

На правах рукописи

Вичев Илья Юрьевич

**Моделирование плазмы
в столкновительно-излучательном равновесии**

1.2.2. – математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2022

Работа выполнена в *Федеральном государственном учреждении “Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук”*.

Научный руководитель:

д. т. н.

*Валько Виктор Васильевич,
ведущий научный сотрудник
12 ЦНИИ МО РФ.*

Официальные оппоненты:

д. ф.-м. н., профессор

*Рыжков Сергей Витальевич,
профессор кафедры “Теплофизика”
МГТУ им. Н.Э. Баумана,*

к. ф.-м. н.

*Левашов Павел Ремирович,
заведующий теоретическим
отделом №7 ОИВТ РАН.*

Ведущая организация:

*Федеральное государственное
бюджетное учреждение науки
Институт спектроскопии
Российской академии наук.*

Защита состоится «16» февраля 2023 г. в 11:00 часов на заседании диссертационного совета *24.1.237.01* при ИППМ им. М.В. Келдыша РАН, расположенном по адресу: *125047, Москва, Миусская пл., д.4*

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ИППМ им. М.В. Келдыша РАН <https://keldysh.ru>.

Автореферат разослан «_____» _____ 2022 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,

к. ф.-м. н.

Корнилина М. А.

Общая характеристика работы

Актуальность работы. Математическое моделирование имеет в науке и производстве широкое применение – оно служит инструментом, с помощью которого можно прогнозировать свойства веществ в определённых условиях, объяснять результаты экспериментов, а также удешевлять процессы разработки наукоёмких установок. Изучение поведения веществ и их свойств в экспериментах, проводимых как на современных установках – лазерных (PEARL, Луч, NIF, XFEL) и разрядных (Ангара 5-1, Z) и многих других, так и с помощью компьютерного моделирования, позволяет продвинуться в решении актуальных проблем современной физики. Накопленные знания о свойствах веществ и рост точности экспериментальных данных ведёт к потребности в развитии моделей, используемых при математическом моделировании и разработке численных кодов на их основе. Эволюция современной компьютерной техники и рост вычислительных мощностей позволяют расширять возможности моделирования. Таким образом, работа по развитию методов и программ для детального изучения и моделирования процессов, протекающих в плазме, является актуальной.

Полномасштабное моделирование экспериментов, проводимых на современных установках, зачастую требует согласованного решения системы уравнений радиационной газовой динамики в трёхмерной постановке совместно с решением системы кинетических уравнений. Поиск решения задачи в такой формулировке не представляется возможным даже с учётом существующих мощностей современных суперЭВМ. Поэтому при расчётах используются разные приближения: одни – для решения уравнения переноса излучения, другие – для коэффициентов поглощения и излучательной способности.

На протяжении многих лет разными научными коллективами по всему миру ведётся работа по развитию моделей и разработке программ для изучения свойств веществ в разнообразных, в том числе экстремальных, состояниях. В ИПМ им. М.В. Келдыша РАН в отделе №6 “Вычислительная физика и кинетические уравнения” коллективом авторов (Новиковым В.Г., Соломянной А.Д., Вичевым И.Ю., Грушиным А.С, Кимом Д.А.) выполняется разработка вычислительного комплекса программ THERMOS. В его основе лежат работы А.Ф. Никифорова, В.Б. Уварова и В.Г. Новикова в области разработки квантово-статистических моделей и итерационных методов решения нелинейных систем уравнений.

При развитии комплекса THERMOS основная часть работ была посвящена описанию свойств высокотемпературной плазмы, находящейся в условиях локального термодинамического равновесия, а также описанию свойств неравновесной плазмы в *приближении среднего атома*.

В рамках данной работы проведена разработка методов, алгоритмов и

программ для математического моделирования характеристик неравновесной плазмы в приближении столкновительно-излучательного равновесия на основе *атомных баз данных* с учётом таких физических явлений, как плотностные эффекты, отклонение распределения электронов от Максвелловского. Также получены согласованные решения кинетической системы совместно с уравнением переноса в одномерной геометрии для модельных систем различного типа симметрии. Прделанная работа позволяет существенно расширить круг задач решаемых с помощью комплекса программ THERMOS.

Важно отдельно отметить, что на текущий момент в России не существует аналогов вычислительного комплекса программ THERMOS с таким же набором возможностей для моделирования термодинамических и радиационных свойств веществ в широкой области температур и плотностей.

Цель диссертационной работы состоит в усовершенствовании модели и приближений, используемых при моделировании радиационных и термодинамических свойств плазмы в условиях столкновительно-излучательного равновесия, которые позволяют достичь лучшего согласия с экспериментальными данными, получаемыми на современных установках, а также с результатами моделирования по независимым программам.

Научная задача, решаемая в диссертации, состоит в развитии математических моделей, совершенствовании численных методов и алгоритмов, а также их реализации в виде конкретных компьютерных программ, позволяющих выполнять серийные расчёты термодинамических и радиационных свойств излучающей плазмы с учётом эффектов неравновесности на современных высокопроизводительных ЭВМ с параллельной архитектурой.

Направления научных исследований:

1. Развитие моделей и подходов, используемых для расчёта оптических и термодинамических свойств веществ в случае отсутствия локального термодинамического равновесия.
2. Проведение численных экспериментов и верификация программ на аналитических решениях, существующих экспериментальных данных и результатах, полученных по программам зарубежных научных групп.
3. Определение области применимости предложенной модели в пространстве физических параметров – температуры и плотности вещества.

Для достижения поставленной цели потребовалось последовательно решить следующие задачи:

1. Дополнить модель столкновительно-излучательного равновесия, добавив в неё учёт плотностных эффектов по моделям снижения потенциалов ионизации Стюарта-Пьятта и Экера-Кролла, а также возможность

учёта относительно малой доли горячих электронов с температурой намного больше, чем температура плазмы.

2. Получить решения уравнения переноса излучения в одномерной геометрии для модельных систем различного типа симметрии – плоской, цилиндрической и сферической, согласованные с системой кинетических уравнений в стационарном приближении столкновительно-излучательного равновесия.
3. Построить алгоритмы для расчёта оптических и термодинамических характеристик плазмы с произвольным полем излучения в рамках модели столкновительно-излучательного равновесия, а также разработать алгоритм согласования с кинетикой решений уравнения переноса излучения в одномерной геометрии для модельных систем различного типа симметрии (плоской, цилиндрической и сферической).
4. Разработать комплекс вычислительных программ с учётом возможности проведения расчётов на современных ЭВМ с параллельной архитектурой и встроить их в пакет программ THERMOS для расширения его функциональных возможностей.
5. Произвести верификацию разработанных программ на задачах, имеющих аналитические решения, а также путём сравнения с результатами расчётов, полученными по независимым программам, и с экспериментальными данными.
6. Определить область применимости усовершенствованной модели столкновительно-излучательного равновесия.

Научная новизна работы заключается в разработке и программной реализации алгоритма расчёта радиационных и термодинамических свойств плазмы в рамках усовершенствованной модели столкновительно-излучательного равновесия в стационарном приближении, в которой учтены эффекты плотности, наличие горячих электронов, а также в получении согласованных решений кинетической системы совместно с уравнением переноса излучения в одномерных геометриях.

Теоретическая и практическая значимость.

