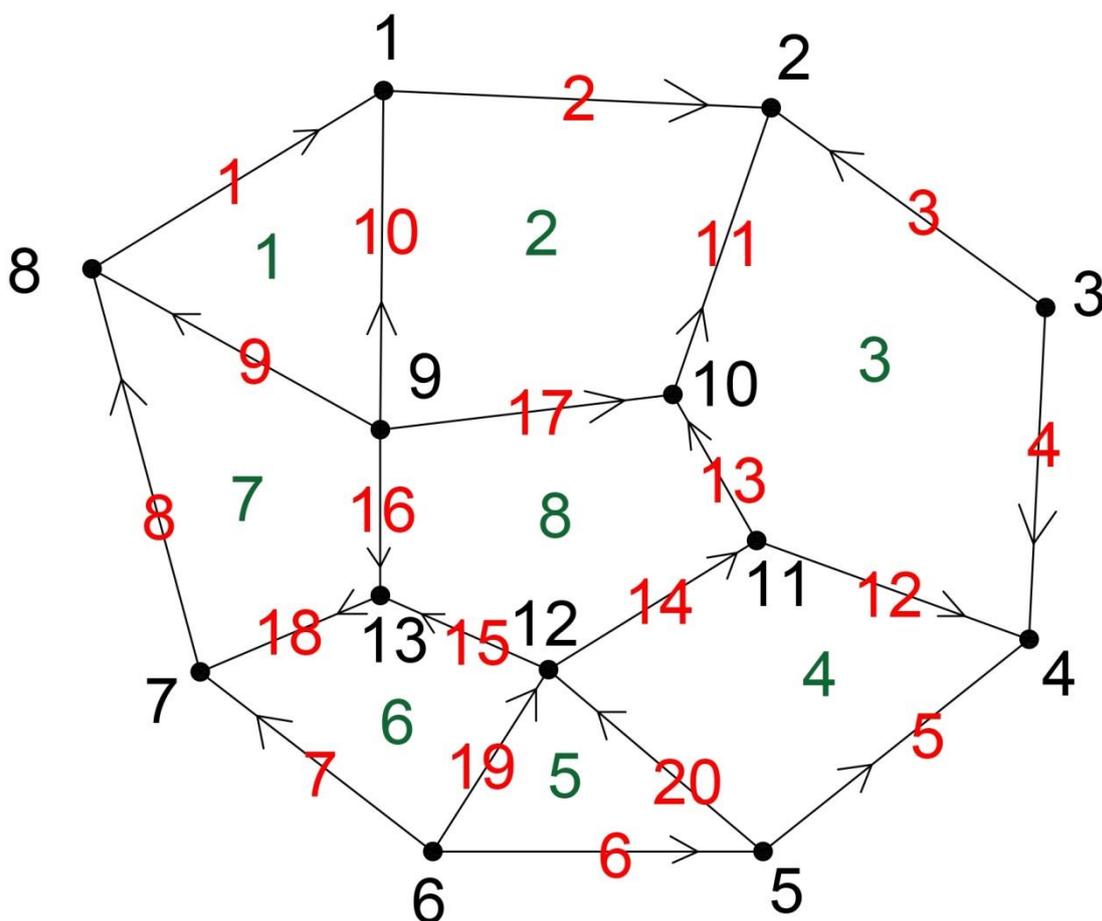


Рис. 2.1.

Неструктурированная сетка, и нумерация ее элементов.

Если элементы структурированных сеток мы можем просто хранить в массивах, содержащих 2 или 3 индекса для случая двух и трех пространственных измерений соответственно, то для неструктурированных сеток необходимо использовать более сложное описание. Предварительно опишем, как можно задать коэффициенты инциденции.

С этой целью на каждом элементе введем произвольно выбранный ортогональный базис. Число векторов такого базиса очевидно совпадает с размерностью выбранного элемента. Выберем произвольный элемент с ненулевой размерностью a . Входящий в его границу элемент b имеет на

единицу меньше количество базисных векторов. Дополним этот базис еще одним вектором, являющимся вектором внешней нормали элемента b , при этом новый вектор будем считать первым в расширенном базисе. Если получившаяся система имеет ту же ориентацию, что и базис элемента a , то положим коэффициент инциденции равным $+1$, в противном случае -1 , то есть в границу элемента a элемент b будет входить со знаком $+$ при совпадении ориентаций и со знаком $-$ если ориентации противоположны. Это необходимо учитывать при вычислении интегралов по границе. Иллюстрация этой процедуры изображена на рис. 2.2.

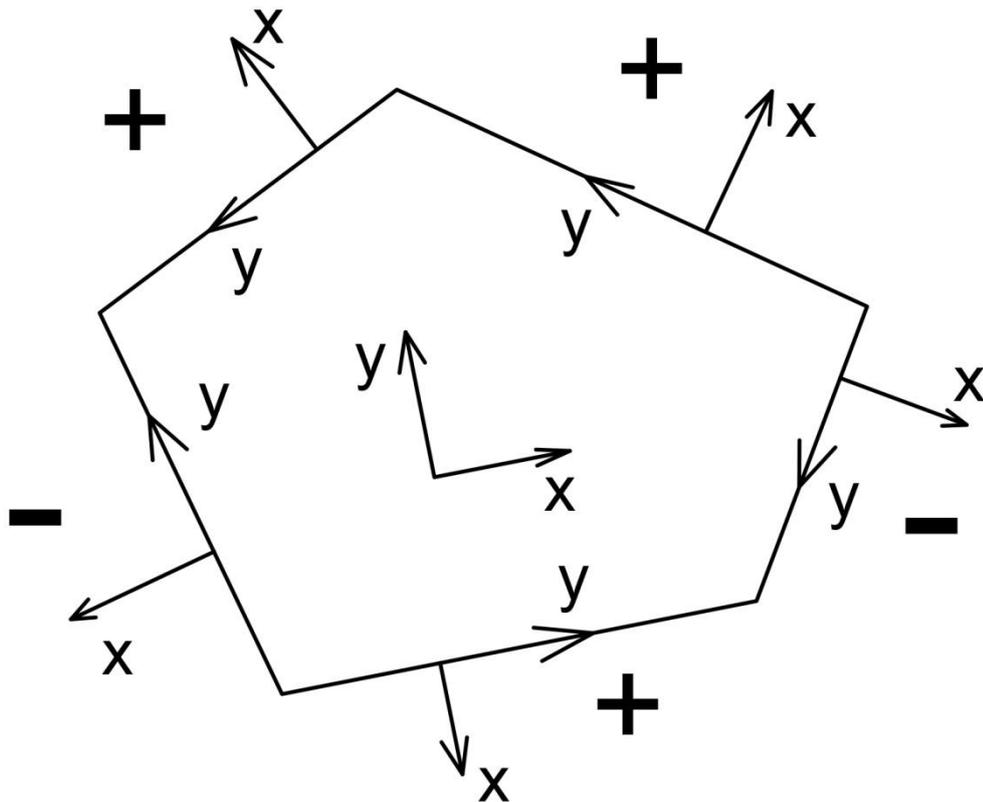


Рис. 2.2.

Выбор ориентации элементов сетки.

Вернемся к вопросу о том, как работать с неструктурированными сетками. Опишем вначале двумерный случай. Во-первых, необходимо предварительно занумеровать элементы сетки, как это сделано на рис. 2.1. Отметим, что нумерацию мы будем производить отдельно для элементов каждой размерности, начиная с 1. При этом должны быть определено число элементов каждого типа, эти значения обозначим N_v , N_r и N_c соответственно для узлов, ребер и ячеек. Геометрическое расположение узлов сетки (элементов размерности 0) определяется заданием двух массивов с

координатами узлов $X(i)$ и $Y(i)$ здесь i – номер узла, меняющийся в пределах от 1 до N_v . Структуру сетки можно описать различным образом.

Мы будем полагать, что в каждой ячейке сетки выбран правосторонний базис. Кроме того, сетку будем полагать связной в том смысле, что любые две ее ячейки можно соединить путем, проходящим по ячейкам сетки и не затрагивающим узлы.

В качестве одного из распространенных описаний можно использовать описание, связанное с ребрами сетки. В этом случае для каждого ребра указываются номера двух его граничных узлов, при этом если соответствующий коэффициент инцидентности равен -1 , то номер указывается со знаком минус. Далее указываются номера двух ячеек сетки, для которых данное ребро является граничным. Опять же, если соответствующий коэффициент отрицательный, то номер указывается со знаком минус. Если ребро является граничным, то в качестве номера второй ячейки указывается ноль.

Для сетки с рис. 2.1. такая информация будет иметь вид

1.	1	-8	-1	0		11.	-10	2	2	-3
2.	2	-1	-2	0		12.	-11	4	-4	3
3.	2	-3	3	0		13.	-11	10	8	-3
4.	-3	4	-3	0		14.	-12	11	8	-4
5.	-5	4	4	0		15.	-12	13	-8	6
6.	-6	5	5	0		16.	13	-9	8	-7
7.	-6	7	-6	0		17.	-9	10	-8	2
8.	-7	8	7	0		18.	-13	7	-7	6
9.	-9	8	7	-1		19.	-6	12	6	-5
10.	-9	1	1	-2		20.	-5	12	5	4

Задание такой информации полностью определяет структуру сетки. Однако если пользоваться только этой информацией, чтобы получить данные, часто используемые при вычислениях, необходимо будет неоправданно часто производить полный просмотр этих данных. Так, например, чтобы установить какие узлы являются вершинами ячейки с номером n необходимо вначале просмотреть все данные и сформировать список ребер, для которых ячейка с указанным номером упомянута среди связанных с этим ребром ячеек, и затем уже по номерам выбранных ребер установить номера нужных узлов. Чтобы избежать такого перебора, целесообразно составить еще два описания структуры сетки, связанные с узлами и ячейками.

Это описания структуры, связанные с ячейками и узлами сетки. Их можно составить, опираясь на вышеописанную информацию и в дальнейшем использовать по мере надобности. Для описания, связанного с узлами, каждому узлу сетки необходимо поставить в соответствие число ребер, имеющих данный узел к качеству одного из своих концов и далее номера всех этих ребер. При этом номер ребра указывается со знаком плюс или минус в соответствии со знаком соответствующего коэффициента инцидентности. Аналогичным образом указывается число ячеек, которые имеют данный узел вершиной и номера таких ячеек.

Во многих случаях будет удобным расположить номера ребер и ячеек связанных с узлом так, чтобы при переходе от одного номера к следующему совершался обход узла против часовой стрелки. Это можно сделать следующим образом. Если узел является внутренним узлом сетки, то выберем первое ребро в структуре связанной с ребрами. Пусть выбранное ребро имеет номер a , а исходный узел – номер b . Далее, если коэффициент $i(a,b)$ отрицательный (то есть ребро a имеет узел b своим «началом»), то из двух ячеек, связанных с ребром a возьмем ту ячейку, у которой коэффициент инцидентности с ребром a положительный, в противном случае (ребро a имеет узел b своим «концом») – ту ячейку у которой этот коэффициент отрицательный. Ребро, в списке которого присутствуют выбранная ячейка и узел и отличное от ребра a и будет следующим ребром за ребром a при обходе узла b в направлении против часовой стрелки. Далее процесс повторяется с этим ребром, при этом выбранная ячейка будет следующей в данном направлении обхода узла. Процесс заканчивается когда новое найденное ребро совпадает с первоначальным.

Если узел является граничным, то нужно сначала найти начальное ребро. Это ребро должно содержать в своем списке нулевой номер ячейки. Таких ребер для связной сетки может быть только два. Выберем из них то, для которого коэффициенты инцидентности ребра с узлом и ячейки с ребром совпадают. Начиная от этого ребра действуем по вышеописанному алгоритму, пока не дойдем до второго граничного ребра.

Аналогичным образом составляется описание, связанное с ячейками сетки.

В случае трех пространственных измерений методы описания структуры сетки будут более сложными. Изложим такой метод, опирающийся на грани трехмерных ячеек.

Для каждой грани a укажем число ребер, ограничивающих ее и номера этих ребер. Вслед за каждым номером ребра необходимо указать два номера узлов, являющихся началом (коэффициент инцидентности равен -1) и концом (коэффициент инцидентности равен $+1$) данного ребра. Затем указываются номера двух ячеек, для которых выбранная грань является граничной. Легко видеть, что если в каждой ячейке сетки выбран правосторонний базис одна из таких ячеек имеет положительный коэффициент инцидентности с гранью a , а вторая – отрицательный. Как и в двумерном случае будем номера записывать со знаком, совпадающим со знаком соответствующего коэффициента инцидентности. Номера ребер для последующего удобства можно поставить в порядке, соответствующем обходу грани против часовой стрелки, если смотреть на нее так, чтобы выбранный на ней базис был правосторонним, то есть угол поворота от первого вектора ко второму против часовой стрелки был бы меньше 180 градусов.

Лекция 3. Использование отображений для построения структурированных сеток.

В этой лекции мы будем рассматривать в основном построение двумерных структурированных сеток в так называемом криволинейном четырехугольнике. Под криволинейным четырехугольником мы будем подразумевать односвязную область с кусочно-гладкой границей с выделенными на этой границе четырьмя точками, которые будем называть углами криволинейного четырехугольника. Эти четыре точки не обязательно должны попадать в точки излома границы. На рис. 3.1 приведены примеры криволинейных четырехугольников.

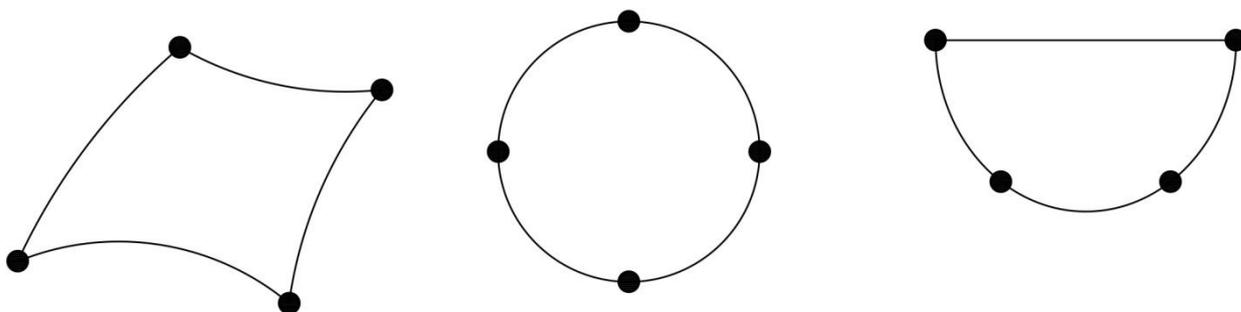


Рис. 3.1

Примеры криволинейных четырехугольников

Рассмотрим вначале один из простых способов построения сетки в криволинейном четырехугольнике, когда задано положение узлов на его границе. Возьмем решетку из упругих нитей, закрепленных между собой в узлах, и растягивая ее поместим граничные узлы такой решетки в заданные узлы криволинейного четырехугольника (см. рис. 3.2). При этом решетка деформируется, образуя искомую сетку.

