

Федеральное государственное учреждение
«Федеральный исследовательский центр
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша
Российской академии наук»

На правах рукописи

Родионов Павел Вадимович

**Численное моделирование турбулентных течений
для авиационных приложений с применением
криволинейных реконструкций в призматических слоях
неструктурированных сеток**

Специальность 1.2.2 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
главный научный сотрудник
Козубская Татьяна Константиновна

Москва – 2024

Оглавление

Введение	5
Глава 1. Методика численного моделирования обтекания планера самолета.....	20
1.1 Физическая постановка.....	20
1.2 Математическая постановка.....	21
1.3 Дуальные ячейки для смешанно-элементной сетки в вершинно-центрированной формулировке	21
1.4 Реберно-ориентированные схемы.....	22
1.5 Квазиодномерные реконструкции для EBR схем. Схемы EBR3 и EBR5	23
1.6 Схема EBR-WENO5	25
1.7 Методика RANS и RANS-LES моделирования внешнего обтекания на неструктурированных сетках	26
1.7.1 Подготовка расчетной области.....	26
1.7.2 Построение неструктурированной сетки	27
1.7.3 Выбор численного метода и его параметров	29
1.7.4 Выбор параметров метода расчета акустических пульсаций в дальнем поле	30
1.7.5 Методы контроля состояния расчета.....	31
1.7.6 Получение целевых характеристик после окончания этапа установления течения ...	34
1.7.7 Повторение предыдущих шагов методики при необходимости.....	35
Глава 2. Схема EBR с криволинейными реконструкциями	36
2.1 Мотивация	36
2.2 Структурированные сетки	36
2.3 Неструктурированные призматические сетки в пограничных слоях.....	37
2.4 Неструктурированные смешанно-элементные сетки.....	39
Глава 3. Реализация схемы EBR PL в программном комплексе NOISEtte.....	41
3.1 Общая структура модуля	41
3.2 Алгоритм инициализации призматических слоев.....	42
3.3 Алгоритм поиска точек криволинейной реконструкции.....	43

Глава 4. Тестирование разработанного метода на модельных задачах	45
4.1 Распространение акустической волны в бесконечном цилиндрическом канале при наличии вязкости и теплопроводности.....	45
4.1.1 Мотивация	45
4.1.2 Математическая постановка	45
4.1.3 Вычислительная постановка.....	46
4.1.4 Численные результаты	49
4.2 Обтекание сегмента с профилем NASA 0012	54
4.2.1 Физическая постановка	54
4.2.2 Вычислительная постановка.....	54
4.2.3 Численные результаты на подробных сетках	57
4.2.4 Численные результаты на грубых сетках	58
4.3 Обтекание винта вертолета на режиме висения	64
4.3.1 Физическая постановка	64
4.3.2 Вычислительная постановка.....	64
4.3.3 Численные результаты	66
4.4 Обтекание геометрии NASA CRM-HL.....	72
4.4.1 Физическая постановка	72
4.4.2 Вычислительная постановка.....	73
4.4.3 Численные результаты	75
4.5 Обтекание треугольного крыла.....	81
4.5.1 Физическая постановка	81
4.5.2 Вычислительная постановка.....	81
4.5.3 Численные результаты	83
Глава 5. Моделирование шума крыла прототипа сверхзвукового пассажирского самолета на режиме посадки	91
5.1 Введение.....	91
5.2 Физическая постановка.....	92

5.3 Вычислительная постановка	92
5.4 Аэродинамика	97
5.5 Акустика в ближнем поле.....	99
5.6 Акустика в дальнем поле	103
Заключение.....	108
Список сокращений.....	109
Список литературы	111
Публикации автора по теме диссертации	123

Введение

Актуальность темы исследования

Постоянное увеличение числа доступных технологий в области гражданского авиастроения, включая новые материалы и средства проектирования, а также ужесточение международных экологических норм стимулирует создание новых моделей летательных аппаратов, что обуславливает необходимость решения широкого спектра задач из области аэродинамики, прочности конструкций, аэроакустики и других. Постановка аэродинамических задач связана с потребностью обеспечения и повышения безопасности полета, увеличения топливной эффективности летательного аппарата, достижения желаемых значений летно-технических характеристик (крейсерской скорости, маневренности, грузоподъемности, дальности полета и других). Решение задач аэроакустики в наибольшей степени продиктовано необходимостью удовлетворения текущим сертификационным требованиям по шуму на местности, вводимым и поддерживаемым Международной организацией гражданской авиации (ИКАО) с целью уменьшения шумового загрязнения вблизи аэропортов. Другим немаловажным стимулом к решению аэроакустических задач является желание увеличить комфорт пассажиров.

Разработка планера самолета со всеми его конструктивными элементами, такими как органы механизации крыла, его законцовки, обтекатели и пилоны, под требуемые диапазоны значений аэродинамических, прочностных и акустических характеристик имеет важнейшее значение при проектировании общей конструкции самолета. Основными источниками информации об аэродинамических и акустических характеристиках планера служат летный эксперимент, эксперимент в аэродинамической трубе и численное моделирование, причем каждый из них обладает своими преимуществами и недостатками.

К преимуществам летного эксперимента следует отнести высокий уровень достоверности получаемых результатов и возможность проведения измерений в условиях реального полета, к недостаткам – высокую стоимость проведения испытаний, в которую частично или полностью входит изготовление и обслуживание полноразмерного летательного аппарата, значительную ограниченность в возможностях внесения изменений в изучаемую конфигурацию, ограниченность пространственного расположения датчиков, влияние погодных условий и трудности при определении вклада отдельного элемента компоновки в итоговые результаты измерений.

Проведение испытаний в аэродинамической трубе в большинстве случаев подразумевает использование уменьшенных версий изучаемой геометрии, что оказывает влияние на свойства получаемого турбулентного течения, а, следовательно, приводит к некоторому изменению значений аэродинамических и акустических характеристик. На свойства течения также влияют

стенки канала или стенки специальной камеры, в которой может быть расположен исследуемый объект. Для устранения указанных эффектов применяют различные приемы: производят корректировку полученных данных при помощи специальных экспериментальных методик, используют полуэмпирические методы пересчета на натурные числа Рейнольдса, покрывают стенки камер, в которых производится запись акустических сигналов, звукопоглощающими материалами и конструкциями. В сравнении с летным экспериментом эксперимент в аэродинамической трубе обладает следующими преимуществами: существенно ниже стоимость проведения испытаний, включая стоимость изготовления изучаемой модели, больше возможностей по внесению изменений в форму и конфигурацию модели, что в том числе позволяет изучать характеристики отдельных ее элементов, возможность изучения обтекания на критических и закритических режимах, более широкий набор информации, которую можно извлечь из эксперимента, больший контроль за параметрами и условиями эксперимента, что приводит к более высокой степени повторяемости результатов. К недостаткам эксперимента в аэродинамической трубе можно отнести необходимость использования полуэмпирических моделей, которые не всегда обеспечивают требуемую точность и имеют ограниченную область применимости, возможную зависимость результатов эксперимента от конструкции, размеров и других параметров аэродинамической трубы, ограниченность данных, которые в принципе можно извлечь при проведении эксперимента.

В настоящее время для решения задач аэродинамики и аэроакустики также применяется численное моделирование. Данный подход является полезным дополнением к проведению экспериментальных исследований и часто используется на начальных этапах проектирования для выполнения оптимизации геометрии, изучения общего характера течения, определения множества возможных режимов обтекания и их свойств. Ввиду ограниченности вычислительных ресурсов, формулировки методов численного моделирования, как правило, содержат ряд упрощений и допущений, и потому не могут служить полноценной заменой эксперименту. Более того, при реализации или применении численных методов могут быть допущены некоторые неточности, а подчас и серьезные ошибки, что приводит к необходимости при рассмотрении каждого нового типа задач выполнения предварительного тестирования средств и методик моделирования с использованием проверочных (валидационных) экспериментальных данных. Преимуществами численного моделирования в области аэродинамики и аэроакустики в сравнении с проведением экспериментов являются относительная простота внесения существенных изменений в изучаемую геометрию и возможность получения стационарных или нестационарных (в зависимости от типа расчета) данных практически в каждой точке течения. В сравнении с экспериментом в аэродинамической трубе численное моделирование позволяет изучать обтекание геометрии в свободном потоке без необходимости использования коррекции

получаемых результатов и рассматривать полноразмерные конфигурации летательных аппаратов или элементов их конструкции. В сравнении с летным экспериментом численное моделирование обеспечивает высокую степень повторяемости результатов и дает возможность более детально изучить вклад каждого элемента конструкции в итоговые аэродинамические или акустические характеристики исследуемого объекта. К недостаткам численного моделирования относятся понижение точности получаемых результатов (включая возникновение нефизических эффектов) из-за внутренних допущений, упрощений, ограничений модели, из-за недостаточности сеточного разрешения в расчетной области и (или) дискретизации по времени, выбора некорректных значений параметров метода, необходимость сравнения с экспериментальными данными при рассмотрении каждого нового типа задач.

Численное решение авиационных задач часто требует проведения ресурсоемких суперкомпьютерных расчетов, поэтому точность, надежность и параллельная эффективность используемых численных методов, а также корректность применяемых методик моделирования приобретают ключевую роль для получения достоверных численных результатов. Исследования, описываемые в настоящей работе, учитывают данный контекст и нацелены на развитие подходов и методов численного моделирования внешних турбулентных течений применительно к задачам аэродинамики и аэроакустики.