В теоретической части работы ценность представляют разработанные алгоритмы для расчёта оптических и термодинамических характеристик плазмы с произвольным полем излучения в рамках модели столкновительно-излучательного равновесия, найденные решения уравнения переноса излучения в одномерной геометрии совместно с системой кинетических уравнений, а также их реализация в виде отдельных программных модулей с возможностью

запуска на современных ЭВМ с параллельной архитектурой. В настоящее время внедрение алгоритмов совместного решения в одномерные коды радиационной газовой динамики представляет большой интерес и является отдельной исследовательской задачей.

В практической части исследования значимость представляют сформулированная усовершенствованная модель и разработанные на её основе программные модули, которые служат инструментом для создания таблиц радиационных и термодинамических свойств любых веществ в широком диапазоне температур и плотностей. Такие таблицы используются в сложных программах радиационной газовой динамики для выполнения производственных расчётов и описания экспериментальных данных, получаемых на современных высокоэнергетических установках.

Достоверность результатов обеспечивается за счёт всесторонней верификации разработанных программ путём проведения сравнительного анализа результатов расчётов с экспериментальными данными, аналитическими решениями, а также с результатами расчётов других научных групп. Полученное согласие результатов служит подтверждением надёжности программ и достоверности получаемых с их помощью результатов, учитывая область применимости используемых моделей и приближений.

Вычислительный комплекс программ THERMOS имеет широкое применение и рекомендуется для:

- расчёта таблиц радиационных и термодинамических свойств веществ в широкой области температур и плотностей с их последующим применением в решении практических задач радиационной газовой динамики и физики плазмы;
- проведения анализа экспериментальных спектров и определения параметров плазмы – например, температуры и плотности;
- подготовки и сопровождения экспериментов по измерению радиационных свойств плазмы;
- поиска оптимальных параметров работы источников рентгеновского излучения в требуемом спектральном диапазоне.

Методология и методы исследования.

Методология исследований, выполненных в диссертационной работе, носит теоретический характер и основана на модели столкновительно-излучательного равновесия и компьютерном моделировании. Модель столкновительно-излучательного равновесия используется для описания термодинамических и оптических свойств плазмы с произвольным полем излучения. Скорости столкновительных и радиационных процессов рассчитываются на основе приближений Режемортера и Лотца, а также формулы Крамерса. Расчёт интегралов от показательных функций, содержащих экспоненту, производится с использованием аппроксимационных формул, предложенных Алленом и Ха-

стингом. Решение системы линейных уравнений осуществляется прямым методом Гаусса с выделением главного элемента по столбцу. Для учёта плотностных эффектов применяются приближения Стюарта-Пьятта и Экера-Кролла при расчёте величины снижения потенциалов ионизации. При описании формы спектральной линии используется профиль Фойгта, для расчёта которого применяется квадратурная формула типа Гаусса на основе полиномов Эрмита.

Согласованное решение системы кинетических уравнений и уравнения переноса излучения в одномерной геометрии находится с помощью итерационного процесса до достижения сходимости по величине радиационных потерь. Решение уравнения переноса излучения находится путём формального интегрирования.

Несмотря на свой теоретический характер, работа опирается на огромное количество накопленных экспериментальных данных.

На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:

1. Усовершенствованная модель столкновительно-излучательного равновесия в стационарном приближении для расчёта термодинамических и радиационных свойств плазмы с произвольным полем излучения, которая учитывает плотностные эффекты по моделям снижения потенциалов ионизации Стюарта-Пьятта и Экера-Кролла, а также может включать относительно малую долю горячих электронов с температурой намного больше, чем температура плазмы, и её реализация в виде программы `THERMOS_CRE`, дающая возможность проведения расчётов на современных ЭВМ с параллельной архитектурой.

2. Согласованные решения уравнения переноса излучения с системой кинетических уравнений в рамках усовершенствованной модели столкновительно-излучательного равновесия в стационарном приближении для одномерных модельных систем различного типа симметрии – плоской, цилиндрической, сферической, а также их реализацию в программе `THERMOS_Layer`, позволяющую проводить расчёты на современных ЭВМ с параллельной архитектурой.

3. Алгоритмы для расчёта оптических и термодинамических характеристик плазмы с произвольным полем излучения в рамках усовершенствованной модели столкновительно-излучательного равновесия, а также алгоритм согласования с кинетикой решений уравнения переноса излучения в одномерной геометрии для модельных систем различного типа симметрии.

4. Результаты исследования моделей и разработанных программ, которые показали высокое качественное и количественное совпадение с экспериментальными данными, аналитическими решениями и результатами расчётов по независимым программам зарубежных авторов.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на конференциях в 2006 – 2022 гг.: на Международном семинаре “Супервычисления и математическое моделирование” (Саров, 2006, 2008), 16th IEEE International Pulsed Power Conference (Альбукерке, США, 2007), International Conference on Equations of State for Matter (Эльбрус, 2008, 2020), на Международной (Звенигородской) конференции по физике плазмы и УТС (Звенигород, Москва, 2008 – 2009, 2011, 2014, 2019 – 2020), International Conference on Interaction of Intense Energy Fluxes with Matter (Эльбрус, 2009, 2019, 2021), 5-th International Workshop on Plasma Spectroscopy (Франция, 2012), на конференции “Диагностика низкотемпературной плазмы” (Москва, 2012), IX Topical Workshop “New Horizons of EUV Lithography” (Анталья, Турция, 2013), на конференции “Разностные схемы и их приложения”, посвященной 90-летию профессора В.С. Рябенского (Москва, 2013), на семинарах в рамках Летней суперкомпьютерной академии “Крупномасштабное моделирование, высокопроизводительные вычисления и обработка данных большого объема на суперкомпьютерах” (Москва, 2013), International Workshop on Extreme Ultraviolet and Soft X-Ray Sources (Дублин, Ирландия, 2013 – 2014), 2014 International Conference on Computer Technologies in Physical and Engineering Applications (ICСТРЕА) (Санкт-Петербург, 2014), The 9th NLTE Code Comparison Workshop (Париж, Франция, 2015), The 10th NLTE Code Comparison Workshop (Сан-Диего, США, 2017), The International Workshop on Radiative Properties of Hot Dense Matter (Гамбург, Германия, 2018), Scientific-Coordination Workshop on Non-Ideal Plasma Physics (Москва, 2018), 5th SLSP Workshop (Врдник, Сербия, 2019), The 11th NLTE Code Comparison Workshop (Лас-Пальмас-де-Гран-Канария, Испания, 2019), Source Workshop (Held online, 2020 – 2021), на Забабахинских научных чтениях 2021 (Снежинск, 2021) XXXVII Fortov International Conference on Equations of State for Matter (Эльбрус, 2022).

Публикации. Основные результаты исследований, проведенные совместно с соавторами, опубликованы в 53 печатных работах: 12 из них – статьи в рецензируемых изданиях, индексируемых в международных базах данных Scopus и/или Web of Science [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12], 13 из них в рекомендованных изданиях из списка ВАК [1, 2, 3, 4, 5, 8, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19], 1 монография [20] и 33 публикации в виде тезисов докладов. Работы [18, 19] подготовлены без соавторов.

На разработанные программы получены свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ [21, 22, 23].

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы.

Большая часть опубликованных работ проводилась совместно с соавторами, так как получаемые с помощью разработанных программ данные по

радиационным и термодинамическим свойствам веществ использовались в кодах радиационной газовой динамики для полномасштабного моделирования экспериментов, выполняемых на больших экспериментальных установках. Поэтому соавторы в представленных работах – это разработчики кодов радиационной газовой динамики и/или те, кто проводил серийные расчёты по этим кодам, а также те, кто ставил эксперимент и выполнял измерения.