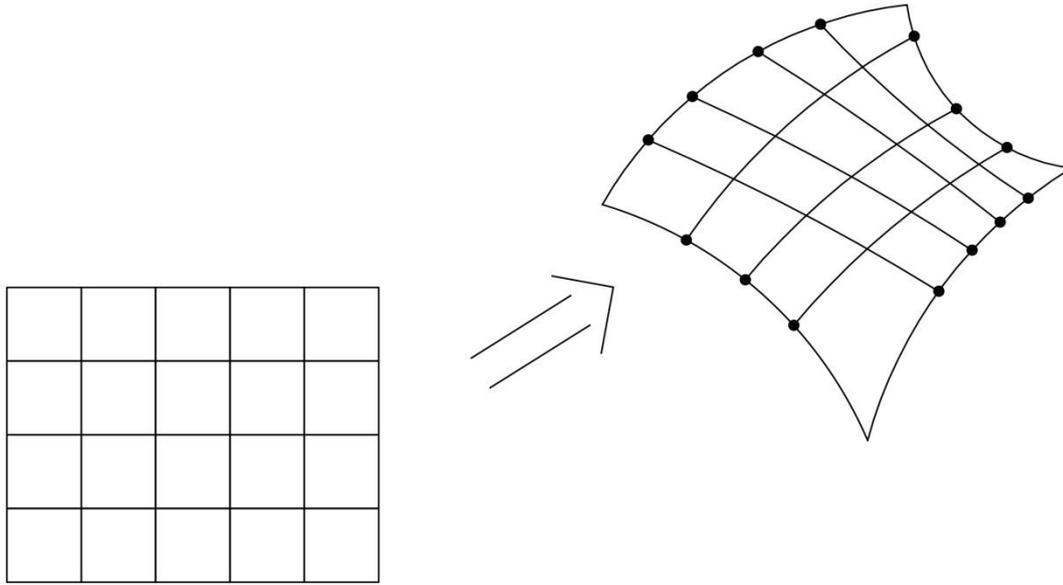


Рис. 3.2

а) исходный четырехугольник и решетка упругих нитей. б) решетка «натянутая» на четырехугольник.

Осталось определить положение, куда попадут узлы деформируемой решетки. Для этой цели воспользуемся утверждением, что в положении равновесия потенциальная энергия системы принимает минимальное значение. Как известно из школьного курса физики, потенциальная энергия растянутого упругого элемента равна

$$\Pi = k \frac{(l - l_0)^2}{2} \quad (3.1)$$

Здесь l и l_0 – длины деформированного и недеформируемого элементов, k – коэффициент жесткости.

Будем предполагать, что

$$l < l_0 \quad (3.2)$$

Тогда (3.1) упрощается и переходит в

$$\Pi = k \frac{l^2}{2} \quad (3.3)$$

Одновременно следствием предположения (3.2) является тот факт, что все упругие элементы деформируемой решетки являются растянутыми и представляют собой отрезки прямых линий.

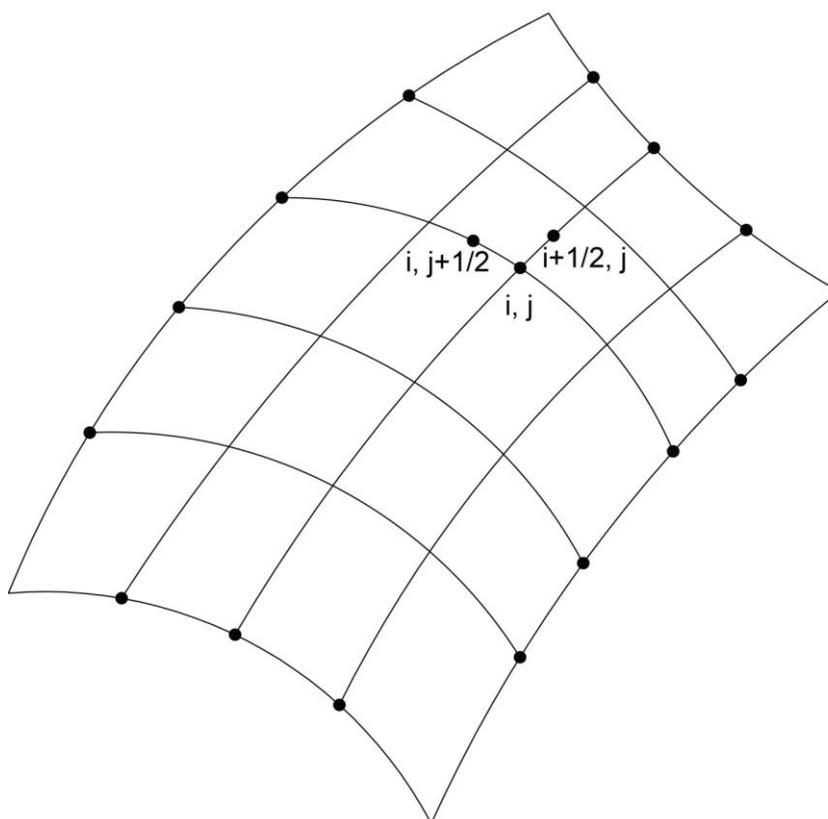


Рис. 3.3

Индексация узлов и элементов деформированной решетки

Занумеровав узлы деформированной решетки, которые являются узлами искомой сетки, двумя индексами i, j $i=0, \dots, N, j=0, \dots, M$, а ребра сетки (упругие элементы деформированной решетки) соответствующими полуцелыми индексами $i+1/2, j$ и $i, j+1/2$ (см. рис. 3.3), видим, что потенциальная энергия этих ребер равна

$$\Pi_{i+1/2, j} = k \frac{(x_{i+1, j} - x_{ij})^2 + (y_{i+1, j} - y_{ij})^2}{2} \quad \Pi_{i, j+1/2} = k \frac{(x_{ij+1} - x_{ij})^2 + (y_{ij+1} - y_{ij})^2}{2}$$

Полная упругая энергия является суммой энергий отдельных ребер, и, таким образом, поскольку граничные узлы фиксированы, является функцией от координат внутренних узлов сетки:

$$\Pi_{\text{полн}} = \frac{k}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^M [(x_{i+1, j} - x_{ij})^2 + (y_{i+1, j} - y_{ij})^2] + \frac{k}{2} \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{i=0}^N [(x_{ij+1} - x_{ij})^2 + (y_{ij+1} - y_{ij})^2] \quad (3.4)$$

Необходимым условием минимума потенциальной энергии является условие равенства нулю частных производных от этой функции по ее аргументам:

$$\frac{\partial \Pi_{полн}}{\partial x_{ij}} = 0, \quad i = 1, \dots, N-1$$

$$\frac{\partial \Pi_{полн}}{\partial y_{ij}} = 0, \quad j = 1, \dots, M-1$$

Легко видеть, что эти производные имеют вид:

$$\begin{aligned} (x_{i+1j} - 2x_{ij} + x_{i-1j}) + (x_{ij-1} - 2x_{ij} + x_{ij+1}) &= 0 \\ (y_{i+1j} - 2y_{ij} + y_{i-1j}) + (y_{ij-1} - 2y_{ij} + y_{ij+1}) &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Формулы (3.5) представляют собой систему уравнений, решив которую мы определим положение внутренних узлов, и тем самым завершим процесс построения сетки. Это система линейных уравнений, методы решения подобных систем хорошо разработаны (см. например, [5]).

Систему уравнений (3.5) можно использовать для построения сеток в выпуклых областях. Примеры построенных подобным образом сеток можно видеть на рис. 3.4 а). Однако, если исходная область невыпуклая, то значения координат узлов, полученные в результате решения уравнений (3.5) могут выходить за пределы области (рис. 3.4 б). Это положение можно исправить, если нужным образом подобрать коэффициенты жесткости «горизонтальных» и «вертикальных» упругих элементов.

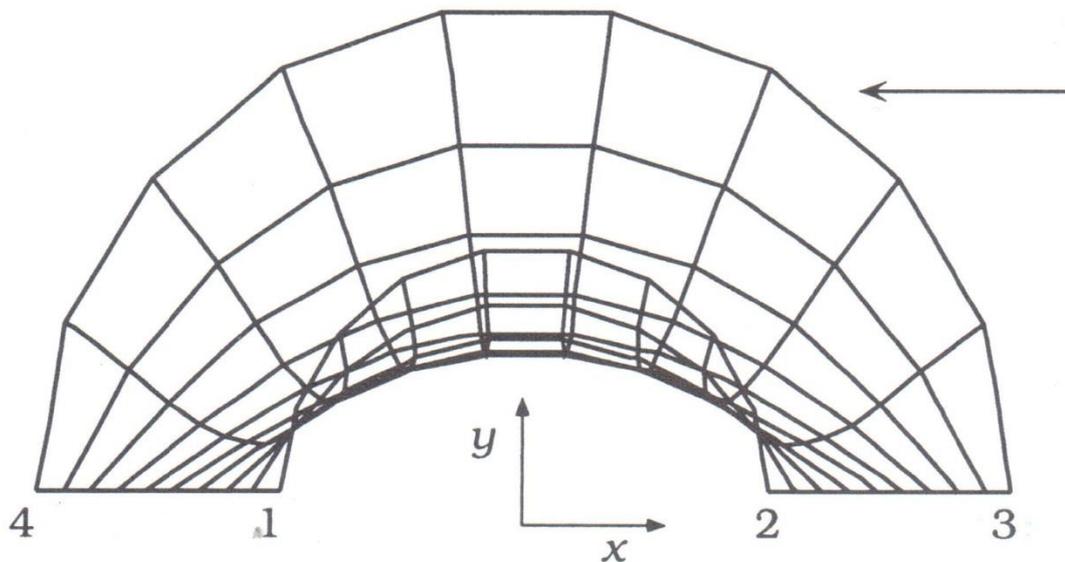


Рис. 3.4

Невыпуклая область.

Такая ситуация в случае невыпуклых областей возникает вследствие того, что упругим элементам одного семейства (в случае на рисунке 3.4 б) – семейства упругих элементов поперек «подковы») не хватает силы, чтобы «растянуть» стремящиеся сократиться элементы другого семейства и вернуть их в пределы рассматриваемой области. Это положение можно исправить, если увеличить коэффициент жесткости элементов данного семейства. Покажем, что можно выбрать эти коэффициенты таким образом, чтобы избежать выхода узлов за границы области и возникающего вследствие этого самопересечений сетки.

До этого момента мы считали коэффициенты жесткости всех упругих элементов одинаковыми. Будем теперь считать, что коэффициенты жесткости «горизонтальных» и «вертикальных» элементов различными и равными k_{Γ} и k_{B} соответственно.

Формулы для потенциальной энергии (3.4) и уравнения для нахождения координат узлов (3.5) также перепишем с учетом разницы коэффициентов жесткости:

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{полн}} = & \frac{k_{\Gamma}}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^M \left[(x_{i+1j} - x_{ij})^2 + (y_{i+1j} - y_{ij})^2 \right] + \\ & + \frac{k_{\text{B}}}{2} \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{i=0}^N \left[(x_{ij+1} - x_{ij})^2 + (y_{ij+1} - y_{ij})^2 \right] \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$k_{\Gamma} (x_{i+1j} - 2x_{ij} + x_{i-1j}) + k_{\text{B}} (x_{ij-1} - 2x_{ij} + x_{ij+1}) = 0$$

$$k_{\Gamma} (y_{i+1j} - 2y_{ij} + y_{i-1j}) + k_{\text{B}} (y_{ij-1} - 2y_{ij} + y_{ij+1}) = 0 \quad (3.7)$$

Далее мы откажемся от условия, что сеточные узлы на границе должны попадать в заранее заданные точки. В этом случае мы должны добавить уравнения для граничных узлов (кроме четырех углов криволинейного четырехугольника, которые по-прежнему остаются фиксированными). Эти уравнения будут отличаться от уравнений для внутренних узлов, поскольку граничные узлы не могут двигаться произвольным образом, а должны оставаться на границе, то есть координаты такого узла x_{i0} и y_{i0} оказываются функционально связаны. Если считать, что граница, на которую попадают узлы x_{i0} y_{i0} задается как неявная функция $F(x, y) = 0$, то соответствующее уравнение имеет вид

$$\begin{aligned}
& k_{\Gamma} \left[(x_{i+10} - 2x_{i0} + x_{i-10}) \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{x_{i0}, y_{i0}} - (y_{i+10} - 2y_{i0} + y_{i-10}) \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x_{i0}, y_{i0}} \right] + \\
& + k_{\text{B}} \left[(x_{i1} - x_{00}) \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{x_{i0}, y_{i0}} - (y_{i1} - y_{00}) \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x_{i0}, y_{i0}} \right] = 0
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Аналогично выписываются уравнения для координат остальных граничных узлов. Отметим, что эти уравнения уже нелинейные.

Заметим, что если мы умножим k_{Γ} и k_{B} на одно и то же число, то уравнения (3.7)-(3.8) не изменятся. Это значит, что положение узлов зависит только от отношения k_{Γ}/k_{B} .

Чтобы определить правильную величину этого отношения, рассмотрим функционал (см. [6], [7])

$$J(x, y) = \int_0^1 \int_0^1 \left[l \left(\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)^2 \right) + \frac{1}{l} \left(\left(\frac{\partial x}{\partial \beta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \beta} \right)^2 \right) \right] d\alpha d\beta \tag{3.9}$$

Здесь $x(\alpha, \beta)$ и $y(\alpha, \beta)$ – непрерывно дифференцируемые функции переменных α и β , определенные на единичном квадрате плоскости $\alpha\beta$, отображающие взаимно-однозначно стороны квадрата и соответствующие стороны криволинейного четырехугольника.

Будем искать минимум (3.9) среди вышеописанных функций и положительных значений параметра l . Можно показать (см. [8]), что минимум этого функционала достигается, когда значение параметра l равно длине стороны прямоугольника единичной площади, который можно конформно отобразить на рассматриваемый криволинейный четырехугольник таким образом, чтобы углы отображались в соответствующие углы криволинейного четырехугольника. При этом минимизирующие (3.9) функции $x(\alpha, \beta)$ и $y(\alpha, \beta)$ связаны с функциями $X(\alpha, \beta)$, $Y(\alpha, \beta)$ осуществляющими конформное отображение соотношениями:

$$\begin{aligned}
x(\alpha, \beta) &= X\left(\frac{\alpha}{l}, \beta l\right) \\
y(\alpha, \beta) &= Y\left(\frac{\alpha}{l}, \beta l\right)
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Перепишем формулу для потенциальной энергии (3.6) в виде

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{полн}} = & \frac{k_{\Gamma}}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^M \left[\frac{(x_{i+1j} - x_{ij})^2}{\Delta\alpha} + \frac{(y_{i+1j} - y_{ij})^2}{\Delta\alpha} \right] \Delta\alpha^2 + \\ & + \frac{k_B}{2} \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{i=0}^N \left[\frac{(x_{ij+1} - x_{ij})^2}{\Delta\beta} + \frac{(y_{ij+1} - y_{ij})^2}{\Delta\beta} \right] \Delta\beta^2 \end{aligned} \quad (3.11)$$

где $\Delta\alpha = \frac{1}{N}$, $\Delta\beta = \frac{1}{M}$

Разделив (3.11) на $\frac{1}{2} \sqrt{k_B k_{\Gamma}}$ и обозначив $l = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k_{\Gamma}}{k_B}} \frac{\Delta\alpha}{\Delta\beta}$ получим:

$$\begin{aligned} J_n(x_{ij}, y_{ij}) = \Pi_{\text{полн}} \frac{2}{\sqrt{k_B k_{\Gamma}}} = & \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^M \left[l \left(\frac{x_{i+1j} - x_{ij}}{\Delta\alpha} \right)^2 + \left(\frac{y_{i+1j} - y_{ij}}{\Delta\beta} \right)^2 \right] + \\ & + \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{i=0}^N \left[\frac{1}{l} \left(\frac{x_{ij+1} - x_{ij}}{\Delta\beta} \right)^2 + \left(\frac{y_{ij+1} - y_{ij}}{\Delta\beta} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.12)$$

Легко видеть, что (3.12) представляет собой аппроксимацию (3.9).