Степень разработанности темы исследования

Так как внешнее обтекание конструктивных элементов самолета является одной из центральных тем в области авиастроения, во многих предприятиях и институтах авиационной отрасли накоплен большой опыт изучения течений данного типа, подкрепленный широким набором экспериментальных, теоретических и численных результатов. В то же время разработки самолетов, обладающих новыми формами и конфигурациями планера, по-прежнему продолжаются, что требует постоянного проведения дополнительных исследований.

Для численного моделирования обтекания элементов планера самолета существует ряд различных подходов и методов. Выбор конкретного их набора зависит от множества факторов, таких как характер целевого течения (степень нестационарности, характерное число Маха, наличие и величина разрывов, другие особенности течения), тип извлекаемых результатов (интегральные характеристики, значения газодинамических функций на обтекаемой поверхности, пульсации вблизи обтекаемой поверхности, пульсации в точках дальнего поля), требуемая точность, желаемая скорость расчета, тип используемых сеток.

Для аэродинамических задач внешнего обтекания наиболее эффективными с вычислительной точки зрения являются подходы, основанные на численном решении уравнений для потенциала течения. Точность методов данного класса может быть достаточно ограниченной

для постановок со сложной геометрией или для режимов обтекания, характеризующихся возникновением крупномасштабных вихрей, значительных зон отрыва потока, сильных скачков уплотнения [1], однако в ряде узкоспециализированных задач, в частности при изучения обтекания планера на крейсерских режимах полета, она оказывается весьма приемлемой. Высокая скорость выполнения расчетов, совмещенная с простотой параметризации и модификации геометрии, автоматизацией построения сетки и обработки результатов, встраиванием процедур оптимизации и решения обратных задач, обуславливает активное применение данных методов при аэродинамическом проектировании самолетов [1,2].

Частным случаем методов численного решения уравнений для потенциала течения являются панельные методы [3–7]. Они наименее требовательны к вычислительным ресурсам, так как используют только поверхностные сетки на обтекаемой геометрии и в следе от задних кромок, что позволяет получать результаты расчета практически мгновенно на современных персональных компьютерах. С ростом производительности компьютеров обеспечиваемая данными методами точность постепенно перестает рассматриваться как удовлетворительная, хотя они все еще применяются при проведении предварительных или начальных этапов проектирования [5,6].

Сравнительно большую точность имеют методы численного интегрирования полного уравнения для потенциала [1,2,8–10], успешно применяемые при разработке геометрии планера для крейсерского режима полета [1,2]. Отметим, что методы указанного типа позволяют получать и некоторые нестационарные характеристики, например пульсации коэффициента давления [8–9], а также допускают наличие скачков уплотнения посредством введения приближенных локальных поправок на неизэнтропичность потока [1,8,9]. Наличие пограничных слоев, как ламинарных, так и турбулентных, при использовании данных методов учитывается при помощи итераций вязко-невязкого взаимодействия в рамках теории пограничного слоя [1,2,8]. Соответствующее время расчета на персональном компьютере составляет порядка одной минуты или менее [1,2]. Замена в невязкой области решения полного уравнения для потенциала на решение уравнений Эйлера приводит к дополнительному повышению точности метода и увеличению времени счета приблизительно на порядок [8].

При всех достоинствах быстрых методов, основанных на численном решении полного уравнения для потенциала или уравнений Эйлера с использованием итераций вязко-невязкого взаимодействия для моделирования пограничных слоев, в некоторых случаях, например в области сочленения крыла и фюзеляжа или при общей сложности конфигурации обтекаемой геометрии [1], их точности оказывается недостаточно для корректного воспроизведения деталей целевого течения. Более универсальным и более надежным подходом к моделированию турбулентных течений, широко применяемым в настоящее время при решении промышленных,

и в том числе аэродинамических, задач является численное решение осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса (RANS). В рамках данного подхода турбулентность среды моделируются во всей расчетной области при помощи введения в разрешаемую систему дополнительных переменных и уравнений, определяемых конкретной моделью турбулентности. Наибольшее распространение в настоящий момент имеют модели турбулентности Спаларта–Аллараса (SA) [11] и $k-\omega$ SST Ментера [12]. Часто RANS моделирование используется для получения стационарного течения, хотя в общем случае RANS уравнения допускают существование крупномасштабной нестационарности в решении (Unsteady RANS, URANS). В сравнении с быстрыми методами расчета, описанными выше, RANS расчеты оказываются существенно более ресурсоемкими и потому, как правило, не применяются на ранних этапах аэродинамического проектирования [1].

RANS подход основан на моделировании всех масштабов турбулентных пульсаций, то есть предполагает, что ни один из масштабов турбулентности не может и не должен быть разрешен на расчетной сетке. Несмотря на то, что во многих практических приложениях данного предположения оказывается достаточно для корректного воспроизведения ключевых особенностей течения, существуют задачи, например в области аэроакустики, или режимы обтекания, характеризующиеся значительными зонами отрыва потока, для которых RANS моделирование неприменимо или неспособно обеспечить необходимую точность. Поскольку для высокорейнольдсовых течений использование прямого численного моделирования (DNS), при котором все масштабы турбулентности (вплоть до колмогоровского масштаба) воспроизводятся уравнениями Навье–Стокса и разрешаются на сетке, в обозримом будущем не представляется возможным из-за огромной вычислительной стоимости, при решении практических задач может быть полезным применение моделирования крупных вихрей (LES) или гибридных RANS-LES методов.

LES моделирование предполагает разрешение крупномасштабных турбулентных пульсаций и использование моделей подсеточной вязкости, интерпретирующих влияние неразрешенной мелкомасштабной турбулентности как локальное повышение вязкости среды. Необходимость разрешения значительной части инерционного интервала во всей расчетной области приводит к существенным ограничениям на локальную величину шага сетки по каждому направлению, что в совокупности с соответствующим ограничением на шаг по времени крайне затрудняет широкое применение LES моделирования в промышленных приложениях.

Как правило, на практике для проведения вихреразрешающего моделирования используются гибридные RANS-LES подходы, основанных на применении RANS моделирования вблизи обтекаемых поверхностей и LES моделирования в остальных областях [13]. Данный подход допускает использование в области пограничного слоя сеточных элементов

с очень высокой степенью анизотропии, что значительно снижает его вычислительную стоимость в сравнении с LES моделированием. Наиболее распространенным семейством гибридных RANS-LES методов, прошедшим всестороннее тестирование [14], является моделирование отсоединённых вихрей (DES) [15,16]. Одним из его современных незонных представителей, обеспечивающим сохранение RANS решения в области пограничного слоя при локальном измельчении сетки и использующим адаптацию подсеточного масштаба к слоям смещения, является моделирование отсоединённых вихрей с запаздыванием (DDES) [17,18]. Другим важным представителем семейства DES, допускающим моделирование части внешней области пограничного слоя в рамках LES подхода, является улучшенное моделирование отсоединённых вихрей с запаздыванием (IDDES) [19].

При проектировании самолета, особенно на начальных его этапах, вычислительная стоимость DES моделирования не всегда может быть оправдана. Как было отмечено выше, при проектировании аэродинамики планера даже вычислительная стоимость RANS расчетов во многих ситуациях рассматривается как чрезмерная, и они используются скорее для уточнения или подтверждения численных результатов, полученных более быстрыми методами. В области аэроакустики также существуют методы [20–23], значительно менее ресурсоемкие в сравнении с DES моделированием, основанные на использовании RANS решений в качестве средних полей течения, моделей акустических источников (SDF [23,24], fRPM (fast Random Particle Mesh Method) [25,26], SNGR (Stochastic Noise Generation and Radiation) [27,21], ...) и уравнений распространения акустических возмущений (линеаризованные уравнения Эйлера [27,21], NLDE (Non-Linear Disturbances Equations) [28], APE (Acoustic Perturbation Equations) [29,21,22], ...). Несмотря на то, что данные методы не всегда способны обеспечить высокую точность результатов, они являются весьма полезными на начальных этапах авиационного проектирования. Еще более быстрым способом оценить акустические характеристики разрабатываемых конструкций, практически не требующим вычислительных ресурсов, является использование полуэмпирических моделей, основанных на обобщении экспериментальных данных и применении теоретических закономерностей [30,31,23].

Вообще говоря, DES моделирование позволяет получать пульсации среды в любой точке пространства, однако на практике для областей, находящихся на значительном расстоянии от источников акустических возмущений, это оказывается фактически невозможно по следующим причинам. Во-первых, на всей дистанции от акустических источников до удаленных точек необходимо будет поддерживать высокое сеточное разрешение, которое позволит разрешать все целевые частоты распространяющихся возмущений, что приведет к чрезмерному расходу вычислительных ресурсов. Во-вторых, диссипативные свойства используемой численной схемы будут приводить к постепенному уменьшению амплитуды сигнала по мере его движения к

удаленным точкам. Для обхода указанных проблем применяются интегральные методы, которые позволяют произвести расчет шума в точках дальнего поля при помощи вычисления специального интеграла по замкнутой поверхности, расположенной в ближнем поле в области исключительно акустических возмущений. Под дальним полем здесь подразумевается множество точек пространства, расположенных от обтекаемой геометрии и акустических источников на расстоянии, большем нескольких длин волн самой низкочастотной гармоники, входящей в область интереса в рассматриваемой задаче, под ближним полем подразумевается множество всех остальных точек пространства. К методам данного типа относятся метод Кирхгофа [32,33] и получивший наибольшее распространение метод Ффокса Уильямса – Хокингса (FWH) [34], основанный на акустической аналогии Лайтхилла [35,36]. Стоит отметить, что для расчета шума в дальнем поле могут применяться и другие подходы, например методы, основанные на акустической аналогии Голдстейна [37,38].