В работах [1, 9, 10] вклад автора заключался в построении модели неравновесной излучающей плазмы и её применении для моделирования спектров излучения вольфрамовой плазмы, получаемой на сильноточной разрядной установке Ангара-5-1. В работах [2, 3, 4, 11, 12] совместно с группами экспериментаторов и газодинамиков было проведено сопоставление результатов измерений спектральной интенсивности излучения и выходной мощности вольфрамовой плазмы с расчётами. Вклад автора заключался в проведении большого сравнительного исследования, выполненного в предположении стационарности и однородности плазмы с помощью рассматриваемой модели, а также в подготовке таблиц термодинамических и оптических характеристик плазмы вольфрама в широкой области температур и плотностей для проведения расчётов с помощью кодов радиационной газовой динамики. В работах [6, 14] вклад автора заключался в подготовке таблиц термодинамических и оптических характеристик, которые использовались для определения параметров пинчевой плазмы железа искрового вакуумного разряда с лазерным поджигом. В работе [5] описаны результаты многолетних исследований, посвящённых разработке плазменных источников экстремального ультрафиолетового излучения для литографии нового поколения, при этом вклад автора заключался в подготовке таблиц термодинамических и оптических свойств плазмы олова с требуемой детализацией в заданном спектральном диапазоне. В работе [13] вклад автора заключался в проведении расчётов с помощью разработанной модели для заданного набора случаев, определённых организаторами семинара по сравнению неравновесных кодов, и участия в семинаре с представлением полученных результатов. В работе [17] на основе разработанного автором кода было проведено исследование методов приближённого учёта неравновесности поля излучения при моделировании свойств плазмы с помощью предварительно рассчитанных таблиц термодинамических и радиационных свойств плазмы. В работе [8] вклад автора заключался в подготовке таблиц, которые использовались в расчётах особенностей генерации лазерно-индуцированного рентгеновского излучения и его воздействия на вещество применительно к задачам лазерного термоядерного синтеза. В работах [15, 7, 16, 18, 19] были опубликованы основные результаты диссертационной работы, из которых [18, 19] подготовлены без соавторов.

Все представленные в диссертации результаты получены лично автором. На основании проведённых исследований сформулированы и обоснованы вы-

воды и заключения, вошедшие в эту научную работу.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации составляет 165 страниц, из них – 148 страниц текста, включая 48 рисунков и 5 таблиц. Библиография включает 147 наименований на 17 страницах.

Содержание работы

Во введении сделан обзор литературы и существующих моделей, обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, а также представлены выносимые на защиту научные положения.

В первой главе изложена усовершенствованная модель столкновительно-излучательного равновесия в стационарном приближении, а также применяемые приближения и методы для расчёта радиационных и термодинамических свойств плазмы с произвольным полем излучения. Модель описывает процессы, которые связывают населённости электронных состояний в атомах и ионах посредством скоростей радиационных и столкновительных процессов. Полагается, что плазма состоит из свободных электронов и ионов различной кратности, тогда уравнение для определения вероятности x_{ks} конфигурации Q_{ks} иона кратности k в состоянии s может быть записано в виде:

$$\begin{aligned} \frac{dx_{ks}}{dt} = & -x_{ks} \left(\sum_{s'} \alpha_{ks \rightarrow k-1, s'} + \sum_{s'} \alpha_{ks \rightarrow k+1, s'} + \sum_{s'} \alpha_{ks \rightarrow ks'} \right) + \\ & + \sum_{s'} x_{k+1, s'} \alpha_{k+1, s' \rightarrow k, s} + \sum_{s'} x_{k-1, s'} \alpha_{k-1, s' \rightarrow k, s} + \sum_{s'} x_{ks'} \alpha_{ks' \rightarrow ks}. \end{aligned}$$

Для расчёта скоростей процессов используются хорошо известные приближения, а именно: Режемортера^{1,2} и Лотца³ для скоростей столкновительных процессов возбуждения и ионизации соответственно. Формулы для расчёта скоростей радиационных процессов взяты из книг^{4,5}, также использована

¹ Sobel'man I.I., Vainshtein L.A., Yukov E.A. Excitation of Atoms and Broadening of Spectral Lines. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1995. ISBN: 978-3-540-58686-9.

² Regemorter H. Rate of Collisional Excitation in Stellar Atmospheres. // The Astrophysical Journal. 1962. Vol. 136. P. 906.

³ Lotz W. Electron-impact ionization cross-sections for atoms up to Z=108 // Zeitschrift fur Physik A Hadrons and nuclei. 1970. Vol. 232, no. 2. P. 101-107.

⁴ Михалас. Д. Звездные атмосферы. Мир, 1982. Т. Часть II. С. 423.

⁵ Novikov V.G., Zakharov S.V. Modeling of non-equilibrium radiating tungsten liners // Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. 2003. Vol. 81, no. 1-4. P. 339-354.

формула Крамерса⁶ для скорости фотоионизации. Скорость процесса автоионизации рассчитывается в дипольном приближении⁷. Скорости обратных процессов вычисляются на основе принципа детального равновесия^{8,9}. Для расчёта формы спектральной линии используется профиль Фойгта¹⁰.

В итоге получается система уравнений для определения вероятностей конфигураций, составленная из скоростей столкновительных и радиационных процессов. Соответствующая матрица имеет блочно-трехдиагональный вид, при этом является разреженной.

Для решения систем линейных алгебраических уравнений известно много как прямых, так и итерационных методов. Ввиду простоты реализации был выбран классический, условно устойчивый прямой метод Гаусса с выделением главного элемента по столбцу¹¹, хотя он и не является оптимальным по затрачиваемому на расчёт времени. В рамках работы не проводилось глубокого исследования применимости других прямых и итерационных методов для решения таких систем.

Усовершенствование модели столкновительно-излучательного равновесия проведено за счёт учёта снижения потенциалов ионизации. На выбор доступны две модели – Стюарта-Пьятта¹² и Экера-Кролла¹³, поскольку существуют экспериментальные подтверждения их справедливости^{14,15}. При этом область применимости для плотности вещества изменилась с диапазона от 10^{-9} до 10^{-3} г/см³ до диапазона от 10^{-9} до 10^4 г/см³.

В данную модель включена возможность учёта фиксированной доли горячих электронов с температурой намного больше, чем температура окружающей плазмы¹⁶, для которых используется максвелловская функция распределения свободных электронов по энергиям. Это позволяет расширить класс

⁶ Kramers H.A. On the theory of X-ray absorption and of the continuous X-ray spectrum // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. 1923. Vol. 46, no. 275. P. 836–871.

⁷ Жданов В.П. Диэлектронная рекомбинация // Вопросы теории плазмы / Под ред. М.А. Леонтович, Б.Б. Кадомцев. Москва: Энергоиздат, 1982. С. 79–92.

⁸ Oxenius J. Kinetic theory of particles and photons : theoretical foundations of non-LTE plasma spectroscopy. Springer-Verlag, 1986. P. 353. ISBN:9783540158097.

⁹ Faussurier G., Blancard C. Degeneracy and relativistic microreversibility relations for collisional-radiative equilibrium models // Physical Review E. 2017. Vol. 95, no. 6. P. 063201.

¹⁰ Voigt W. Uber das Gesetz der Intensitatsverteilung innerhalb der Linien eines Gasspektrums. 1912.

¹¹ Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989. С. 432.

¹² Stewart J.C., Pyatt K.D. Lowering of Ionization Potentials in Plasmas // The Astrophysical Journal. 1966. Vol. 144. P. 1203.