Минимум (3.12) достигается при

$$l = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^M \frac{(x_{i+1j} - x_{ij})^2}{\Delta\alpha} + \frac{(y_{i+1j} - y_{ij})^2}{\Delta\alpha}}{\sum_{j=0}^{M-1} \sum_{i=0}^N \frac{(x_{ij+1} - x_{ij})^2}{\Delta\beta} + \frac{(y_{ij+1} - y_{ij})^2}{\Delta\beta}}} \quad (3.13)$$

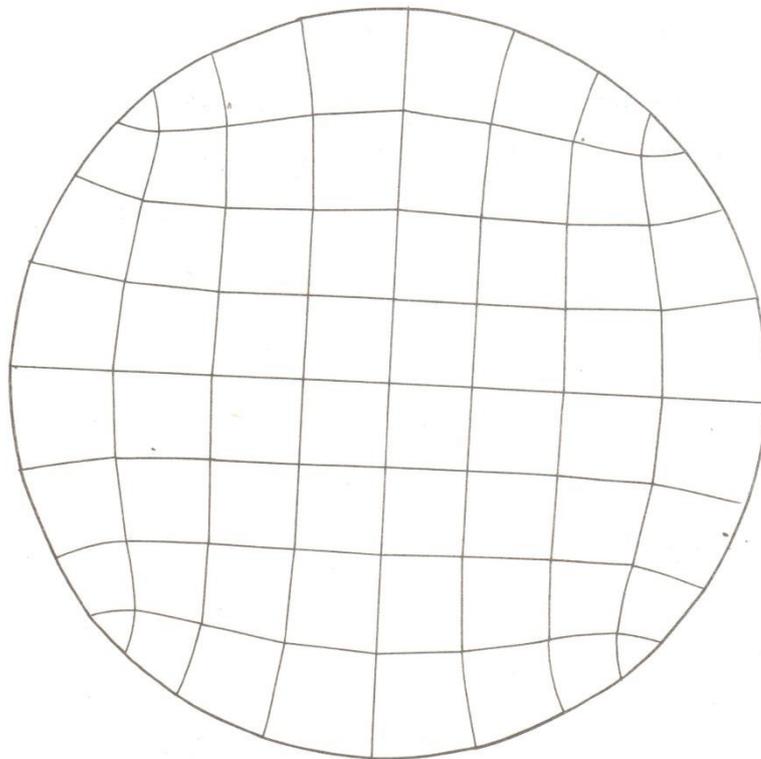
Таким образом, соотношение (3.13) обеспечит близость узлов сетки к образу при конформном отображении узлов равномерной сетки на криволинейном

четырёхугольнике прямоугольника единичной площади со стороной l . Отметим, что данное соотношение означает равенство потенциальных энергий «горизонтальных» и вертикальных упругих элементов:

$$\frac{k_{\Gamma}}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^M \left[(x_{i+1j} - x_{ij})^2 + (y_{i+1j} - y_{ij})^2 \right] = \frac{k_{\Gamma}}{2} \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{i=0}^N \left[(x_{ij+1} - x_{ij})^2 + (y_{ij+1} - y_{ij})^2 \right]$$

Можно оставить узлы на границе фиксированными и минимизировать функционал (3.12) только по координатам внутренних узлов и параметру l . Однако в этом случае получающееся отображение уже не будет конформным. Тем не менее, в ряде случаев можно получить сетки неплохого качества. В [6] описан более строгий вариант использования конформных отображений в этом случае.

Ниже на рис. 3.5 приведены примеры сеток, получающихся вышеописанными методами.



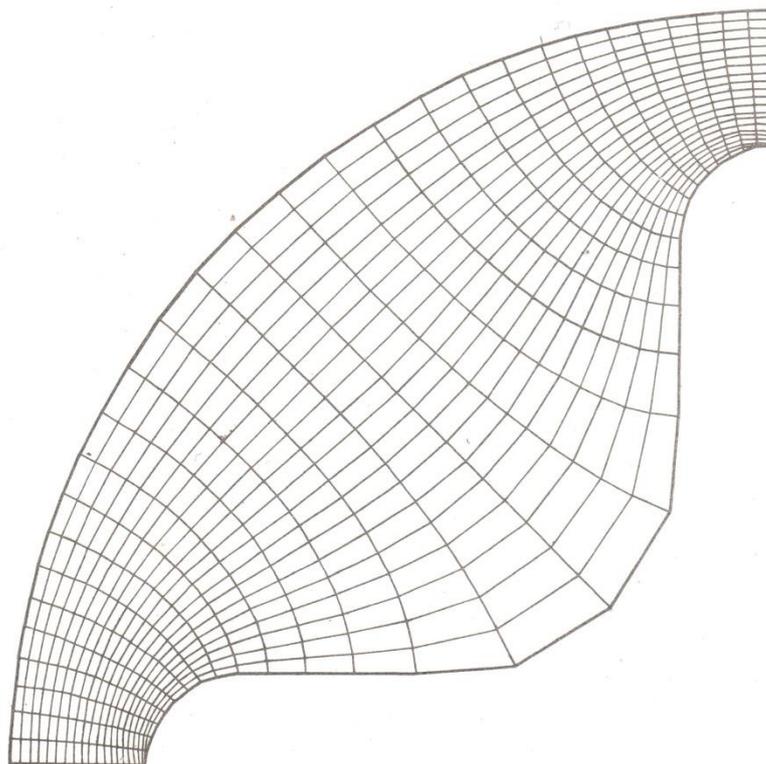


Рис. 3.5

Лекция 4. Метод Winslow.

К недостаткам вышеописанного метода, использующего конформные отображения, можно отнести тот факт, что метод плохо переносится на трехмерные сетки. Этому недостатка лишен предложенный в работе [9] метод, получивший по имени автора название «метод Winslow». Рассмотрим криволинейный четырехугольник D с заданным расположением узлов сетки на границе. При этом на противоположных сторонах криволинейного четырехугольника задается равное число узлов – на сторонах 1-2 и 3-4 по $N-1$, а на сторонах 3-2 и 1-4 – по $M-1$ (см. рис. 4.1)

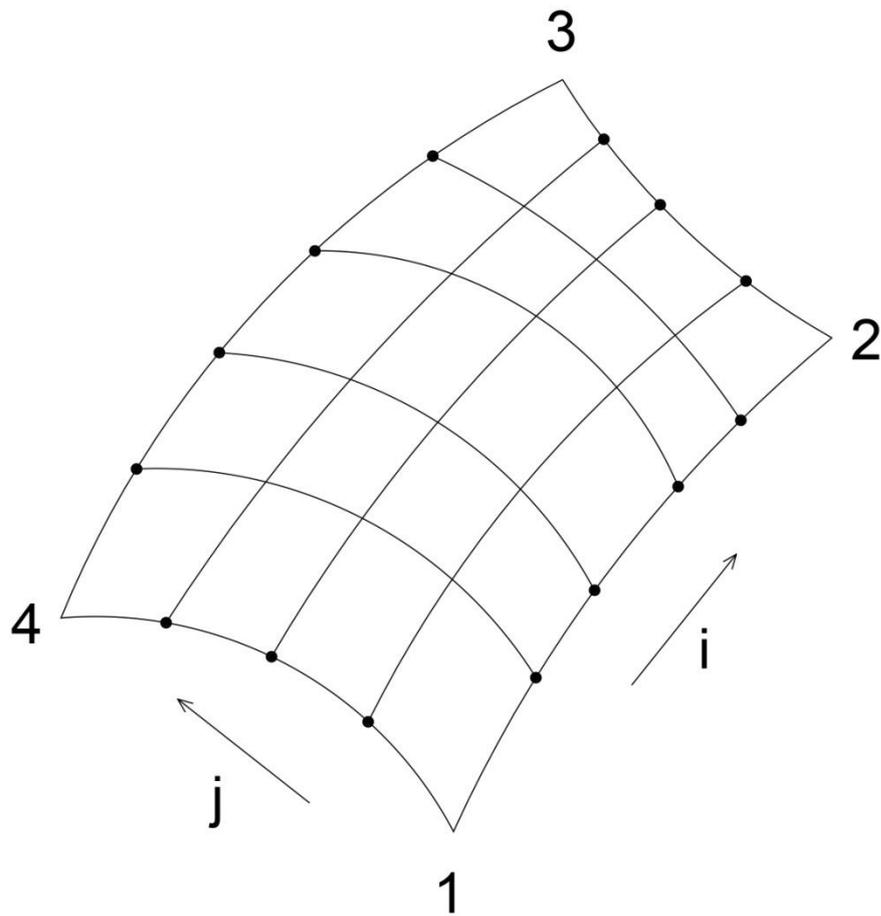


Рис. 4.1

Поставим краевую задачу для определения стационарного поля температур в криволинейном четырехугольнике со следующими условиями первого рода: на границе 1-2 задается нулевое значение температуры $v=0$, на границе 3-4 $v=1$, на границах же 2-3 и 1-4 зададим температуру так, чтобы в j -том узле соответствующей границы температура была равна $v=1/j$, $j=1,2,\dots,M-1$, а между узлами менялась по линейному закону в зависимости от длины дуги

соответствующей части границы. Такая температура $v(x,y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (4.1)$$

В дальнейшем нам будет удобно вместо решения (4.1) использовать эквивалентную задачу минимизации функционала Дирихле:

$$\iint_D \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \min \quad (4.2)$$

Здесь минимум ищется среди всевозможных функций $v(x,y)$, удовлетворяющих описанным краевым условиям.

Решив поставленную задачу, построим далее изотермы, соответствующие значениям $v(x,y)=1/j$. Очевидно они пройдут через заданные на границах 3-2 и 1-4 точки (см. рис. 4.1). Эти изотермы будут представлять одно из семейств линий сетки.

Для построения второго семейства снова рассмотрим такую же задачу, но уже с другими граничными условиями. Решение этой задачи будем обозначать $u(x,y)$. Теперь на сторонах 1-4 и 3-2 зададим $u=0$ и $u=1$ соответственно, а на сторонах 1-2 и 3-4 в i -том заданном узле $u=1/i$, $i=1,2,\dots,N-1$ и линейно менялась между узлами в зависимости от длины дуги. Функция $u(x,y)$ также как и $v(x,y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа внутри криволинейного четырехугольника и может быть найдена как решение вариационной задачи

$$\iint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \min \quad (4.3)$$

Непосредственное решение задач (4.2) и (4.3) с последующим построением изотерм и поиском точек их пересечения затруднительно, поэтому будем использовать так называемый метод обращения переменных, который используется и в других задачах математической физики [10]. Сущность его состоит в следующем. По самому построению каждой точке

(x,y) криволинейного четырехугольника соответствует две температуры u и v . В соответствии с принципом максимума [11] значения u и v находятся между нулем и единицей, то есть построенные функции u и v задают отображение криволинейного четырехугольника в единичный квадрат. Можно показать, что такое отображение является взаимно однозначным, то есть каждой точке единичного квадрата (u,v) соответствует единственная точка криволинейного четырехугольника, в которой две температуры принимают такие значения. Это обозначает, что можно рассматривать обратное отображение, задаваемое функциями $x(u,v)$ и $y(u,v)$, такими, что

$$\begin{aligned}x(u(x,y), v(x,y)) &= x \\y(u(x,y), v(x,y)) &= y\end{aligned}\tag{4.4}$$

Используя (4.4) выразим производные $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ через $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}$.

Для этой цели продифференцируем соотношения (4.4) по x . В результате получим:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} &= 1 \\ \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} &= 0\end{aligned}\tag{4.5}$$

Рассматривая (4.5) как систему уравнений относительно $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$ получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial u}\end{aligned}\tag{4.6}$$

Здесь $J = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}$ - якобиан перехода от переменных x,y к переменным u,v .

Аналогичным образом, продифференцировав (4.4) по y имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial v}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial u} \quad (4.7)$$

Заметим, что поскольку каждый из интегралов (4.2) и (4.3) должен достигать своего минимального значения, минимума будет достигать и их сумма:

$$\iint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \min \quad (4.8)$$

Подставив соотношения (4.6) и (4.7) в (4.8) получим:

$$\Phi(x, y) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{J} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 \right] dudv = \min \quad (4.9)$$

Таким образом, задача свелась к нахождению функций $x(u, v)$ и $y(u, v)$ определенных в единичном квадрате, на границе которого они принимают значения, равные координатам узлов, заданных на сторонах криволинейного четырехугольника и доставляют минимум функционалу (4.9). Приравнивая к нулю первую вариацию (4.9) получим уравнения для функций $x(u, v)$ и $y(u, v)$:

$$\left[\left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} - 2 \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \right) \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = 0 \quad (4.10)$$

$$\left[\left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} - 2 \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \right) \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} = 0$$

Лекция 5. Метод Winslow. Продолжение.

Для построения сетки нам достаточно знать значения этих функций в узлах равномерной сетки в единичном квадрате с числом разбиений N по координате u и M по координате v .

Для приближенного нахождения этих значений аппроксимируем функционал (4.9):

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{J} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 \right] dudv = \\
 & = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} \int_{i/N}^{(i+1)/N} \int_{j/M}^{(j+1)/M} \frac{1}{J} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 \right] dudv \approx \\
 & \approx \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} \left\langle \frac{1}{J} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 \right] \right\rangle \Delta u \Delta v
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Здесь через $\langle \rangle$ обозначены средние значения соответствующей величины в ячейке $(i+1/2, j+1/2)$

От способа определения этих средних величин в значительной степени будут зависеть качество аппроксимации и качество получаемых сеток. Выберем следующий способ усреднения. Для аппроксимации величины, стоящей в угловых скобках в (5.1) достаточно определить приближенные значения производных $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}$. Каждую производную в ячейке $(i+1/2, j+1/2)$ можно аппроксимировать двумя способами, например

$$\frac{\partial x}{\partial u} \approx \frac{x_{i+1j} - x_{ij}}{\Delta u} \quad \text{и} \quad \frac{\partial x}{\partial u} \approx \frac{x_{i+1j+1} - x_{ij+1}}{\Delta u}$$

Выберем одинаковый способ для аппроксимации производных от функций $x(u,v)$ и $y(u,v)$. Это можно сделать четырьмя способами:

1.

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_1 \approx \frac{x_{i+1j} - x_{ij}}{\Delta u}; \quad \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_1 \approx \frac{x_{ij+1} - x_{ij}}{\Delta v}; \quad \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_1 \approx \frac{y_{i+1j} - y_{ij}}{\Delta u}; \quad \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_1 \approx \frac{y_{ij+1} - y_{ij}}{\Delta v};$$

2.