В области методов численного решения уравнений газовой динамики в настоящее время активное развитие получают методы высокого порядка точности (третьего порядка и выше), к которым относятся разрывный метод Галёркина (DG), полиномиальные конечно-объемные и спектральные схемы. При использовании DNS или LES моделирования на неструктурированных сетках для нестационарных течений без разрывов методы высокого порядка позволяют получить более точные результаты в сравнении с широко распространенными схемами второго порядка при сопоставимых вычислительных затратах. Однако для промышленных приложений, характеризующихся негладкими решениями, преимущества методов высокого порядка перед схемами второго порядка менее очевидны. Разрывность указанных решений может возникать из-за наличия ударных волн, негладкости обтекаемой геометрии или ввиду использования RANS или гибридных RANS-LES подходов (см. Заключение в [39]).

На ударных волнах схемы, обладающие свойством TVD (Total Variation Diminishing), дают удовлетворительные с практической точки зрения результаты, и использование методов высокого порядка не приводит к их улучшению. Причем достижение монотонности на разрывах с сохранением высокой точности в остальной вычислительной области является для методов высокого порядка достаточно затруднительным. Если при моделировании ошибка, возникающая вблизи разрывов, является доминирующей, то значительные вычислительные затраты, необходимые для выполнения аппроксимаций с высоким порядком и работы соответствующих ограничителей (limiters), становятся необоснованными.

В целом, схемы WENO (Weighted Essentially Non-Oscillatory) позволяют достаточно успешно моделировать течения с разрывами [40–44]. Однако сравнение WENO и TVD схем на задаче двойного маховского отражения (double Mach reflection problem), представленное в [45], показало, что WENO схема дает более точные результаты при фиксировании числа степеней

свободы сетки, но менее точные результаты при фиксировании времени расчета. Указанное сравнение проводилось на декартовых сетках. На неструктурированных сетках вычислительные затраты конечно-объемных WENO схем становятся еще более высокими сравнении с TVD схемами. Значительные успехи в разработке WENO схем повысили их применимость для промышленно-ориентированного RANS моделирования [46,47], однако они все еще достаточно чувствительны к качеству сетки [46]. Таким образом, для определенных классов задач методы второго порядка точности все еще востребованы и актуальны.

Для задач с гладкими решениями разрывный метод Галёркина сочетает в себе положительные свойства конечно-объемного и конечно-элементного подходов. Например, от конечно-элементного подхода он наследует теоретически доказуемую устойчивость для линейных уравнений на неструктурированных сетках. Стоит отметить, что достаточно долго не существовало надежных и точных ограничителей для решения задач с ударными волнами при помощи DG схем, основанных на полиномах второго порядка и выше. В данный момент наиболее современные ограничители [48–54] дают возможность DG схемам воспроизводить разрывные решения с качеством, близким к конечно-объемным WENO схемам, однако процесс разработки указанных ограничителей еще не завершен. Другим недостатком DG схем являются трудности с использованием неявного интегрирования по времени. Высокие требования к памяти наряду с высокими вычислительными затратами приводят к повсеместному использованию явных методов, основанных на псевдошагах по времени (pseudo time-stepping) [55], что может быть ограничивающим фактором для задач, при решении которых предпочтительны большие числа Куранта (CFL).

В настоящей работе для разработки метода, пригодного для решения широкого спектра прикладных задач, допускающего корректное моделирование разрывных течений и характеризующегося низкими вычислительными затратами, рассматриваются вершинно-центрированные реберно-ориентированные схемы в классе конечно-объемных методов второго порядка точности на неструктурированных сетках. Наиболее известными примерами таких схем являются схема Барта (T. Barth) [56], метод коррекции потоков (Flux Correction) [57–61] и схемы EBR (Edge-Based Reconstruction) [62–68], основанные на квазиодномерных реконструкциях. Настоящая работа посвящена развитию последнего подхода.

Основной особенностью EBR схем является использование квазиодномерных реберно-ориентированных реконструкций для аппроксимации конвективных потоков. Для вычисления потоков в центре ребра применяются значения в вершинах ребра и в точках, расположенных на пересечениях линии, содержащей данное ребро, с соседними гранями сетки. Значения переменных в указанных точках определяются при помощи линейной интерполяции по соответствующим граням.

Данные схемы были предложены в 90-х годах [62–64] и с того времени активно развиваются [65–68]. Идея квазиодномерных реберно-ориентированных реконструкций впервые сформулирована в работе [62], где для вычисления потока в средней точке ребра использовались его вершины и две дополнительные точки. Позже в [63] было предложено расширить квазиодномерный шаблон с целью увеличения точности схемы благодаря вычислению градиентов на тетраэдральных элементах и в узлах сетки; полученные схемы были названы LV5/6 и NLV5/6 в зависимости от типа реконструируемых переменных. Расширение шаблона позволило улучшить диссипативные и дисперсионные свойства метода на неструктурированных тетраэдральных сетках. В работе [67] были представлены упрощенные схемы EBR (SEBR), а в [68] предложена схема EBR-WENO, являющаяся квазиодномерной версией классической разностной схемы WENO [69].

Квазиодномерные реконструкции обеспечивают высокий порядок точности схем EBR на трансляционно-инвариантных (ТИ) сетках (т.е. сетках, инвариантных к сдвигу на любое сеточное ребро). На произвольной симплицальной сетке EBR схемы являются точными для линейных функций [70], и на практике демонстрируют второй порядок точности. Низкий уровень численной диссипации и дисперсии, а также низкие вычислительные затраты и дополнительное повышение точности на ТИ сетках обуславливают востребованность и конкурентоспособность EBR схем в классе конечно-объемных схем второго порядка, что является причиной их продолжающейся разработки.

Промышленные задачи, характеризующиеся высокими числами Рейнольдса, к которым относится и обтекание элементов планера самолета, часто требуют высокой точности моделирования ламинарного и турбулентного пограничных слоев вблизи обтекаемых тел. Течение в этих областях характеризуется большими значениями градиентов скорости в нормальном относительно обтекаемой геометрии направлении и, следовательно, требует очень подробного сеточного разрешения в данном направлении для получения корректных численных результатов. Поскольку в тангенциальных направлениях поля течения меняются относительно медленно, указанное требование приводит к построению вблизи обтекаемых тел сильно анизотропных сеточных элементов, которые образуют структурированные или неструктурированные призматические слои в областях пограничных слоев.

При использовании EBR схем с *прямолинейными* квазиодномерными реконструкциями на сетках, содержащих призматические слои с сильно анизотропными элементами, построенными вблизи криволинейной геометрии, неравномерность шаблона реконструкции может стать причиной понижения точности моделирования или возникновения численной неустойчивости. Чтобы устранить данные недостатки, в настоящей работе предлагается использовать *криволинейные* квазиодномерные реконструкции. Ранее в классе конечно-объемных схем для

неструктурированных сеток аналогичный подход был реализован для метода коррекции потоков [71,72].

Цель работы

Целью настоящей работы является разработка подхода к численному решению задач внешнего обтекания из области аэродинамики и аэроакустики, основанного на моделировании течения вязкого газа при помощи конечно-объемных вершинно-центрированных схем повышенной точности на неструктурированных сетках с призматическими слоями.

Задачи работы

Для достижения цели настоящей работы были поставлены и решены следующие задачи:

1. Сформулировать применительно к расчету аэродинамических и аэроакустических задач внешнего обтекания критерии выбора численной схемы и ее параметров, принципы построения расчетной сетки, методы контроля состояния расчета и методику предсказания акустического шума в дальнем поле.
2. Разработать модификацию схемы EBR, обладающую повышенной точностью и надежностью при расчетах течений вблизи тел криволинейной формы с пограничными слоями на неструктурированных сетках и допускающую эффективную программную реализацию.
3. Реализовать новую схему в программном комплексе NOISEtte [73] при условии сохранения высокой параллельной эффективности и масштабируемости кода.
4. Выполнить тестирование разработанной схемы и продемонстрировать ее преимущества в задачах распространения акустической волны в цилиндрическом канале, обтекания сегмента с аэродинамическим профилем NACA 0012 и обтекания модельного двухлопастного винта.
5. С использованием разработанной методики выполнить суперкомпьютерный вихреразрешающий расчет турбулентного течения вблизи крыла прототипа сверхзвукового пассажирского самолета на режиме посадки и получить оценки спектральных характеристик производимого им шума.