¹³ Ecker G., Kroll W. Lowering of the Ionization Energy for a Plasma in Thermodynamic Equilibrium // Physics of Fluids. 1963. Vol. 6, no. 1. P. 62.

¹⁴ Ciricosta O., Vinko S.M., Chung H.K. et al. Direct Measurements of the Ionization Potential Depression in a Dense Plasma // Phys. Rev. Lett. 2012. Vol. 109. P. 065002.

¹⁵ Hoarty D.J., Allan P., James S.F. et al. Observations of the Effect of Ionization- Potential Depression in Hot Dense Plasma // Physical Review Letters. 2013. Vol. 110, no. 26. P. 265003.

¹⁶ Zakharov V.S., Novikov V.G. Modeling of ionization composition in argon plasma with fast electrons // Mathematical Models and Computer Simulations. 2009. Vol. 1, no. 5. P. 533–542.

решаемых задач, где может быть применима усовершенствованная модель столкновительно-излучательного равновесия.

При построении уравнения состояния (УРС) используется приближение идеального газа. Исследование и сопоставление результатов с более сложными моделями УРС^{17,18,19,20,21,22} выходят за рамки данной работы.

Описанная модель реализована в виде отдельного модуля THERMOS_CRE, который вошел в состав вычислительного комплекса программ THERMOS.

Область применимости рассмотренной модели лежит в диапазоне от 10^{-9} до 10^4 г/см³ для плотности вещества и в диапазоне от 10^{-3} до 10 кэВ для электронной температуры.

Результаты первой главы опубликованы в работах [1, 18, 20].

Во второй главе получены согласованные решения уравнения переноса излучения с кинетической системой в стационарном приближении столкновительно-излучательного равновесия для ряда одномерных модельных систем различного типа симметрии – плоской, цилиндрической и сферической.

Сравнение результатов математического моделирования плазмы с экспериментально полученными данными представляет собой достаточно сложную задачу. В общем случае для изучения динамики плазмы требуется полноценное трёхмерное моделирование с помощью сложных кодов радиационной газовой динамики, при этом уравнение переноса излучения следует решать согласованно с кинетической системой. В такой постановке получение решения задачи моделирования, даже с помощью существующих вычислительных мощностей суперЭВМ, представляется сложной вычислительной проблемой. Поэтому в РГД-кодах применяются разные приближения для решения уравнения переноса излучения и используемых в процессе решения коэффициен-

¹⁷ Воропинов А.И., Гандельман Г.М., Подвальный В.Г. Электронные энергетические спектры и уравнение состояния твердых тел при высоких давлениях и температурах // УФН. 1970. Vol. 100, № 2. P. 193–224.

¹⁸ Liberman D.A. Self-consistent field model for condensed matter // Phys. Rev. B. American Physical Society, 1979. Vol. 20, № 12. P. 4981.

¹⁹ More R.M. et al. A new quotidian equation of state (QEOS) for hot dense matter // Phys. Fluids. AIP, 1988. Vol. 31, № 10. P. 3059.

²⁰ Kresse G., Furthmüller J. Efficient iterative schemes for ab initio total-energy calculations using a plane-wave basis set // Phys. Rev. B. American Physical Society, 1996. Vol. 54, № 16. P. 11169.

²¹ Starrett C.E., Daligault J., Saumon D. Pseudoatom molecular dynamics // Phys. Rev. E - Stat. Nonlinear, Soft Matter Phys. American Physical Society, 2015. Vol. 91, № 1. P. 013104.

²² Faik S., Tauschwitz A., Iosilevskiy I. The equation of state package FEOS for high energy density matter // Comput. Phys. Commun. North-Holland, 2018. Vol. 227. P. 117–125.

тов поглощения и излучательной способности^{23,24,25,26,27}.

С другой стороны, стоит отметить, что получаемые в экспериментах устойчивые плазменные образования нередко описываются с помощью одномерной структуры: например, шара или сферы, цилиндра или плоского слоя^{28,29}. С помощью такой постановки научной задачи можно найти согласованное решение для уравнения переноса излучения с кинетической системой в стационарном приближении столкновительно-излучательного равновесия.

Проведённый поиск показал, что в настоящий момент в России нет программ, в которых бы согласованным образом были бы получены решения уравнения переноса излучения с кинетической системой в приближении столкновительно-излучательного равновесия (для многоэлектронных атомов с большим числом учитываемых состояний). Поэтому на основе полученных решений разработан специальный программный модуль, позволяющий рассчитывать свойства плазмы с учётом эффектов непрозрачности при конечных размерах в одномерной геометрии – `THERMOS_Layer`, который даёт возможность проведения расчётов на современных ЭВМ с параллельной архитектурой.

Результаты второй главы опубликованы в работах [16, 17].

В третьей главе представлены результаты исследования используемых приближений и моделей, которые реализованы в рамках усовершенствованной модели столкновительно-излучательного равновесия для вычисления радиационных и термодинамических свойств. Кроме того, подробным образом рассмотрены результаты сравнительного анализа с экспериментальными данными, аналитическими решениями и результатами расчётов по независимым программам других научных групп.

Верификацию моделей и программ, разработанных на их основе, можно проводить несколькими способами. Одним из таких способов является сравнение результатов расчётов с экспериментально измеренными данными – например, спектрами пропускания. Другим способом верификации кодов яв-

²³ Koshelev K.N., Ivanov V.V., Novikov V.G. et al. RZLINE code modeling of distributed tin targets for laser-produced plasma sources of extreme ultraviolet radiation // *Journal of Micro/Nanolithography, MEMS, and MOEMS*. 2012. Vol. 11, no. 2. P. 021112–1.

²⁴ Цыгвинцев И.П., Круковский А.Ю., Новиков В.Г. Сравнение различных методов расчёта переноса излучения для трёхмерных задач // *Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша*. 2014. № 48. С. 14.

²⁵ Ольховская О.Г., Гасилов В.А., Баско М.М. и др. О расчётах выходной мощности и спектра рентгеновского излучения Z-пинчей на основе многопроволочныхборок // *Матем. моделирование*. 2016. Т. 28, № 1. С. 3–22. *Math. Models Comput. Simul.*, 8:4 (2016), 422–437.

²⁶ Basko M.M. On the maximum conversion efficiency into the 13.5-nm extreme ultraviolet emission under a steady-state laser ablation of tin microspheres // *Physics of Plasmas*. 2016. Vol. 23, no. 8. P. 083114.

²⁷ Rozanov V.B., Vergunova G.A. Investigation of compression of indirect-drive targets under conditions of the NIF facility using one-dimensional modelling // *Quantum Electronics*. 2020. Vol. 50, no. 2. P. 162–168.

²⁸ Grabovski E.V., Sasorov P.V., Shevelko A.P. et al. Radiative heating of thin Al foils by intense extreme ultraviolet radiation // *JETP Letters*. 2016. Vol. 103, no. 5. P. 350–356.

²⁹ Gritsuk A.N., Aleksandrov V.V., Grabovskiy E.V. et al. Time- and spatially resolved spectra of X-ray radiation of Z-pinch of tungsten multiwire arrays // *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. Vol. 1238. P. 12053.

ляется их перекрёстное сравнение между собой по специально подобранным условиям, при которых бы подчеркивались различные особенности кинетики населённости плазмы.