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_2 \approx \frac{x_{i+1j} - x_{ij}}{\Delta u}; \quad \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_2 \approx \frac{x_{i+1j+1} - x_{i+1j}}{\Delta v}; \quad \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_2 \approx \frac{y_{i+1j} - y_{ij}}{\Delta u}; \quad \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_2 \approx \frac{y_{i+1j+1} - y_{i+1j}}{\Delta v};$$

3.

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_3 \approx \frac{x_{i+1j+1} - x_{ij+1}}{\Delta u}; \quad \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_3 \approx \frac{x_{ij+1} - x_{ij}}{\Delta v}; \quad \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_3 \approx \frac{y_{i+1j+1} - y_{ij+1}}{\Delta u}; \quad \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_3 \approx \frac{y_{ij+1} - y_{ij}}{\Delta v};$$

4.

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_4 \approx \frac{x_{i+1j+1} - x_{ij+1}}{\Delta u}; \quad \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_4 \approx \frac{x_{i+1j+1} - x_{i+1j}}{\Delta v}; \quad \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_4 \approx \frac{y_{i+1j+1} - y_{ij+1}}{\Delta u}; \quad \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_4 \approx \frac{y_{i+1j+1} - y_{i+1j}}{\Delta v};$$

Для каждого из этих четырех способов получается своя аппроксимация

выражения $I = \left\langle \frac{1}{J} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 \right] \right\rangle$:

$$\begin{aligned} 1. I_1 &= \frac{1}{J_1} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_1^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_1^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_1^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_1^2 \right] & J_1 &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_1 \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_1 - \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_1 \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_1 \\ 2. I_2 &= \frac{1}{J_2} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_2^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_2^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_2^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_2^2 \right] & J_2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_2 \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_2 - \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_2 \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_2 \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$3. I_3 = \frac{1}{J_3} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_3^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_3^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_3^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_3^2 \right] \quad J_3 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_3 \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_3 - \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_3 \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_3$$

$$4. I_4 = \frac{1}{J_4} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_4^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_4^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_4^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_4^2 \right] \quad J_4 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_4 \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_4 - \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_4 \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_4$$

В качестве усредненного значения выберем среднее арифметическое выражений (5.2):

$$\left\langle \frac{1}{J} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 \right] \right\rangle = \frac{1}{4} (I_1 + I_2 + I_3 + I_4) \quad (5.3)$$

Подставив (5.3) в (5.1) получим дискретный функционал как функцию координат узлов сетки x_{ij} и y_{ij} :

$$\begin{aligned} \Phi_h(x_{ij}, y_{ij}) = & \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} \left\{ \frac{1}{J_1} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)_1^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)_1^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)_1^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)_1^2 \right] + \right. \\ & + \frac{1}{J_2} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)_2^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)_2^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)_2^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)_2^2 \right] + \\ & + \frac{1}{J_3} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)_3^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)_3^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)_3^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)_3^2 \right] + \\ & \left. + \frac{1}{J_4} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)_4^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)_4^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)_4^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)_4^2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Отметим, что аппроксимация якобиана в каждом из четырех способов (5.2) с точностью до множителя $\frac{\Delta\alpha\Delta\beta}{2}$ представляет площадь одного из треугольников ячейки $(i+1/2, j+1/2)$ на плоскости xu (см. рис. 5.1) – способ 1 соответствует треугольнику, образованному точками (i, j) , $(i+1, j)$ и $(i, j+1)$, способ 2 – треугольнику (i, j) , $(i+1, j)$ и $(i+1, j+1)$, способ 3 – треугольнику $(i+1, j)$, $(i+1, j+1)$ и $(i, j+1)$, и наконец способ 4 – треугольнику (i, j) , $(i+1, j+1)$ и $(i, j+1)$;

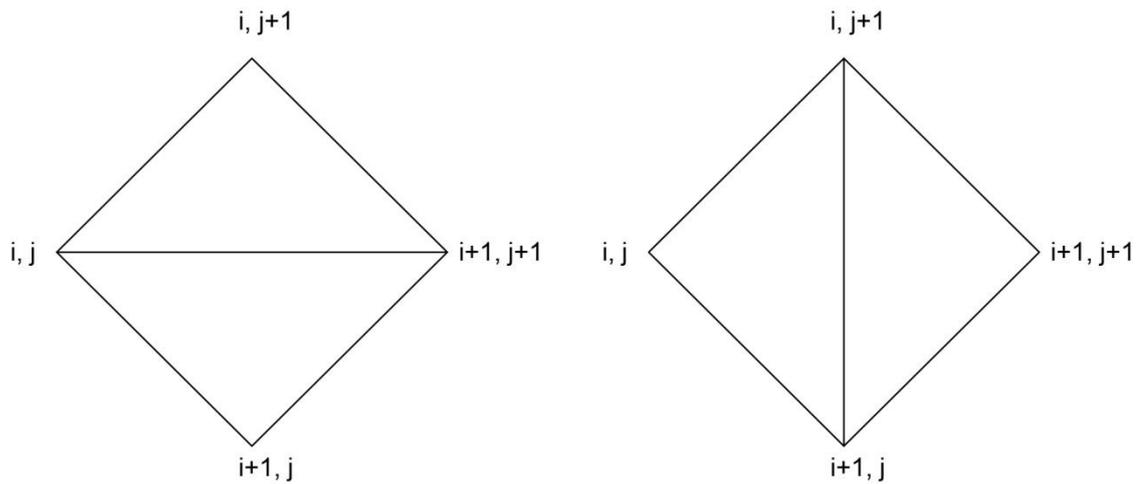


Рис. 5.1

Ячейка $(i+1/2, j+1/2)$ и составляющие ее треугольники.

Следствием этого является тот факт, что минимум дискретного функционала (5.1) при выборе усреднения по формуле (5.3) может достигаться только при положительных значениях площадей указанных треугольников, то есть построенная сетка будет иметь выпуклые ячейки. Действительно, выпуклость ячейки может потеряться только при переходе площади одного из треугольников через ноль (см. рис. 5.2), но при этом одно из слагаемых в (5.3) будет возрастать до бесконечности. Это свойство, установленное в работе [12], называют барьерным свойством функционала (5.4).

Отметим, что при других способах усреднения, например, использования для производных усредненных значений

$$\frac{1}{J} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 \right] = \frac{1}{J_0} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)_0 + \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)_0 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)_0 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)_0 \right]$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_0 = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_1 + \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_2 + \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_3 + \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_4 \right]$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_0 = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_1 + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_3 + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_4 \right]$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_0 = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_1 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_3 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_4 \right]$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_0 = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_1 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_3 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_4 \right]$$

$$J_0 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_0 \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_0 - \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_0 \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_0$$

это свойство может нарушаться, и могут появиться невыпуклые и даже перехлестнутые ячейки (см. рис. 5.2)

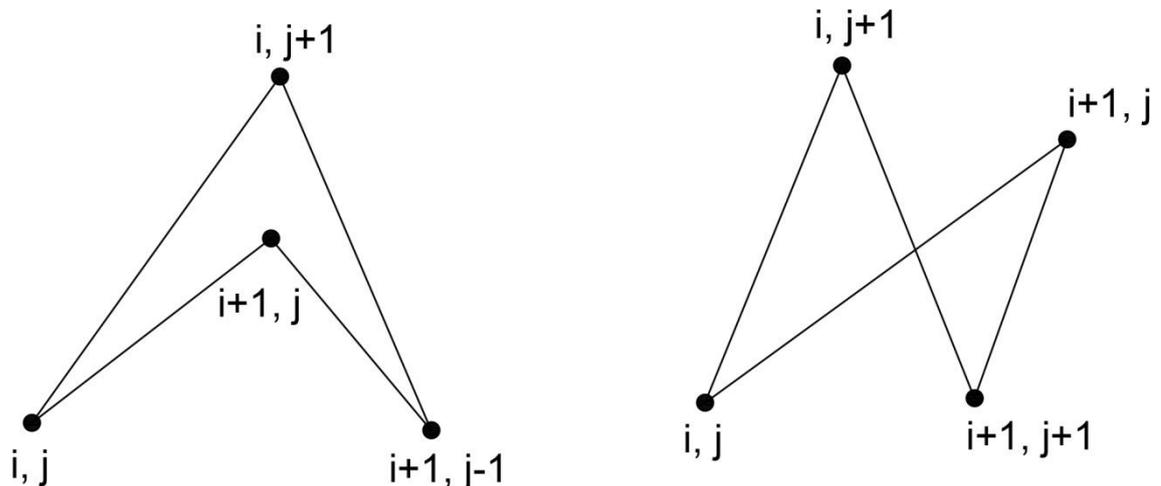


Рис. 5.2

Потеря выпуклости ячейкой и дальнейший перехлест.

В трехмерном случае формулы становятся сложнее, но принципиально схема метода остается той же. Формулы (4.6)-(4.7) теперь будут выглядеть так:

$$x(u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)) = x$$

$$y(u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)) = y$$

$$z(u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)) = z$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial w} - \frac{\partial y}{\partial w} \frac{\partial z}{\partial v} \right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial w} - \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial z}{\partial u} \right) \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} \right)$$

$$J = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

а функционал (4.9) запишется в виде:

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z) = & \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{J} \left\{ \left(\frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial w} - \frac{\partial y}{\partial w} \frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial w} - \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 + \right. \\ & + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial w} - \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial w} - \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 + \\ & + \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial w} - \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial w} - \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \\ & \left. + \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 \right\} dudvdw \end{aligned} \quad (5.6)$$

Для его аппроксимации, также как в двумерном случае, будем использовать различные способы аппроксимации производных $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial x}{\partial w}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial w}, \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial w}$. Однако в случае трех пространственных измерений не каждому выбору способов аппроксимации соответствует геометрический элемент (тетраэдр) в разбиении параллелепипеда в пространстве. Поэтому целесообразно при усреднении использовать не все 64 варианта, а только те, которые соответствуют таким разбиениям. В частности, можно использовать разбиение на прямоугольные тетраэдры, некоторые из которых изображены на рис. 5.3. Всего таких тетраэдров 24, что

соответствует четырем различным разбиениям параллелепипеда на 6 тетраэдров.

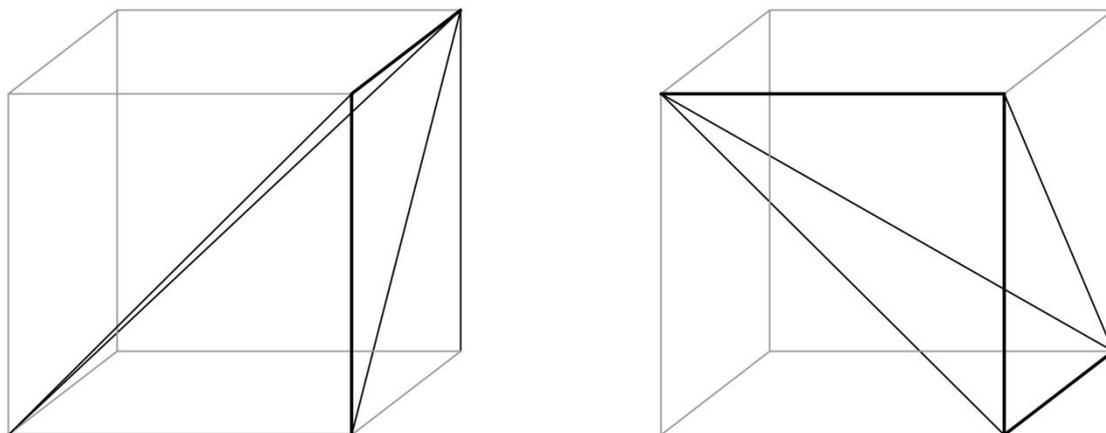


Рис. 5.3

Разбиение параллелепипеда на прямоугольные тетраэдры.

Отметим, что существуют другие разбиения указанного параллелепипеда на тетраэдры, однако не все тетраэдры таких разбиений прямоугольные.

Лекция 6. Способы адаптации структурированных сеток.

Если в решении уравнений математических моделей присутствуют особенности, такие как наличие пограничных и внутренних слоев, резкие всплески и т.п., использование равномерных сеток либо не обеспечит нужной точности, либо приведет к неоправданным вычислительным затратам. В этом случае целесообразно поместить большее число узлов в область особенности решения. Такие сетки называют адаптивными. Рисунок 6.1 показывает, как описывается функция с резким выбросом на равномерной и адаптивной сетке.

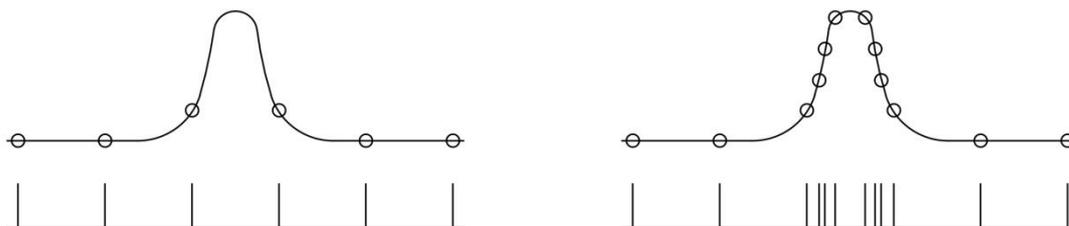


Рис. 6.1

Для построения адаптивных сеток используется два распространенных способа. Первый - это расстановка или движение элементов сетки с заданным числом узлов. Вторым – так называемое локальное измельчение (local refinement), когда ячейки сетки дробятся в области особенностей решения. В данной лекции мы рассмотрим первый способ.

Для построения адаптивных сеток в одномерном случае, как на рис. 6.1, часто используется метод равномерного распределения весовой функции [13]. В каждой ячейке сетки задается весовая функция $\omega_{i+1/2}$, а узлы сетки x_i расставляются исходя из условия

$$\omega_{i+1/2}(x_{i+1} - x_i) = C = const \quad (6.1)$$

Или

$$\omega_{i+1/2}(x_{i+1} - x_i) - \omega_{i-1/2}(x_i - x_{i-1}) = 0 \quad (6.2)$$

Из (6.1) следует

$$x_{i+1} - x_i = \frac{C}{\omega_{i+1/2}}$$

и

$$b - a = \sum_{i=0}^{N-1} (x_{i+1} - x_i) = C \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{\omega_{i+1/2}} \quad (6.3)$$

Таким образом

$$C = \frac{b - a}{\sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{\omega_{i+1/2}}} \quad (6.4)$$

и шаг сетки $x_{i+1} - x_i$ будет тем меньше, чем больше значение $\omega_{i+1/2}$

Пусть теперь задана функция $f(x)$ к которой мы будем адаптировать сетку. Для того, чтобы эта функция, которую мы будем называть мониторной, хорошо передавалась на адаптированной сетке величину $\omega_{i+1/2}$ можно выбирать пропорциональной значению модуля производной мониторной функции. Подставляя это значение в уравнение (6.2) получим:

$$|f(x_{i+1}) - f(x_i)| - |f(x_i) - f(x_{i+1})| = 0 \quad (6.5)$$

то есть приращения функции на каждом отрезке будет одинаковым.