Методы исследования

Основным инструментом исследования в настоящей работе является численное моделирование течения вязкого совершенного газа в рамках подходов RANS и DDES [17,18]. Для RANS расчетов используются модели турбулентности SA [11], SST [12] и их модификации с поправками на кривизну линий тока и вращение: SA RC [74], SST RC [75], SST RC Mod [76]. Для

DDES расчетов в LES области применяется подсеточный масштаб $\Delta = \tilde{\Delta}_o$ [17] и подсеточная LES модель σ [77], в RANS области используется модель турбулентности SA. Для аппроксимации конвективных слагаемых уравнений течения среды применяются конечно-объемные вершинно-центрированные схемы семейства EBR [67,68] с определением потока по методу Poy [78], для аппроксимации вязких слагаемых используется метод локальных разбиений сеточных элементов [79]. В DDES расчетах локальное соотношение центрально-разностной и диссипативной компонент схемы EBR определяется при помощи весовой функции, предложенной в работе [80], в RANS расчетах центрально-разностная и диссипативная компоненты схемы EBR имеют одинаковый вес во всей расчетной области. Для интегрирования по времени в RANS расчетах используется неявная BDF схема первого порядка (BDF1), в DDES расчетах – BDF схема второго порядка (BDF2), разрешаемые по методу Ньютона. На каждой итерации метода Ньютона система линейных алгебраических уравнений решается методом BiCGStab [81] с использованием предобуславливателя ILU0 или SGS. Все расчеты проводятся при помощи программного комплекса NOISEtte [73], написанного на C++ и допускающего работу в CPU, GPU (OpenCL) и гибридном CPU+GPU режимах с распараллеливанием по технологии MPI.

Научная новизна

Научная новизна работы заключается в следующем:

1. Разработанная методика численного решения аэродинамических и аэроакустических задач внешнего обтекания является обобщением опыта, накопленного автором при проведении крупномасштабных суперкомпьютерных расчетов авиационной направленности. *Впервые* для расчета шума в точках дальнего поля с помощью интегрального метода на основе аналогии Лайтхилла предложено использование более подробного сеточного разрешения на замыкающих акустический источник контрольных поверхностях для уменьшения эффектов, связанных с прохождением через данные поверхности нестационарных турбулентных структур.
2. Разработана *новая* схема аппроксимации конвективных слагаемых в дифференциальных уравнениях, описывающих течение сжимаемой среды. Данная схема принадлежит семейству схем с реберно-ориентированной реконструкцией, приспособлена для расчетов на неструктурированных смешанно-элементных сетках и использует в призматических сеточных слоях в тангенциальном по отношению к обтекаемому телу направлении криволинейные квазиодномерные реконструкции. Применение разработанной схемы позволяет повысить точность численных результатов в задачах внешнего обтекания, характеризующихся высокими значениями числа Рейнольдса.

3. *Впервые* в отечественной практике получены результаты вихреразрешающих суперкомпьютерных расчетов по оценке шума крыла прототипа сверхзвукового пассажирского самолета на режиме посадки.

Достоверность результатов

Достоверность численных результатов, полученных при решении задачи о распространении акустической волны в цилиндрическом канале, подтверждается сравнением с точным решением. Достоверность результатов расчетов обтекания сегмента с аэродинамическим профилем NASA 0012, модельного двухлопастного винта, треугольного крыла и модельной геометрии планера магистрального самолета в посадочной конфигурации обосновывается сравнением с доступными экспериментальными данными. О корректности моделирования аэродинамики течения вблизи крыла прототипа сверхзвукового пассажирского самолета на режиме посадки косвенно свидетельствуют представленные результаты тестирования используемых численных подходов и методов на задачах обтекания треугольного крыла и модельной геометрии планера магистрального самолета в посадочной конфигурации ввиду близости режимов обтекания.

О достоверности представленных в настоящей работе численных результатов также свидетельствует применение программного комплекса NOISEtte, прошедшего тестирование на широком наборе задач из области струйных течений [82,83], турбомашиностроения [84,85], аэродинамики и аэроакустики вертолетных винтов [86–88] и других [89,90].

Практическая значимость работы

Разработанная методика проведения аэродинамических и аэроакустических расчетов внешнего обтекания полезна для исследователей, решающих указанные задачи с использованием моделей RANS или вихреразрешающего моделирования. Она позволяет повысить надежность получаемых численных результатов и улучшить контроль за состоянием проводимых расчетов.

Разработанная схема с криволинейными реконструкциями дает возможность повысить точность численных результатов и уменьшить вероятность возникновения численных эффектов, связанных с локальной потерей устойчивости, при проведении расчетов авиационной направленности.

Полученные численные оценки шума крыла прототипа сверхзвукового пассажирского самолета на режиме посадки в точках ближнего и дальнего полей практически полезны для расчета общего шума сверхзвукового пассажирского самолета на режиме посадки. Оценки общего шума гражданского самолета важны для проверки соответствия разрабатываемой модели летательного аппарата международным сертификационным нормам.

Положения, выносимые на защиту

1. Методика численного решения аэродинамических и аэроакустических задач внешнего обтекания, включающая критерии выбора численной схемы и ее параметров, принципы построения расчетной сетки, методы контроля состояния расчета и методику предсказания акустического шума в дальнем поле.
2. Новая схема аппроксимации конвективных слагаемых в дифференциальных уравнениях, описывающих течение сжимаемой среды, принадлежащая семейству EBR и основанная на использовании криволинейных квазиодномерных реконструкций для расчета потоков в тангенциальных по отношению к обтекаемому телу направлениях в призматических слоях неструктурированных смешанно-элементных сеток.
3. Программная реализация разработанной схемы EBR с криволинейными реконструкциями в программном комплексе NOISEtte.
4. Результаты тестирования разработанной схемы на задачах распространения акустической волны в цилиндрическом канале, обтекания сегмента с профилем NACA 0012 и обтекания модельного двухлопастного винта.
5. Результаты вихреразрешающих суперкомпьютерных расчетов шума крыла прототипа сверхзвукового пассажирского самолета на режиме посадки, включающие оценки спектральных характеристик шума крыла в точках ближнего и дальнего полей.

Апробация результатов

Основные результаты диссертационной работы были доложены на следующих конференциях:

1. XVIII научно-техническая конференция по аэроакустике (2019, г. Звенигород)
2. 14th WCCM-ECCOMAS Congress 2020 (2021, виртуальная конференция)
3. Всероссийский аэроакустический форум (2021, г. Геленджик)
4. XXXII научно-техническая конференция по аэродинамике (2021, г. Ногинск)
5. IX российская конференция «Вычислительный эксперимент в аэроакустике и аэродинамике» (2022, г. Светлогорск)
6. XXXIII научно-техническая конференция по аэродинамике (2022, п. Володарского)
7. XX научно-техническая конференция по аэроакустике (2023, г. Суздаль)
8. XXXIV научно-техническая конференция по аэродинамике (2024, п. Володарского)

Публикации

Результаты проведенных исследований опубликованы в 6 научных статьях, список которых представлен в конце диссертации. Их них 4 входят в перечень ВАК, 3 индексируются в базе данных Web of Science (WoS), 5 индексируются в базе данных Scopus.

На программный модуль, реализующий схему EBR с криволинейными реконструкциями, получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2023665709 (19.07.2023).

Личный вклад автора

Формулировка методики численного решения аэродинамических и аэроакустических задач внешнего обтекания, разработка новой схемы EBR с криволинейными реконструкциями, реализация данной схемы в программном комплексе NOISEtte, проведение всех RANS и DDES расчетов и анализ соответствующих численных результатов выполнены автором лично.

Благодарности

Автор выражает благодарность д.ф.-м.н. Татьяне Константиновне Козубской за чуткое научное руководство и полезные обсуждения результатов исследований, к.ф.-м.н. Павлу Алексеевичу Бахвалову за ценные советы при проведении исследований и подготовке научных публикаций, к.ф.-м.н. Алексею Петровичу Дубеню за консультации по методам моделирования турбулентных течений и специфике проведения вихреразрешающих расчетов, к.ф.-м.н. Владимиру Георгиевичу Бобкову за консультации по методам построения расчетных сеток и специфике моделирования обтекания винта вертолета, д.ф.-м.н. Андрею Владимировичу Горобцу за обеспечение эффективной параллельной инфраструктуры кода NOISEtte и консультации по возможностям ускорения суперкомпьютерных расчетов.

Объем и структура диссертации

Диссертация состоит из введения, 5 глав, заключения, списка сокращений, списка литературы и списка публикаций автора по теме диссертации. Полный объем диссертации составляет 123 страницы, включая 66 рисунков и 12 таблиц. Список литературы содержит 120 наименований.

Поддержка работы

Диссертационная работа выполнена при поддержке Программы создания и развития научного центра мирового уровня «Сверхзвук» на 2020-2025 годы при финансовой поддержке Минобрнауки России (Соглашение от 25.04.2022 № 075-15-2022-330). Ресурсоемкие вычисления проводились с помощью гибридного суперкомпьютера K60, установленного в

Суперкомпьютерном Центре коллективного пользования ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, а также оборудования Центра коллективного пользования сверхвысокопроизводительными вычислительными ресурсами МГУ имени М.В. Ломоносова.