В работе выполнена верификация разработанного программного модуля THERMOS_CRE, в котором реализована усовершенствованная стационарная модель столкновительно-излучательного равновесия с произвольным полем излучения, учитывающая плотностные эффекты посредством использования моделей Стюарта-Пьятта (СП)¹² и Экера-Кролла (ЭК)¹³ для снижения потенциалов ионизации. Верификация модуля осуществляется путём сопоставления с модифицированной моделью Хартри-Фока-Слэтера (программа THERMOS_HFS) и с моделью Либермана (программа RESEOS), а также с кодами-участниками семинара по сравнению неравновесных кодов^{30,31}. Сравнительный анализ полученных результатов представлен на примере расчётов для плазмы алюминия и железа (см. рис. 1 – 3).

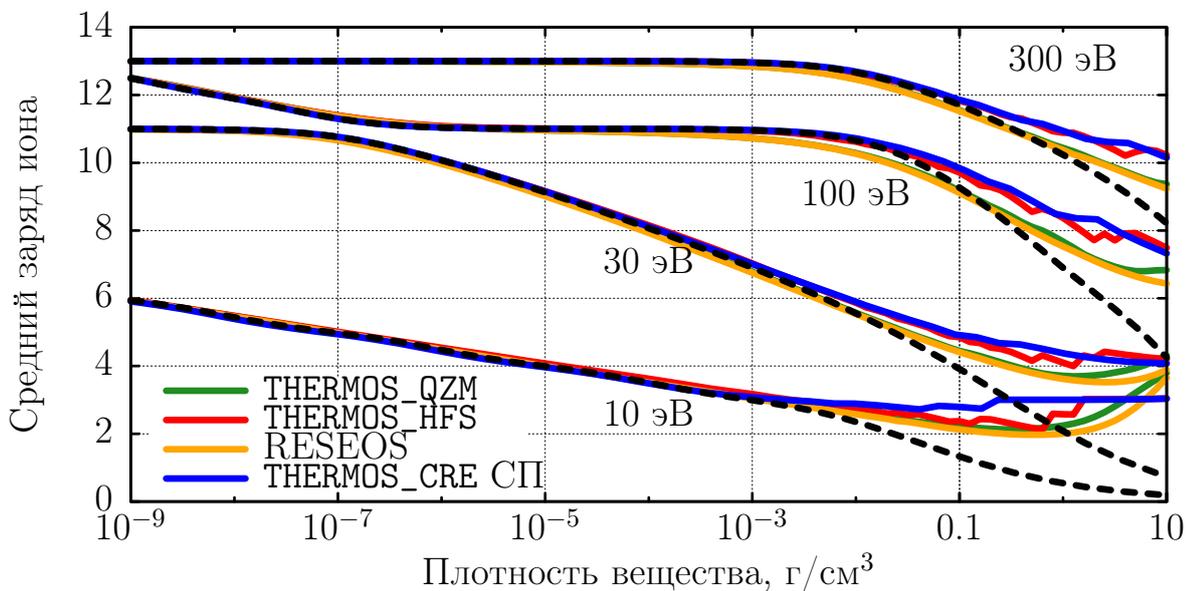


Рис. 1. Сравнение изотерм среднего заряда в плазме алюминия, рассчитанных в приближении локального термодинамического равновесия с помощью программ THERMOS_QZM (зелёная кривая), THERMOS_HFS (красная кривая), RESEOS (оранжевая кривая) и THERMOS_CRE с учётом снижения потенциалов ионизации по модели СП (сплошная синяя кривая) и без учёта плотностных эффектов (пунктирная кривая)

Из результатов сравнения, представленных на рис. 1, видно, что изотермы среднего заряда, рассчитанные по программам THERMOS_QZM и RESEOS, имеют гладкое поведение (зелёная и оранжевая кривые соответственно), в то время как изотермы, полученные по программам THERMOS_HFS и THERMOS_CRE,

³⁰ Piron R., Gilleron F., Aglitskiy Y. et al. Review of the 9th NLTE code comparison workshop // High Energy Density Physics. 2017. Vol. 23. P. 38–47.

³¹ Ciricosta O., Vinko S.M., Chung H.K. et al. Direct Measurements of the Ionization Potential Depression in a Dense Plasma // Phys. Rev. Lett. 2012. Vol. 109. P. 065002.

имеют изломы (красная и синяя кривые соответственно). Негладкое поведение кривых при увеличении плотности вещества вызвано резким переходом оболочек в непрерывный спектр. Отметим, что результаты, полученные по программе THERMOS_CRE с моделью СП, где учтены эффекты плотности, хорошо согласуются с результатами расчётов по программе THERMOS_HFS.

В результате сравнительного анализа данных, представленных на рис. 1 и 2, видно, что с повышением плотности учёт плотностных эффектов приводит к росту среднего заряда иона. Такое поведение объясняется тем, что с увеличением плотности возрастает взаимодействие между ионами и электронами и это приводит к изменению атомного потенциала, в котором более высокие состояния перестают быть связанными, а энергия, необходимая для ионизации оставшихся связанных электронов, уменьшается.

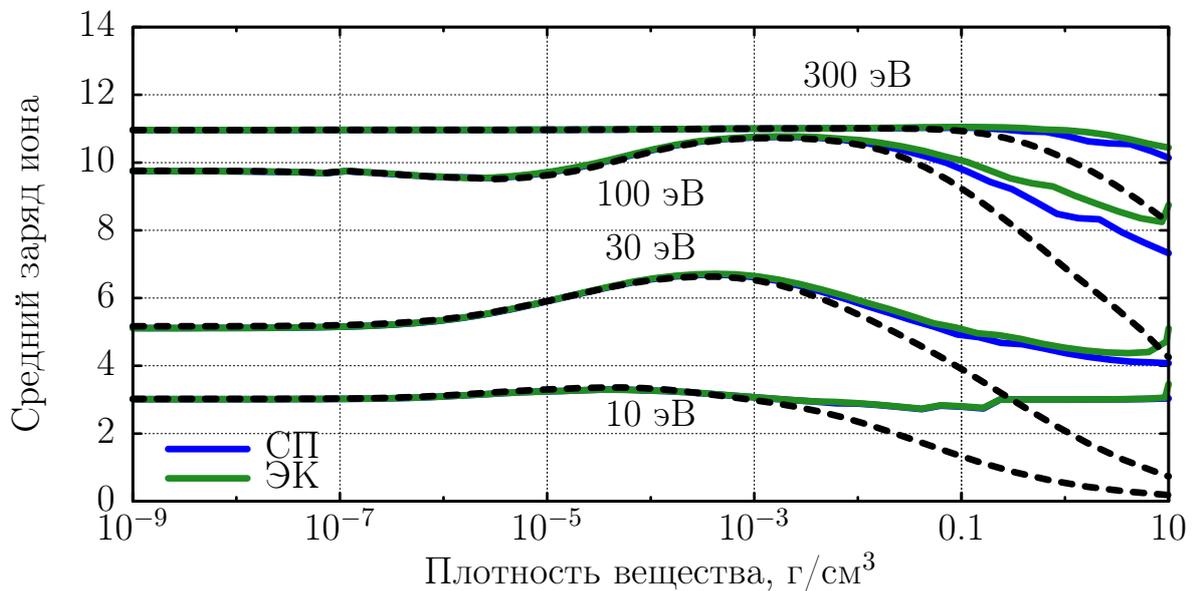


Рис. 2. Изотермы среднего заряда в плазме алюминия, рассчитанные в приближении прозрачной плазмы с помощью программы THERMOS_CRE с учётом снижения потенциалов ионизации по моделям СП (синяя кривая) и ЭК (зелёная кривая), а также без учёта плотностных эффектов (пунктирная кривая)

На рис. 3 представлены изохоры среднего заряда в плазме железа при плотности электронов $n_e = 10^{24}$ см⁻³, где синей кривой показаны результаты расчётов по программе THERMOS_CRE с моделью СП для снижения потенциалов ионизации, красной кривой соответствуют результаты расчётов по программе THERMOS_HFS, а серые кривые демонстрируют результаты других кодов-участников семинара. Приведённые результаты по обоим программам хорошо согласуются с данными других участников семинара.