Такой способ, однако, обладает недостатком. В область, где мониторная функция постоянна, вообще не попадет ни одной ячейки сетки. В то же время в большинстве прикладных задач требуется найти не одну, а несколько функций, описывающих изучаемые процессы, например, плотность, скорость и давление в газовой динамике. Мониторная функция может отображать одновременно особенности распределения всех таких параметров, но в области ее постоянства они могут хотя и плавно, но изменяться, что потребует наличия узлов сетки. Исправить это положение можно если значения весовой функции задать следующим образом:

$$\omega_{i+1/2} = \sqrt{\varepsilon + \left(\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \right)^2} \quad (6.7)$$

Уравнение (6.2) в этом случае запишется в виде:

$$\sqrt{\varepsilon(x_{i+1} - x_i)^2 + (f_{i+1} - f_i)^2} - \sqrt{\varepsilon(x_i - x_{i-1})^2 + (f_i - f_{i-1})^2} = 0 \quad (6.8)$$

Отметим, что (6.8) означает, что на плоскости (f,x) при соответствующем выборе масштабов все отрезки, соединяющие точки с координатами $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ и $(x_i, f(x_i))$ имеют одинаковую длину, то есть сетка на графике функции получается равномерной.

Выражение $\varepsilon(x_{i+1} - x_i)^2 + (f_{i+1} - f_i)^2$ в (6.8) в предельном случае представляет длину отрезка dx в метрике, определяемой графиком функции f(x). В двумерном случае длина отрезка на графике функции f(x,y) задается выражением

$$\begin{aligned} l_{i+1/2j} &= \varepsilon \left[(x_{i+1j} - x_{ij})^2 + (y_{i+1j} - y_{ij})^2 \right] + (f_{i+1j} - f_{ij})^2 \\ l_{ij+1/2} &= \varepsilon \left[(x_{ij+1} - x_{ij})^2 + (y_{ij+1} - y_{ij})^2 \right] + (f_{ij+1} - f_{ij})^2 \end{aligned} \quad (6.9)$$

и в пределе переходит в

$$l = \varepsilon [dx^2 + dy^2] + \left(\frac{\partial f}{\partial l} \right)^2 (dx^2 + dy^2) \quad (6.10)$$

Так как $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$ из (6.10) получаем

$$l = dx^2 \left(\varepsilon + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \right) + 2dx dy \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} + dy^2 \left(\varepsilon + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right)$$

и матрица

$$G = \begin{pmatrix} \varepsilon + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 & \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} & \varepsilon + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \end{pmatrix} \quad (6.11)$$

играет роль метрического тензора для определения длины отрезка (dx, dy) на графике функции $f(x, y)$.

Заметим, что в функционале (4.9) выражение $\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2$ и $\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2$ с точностью до множителя представляют квадраты длин бесконечно малых отрезков. Один из которых соединяет точки $(x(\alpha_0, \beta_0), y(\alpha_0, \beta_0))$ и $(x(\alpha_0 + d\alpha, \beta_0), y(\alpha_0 + d\alpha, \beta_0))$, а второй точки $(x(\alpha_0, \beta_0), y(\alpha_0, \beta_0))$ и $(x(\alpha_0, \beta_0 + d\beta), y(\alpha_0, \beta_0 + d\beta))$. Заменяя его на длину соответствующего отрезка на графике функции получим функционал для построения адаптивной сетки:

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{J} \left[\left(\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 \right) \left(\varepsilon + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \right) + 2 \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial v} \right) \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} + \left(\left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 \right) \left(\varepsilon + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right) \right] dudv \quad (6.12)$$

Так как $\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$ и $\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$ это выражение можно

переписать в виде

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{J} \left[\varepsilon \left(\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 \right) + \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \beta} \right)^2 \right] dudv \quad (6.13)$$

Отметим, что этот функционал получается, если вместо уравнения Лапласа (4.1) использовать стационарное уравнение для поля температур с анизотропным коэффициентом теплопроводности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \psi_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \psi_{12} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \psi_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \psi_{22} \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \psi_{11} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \psi_{12} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \psi_{12} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \psi_{22} \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (6.14)$$

где матрица $\begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} \\ \psi_{12} & \psi_{22} \end{pmatrix}$ является обратной к матрице G .

При аппроксимации (6.16) на прямоугольной сетке в единичном квадрате на плоскости (u, v) , также как и в лекции 5, будем использовать подинтегральное выражение, усредненное по четырем различным способам аппроксимации производных

Лекция 7. Построение неструктурированных сеток. Метод движущегося фронта.

Способы построения неструктурированных сеток отличаются от вышеизложенных методов. Это связано с тем обстоятельством, что для неструктурированных сеток отсутствует каноническая сетка, такая как прямоугольная сетка в квадрате или кубе для структурированных сеток. Это делает невозможным применение преобразований, и методы построения неструктурированных сеток носят в основном геометрический характер. Мы ограничимся здесь построением треугольных сеток. Одним из распространенных методов здесь является метод движущегося фронта [14]. Сущность его заключается в следующем. Путь на плоскости (x,y) задана область, в которой требуется построить сетку, границей которой является ломаная линия (см. рис. 7.1).

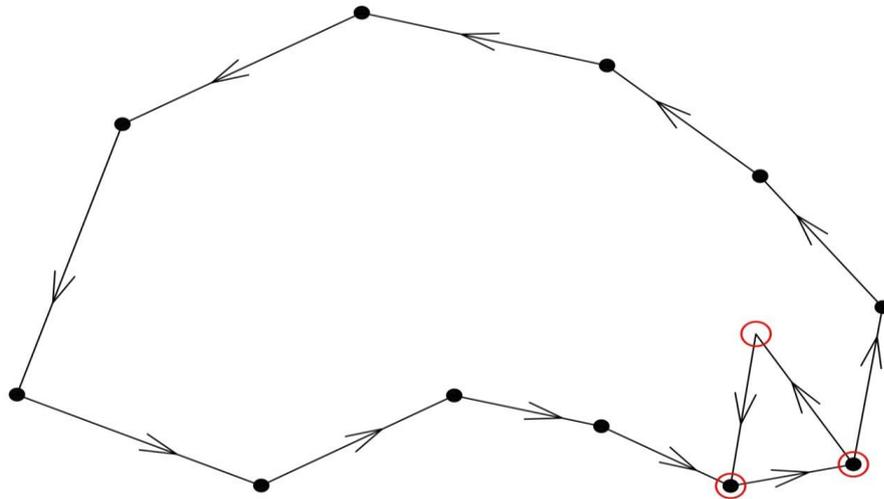


Рис. 7.1

На ломаной, представляющей границу области, выберем два соседних узла, например, взяв ребро с наименьшей длиной. Далее выберем третью точку, которая будет представлять вершину равнобедренного треугольника с основанием в виде выбранного ребра и боковыми сторонами заданной длины l , которая задается в соответствии с требованием допустимого размера элементов сетки. Если построенный таким образом треугольник удовлетворяет требованиям, которые будут сформулированы ниже, то выбор третьей точки завершен. Если нет, то третья точка выбирается из множества оставшихся граничных точек. При этом на образовавшийся треугольник накладываются два условия. Во первых треугольник не должен пересекать границы области. Во вторых направление обхода треугольника, следуя за

направлением его основания при обходе границы области против часовой стрелки также должно быть против часовой стрелки. Согласно теореме Радо [15] от любого многогранника всегда можно отрезать треугольник, образованный двумя соседними вершинами и одной из оставшихся вершин. Это гарантирует, что в процессе перебора нужная точка будет найдена. После этого первоначальная область заменяется на область с выброшенным треугольником, и соответственно меняется ее граница (см. рис. 7.1). После этого процесс повторяется до тех пор, пока вся исходная область не будет покрыта треугольной сеткой. Таким образом, на каждом следующем шаге алгоритма мы работаем с новой границей, которую будем называть текущей.

Остановимся на требованиях, которым должен удовлетворять построенный треугольник. Для того чтобы алгоритм не мог генерировать все уменьшающиеся треугольники, введем ограничения на расстояния между точками строящейся сетки. Для каждой добавляемой точки (x_i, y_i) зададим параметр r_i . Потребуем чтобы круг с центром в добавляемой точке и радиусом r_i не пересекал текущей границы (см. рис. 7.2). Если это условие выполнено, то выбор третьей точки завершен. Если нет, то третья точка выбирается из граничных. Это гарантирует что расстояние между любыми построенными точками будет больше $\min_i r_i$. В самом деле, расстояние до точек текущей границы очевидно будет больше r_i , а остальные точки будут находиться за текущей границей и расстояние до них также будет больше r_i .

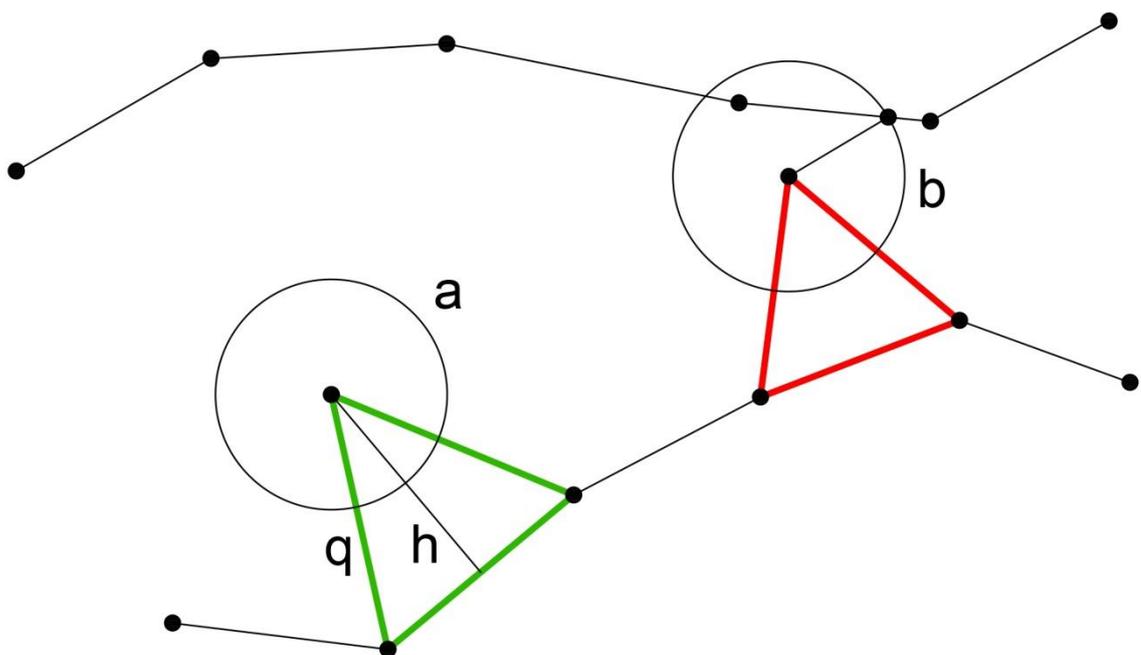


Рис. 7.2

Остался еще открытым вопрос как выбирать дополнительную точку и параметр r_i . Для этой цели введем функцию $s(x,y)$ которая будет характеризовать желаемый размер элементов сетки в окрестности точки (x,y) . Потребуем, чтобы эта функция была отделена от нуля: $s(x,y) > s_0 > 0$. Длину стороны равнобедренного треугольника q возьмем равной

$$q = \max\left(\frac{9}{5}l, s(x, y)\right) \quad (7.1)$$

В этом случае высота h образующегося треугольника будет ограничена снизу

$$h \geq \frac{\sqrt{19}}{18}l; \quad h \geq \frac{\sqrt{10}}{l}q \quad (7.2)$$

Параметр r_i положим равным $r_i = q/2$. В соответствии с (7.1) получаем что $r_i > s_0/2$ и все добавляемые точки сетки будут находиться на удалении большем чем $s_0/2$ от ранее построенных точек, то есть если мы опишем вокруг каждой внутренней точки круг радиуса $s_0/2$, то он целиком будет находиться внутри области и не пересекаться с кругами, описанными вокруг других точек. Поскольку площадь каждого такого круга равна s_0^2 , это означает что общее число точек построенной сетки не может превышать $S/s_0^2 + Q$, где S – площадь исходной области, а Q – число граничных узлов. Это означает, что за конечное число шагов вся область будет покрыта треугольной сеткой.

Алгоритм продвигаемого фронта может использоваться для построения треугольных сеток на поверхностях. Пусть поверхность D такова, что допускает параметрическое представление:

$$\begin{aligned} x &= x(\alpha, \beta) \\ y &= y(\alpha, \beta) \\ z &= z(\alpha, \beta) \end{aligned} \quad (7.3)$$

где параметры α и β меняются в некоторой области Ω на плоскости (α, β) . На границе поверхности задаются узлы сетки, прообразы которых образуют разбиение границы Ω . (см. рис. 7.3)

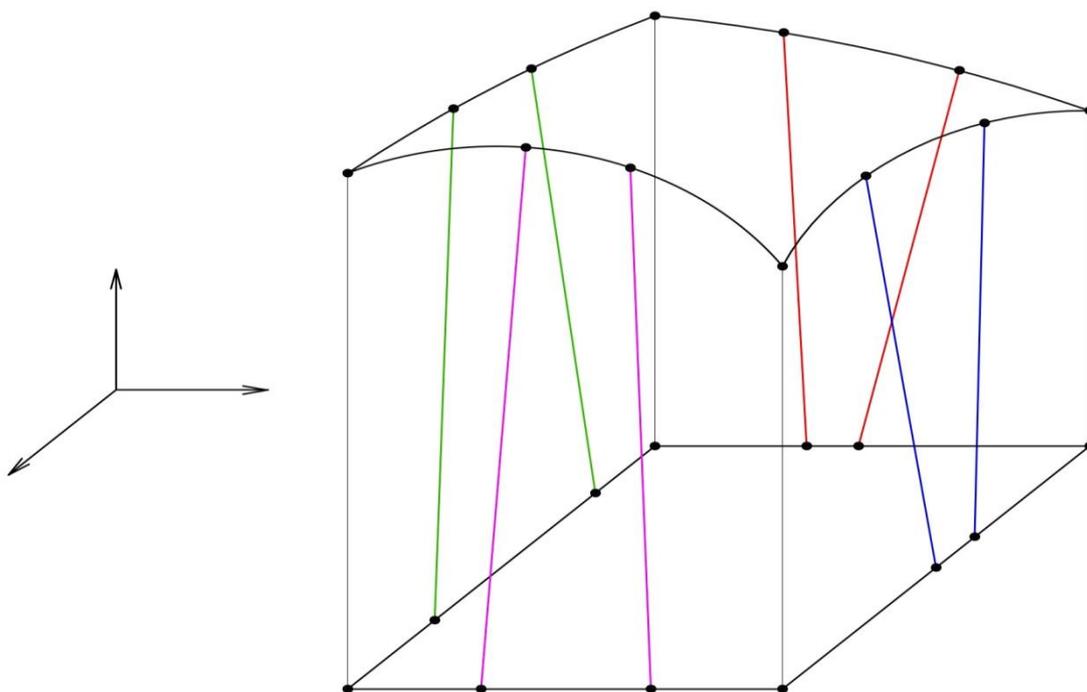


Рис. 7.3

Построив на Ω треугольную сетку методом продвигаемого фронта мы получим сетку на поверхности D .

В общем случае произвольную поверхность можно представить как объединение частей вышеописанного вида. В этом случае строятся согласованные сетки в каждой части, так чтобы узлы разбиения на общих границах совпадали.