Глава 1. Методика численного моделирования обтекания планера самолета

1.1 Физическая постановка

Обтекание конструктивных элементов планера самолета может осуществляться в следующих постановках: обтекание в свободном потоке, при котором влияние внешних границ на характеристики течения вблизи исследуемого тела пренебрежимо мало или отсутствует, или обтекание в канале, при котором внешние границы оказывают существенное влияние на характеристики течения вблизи исследуемой геометрии. Под внешними границами будем подразумевать границы области, в которой рассматривается течение, не имеющие пересечений с обтекаемой геометрией. Обтекание в свободном потоке соответствует условиям полета и широко применяется при численном моделировании авиационных задач, так как при построении расчетной сетки внешние границы можно поставить сколь угодно далеко без необходимости обеспечения в их окрестности высокого сеточного разрешения и задать на них в расчете граничные условия, которые будут приближенно или точно воспроизводить параметры невозмущенного внешнего потока. Обтекание же планера или крыла самолета в канале в первую очередь соответствует условиям эксперимента в аэродинамической трубе. Внешние стенки канала оказывают существенное влияние на аэродинамику течения, и потому при тех же параметрах потока аэродинамические характеристики течения, полученные при обтекании в канале, будут отличаться от аэродинамических характеристик, полученных при обтекании в свободном потоке. Так как практический интерес представляют аэродинамические и акустические характеристики исследуемого объекта, соответствующие обтеканию именно в свободном потоке, данные, полученные при обтекании в аэродинамической трубе, корректируются при помощи специальных экспериментальных методик. Иногда параметры обтекания в аэродинамической трубе предоставляются и без поправок вместе с полным описанием геометрии трубы для проведения тестирования численных методов и программных комплексов в наиболее корректной постановке, однако в настоящей работе при обтекании крыльев и планеров будут использоваться только условия обтекания в свободном потоке.

К наиболее распространенным целевым характеристикам, значения которых определяются при обтекании планера самолета как в эксперименте, так и при численном моделировании, относятся коэффициенты подъемной силы, лобового сопротивления, момента тангажа, поверхностные распределения коэффициентов давления и трения, спектральные характеристики пульсаций давления в точках ближнего и дальнего полей, а также карты локализации акустических источников.

1.2 Математическая постановка

В основе RANS и DDES подходов, применяемых в настоящей работе для моделирования внешнего обтекания (с полным списком используемых RANS и DDES моделей можно ознакомиться во Введении в параграфе Методы исследования), лежат уравнения Навье–Стокса. Для сжимаемой среды данные уравнения имеют вид:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{Q}) = \nabla \cdot \mathbf{F}_v(\mathbf{Q}, \nabla \mathbf{Q}), \quad (1)$$

где

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{u} \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho \mathbf{u} \\ \rho \mathbf{u} \mathbf{u} + p \mathbf{I} \\ (E + p) \mathbf{u} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{q} \end{pmatrix},$$

ρ – плотность, $\mathbf{u}$ – вектор скорости, p – давление, $E = \rho \varepsilon + \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} / 2$ – полная энергия, ε – удельная внутренняя энергия, $\mathbf{I}$ – единичная матрица, $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор вязких напряжений, $\mathbf{q} = -k \nabla T$ – вектор теплового потока, T – температура, k – коэффициент теплопроводности. В настоящей работе для RANS моделирования используется только URANS (Unsteady RANS) постановка, для которой $\partial \mathbf{Q} / \partial t \neq 0$ (моделирование с $\partial \mathbf{Q} / \partial t \equiv 0$ не применяется).

При моделировании дозвукового внешнего обтекания допустимо использование уравнений состояния для совершенного газа:

$$p = \rho R_{\text{sp}} T, \quad \varepsilon = R_{\text{sp}} T / (\gamma - 1),$$

где для воздуха показатель адиабаты $\gamma = 1.4$ и газовая постоянная $R_{\text{sp}} = 287.05 \text{ Дж} / (\text{кг} \cdot \text{К})$.

1.3 Дуальные ячейки для смешанно-элементной сетки в вершинно-центрированной формулировке

Для численного решения систем уравнений типа (1) рассмотрим некоторую расчетную область и заполним ее неструктурированной смешанно-элементной сеткой, состоящей из треугольников и четырехугольников в 2D постановке или тетраэдров, гексаэдров, четырехугольных пирамид и треугольных призм в 3D постановке. Согласно вершинно-центрированному конечно-объемному подходу вокруг каждого узла сетки построим дуальную барицентрическую ячейку, которую в дальнейшем будем использовать при записи дискретных законов сохранения. Указанные ячейки не должны пересекаться, а их объединение должно совпадать со всей расчетной областью. Под *барицентром* сеточного элемента будем понимать точку, радиус-вектор которой равен арифметическому среднему радиус-векторов всех вершин данного элемента. Будем использовать аналогичное определение для барицентра сеточной грани.

Для построения барицентрических ячеек на 2D сетке разделим каждый треугольный и четырехугольный элемент на три и четыре части соответственно. Каждая часть разбиения должна состоять из двух треугольников, определенных сеточным узлом, серединой ребра, содержащего данный узел, и барицентром сеточного элемента. Примеры получаемых разбиений показаны на рисунке 1. Барицентрические ячейки строятся при помощи объединения всех частей разбиения, содержащих один и тот же узел. Примеры барицентрических ячеек для треугольной 2D сетки приведены на рисунке 2б.

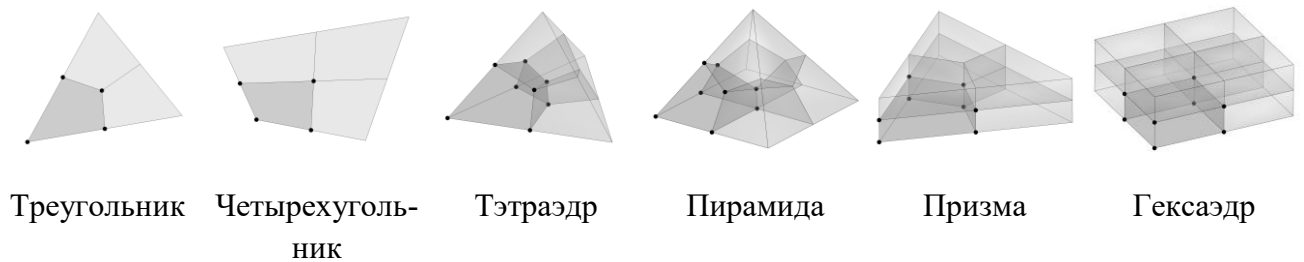


Рисунок 1. Примеры барицентрических разбиений сеточных элементов

Для построения барицентрических ячеек на 3D сетке разделим тетраэдральные, пирамидальные, призматические и гексаэдральные элементы на четыре, пять, шесть и восемь частей соответственно. Каждая часть данного разбиения состоит из тетраэдров, определенных посредством узла сетки, середины сеточного ребра, барицентра грани, для которой данное ребро является инцидентным, и барицентра сеточного элемента. Примеры таких разбиений показаны на рисунке 1. Почти все части разбиения состоят из шести тетраэдров, исключением является разбиение, соответствующее вершине пирамиды и состоящее из восьми тетраэдров. Как и в случае 2D сетки, для получения дуальных барицентрических ячеек объединим части разбиения, содержащие один и тот же сеточный узел.

Отметим, что барицентрические ячейки, построенные на треугольных или тетраэдральных сетках, иногда называют *медианными* [64–66], так как барицентр данных сеточных элементов совпадает с пересечением их медиан.

1.4 Реберно-ориентированные схемы

Пусть Q_i – вектор точечных значений консервативных переменных в сеточном узле i . Тогда конечно-объемные реберно-ориентированные схемы в полудискретной форме могут быть записаны следующим образом:

$$\frac{dQ_i}{dt} + \frac{1}{V_i} \sum_{j \in N_1(i)} F_{ij} |s_{ij}| + \frac{1}{V_i} \sum_{k \in B(i)} F_{ik}^b = D_i,$$

$$s_{ij} = \int_{\partial C_i \cap \partial C_j} n_i dS, \quad n_{ij} = s_{ij} / |s_{ij}|,$$

где C_i – дуальная ячейка, построенная вокруг узла i , V_i – объем данной ячейки, $N_1(i)$ – множество узлов, соединенных сеточным ребром с узлом i , $F_{ij} = -F_{ji}$ – аппроксимация потока $F \cdot n_{ij}$ в середине ребра ij , n_i – единичная нормаль, определенная на поверхности ∂C_i и внешняя по отношению к ячейке C_i , $B(i)$ – множество граничных граней, инцидентных узлу i , F_{ik}^b – аппроксимация потока $F \cdot n_{ik}$ через пересечение поверхности ∂C_i с граничной гранью k , D_i – аппроксимация диссипативных слагаемых в узле i , осуществляемая в настоящей работе по методу локальных разбиений сеточных элементов [79]. Отметим, что

$$\int_{\partial C_i \cap \partial C_j} dS \neq 0 \Leftrightarrow j \in N_1(i).$$

Вычисление численного потока будем проводить по методу Роу [78]

$$F_{ij} = \frac{1}{2} (F(Q_{ij}) + F(Q_{ji})) \cdot n_{ij} - \frac{\delta}{2} |A_{ij}| (Q_{ji} - Q_{ij}), \quad (2)$$

где Q_{ij} и Q_{ji} – значения консервативных переменных, реконструированные в центре ребра ij в направлениях от узла i и от узла j соответственно, A_{ij} – значение $d(F \cdot n_{ij}) / dQ$ для среднего по Роу от Q_i и Q_j , $\delta \in [0, 1]$ – вес диссипативной компоненты схемы.