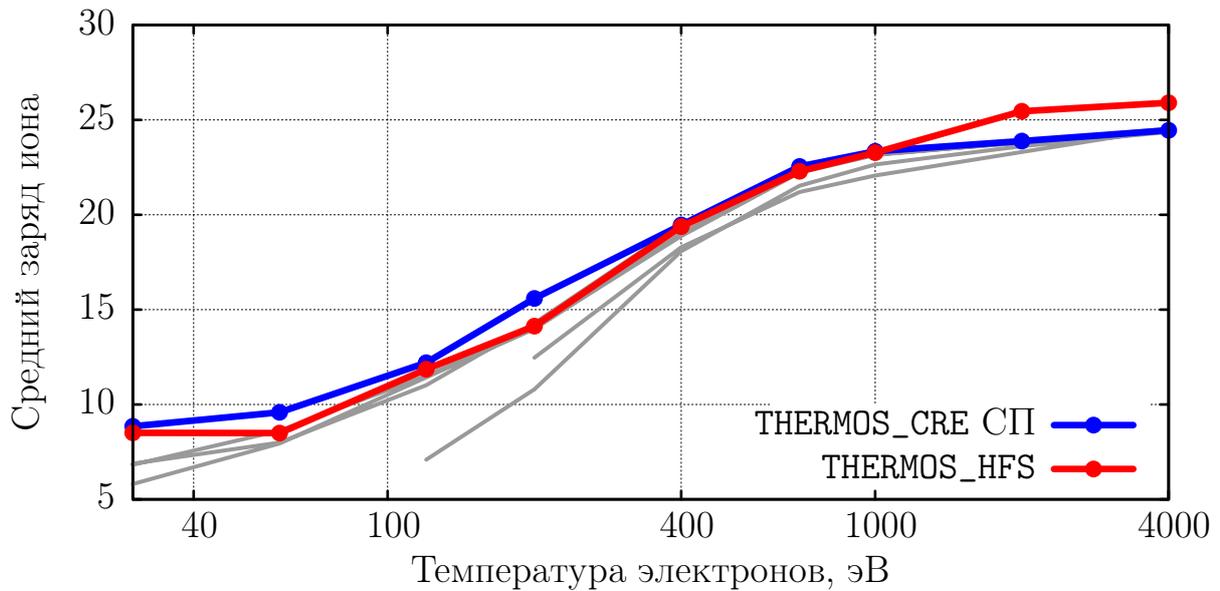


Рис. 3. Изохоры среднего заряда в плазме железа при плотности электронов $n_e = 10^{24} \text{ см}^{-3}$. Серыми кривыми приведены результаты других кодов-участников семинара

Влияние присутствия горячих электронов исследовано на примере плазмы ванадия – одного из случаев, предложенных организаторами семинара по сравнению кодов³².

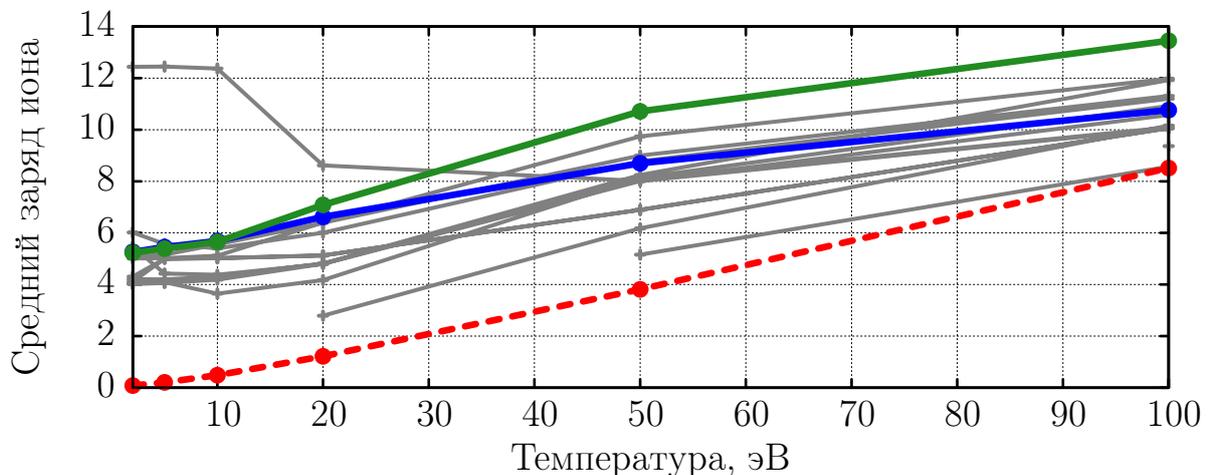


Рис. 4. Зависимость среднего заряда иона в плазме ванадия от температуры при фиксированной ионной плотности $n_i = 5 \times 10^{22} \text{ см}^{-3}$ и с 10% горячих электронов $T_h = 10 \text{ кэВ}$ без учёта плотностных эффектов (красная кривая) и с учётом снижения потенциалов ионизации по моделям СП (синяя кривая) и ЭК (зелёная кривая). Серыми кривыми приведены результаты других кодов-участников семинара

В результате проведённого сравнительного анализа (см. рис. 4), а также принимая во внимание, что участники семинара предоставили результаты

³² Ralchenko Y. The 11th NLTE Code Comparison Workshop. 2019. URL:<http://nlte.nist.gov/NLTE11/>.

расчётов без учёта плотностных эффектов и с их учётом по различным моделям для снижения потенциалов ионизации, в том числе моделям СП и ЭК, можно сделать вывод, что результаты расчётов по программе THERMOS_CRE лежат в пределах погрешности используемых приближений.

Верификация разработанного модуля THERMOS_Layer, в котором решение уравнения переноса излучения в одномерной геометрии находится согласованно с решением системы кинетических уравнений в стационарном приближении столкновительно-излучательного равновесия, проведена путём сравнения результатов расчётов с аналитическими решениями для предельных случаев оптически плотной и прозрачной плазмы.

Выполнено моделирование спектра прохождения мягкого рентгеновского излучения через слой фотоионизированной кремниевой плазмы, и проведён сравнительный анализ с экспериментальными измерениями³³ (см. рис. 5). Расчёты проведены в двух вариантах постановки задачи – “однослойной” и “многослойной”. Постановка задачи в случае “многослойного” варианта заключается в том, что слой плазмы заданной толщиной L разбивается на некоторое количество подслоёв. В каждом подслое плотность вещества и температура остаются фиксированными, при этом плотность энергии излучения предполагается постоянной внутри каждого подслоя, но в отличие от плотности и температуры в процессе итераций согласования поля излучения и радиационных характеристик она может изменяться от слоя к слою.