Наконец метод продвигаемого фронта может применяться для построения трехмерных тетраэдральных сеток. В этом случае на границе объема, в котором требуется построить сетку, задается триангуляция, и на одном из граничных треугольников строится тетраэдр (см. рис. 7.4)

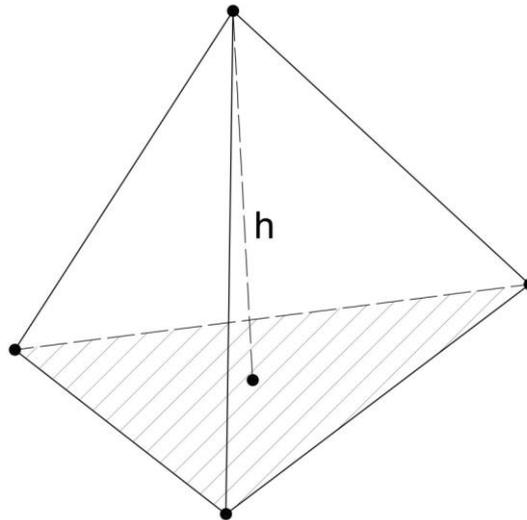


Рис. 7.4

Основная часть алгоритма в трехмерном случае такая же, как и для случая двух измерений – построенный тетраэдр исключается из области построения сетки и определяется новая текущая граница. Однако в трехмерном случае существуют такие области, от которых нельзя отрезать ни один тетраэдр, образованный треугольником и еще одной точкой из поверхностной триангуляции (см. рис. 7.5)

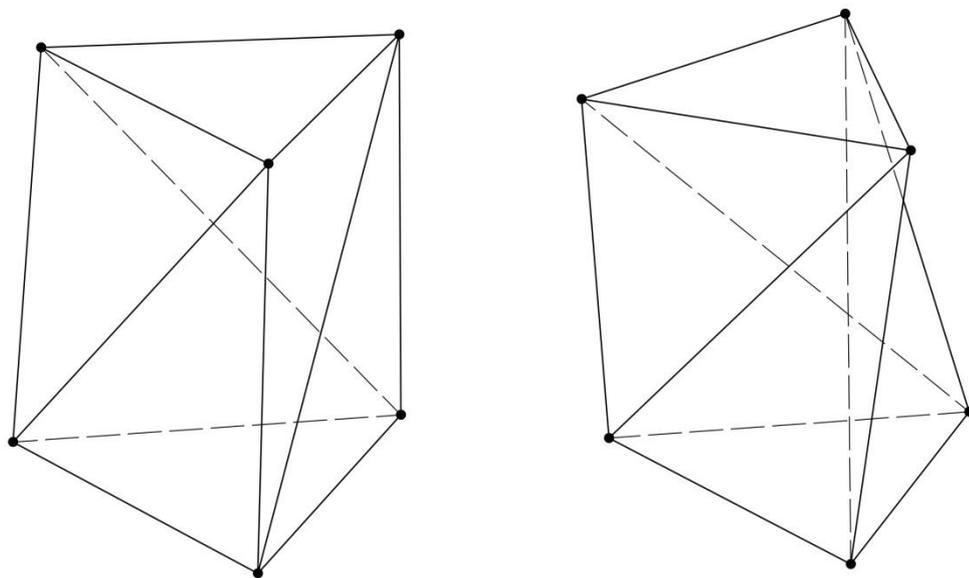


Рис. 7.5

Призма Шонхардта

В этом случае может оказаться что для грани не найдется ни одной подходящей точки. Тогда такая грань помечается и переходим к следующей

грани. В конце работы алгоритма остаются ограниченные помеченными гранями области не покрытые тетраэдрами. Для построения тетраэдров в этих областях используется метод тетраэдризации Делоне-Вороного, который будет описан в следующей лекции.

Лекция 8. Триангуляция Делоне.

В некоторых случаях при построении нерегулярных сеток узлы сетки уже расставлены, и требуется только определить связи между ними. Одним из способов решения такой задачи является триангуляция Делоне, позволяющая построить по заданным узлам треугольную (в трехмерном случае тетраэдральную) сетку.

Пусть D – множество точек на плоскости, такое что его выпуклая оболочка односвязна (см. рис. 8.1). Вначале, для простоты изложения, будем считать что на любой окружности не может находиться более трех точек из D .

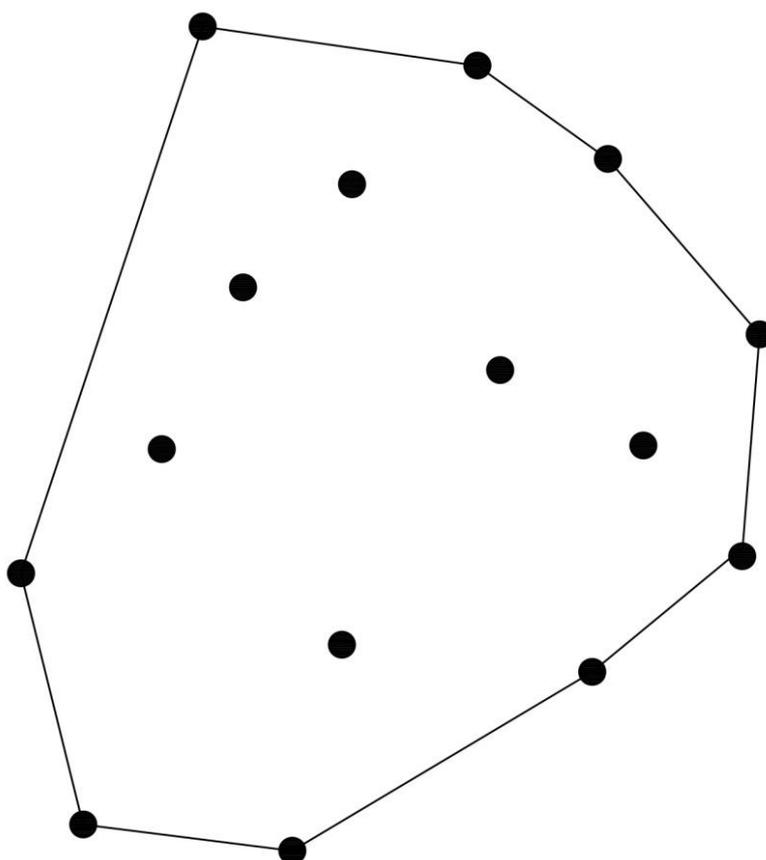


Рис. 8.1

Поставим следующую задачу: покрыть выпуклую оболочку D треугольниками с вершинами в точках из D без зазоров и самопересечений. Такая операция называется триангуляцией. Вообще это можно сделать различными способами, но среди множества всевозможных триангуляций выделим такую, у которой в окружность, описанную вокруг каждого треугольника, не

попадает ни одной точки из D . Такую триангуляцию называют триангуляцией Делоне. В случае трех пространственных измерений ситуация в точности такая же, только вместо треугольников рассматриваются тетраэдры и описанные вокруг них сферы.

С триангуляцией Делоне тесно связано понятие ячейки Дирихле (в трехмерном случае используется также название ячейка Вороного). Ячейкой Дирихле, связанной с точкой M из D называется область, такая что расстояние от любой ее точки до точки M меньше чем расстояние до любой другой точки из D . Покажем, что ячейка Дирихле представляет собой выпуклый многоугольник, в некоторых случаях уходящий в бесконечность (см. рис. 8.2)

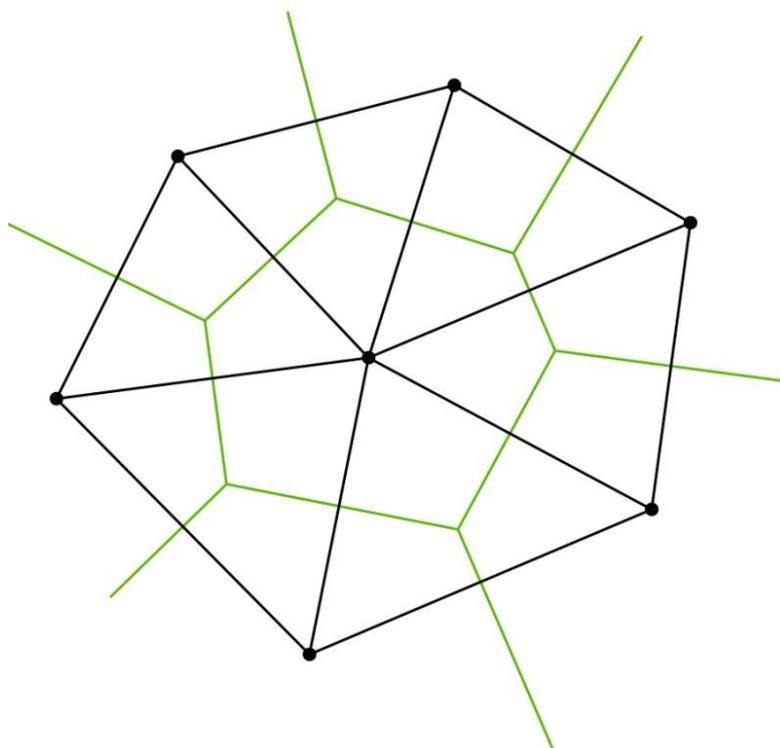


Рис. 8.2

Ячейки Дирихле на плоскости.

В самом деле, если рассмотрим наряду с точкой M произвольную точку N из D и проведем срединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему M и N . Он разделит плоскость на две части – в одной из них будет находиться точка M , а во второй N . Легко видеть, ячейка Дирихле, связанная с точкой M целиком лежит в первой полуплоскости, так как для любой точки второй полуплоскости расстояние до N меньше чем до M , и наоборот, расстояние от любой точки первой полуплоскости до M будет меньше чем до N . Проводя подобные рассуждения для других точек из D получим, что ячейка Дирихле представляет собой пересечение всех таких полуплоскостей, а подобное

пересечение представляет собой выпуклый многоугольник. Стороны этого многоугольника представляют отрезки на срединных перпендикулярах, связанных с некоторыми точками из D . Эти точки в дальнейшем мы будем называть соседями точки M . Соединив такие точки мы получим триангуляцию Делоне. В самом деле, ячейки Дирихле покрывают плоскость без зазоров и пересечений. Условие, что на окружности не может находиться более трех точек означает что в каждой вершине многоугольника, являющегося ячейкой Дирихле, сходятся ровно 3 отрезка (см. рис. 8.3)

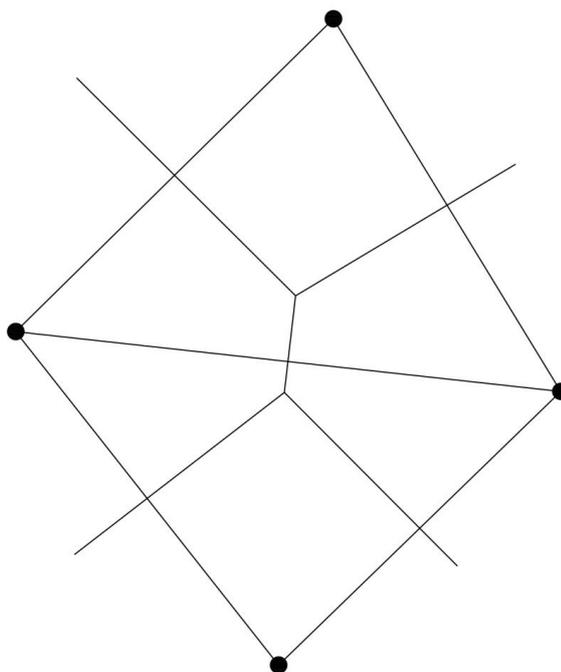


Рис. 8.3

Описанная выше процедура дает конструктивный способ построения ячеек Дирихле, однако она является вычислительно трудоемкой, так как требует порядка n^2 операций, где n – число точек из D . Можно, однако, предложить более быстрые алгоритмы. Один из них заключается в последовательном вводе точек. Вначале выберем три точки из исходного множества D . Они образуют треугольник, соответствующие ячейки Дирихле изображены на рис. 8.4.

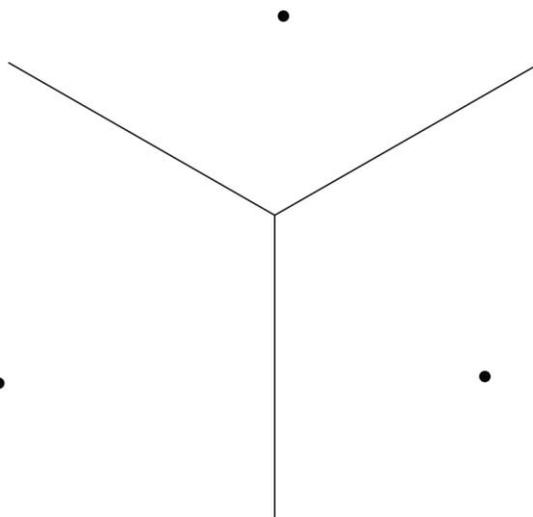
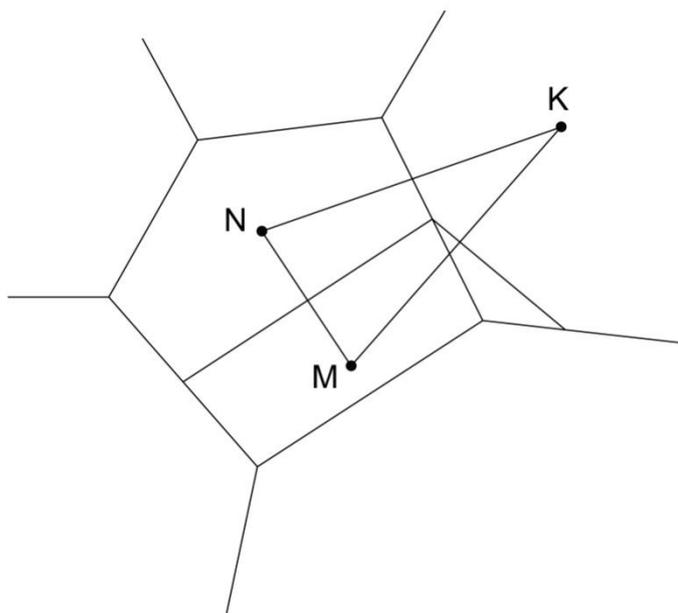


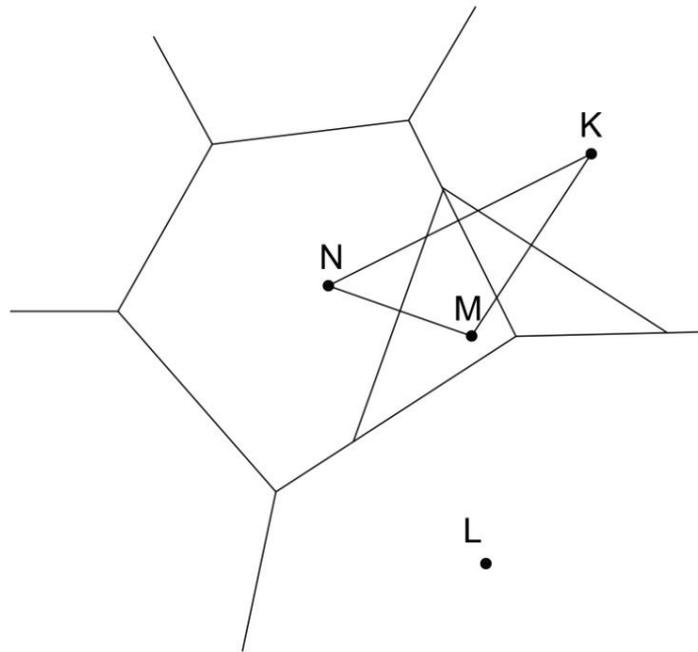
Рис. 8.4

Теперь предположим, что для некоторого количества точек из D триангуляция Делоне и соответствующие ячейки Дирихле построены. Добавим еще одну точку, будем обозначать ее M , и произведем перестроение триангуляции. Для этого определим точку N , в ячейку Дирихле которой попала точка M (см. рис. 8.5). Легко видеть, что N будет ближайшая к M точка из D .



a

Рис. 8.5



б

Рис. 8.5

Точки М и N будут соседями в новой триангуляции, включающей точку М. Проведем срединный перпендикуляр к отрезку М N (см. рис 8.5). Поскольку ячейка Дирихле точки М является выпуклой, этот перпендикуляр пересечет границу ячейки в двух точках, точки, соответствующие пересекемым отрезкам обозначим К и L (см. рис 8.5). Здесь может быть два варианта. Первый – когда срединный перпендикуляр отсекает одну или несколько отрезков границы (рис. 8.5 а). В этом случае соответствующие этим отрезкам точки выбрасываются из списка соседей точки N, а вместо них вставляется точка М. Во втором случае ни один из отрезков границы не отсекается рис. 8.5 б). В этом случае точка М добавляется в список соседей точки N между точками К и L. Далее аналогичная процедура проводится с любой из точек К или L. Например, если выбрана точка К то строится срединный перпендикуляр, который пересекает ячейку К в двух точках, из списка соседей точки К выбрасываются точки, соответствующие отсеченным отрезкам если таковые есть и вместо них вставляется точка М. Точка К добавляется в список соседей точки М. Эта процедура повторяется до тех пор, пока граница ячейки Дирихле точки М не замкнется.