1.5 Квазиодномерные реконструкции для EBR схем. Схемы EBR3 и EBR5

Рассмотрим ребро ij . Для вычисления с повышенной точностью значений Q_{ij} и Q_{ji} проведем через вершины указанного ребра прямую и определим на ней шесть точек, которые будем называть *точками реконструкции* и обозначать индексами $-2, -1, 0, 1, 2, 3$. Положение данных точек будем определять согласно следующему алгоритму [67,68], проиллюстрированному на рисунке 2:

1. Обозначим узлы i и j индексами 0 и 1 соответственно.
2. Построим множество узлов $N_1(i)$, соединенных с узлом i через некоторый сеточный элемент.

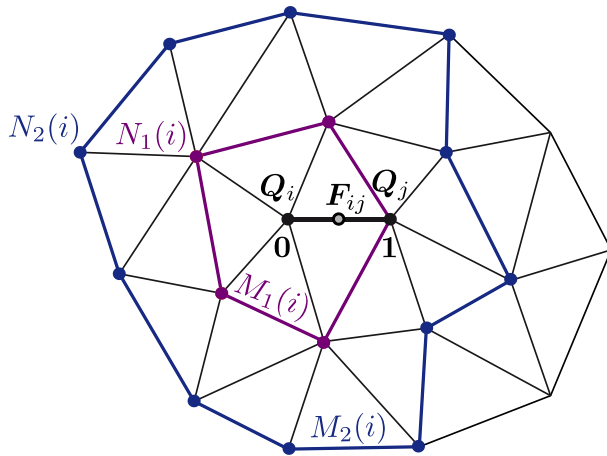
3. Построим множество узлов $N_2(i)$, соединенных через некоторый сеточный элемент хотя бы с одним узлом из множества $N_1(i)$. Исключим из множества $N_2(i)$ узел i и все узлы, принадлежащие множеству $N_1(i)$.

4. Построим множество сеточных граней $M_1(i)$ (сеточных ребер в 2D постановке), все вершины которых принадлежат множеству $N_1(i)$. Аналогичным образом построим множество $M_2(i)$.

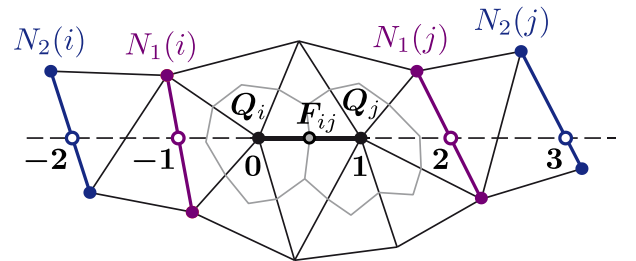
5. Найдем точку пересечения луча $\vec{ji}$, направленного от узла j к узлу i , с сеточными гранями из множества $M_1(i)$. Обозначим точку пересечения индексом -1 .

6. Найдем точки пресечения луча $\vec{ji}$ с сеточными гранями из множества $M_2(i)$. Если точка пересечения неединственна, выберем наиболее удаленную от узла i . Обозначим данную точку индексом -2 .

7. Повторим шаги 2–6 для вершины j и луча $\vec{ij}$ для получения точек с индексами 2 и 3.



а. Множества узлов $N_1(i)$, $N_2(i)$ и множества ребер $M_1(i)$, $M_2(i)$



б. Шаблон квазиодномерной реконструкции

Рисунок 2. Алгоритм построения шаблона схемы EBR5 для ребра ij на неструктурированной треугольной сетке

Вычислим значения Q_m функции Q в точках $m = -2, -1, 2, 3$ посредством линейной интерполяции по соответствующим сеточным граням (сеточным ребрам в 2D постановке). При помощи разделенных разностей

$$\Delta_m = \frac{Q_{m+1} - Q_m}{|\mathbf{r}_{m+1} - \mathbf{r}_m|},$$

где $\mathbf{r}_m$ – радиус-вектор точки реконструкции с индексом m , квазиодномерные реконструкции могут быть записаны в следующем виде:

$$Q_{ij} = Q_i + \frac{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}{2} \sum_{m=-2}^1 \xi_m \Delta_m, \quad (3)$$

где $\xi_{-2} = -1/15$, $\xi_{-1} = 11/30$, $\xi_0 = 4/5$, $\xi_1 = -1/10$ для схемы EBR5 и $\xi_{-2} = 0$, $\xi_{-1} = 1/3$, $\xi_0 = 2/3$, $\xi_1 = 0$ для схемы EBR3 с более коротким шаблоном.

Для гладких решений линеаризованных уравнений Эйлера с постоянными коэффициентами на ПТ сетках (сетках, инвариантных к сдвигу на любое сеточное ребро) схемы EBR3 и EBR5 обеспечивают третий и пятый порядок точности соответственно [67]. Для гладких решений на неравномерных сетках схемы EBR демонстрируют порядок точности, близкий ко второму.

Вблизи границы расчетной области при невозможности построения полного шаблона реконструкции для схемы EBR5 вычисление потоков будем проводить при помощи более коротких шаблонов реконструкции EBR3 [67,68]. Для задания условий отражения ($\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$) на пересечении поверхности ∂C_i с граничной гранью k используем поток $\mathbf{F}_{ik}^b = 0, p\mathbf{s}_{ik}, 0^T$. Для задания на граничной грани условий прилипания и адиабатичности ($\mathbf{u} = 0$, $\partial T / \partial \mathbf{n} = 0$) положим потоки массы и энергии через данную грань равными нулю. Для задания условий свободного потока положим $Q_{ik} = Q_i$ и $Q_{ki} = Q_\infty$, где Q_∞ посчитано по параметрам течения на бесконечности, а значение A_{ik} будем рассчитывать только по Q_i (без использования среднего по Poy).

1.6 Схема EBR-WENO5

Схема EBR-WENO5 [68] основана на классической конечно-разностной WENO схеме [69]. Согласно данной схеме, значение Q_{ij} вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \frac{13}{12}(\Delta_1 - \Delta_0)^2 + \frac{1}{4}(\Delta_1 - 3\Delta_0)^2, \\ \beta_1 &= \frac{13}{12}(\Delta_0 - \Delta_{-1})^2 + \frac{1}{4}(\Delta_0 + \Delta_{-1})^2, \\ \beta_2 &= \frac{13}{12}(\Delta_{-1} - \Delta_{-2})^2 + \frac{1}{4}(3\Delta_{-1} - \Delta_{-2})^2; \end{aligned}$$

$$\delta_0 = -\frac{1}{6}\Delta_1 + \frac{2}{3}\Delta_0, \quad \delta_1 = \frac{1}{3}\Delta_0 + \frac{1}{6}\Delta_{-1}, \quad \delta_2 = \frac{5}{6}\Delta_{-1} - \frac{1}{3}\Delta_{-2};$$

$$d_0 = \frac{3}{10}, \quad d_1 = \frac{3}{5}, \quad d_2 = \frac{1}{10};$$

$$\alpha_k = \frac{d_k}{(\epsilon + \beta_k)^2}, \quad k = 0, 1, 2, \quad \epsilon = 10^{-40};$$

$$\omega_k = \frac{\alpha_k}{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2}, \quad k = 0, 1, 2;$$

$$Q_{ij}^{\text{WENO5}} = Q_i + |r_i - r_j|(\omega_0\delta_0 + \omega_1\delta_1 + \omega_2\delta_2).$$

1.7 Методика RANS и RANS-LES моделирования внешнего обтекания на неструктурированных сетках

В настоящем параграфе представлена методика, являющаяся обобщением опыта, накопленного автором диссертации при проведении множества расчетов обтекания крыльев и планеров самолета на неструктурированных сетках. Применение данной методики может быть полезно при проведении любого расчета внешнего обтекания на основе RANS, RANS-LES и LES подходов. Разработанная методика состоит из 7 пунктов (1.7.1–1.7.7), разделенных на подпункты, и охватывает весь процесс моделирования от этапа подготовки к расчету геометрии обтекаемого тела до этапа обработки полученных численных результатов.

1.7.1 Подготовка расчетной области

1. Подготовка геометрии

Для осуществления численного моделирования течения сплошной среды соответствующая сетка, покрывающая всю расчетную область, не должна содержать разрывов между сеточными элементами или их наложений друг на друга. Если метод построения сетки не имеет функционала автоматического создания сетки без разрывов и самопересечений для не вполне корректно заданной геометрии, необходимо в ручном режиме устранить все самопересечения или разрывы обтекаемой геометрии.

Полезным шагом является устранение всех элементов геометрии, которые с высокой вероятностью не окажут значимого влияния на целевые характеристики течения, но для приемлемой дискретизации которых потребуется использовать избыточное локальное сеточное разрешение и значительный объем ручного труда. К элементам данного типа могут относиться

узкие щели между компонентами геометрии, малые детали геометрии, шевроны на границах сопла двигателя при аэродинамическом расчете.

2. Построение дополнительных поверхностей для задания граничных условий

Численное моделирование задач внешнего обтекания подразумевает определенную долю произвольности расположения внешних границ расчетной области. При использовании неструктурированных сеток в дальнем поле необязательно, и даже нежелательно, поддерживать высокое сеточное разрешение, а, следовательно, число степеней свободы в указанной области будет пренебрежимо мало по сравнению с числом степеней свободы в ближнем поле. В качестве минимального приемлемого размера расчетной области, при котором внешние границы практически не оказывают влияния на течение в ближнем поле, допустимо использование 10-20 размеров обтекаемой геометрии по каждому направлению. Уместным будет и использование размеров расчетной области порядка 100 размеров обтекаемой геометрии для гарантированного исключения влияния внешних граничных условий на течение в ближнем поле.