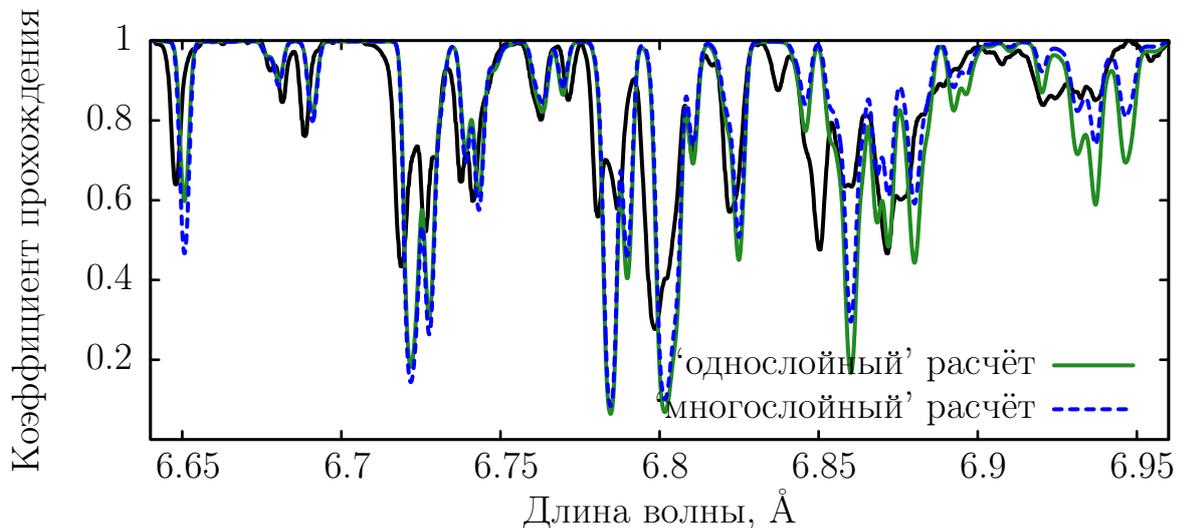


Рис. 5. Спектр прохождения мягкого рентгеновского излучения через слой кремниевой плазмы толщиной $L = 0,35$ см при $T_e = 30$ эВ, $n_e = 10^{19}$ см⁻³ и планковского поля излучения с коэффициентом ослабления $K = 0,1$ и температурой излучения $T_{rad} = 63$ эВ в сравнении с экспериментальными данными. В “многослойном” варианте расчёта задавалась ионная плотность $n_i = 8,5 \times 10^{17}$ см⁻³

³³ Hansen S.B., Chung H.K., Fontes C.J. et al. Review of the 10th Non-LTE code comparison workshop // High Energy Density Physics. Vol. 35. Elsevier B.V., 2020. P. 100693.

В случае “многослойного” варианта расчёта заметны небольшие отклонения спектра от “однослойного” расчёта, что вызвано перераспределением вклада от ионов различной кратности с каждого из подслоёв. Отклонения в положениях и силах отдельных спектральных линий от экспериментально измеренных объясняются использованием в комплексе программ THERMOS нерелятивистских конфигураций при решении кинетической системы. Отличие рассчитанного спектра прохождения от экспериментально измеренного также связано с рассмотрением полностью однородного по температуре и плотности слоя плазмы, что сложно реализуемо в лабораторных условиях.

Результаты третьей главы опубликованы в работах [7, 13, 16, 19].

В заключении сформулированы основные результаты диссертационной работы.

Основные результаты

В ходе выполнения диссертационной работы получены следующие результаты:

1. Сформулирована усовершенствованная модель столкновительно-излучательного равновесия для расчёта термодинамических и радиационных свойств плазмы с произвольным полем излучения и возможностью учёта эффектов плотности по моделям снижения потенциалов ионизации Стюарта-Пьятта и Экера-Кролла, и учёта относительно малой доли горячих электронов с температурой много больше, чем температура плазмы. На основе построенной модели разработана программа THERMOS_CRE.

Программа рекомендуется к применению в случаях, когда требуются широкодиапазонные таблицы по радиационным и термодинамическим свойствам веществ в условиях локального термодинамического равновесия или с произвольным полем излучения. Для ускорения расчёта таблиц реализован параллельный запуск задач на ЭВМ для фиксированных точек по температуре и плотности с помощью отдельных MPI-процессов. В настоящее время результаты, полученные по разработанной программе THERMOS_CRE, активно используются при решении практических задач радиационной газовой динамики и физики плазмы^{23,25,26,27}.

2. Получены согласованные решения уравнения переноса излучения с системой кинетических уравнений в стационарном приближении столкновительно-излучательного равновесия для одномерных модельных систем различного типа симметрии – плоской, цилиндрической, сферической. На основе полученных решений разработан программный модуль THERMOS_Layer, позволяющий рассчитывать свойства плазмы с учётом эффектов непрозрачности при конечных размерах. Расчёт возможен не только в последовательном, но и в параллельном режиме. Вычисление радиационных характеристик

плазмы на подслоях производится посредством запуска отдельных MPI-процессов, при этом плотность энергии излучения и поток рассчитываются на мастер-процессоре. С помощью итерационного процесса проводится поиск согласованного решения, а итерации продолжаются до тех пор, пока не будет достигнута сходимость по величине радиационных потерь.

3. Разработаны алгоритмы для расчёта оптических и термодинамических характеристик веществ в рамках усовершенствованной модели столкновительно-излучательного равновесия с произвольным полем излучения, а также алгоритм согласования с кинетикой решений уравнения переноса излучения в одномерной геометрии для модельных систем различного типа симметрии.

4. Проведено исследование моделей и верификация разработанных программ THERMOS_CRE и THERMOS_Layer путём сравнительного анализа полученных результатов с экспериментальными данными, с аналитическими решениями и с результатами других программ, участвующих в международных семинарах по сравнению неравновесных кодов. Проведённая верификация подтвердила высокое качественное и количественное совпадение результатов.

Программы THERMOS_CRE и THERMOS_Layer вошли в состав вычислительного комплекса программ THERMOS, разрабатываемого в ИПМ им. М.В. Келдыша РАН.

Результаты проведённых исследований показали, что усовершенствованная модель столкновительно-излучательного равновесия и программы, разработанные на её основе, позволяют с хорошей точностью моделировать радиационные свойства плазмы не только в условиях локального термодинамического равновесия, но и произвольного поля излучения. При этом область применимости лежит в диапазоне от 10^{-9} до 10^4 г/см³ для плотности вещества и в диапазоне от 10^{-3} до 10 кэВ для электронной температуры.

В заключении стоит отметить, что все поставленные диссертантом задачи решены в процессе проведения исследования: выполнено развитие математических моделей, проведена разработка методов и алгоритмов и осуществлена их реализация на языке программирования FORTRAN в виде конкретных компьютерных программ – THERMOS_CRE и THERMOS_Layer, которые позволяют выполнять серийные расчёты термодинамических и радиационных свойств излучающей плазмы с учётом эффектов неравновесности на современных высокопроизводительных ЭВМ с параллельной архитектурой. Таким образом, достигнута поставленная цель диссертационной работы.

В качестве перспективы для дальнейшего развития комплекса программ THERMOS стоит рассмотреть возможность использования более точных приближений для расчёта скоростей процессов – например, приближение искажён-

ных волн^{34,35,36,37} для скоростей столкновительных процессов или использование заранее рассчитанных сечений процессов с помощью сторонних кодов атомной физики – например, кода FAC³⁸.