Покажем, что если отбросить поиск ближайшей точки, общее число операций на перестроение триангуляции будет пропорционально числу узлов сетки. В самом деле, используя формулу Эйлера для плоского графа имеем:

$$N_{\text{ребер}} = N_{\text{узлов}} + N_{\text{ячеек}} - 1 \quad (8.1)$$

или

$$N_{\text{ребер}} < N_{\text{узлов}} + N_{\text{ячеек}} \quad (8.2)$$

Далее, каждую треугольную ячейку ограничивает три ребра, при этом общее количество ребер будет

$$N_{\text{ребер}} > 3N_{\text{ячеек}}/2 \quad \text{или} \quad N_{\text{ячеек}} < 2 N_{\text{ребер}}/3 \quad (8.3)$$

Так как каждое внутреннее ребро граничит с двумя ячейками, а граничное лишь с одной. Подставляя (8.3) в (8.2) получаем:

$$N_{\text{ребер}}/3 < N_{\text{узлов}} \quad (8.4)$$

Каждое ребро имеет два граничных узла. Пусть в узле с номером i сходятся k_i ребер. Тогда среднее количество ребер, сходящихся в одном узле $k_{\text{среднее}}$ будет равно

$$k_{\text{среднее}} = \left(\sum_{i=0}^n k_i \right) / N_{\text{узлов}} \quad (8.5)$$

и общее количество узлов таким образом оказывается равным

$$N_{\text{узлов}} = 2 N_{\text{ребер}} / k_{\text{среднее}} \quad (8.6)$$

Из (7.4) и (7.6) следует

$$k_{\text{среднее}} < 6 \quad (8.7)$$

то есть в среднем в каждая точка будет иметь менее 6 соседей. Это обозначает, что операция обработки вбрасываемой точки будет завершена в среднем за шесть шагов.

Лекция 9. Триангуляция Делоне. Продолжение.

Рассмотрим один из алгоритмов поиска ближайшей точки. Эта, на первый взгляд простая операция, если ее выполнять путем простого перебора, то число арифметических действий будет пропорционально квадрату от количества точек сетки. Для убыстрения этого процесса можно воспользоваться тем обстоятельством, что в момент добавления новой точки, которую по-прежнему будем обозначать M , уже построена промежуточная триангуляция. Выберем произвольную точку N и проверим, не является ли она ближайшей. Для этой цели определим, имеются ли точки пересечения отрезка MN с границей ячейки Дирихле точки N (см. рис. 9.1)

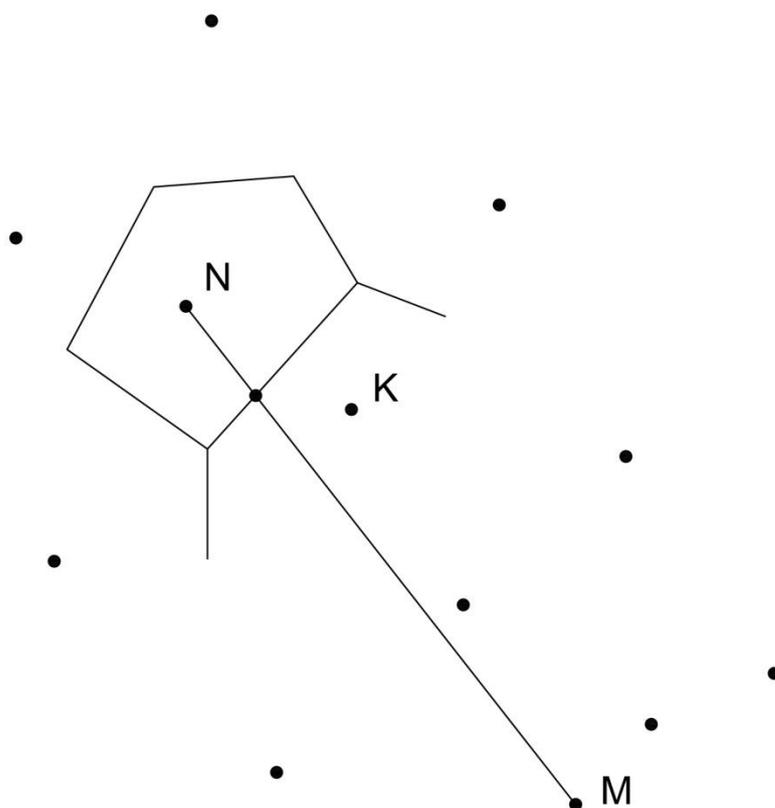


Рис. 9.1

Если точек пересечения нет, то точка M находится внутри ячейки Дирихле точки N , и следовательно точка N является ближайшей к точке M . Если нет, то отрезок MN пересечет один из отрезков границы, который является частью срединного перпендикуляра к отрезку, соединяющему M с некоторой точкой,

которую обозначим K . Выберем теперь точку K и точно также проверим, не является ли она ближайшей. В случае если отрезок MN проходит через угол ячейки Дирихле можно выбрать любую их точек, образующих сходящиеся в этом узле отрезки границы. Двигаясь подобным образом, мы доберемся до точки ближайшей к M . Можно показать, что если область плотно заполнена точками сетки, то число арифметических действий будет пропорционально $n^{1/2}$ ($n^{1/3}$ в случае трех пространственных измерений) где n - число точек сетки.

Число операций сильно зависит от того, насколько удачно выбрано начальное приближение. Для его улучшения начальную точку можно выбирать следующим образом. Поместим исходное множество точек D внутрь квадрата, который разобьем на квадратные ячейки с длиной стороны (см. рис. 9.2)

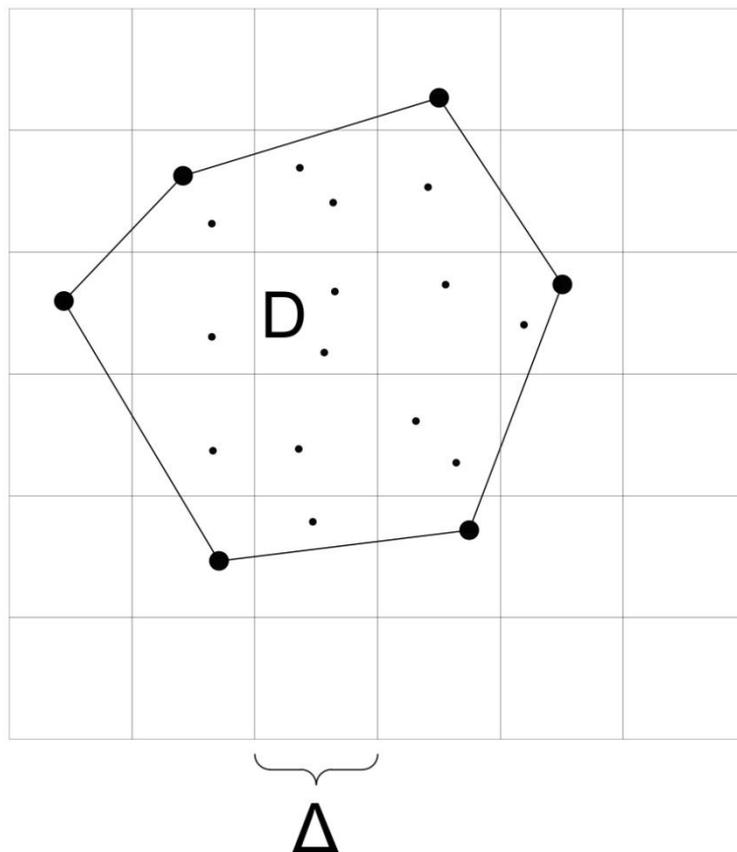


Рис. 9.2

Эти ячейки занумеруем двумя индексами (ij) и для каждой точки из множества D определим, в какую ячейку она попала. Для этого достаточно поделить координаты точки на Δ , то есть всего $2n$ операций. Одновременно для каждой ячейки составляется список точек, попавших в эту ячейку. Теперь можно выбирать в качестве начальной точки не первую попавшуюся, а уже

обработанные точки из квадратов, близких к квадрату, в который попала точка М.

До сих пор мы предполагали, что на любой окружности не может находиться более трех точек из D . Такая ситуация, однако, может встретиться, например, если точки из D размещены в узлах квадратной решетки (см. рис. 9.3)

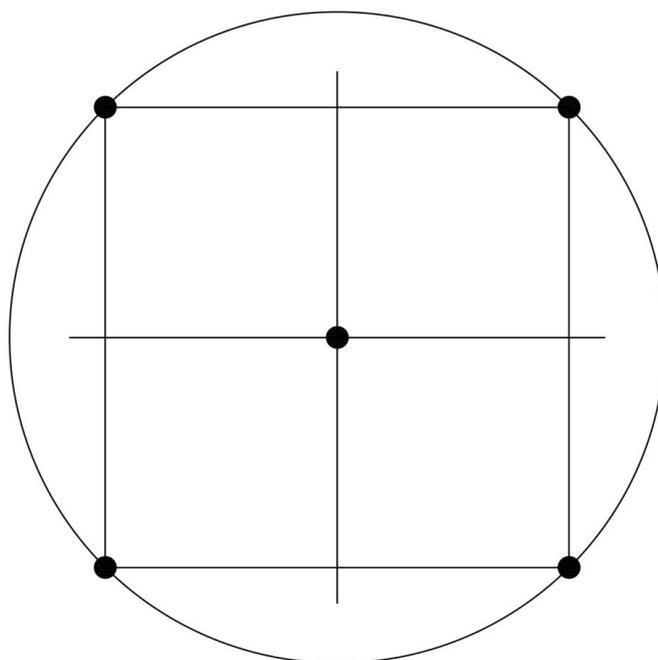


Рис. 9.3

В этом случае сразу 4 срединных перпендикуляра пересекаются в одной точке. При определении отношения соседства уже нельзя руководствоваться принципом есть ли отрезок границы соответствующей ячейки Дирихле. В этом вырожденном случае триангуляция Делоне, в отличие от ячеек Дирихле, становится неоднозначной. Ячейки Дирихле при этом хотя и определяются однозначно, но теряют то свойство, что в каждом узле сходятся ровно три срединных перпендикуляра. На рис. 9.4 показаны ячейки Дирихле и две различные триангуляции Делоне для вписанного в круг четырехугольника.

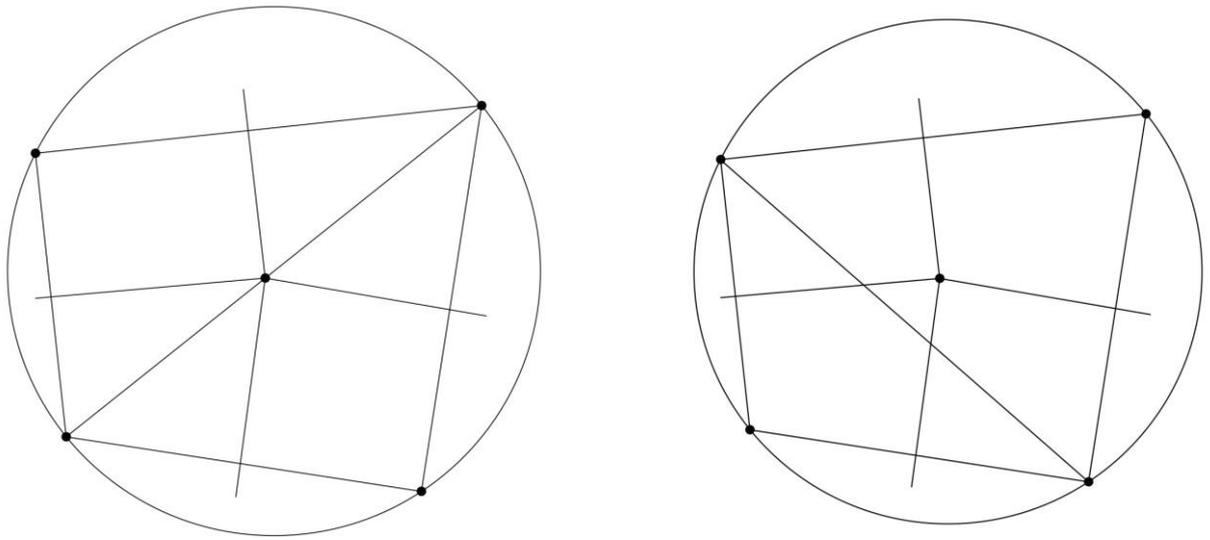


Рис. 9.4

Каждой такой триангуляции соответствуют «виртуальные» ячейки Дирихле с бесконечно малыми ребрами. Триангуляцию Делоне можно выбрать произвольно из любых доступных триангуляций вписанного в окружность многоугольника. Выбор триангуляции определяет выбор соседей и форму «виртуальной» ячейки Дирихле. На рис. 9.5 изображены пять возможных триангуляций для вписанного в окружность пятиугольника и соответствующие «виртуальные» ячейки Дирихле.