При симметрии обтекания (при нулевом угле скольжения) или наличии пространственной периодичности течения (многолопастной винт на режиме висения, обтекание бесконечного крыла с одинаковой стреловидностью передней и задней кромок), в соответствующих плоскостях уместно задать границы расчетной области, тем самым уменьшив ее размер и стоимость соответствующих расчетов. В случае вихреразрешающего моделирования (DDES, IDDES, LES, ...) обтекания бесконечного крыла при постановке периодических граничных условий важно учитывать, что расстояние между ними не должно быть меньше минимальной длины в трансверсальном направлении, на которой турбулентные пульсации перестают быть значимо скоррелированными.

Для моделирования работы силовой установки при помощи задания специальных граничных условий на ее входном и выходном сечениях необходимо также построить соответствующие поверхности в окрестности входного и выходного сечений мотогондолы.

1.7.2 Построение неструктурированной сетки

1. Разметка сеточного разрешения в расчетной области

Разметку сеточного разрешения следует провести посредством дискретизации ребер геометрии и задания пространственных областей сгущения неструктурированной сетки. Необходимо выбрать характерный размер сеточного шага и варьировать его локально пропорционально локальным изменениям кривизны обтекаемой геометрии или значимых структур моделируемого течения. Величина характерного шага сетки должна отвечать требованиям используемого при моделировании подхода. При RANS моделировании выбор

характерного шага сетки во многом произволен и обуславливается в первую очередь желаемой степенью достижения сеточной сходимости. При вихреразрешающем моделировании характерный шаг сетки определяется максимальной частотой, которую необходимо разрешать на спектрах в точках ближнего и дальнего полей, и, по опыту, не должен превышать четверти соответствующей длины волны. В случае DDES моделирования характерный шаг сетки неявно ограничен снизу, так как если данный шаг имеет порядок 0.1 от характерной толщины пограничного слоя, то для корректного моделирования требуется уже разрешать часть внешней области пограничного слоя, то есть использовать подход IDDES вместо DDES. При необходимости использования характерного шага около $20 \Delta^+$ или менее, где $\Delta^+ = \nu / (\tau_w / \rho)^{0.5}$, τ_w и ν – характерные значения сдвигового напряжения на поверхности и кинематической вязкости соответственно, целесообразно использовать LES подход [91].

Разрешение ребер на внешней границе расчетной области можно выбрать относительно произвольно, допустимо использование шага сетки порядка 0.1 от длины ребра.

2. Построение поверхностной сетки

На основе дискретизации ребер, проведенной на предыдущем этапе, и с учетом выбранного разрешения в пространственных областях сгущения сетки строится поверхностная сетка на всех поверхностях расчетной области. Вблизи передней, боковой и задней кромок крыла следует использовать анизотропную структурированную поверхностную сетку. По мере удаления от данных кромок анизотропия поверхностных сеточных элементов должна уменьшаться в соответствии с дискретизацией смежных ребер. При достижении анизотропии, близкой к единице, или на пересечении указанных выше областей структурированная поверхностная сетка должна переходить в неструктурированную.

3. Построение пространственной сетки

Вблизи всех поверхностей, на которых будут задаваться условия прилипания (нулевого вектора скорости), необходимо построить призматические слои посредством дублирования поверхностной сетки в нормальном направлении. Первый пристенный шаг h для данных поверхностей должен удовлетворять условию $y^+ < 1$, где $y^+ = h / \Delta^+$, или аналогичному ограничению, определяемому используемыми пристенными функциями. Последующие шаги в нормальном направлении целесообразно увеличивать в геометрической прогрессии. При достижении близких к единице значений анизотропии призматических элементов или вблизи пересечения призматических слоев построенная призматическая сетка должна переходить в неструктурированную тетраэдральную.

1.7.3 Выбор численного метода и его параметров

1. Метод реконструкции значений консервативных переменных

Так как для расчетов, использующих RANS моделирование в пограничном слое или воспроизводящих разрывные решения, использование методов высокого порядка не вполне оправдано (см. Заключение в [39]), будем рассматривать конечно-объемные схемы с ограничителями наклонов. При моделировании дозвуковых течений целесообразно использовать схемы реконструкции переменных на грани между ячейками, основанные на направленных разностях (по аналогии или в соответствии с методом, описанным в параграфе 1.5). Для трансзвуковых или сверхзвуковых течений данные схемы могут не обеспечивать необходимой для проведения расчетов устойчивости, поэтому полезно их заменить на схемы, основанные на TVD или WENO реконструкциях.

2. Вес противопоточной компоненты схемы

При RANS расчетах нет необходимости в модификации веса диссипативной компоненты схемы аппроксимации конвективных потоков. В частности, для RANS моделирования с использованием схем EBR в формуле (2) следует использовать $\delta = 1$.

При вихреразрешающих расчетах в области существенно нестационарного течения, являющейся зоной основного интереса при моделировании, следует использовать минимально возможное значение веса диссипативной компоненты схемы δ , при котором обеспечивается стабильность интегрирования по времени и отсутствие численных осцилляций. По мере удаления от области интереса вес диссипативной компоненты схемы должен непрерывным образом увеличиваться до своего исходного значения. В качестве примера функции распределения указанного веса можно привести функцию, предложенную в [80].

3. Схема интегрирования по времени

Для RANS моделирования, проводимого только с целью получения средних полей течения, допустимо использование схемы интегрирования по времени первого порядка точности. При наличии в RANS решении существенных областей нестационарности и в случае, если нестационарные характеристики течения являются одним из целевых объектов моделирования, оправдано применение схемы интегрирования по времени второго порядка точности.

При вихреразрешающем моделировании следует использовать схемы интегрирования по времени второго порядка точности и выше.

4. Шаг по времени

В RANS расчетах, которые проводятся только для получения средних полей течения, возможно использование максимального шага по времени, обеспечивающего стабильность

вычислительного процесса и отсутствие численных осцилляций. При необходимости моделирования некоторой крупномасштабной нестационарности течения при помощи RANS методов величину шага по времени следует выбирать исходя из характерных частот исследуемого явления.

При вихреразрешающем моделировании шаг по времени ограничен сверху значением максимальной частоты, которую требуется разрешать на спектрах в точках ближнего и дальнего полей, и, по опыту, не должен превышать четверти соответствующего периода колебаний. Как и в случае RANS расчетов, выбранный шаг по времени также должен обеспечивать стабильность вычислительного процесса и отсутствие численных осцилляций. Для подтверждения применимости выбранного шага по времени полезно убедиться, что в полтора или два раза меньший шаг по времени не приводит к существенному изменению численных результатов.

1.7.4 Выбор параметров метода расчета акустических пульсаций в дальнем поле

1. Построение поверхностей для записи данных в ближнем поле

Для вычисления акустических пульсаций в точках дальнего поля по методу Кирхгоффа или по методу Фокса Уильямса – Хокинга (FWH) требуется накопление в процессе прямого расчета нестационарных данных на некоторых замкнутых поверхностях, расположенных в области преимущественно линейных возмущений и содержащих внутри себя все акустические источники. Одно из преимуществ метода FWH заключается в том, что он допускает расположение указанных поверхностей в нелинейной области среднего течения, в то время метод Кирхгоффа, строго говоря, в данной области неприменим [36]. Поскольку расположение поверхностей для записи данных в непосредственной близости к области движения турбулентных структур наиболее выгодно с вычислительной точки зрения, так как не требует поддержания высокого сеточного разрешения в областях, не содержащих турбулентного течения, в дальнейшем будем рассматривать только применение метода FWH. Стоит, однако, заметить, что существуют методы расчета акустических возмущений в дальнем поле, не требующие построения поверхностей для записи данных и подразумевающие решение в ближнем поле некоторых сопряженных задач [37,38].

Как было отмечено выше, замкнутые поверхности для записи данных целесообразно располагать как можно ближе к области нелинейного нестационарного течения, содержащей источники акустических возмущений. В то же время, при вихреразрешающем обтекании крыла или планера, равно как и при расчете струй, в определенных направлениях течение сохраняет существенную нелинейную нестационарность на достаточно больших расстояниях, что, как правило, приводит к необходимости частичного расположения рассматриваемых поверхностей

внутри данных областей. Полученные таким образом постановки для расчета шума в дальнем поле оказываются некорректными, и применение метода FWH к соответствующим накопленным данным приводит к существенным ошибкам в получаемых сигналах. Для минимизации указанных ошибок зарекомендовал себя подход [92,93], основанный на использовании нескольких поверхностей с различными замыканиями в области нелинейного нестационарного течения, вычислении соответствующих сигналов в дальнем поле и их последующем осреднении для получения целевого сигнала. По опыту авторов работ [92,93] и автора диссертации, оптимальная точность расчета шума в дальнем поле достигается при использовании пяти замкнутых поверхностей с отличающимися замыканиями в области нелинейного нестационарного течения.

2. Выбор сеточного разрешения на построенных поверхностях и частоты записи данных

Как и для расчетной сетки, сеточное разрешение на поверхностях, применяемых для расчета шума в точках дальнего поля, определяется максимальной частотой, которую необходимо разрешать на соответствующих спектрах. По опыту, целесообразно всюду на поверхностях, за исключением замыканий, задать одинаковое сеточное разрешение с шагом h_{FWH} , не превышающим половины соответствующей длины волны. На замыканиях допустимо применение более подробного изотропного сеточного разрешения, которое может дополнительно понизить ошибку метода расчета шума в дальнем поле, возникающую из-за использования данных с нестационарной нелинейностью (см. результаты, представленные в параграфе 5.6).