Список публикаций

1. Вичев И.Ю., Новиков В.Г., Соломянная А.Д. Моделирование спектров излучения плазмы вольфрама // *Матем. моделирование*. 2008. Т. 20, № 7. С. 93–106. *Math. Models Comput. Simul.*, 1:4 (2009), 470–481.
2. Болховитинов Е.А., Волков Г.С., Вичев И.Ю. и др. Исследования спектров излучения быстрых Z-пинчей, образующихся при сжатии многопроволочныхборок на установке Ангара-5-1 // *Физика плазмы*. 2012. Т. 38, № 10. С. 894–902. *Plasma Phys. Rep.*, 38:10 (2012), 824–832.
3. Болдарев А.С., Болховитинов Е.А., Вичев И.Ю. и др. Методы и результаты исследований спектров излучения мегаамперных Z-пинчей на установке Ангара-5-1 // *Физика плазмы*. 2015. Т. 41, № 2. С. 195–199. *Plasma Phys. Rep.*, 41:2 (2015), 178–181.
4. Ольховская О.Г., Гасилов В.А., Баско М.М. и др. О расчётах выходной мощности и спектра рентгеновского излучения Z-пинчей на основе многопроволочныхборок // *Матем. моделирование*. 2016. Т. 28, № 1. С. 3–22. *Math. Models Comput. Simul.*, 8:4 (2016), 422–437.
5. Абраменко Д.Б., Анциферов П.С., Астахов Д.И. и др. Плазменные источники экстремального ультрафиолетового излучения для литографии и сопутствующих технологических процессов (к 50-летию Института спектроскопии РАН) // *Усп. физ. наук*. 2019. Т. 189, № 3. С. 323–334. *Phys. Usp.*, 62:3 (2019), 304–314.
6. Romanov I.V., Tsygvintsev I.P., Kologrivov A.A. et al. Study of the possibility for increasing the emission of soft x-rays from the plasma of a low-energy vacuum discharge triggered by a laser // *Plasma Physics and Controlled Fusion*. 2019. Vol. 61, no. 9. P. 095011.
7. Vichev I.Yu., Solomyannaya A.D., Grushin A.S., Kim D.A. On certain aspects of the THERMOS toolkit for modeling experiments // *High Energy Density Physics*. 2019. P. 100713.

³⁴ Мотт Н., Месси Г. Теория атомных столкновений. М.: Издательство иностранной литературы, 1951.

³⁵ Вайнштейн Л.А., Собельман И.И., Юков Е.А. Возбуждение атомов и уширение спектральных линий. М.: Наука, 1979.

³⁶ Younger S.M. Distorted-wave electron-impact-ionization cross sections for highly ionized neonlike atoms // *Physical Review A*. 1981. Vol. 23, no. 3. P. 1138–1146.

³⁷ Younger S.M. Electron impact ionization cross sections and rates for highly ionized atoms // *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*. 1981. Vol. 26, no. 4. P. 329–337.

³⁸ Gu M.F. The flexible atomic code // *Canadian Journal of Physics*. 2008. Vol. 86, no 5. P. 675–689.

8. Вергунова Г.А., Гуськов С.Ю., Вичев И.Ю. и др. Особенности генерации лазерно-индуцированного рентгеновского излучения и его воздействия на вещество применительно к задачам лазерного термоядерного синтеза // *ЖЭТФ*. 2022. Т. 161, № 6. С. 887–896. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 134:6 (2022), 754–761.
9. Novikov V.G., Vichev I.Y., Solomyannaya A.D. Calculation of tungsten emission spectra for mega ampere Z-pinch // *Proceedings of 16th IEEE International Pulsed Power Conference*. New Mexico, Albuquerque: 2007. P. 1785–1788.
10. Zaytsev V.I., Novikov V.G., Volkov G.S., et al. *Study of the X-ray spectrum of the heavy-ion Z-pinch* // 35th EPS Conference on Plasma Physics. Vol. 32D. Hersonissos: 2008. URL: http://ocs.ciemat.es/EPS2008/pdf/P1_125.pdf.
11. Gasilov V.A, Olkhovskaya O.G., Boldarev A.S. et al. *3D MHD simulation of wire-array Z-pinch implosion under the action of high current pulse* // 2014 International Conference on Computer Technologies in Physical and Engineering Applications (ICCTPEA). 2014. P. 52–53.
12. Olkhovskaya O.G., Basko M.M., Sasorov P.V. et al. Radiative power and x-ray spectrum numerical estimations for wire array Z-pinch // *Journal of Physics: Conference Series*. 2015. Vol. 653, no. 1. P. 012148.
13. Соломянная А.Д., Вичев И.Ю. Сравнение и анализ спектров плазмы железа (по материалам семинара NLTE9) // *Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша*. 2016. № 123. С. 20.
14. Вичев И.Ю., Грушин А.С., Цыгвинцев И.П. и др. О нахождении параметров плазмы по интегральному спектру // *Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша*. 2017. № 2. С. 20.
15. Соломянная А.Д., Вичев И.Ю., Ким Д.А. Метод вычисления ионного уширения в неравновесной плазме // *Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша*. 2017. № 121. С. 20.
16. Вичев И.Ю., Ким Д.А., Соломянная А.Д., Грушин А.С. THERMOS: Согласованное решение уравнения переноса излучения с поуровневой кинетикой в простейших геометриях // *Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша*. 2020. № 56. С. 30.
17. Грушин А.С., Вичев И.Ю., Ким Д.А., Соломянная А.Д. Методы приближённого учёта неравновесности поля излучения при моделировании свойств плазмы // *Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша*. 2022. № 10. С. 22.
18. Вичев И.Ю. Столкновительно-излучательная модель неравновесной плазмы с произвольным полем излучения // *Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша*. 2022. № 18. С. 31.
19. Вичев И.Ю. Моделирование сильно фотоионизированной плазмы кремния // *Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша*. 2022. № 45. С. 15.

20. Вичев И.Ю., Грушин А.С., Новиков В.Г., Соломянная А.Д. KIAM_DB: база атомных данных для расчётов спектральных свойств плазмы. ИПМ им. М.В. Келдыша, 2016. URL: <http://keldysh.ru/e-biblio/vichev>.
21. Новиков В.Г., Соломянная А.Д., Вичев И.Ю., Грушин А.С. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ “THERMOS: Библиотека функций для расчета радиационных и термодинамических свойств различных веществ и смесей в широкой области температур и плотностей” №2013614395 от 03.07.2013. Правообладатель: ФГБУН ИПМ им. М.В. Келдыша РАН.
22. Соломянная А.Д., Вичев И.Ю., Грушин А.С., Ким Д.А. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ “Программный модуль THERMOS_CRE для расчёта радиационных и термодинамических свойств веществ в стационарном приближении столкновительно-излучательного равновесия с произвольным полем излучения” №2022610462 от 12.01.2022. Правообладатель: ФГУ “ФИЦ ИПМ им. М.В. Келдыша РАН”.
23. Соломянная А.Д., Вичев И.Ю., Грушин А.С., Ким Д.А. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ “Программный модуль THERMOS_Layer для расчёта свойств плазмы с учётом эффектов непрозрачности при конечных размерах” №2022610808 от 17.01.2022. Правообладатель: ФГУ “ФИЦ ИПМ им. М.В. Келдыша РАН”.

Научное издание

Вичев Илья Юрьевич

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук на тему:

Моделирование плазмы в столкновительно-излучательном равновесии

Подписано в печать XX.XX.XXX. Формат 60 × 84 1/16. Тираж XX экз. Заказ XXX.

ИПМ им. М. В. Келдыша РАН 125047, Москва, Миусская пл., 4, <http://keldysh.ru>