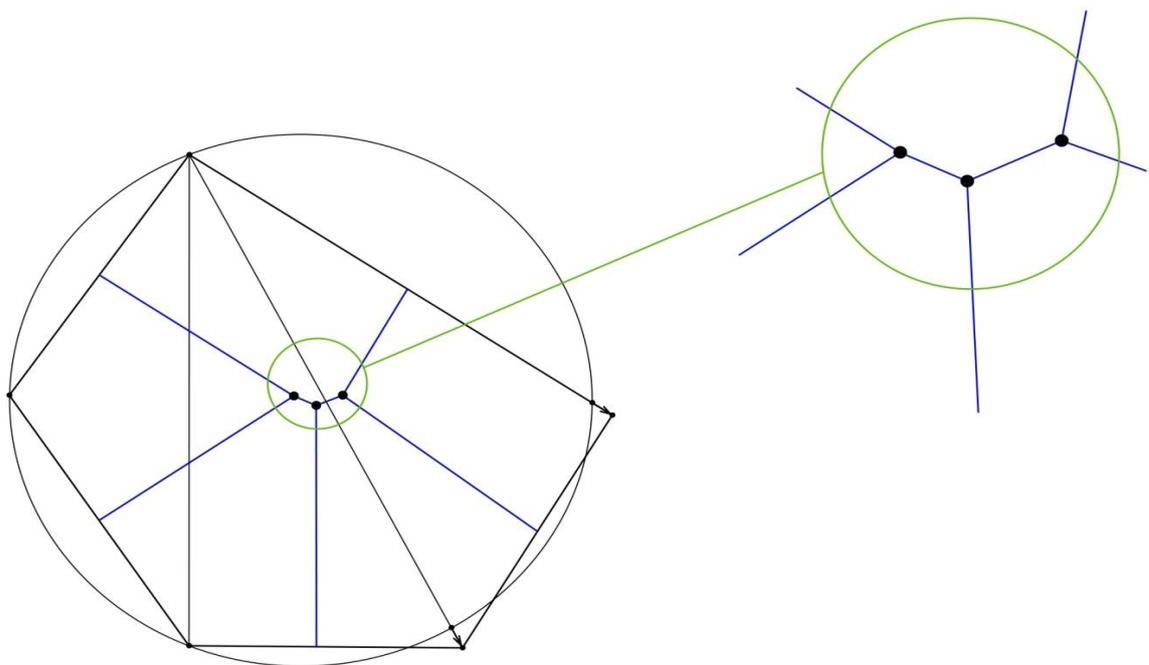


Рис. 9.5

Лекция 10. Некоторые вопросы машинного представления геометрических объектов.

В процессе построения сеток, в особенности при построении неструктурированных сеток, часто приходится решать такие задачи аналитической геометрии как нахождение точек пересечения прямых, пересечения отрезка с прямой линией, пересечения отрезков прямых. С точки зрения аналитической геометрии это простые задачи, однако при их численном решении на вычислительных системах возникают вопросы, связанные с погрешностями округления. Рассмотрим, например, задачу определения точки пересечения отрезка прямой и ломаной линии (см. рис. 10.1)

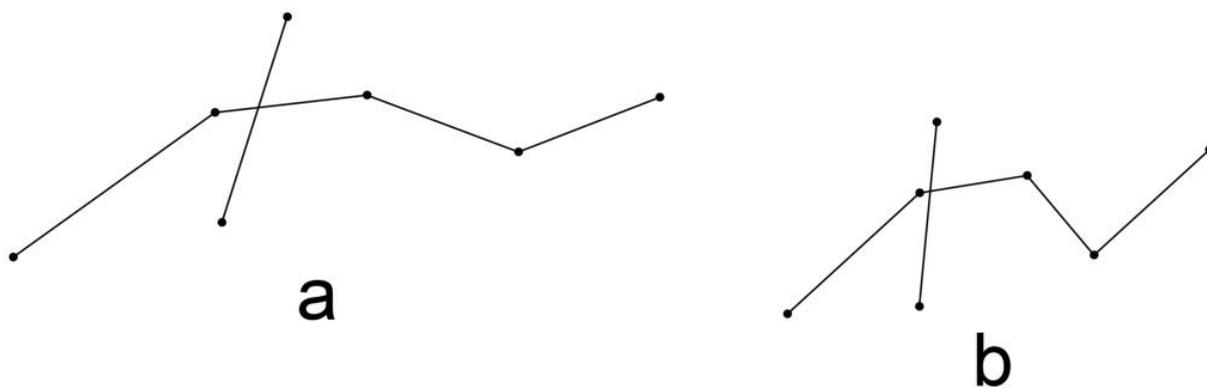
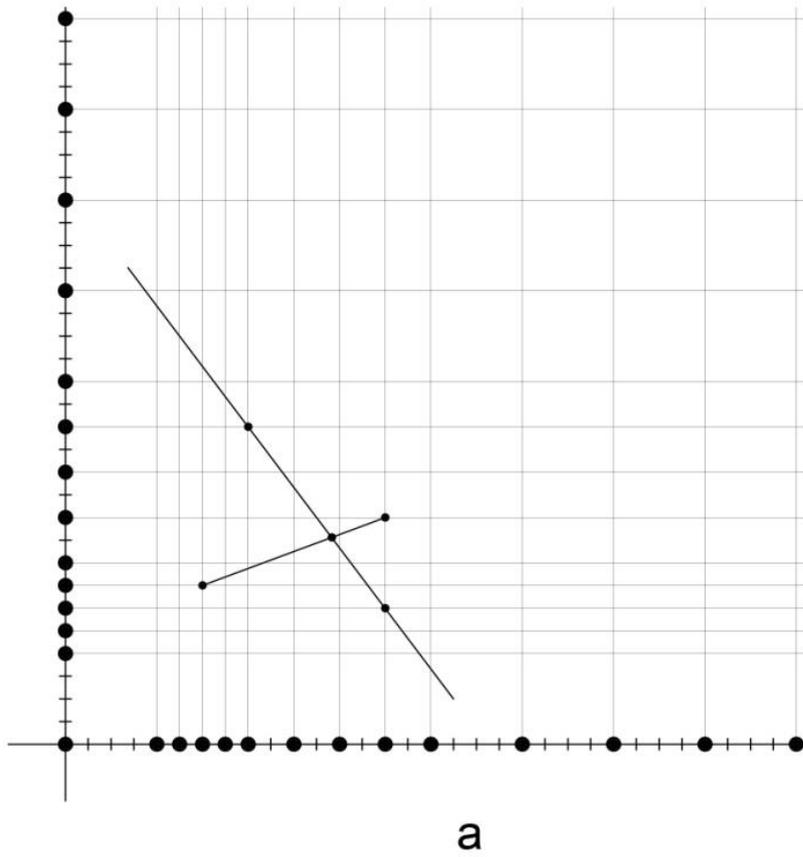


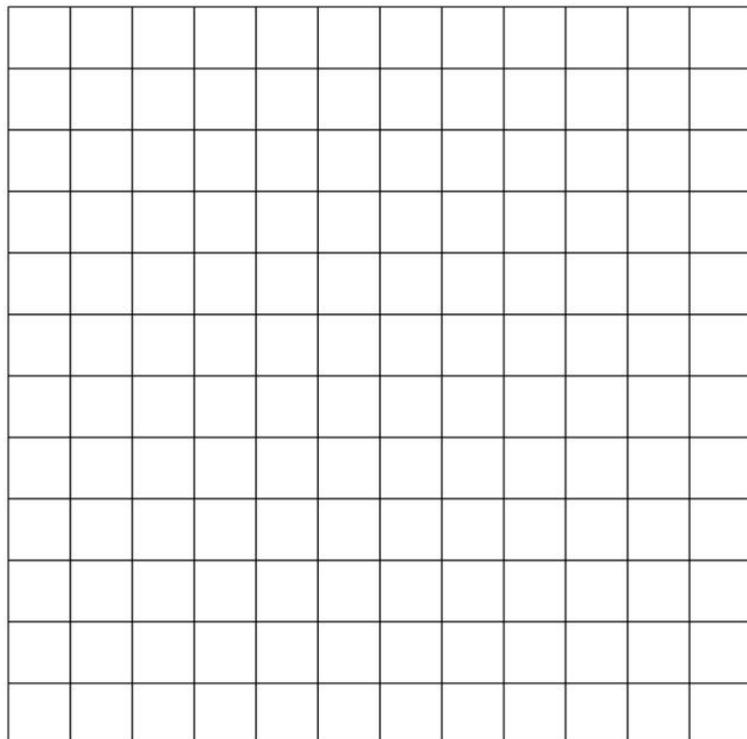
Рис. 10.1

Для определения точки пересечения можно использовать следующий алгоритм: перебираем все звенья ломаной и смотрим, имеется ли пересечение каждого ребра с заданным отрезком. Однако, если отрезки представляются в ЭВМ как пара чисел с плавающей запятой, то из-за ошибок округления такой алгоритм может привести к качественно неверным результатам, если отрезок проходит вблизи узла ломаной (см. рис. 10.1 б). Действительно, за счет таких ошибок может получиться что ни одно звено ломаной не пересекается с отрезком и будет сделан неверный вывод что отрезок и ломаная не пересекаются. В [14] предложен другой алгоритм, который в ряде случаев исправляет положение, однако и он не помогает в некоторых ситуациях. Здесь мы опишем способ, который свободен от недостатков, связанных с использованием машинной арифметики с плавающей запятой.

Для задания точки на плоскости необходимо задать два числа, представляющие ее координаты. Обычно это числа в плавающей запятой, где определенное количество разрядов отводится на порядок числа и определенное количество на мантиссу. Так как таких чисел конечное множество, число возможных точек на «машинной» плоскости тоже конечно. Эти точки располагаются в узлах неравномерной прямоугольной сетки, при этом шаг сетки вблизи нуля самый маленький, и при достижении мантиссой максимального значения увеличивается в два раза (см. рис. 10.2)



a



b

Рис. 10.2

Верхний правый квадрант «машинной» плоскости в случае использования чисел в плавающей запятой а) и в случае использования целых чисел б).

Если задавать прямую с помощью задания двух лежащих на ней точек, то, как легко видеть, точка пересечения двух таким образом заданных прямых может не принадлежать «машинной» плоскости, то есть не может быть определена как пара чисел с плавающей запятой. Ее обычно заменяют ближайшей точкой допускающей такой представление, при этом в зависимости от порядка выполнения арифметических операций могут получиться разные результаты. Избежать этого можно перейдя к целочисленной арифметике, когда координаты точки задаются двумя целыми числами. Это, конечно, не значит что минимальное расстояние между точками равно единице, можно выбрать любой масштаб, задающийся уже числом с плавающей запятой, но геометрические объекты будут теперь задаваться на целочисленной «машинной» плоскости (см. рис. 10.2 б). Следует отметить, что максимально возможное разрешение будет равномерным во всех частях геометрического объекта, тогда как при использовании чисел с плавающей запятой разрешение будет уменьшаться по мере удаления от нуля.

Само по себе использование целочисленной решетки не ликвидирует то обстоятельство, что координаты точки пересечения прямых, заданных как пара точек на этой решетке, не могут быть записаны как пара целых чисел (см. рис. 10.3)

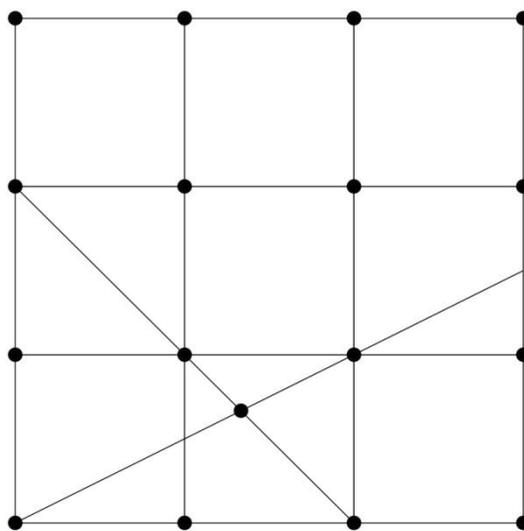


Рис. 10.3

Однако, легко показать что точки пересечения любых таких прямых лежат на более мелкой решетке и могут быть вычислены точно, без ошибок округления. В самом деле, координаты точки пересечения определяется как решение системы уравнений

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \quad (10.1)$$

$$a_2x+b_2y+c_2=0$$

где коэффициенты a_1, b_1, c_1 и a_2, b_2, c_2 являются целыми числами. В этом случае координаты точки пересечения x и y будут рациональными числами и определяются точно. Таким образом, например, при анализе вырожденной ситуации при построении триангуляции Делоне мы сможем выяснить, действительно ли более трех срединных перпендикуляров пересекаются в одной точки и правильно разрешить ситуацию. При использовании чисел с плавающей запятой ошибки округления могут привести к неправильному результату.

Отметим также, что если коэффициенты a_1, b_1, c_1 и a_2, b_2, c_2 не целые, а рациональные числа, это принципиально не меняет ситуацию. Например, при построении срединного перпендикуляра одна из задающих точек будет иметь полуцелые координаты, и уравнения (10.1) будут иметь полуцелые коэффициенты.

Следует также учесть, что при вычислении решения (10.1) получающиеся целые числа потребуют для своего хранения удвоенной разрядности.

Список литературы

1. А.А.Самарский. Теория разностных схем. М., Наука, 1989.
2. М.А.Красносельский, Г.М.Вайникко, П.П.Забрейко, Я.Б.Рутицкий, В.Я.Стеценко Приближенное решение операторных уравнений Москва, Наука, 1969.
3. Г. Стренг, Дж. Фикс Теория метода конечных элементов Москва, Мир, 1977
4. Cockburn B. An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection - Dominated Problems, Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations // Lecture Notes in Mathematics, 1998. V. 1697. P. 151-268.
5. А.А.Самарский, Е.С.Николаев Методы решения сеточных уравнений, Москва, Наука, 1978.
6. С.К.Годунов, Г.П.Прокопов. О расчетах конформных отображений и построении разностных сеток. ЖВМ и МФ, т.7, № 5, 1967 г., стр.1031-1059.
7. Г.П. Прокопов. Построение ортогональных разностных сеток посредством расчета конформных отображений. Препринт ИПМ АН СССР №45, 1970 г.
8. Б.Риман. Основы общей теории функций одной комплексной переменной. Собрание сочинений. М.-Л., Гостехиздат, 1948.
9. А. М. Winslow: Numerical Solution of the Quasilinear Poisson Equation in a Nonuniform Triangle Mesh, J. Comput. Phys. 1, 149-172 (1966)
10. П. Н. Вабищевич, Л. М. Дегтярев, “Об одном методе решения задачи со свободной границей для эллиптических уравнений и систем”, *Докл. АН СССР*, **247**:6 (1979), 1342–1346
11. А.Н.Тихонов, А.А.Самарский Уравнения математической физики, Москва, Издательство московского университета, 1999.
12. С.А.Иваненко, А.А.Чарахчян Криволинейные сетки из выпуклых четырехугольников, ЖВМиМФ, 1988, т.28, №4, с. 503-514
13. J.F.Thompson, Z.U.A.Warsi, C.W. Mastin Numerical grid generation: Foundations and Applications, North Holland, 1985.
14. Ю.В. Василевский, А.А. Данилов, К.Н. Липников, В.Н. Чугунов. Автоматизированные технологии построения неструктурированных расчетных сеток. Москва, Физматлит, 2016.
15. T. Rado. Uber den Begriff der Riemannshen Flächen. Acta Scient. Mathem. (Szeged), 1925, v. 2, pp. 101-121.