Частоту записи данных необходимо согласовать с заданным на рассматриваемых поверхностях сеточным разрешением, положив ее равной $(c_\infty + U_\infty) / h_{FWH}$, где c_∞ и U_∞ – скорость звука и скорость потока на бесконечности соответственно.

1.7.5 Методы контроля состояния расчета

1. Характер изменения аэродинамических коэффициентов

Процесс выполнения нестационарных расчетов (как RANS, так и вихреразрешающих) можно условно разделить на два этапа: этап установления течения и этап накопления данных. На первом этапе поля течения не соответствуют режиму обтекания, определяемому параметрами расчета, однако по мере выполнения расчета степень указанного соответствия постепенно увеличивается. На втором этапе средние поля течения, посчитанные по интервалу ширины $t_{ref} = l_{ref} / v_{ref}$, где l_{ref} – характерный размер обтекаемой геометрии, v_{ref} – характерная скорость потока,

престают зависеть от положения данного интервала на временной оси, а потому течение можно считать установившимся и начать накопление необходимых численных данных.

Одним из важных и полезных с практической точки зрения индикаторов состояния полей течения при проведении расчета являются значения аэродинамических коэффициентов (коэффициенты подъемной силы, лобового сопротивления, момента тангажа), посчитанные по поверхности обтекаемого тела. Исходя из описанной выше логики, течение с высокой вероятностью можно считать установившимся, если средние значения указанных коэффициентов перестают зависеть от положения границ интервала осреднения ширины t_{ref} . Аналогично, изменение средних значений аэродинамических коэффициентов свидетельствует о потере течением устойчивого состояния.

2. Численная неустойчивость

При выполнении расчетов с использованием конечно-объемных схем в численном решении могут возникать локальные зоны неустойчивости, которые условно разделяются на два типа.

К первому типу относятся малые области решения, содержащие аномально высокие или аномально низкие значения газодинамических функций, например, близкие к нулю значения плотности или значения давления, превышающие значения давления в остальной области на порядок. Неустойчивость данного типа может возникать из-за чрезмерно большого шага по времени, наличия сеточных элементов низкого качества (например, угол между гранями элемента близок к 0° или 180°), недостаточного разрешения на сетке градиентов течения. Развитие указанной неустойчивости характеризуется ухудшением сходимости итераций неявной схемы вплоть до полной остановки расчета из-за локального достижения строго положительными газодинамическими функциями, такими как плотность или давление, отрицательных значений. Средства устранения неустойчивостей данного типа напрямую связаны с причинами их возникновения: может потребоваться уменьшение глобального шага по времени, увеличение локального сеточного разрешения, устранение проблем в геометрии или поверхностной сетке, приводящих к построению элементов низкого качества. Для раннего выявления указанных неустойчивостей полезно в процессе расчета следить за максимальными, минимальными и средними значениями различных газодинамических функций. При возникновении подозрений на развитие соответствующей неустойчивости необходимо вывести полные поля течения для определения причин и возможностей устранения данной проблемы.

К неустойчивости второго типа относится возникновение локальных чрезмерно интенсивных высокочастотных осцилляций в решении. Отметим, что что данные осцилляции не обязательно приводят к аномальным значениям газодинамических функций. Возникновение и локализацию данных осцилляций можно определить при помощи вывода мгновенных значений

производной по времени от давления или плотности на поверхности обтекаемого тела или во всей расчетной области; наличие аномально высоких или низких значений производных с шагом между локальными минимумами и максимумами в 1-2 сеточных ребра свидетельствует о развитии соответствующей неустойчивости. Наибольшее негативное влияние неустойчивость данного типа оказывает на нестационарные характеристики течения, в частности, на спектральный состав акустических пульсаций. Для ее устранения рекомендуется локально повысить вес диссипативной компоненты схемы или уменьшить глобальный шаг по времени, причем допустимо и одновременное использование данных приемов.

3. Анализ сигналов в контрольных точках

Дополнительным средством наблюдения за состоянием полей течения, полезным при проведении нестационарных расчетов, является запись и анализ сигналов (например, пульсаций давления) в некоторых контрольных точках, расположенных вблизи или внутри области основного интереса. По аналогии со значениями аэродинамическими коэффициентов, если во всех контрольных точках средние значения сигналов не зависят от выбора границ интервала осреднения ширины t_{ref} , то течение с высокой вероятностью может рассматриваться как установившееся, если же, напротив, в некоторой контрольной точке среднее значение сигнала зависит от выбора указанных границ, то, как минимум, локально, течение установившимся не является. Соответствующую логику целесообразно применять и для спектральных характеристик, то есть рассматривать изменение спектров сигналов в зависимости от выбора границ интервала, используемого для их построения, чтобы сделать вывод о текущем состоянии полей в окрестности контрольных точек.

Анализ сигналов в контрольных точках также полезен для выявления локальной неустойчивости в численном решении. Если в определенный момент, например после изменения некоторых параметров численного метода, в одной из контрольных точек происходит резкое изменение амплитуды сигнала или в нем появляются явно выраженные высокочастотные компоненты с длиной волны 2-4 шага по времени, то с высокой вероятностью вблизи данной точки возникла область численной неустойчивости. Для подтверждения данного вывода, равно как и для оценки размеров и положения указанной области, необходимо выполнить анализ мгновенных полей производной по времени от давления согласно принципам, изложенным в предыдущем пункте.

1.7.6 Получение целевых характеристик после окончания этапа установления течения

1. Накопление осредненных полей течения и значений аэродинамических коэффициентов

После выхода моделируемого течения на установившийся режим целесообразно начать накопление данных, необходимых для расчета целевых характеристик.

Для накопления средних полей течения необходимо суммировать значения данных полей с весом, равным шагу по времени, и по завершении накопления разделить полученные поля на ширину интервала записи. Накопление мгновенных значений аэродинамических коэффициентов полезно проводить на протяжении всего расчета, а их средние значения вычислять по окончании расчета посредством постобработки согласно логике вычисления средних полей течения. Для определения средних полей и средних значений аэродинамических коэффициентов достаточно накопления данных в течение 2-4 безразмерных единиц времени t_{ref} .

2. Накопление значений давления в точках ближнего поля (RANS-LES, LES)

В точках, для которых требуется получение спектральных характеристик, необходимо произвести накопление мгновенных значений соответствующих функций, например значений функции давления. Время накопления определяется наименьшей частотой, которую требуется разрешать на спектрах, и размером перекрытия, используемого для осреднения спектров в каждой точке (см. подробнее в пункте 5). Например, для частоты $1 / t_{ref}$ и размера перекрытия 0.5, для обеспечения 10-20 осреднений спектров требуется запись интервала ширины 5-10 t_{ref} .

3. Накопление данных для расчета акустических пульсаций в дальнем поле (RANS-LES, LES)

Время накопления данных на поверхностях, предназначенных для применения метода расчета шума в дальнем поле, определяется аналогично предыдущему пункту и увеличивается на удвоенный максимальный временной интервал, за который сигнал от одной точки на указанных поверхностях может достичь любой другой точки с указанных поверхностей.

4. Расчет акустических пульсаций в дальнем поле (RANS-LES, LES)

В рамках настоящей методики предлагается использование метода FWH.

Отметим, что в задачах внешнего обтекания при определении индивидуальных границ интервалов, для которых в точках дальнего поля рассчитывается сигнал, необходимо учитывать движение внешнего потока. Например, если поток, скорость звука в котором на бесконечности равна c_∞ , движется вдоль оси x со скоростью v_∞ , поверхности FWH располагаются близко к оси x в области $x \in [x_{minFWH}, x_{maxFWH}]$, а запись данных произведена для интервала $t \in [t_{minFWH}, t_{maxFWH}]$,

то шум в точке $x = R, y = 0, z = 0$, где $R > x_{\max\text{FWH}}$, может быть получен для интервала $t \in [t_{\min\text{FWH}} + (R - x_{\min\text{FWH}}) / (c_{\infty} + v_{\infty}), t_{\max\text{FWH}} + (R - x_{\min\text{FWH}}) / (c_{\infty} + v_{\infty})]$, в то время как для точки $x = -R, y = 0, z = 0$, где $-R < x_{\min\text{FWH}}$, шум может быть получен для интервала $t \in [t_{\min\text{FWH}} + (R + x_{\max\text{FWH}}) / (c_{\infty} - v_{\infty}), t_{\max\text{FWH}} + (R + x_{\max\text{FWH}}) / (c_{\infty} - v_{\infty})]$.

5. Построение спектров в точках ближнего и дальнего полей (RANS-LES, LES)

Для расчета спектров, например спектральных плотностей мощности, необходимо выполнить интерполяцию записанных сигналов на равномерную временную сетку. В частности, для проведения интерполяции можно использовать сплайны. Построение спектров целесообразно провести при помощи метода периодограмм Уэлша [94,95], основанного на использовании выборок с перекрытием и оконных функций, позволяющих получать более гладкие спектры при относительно коротких интервалах записи сигнала, и быстрого преобразования Фурье.

1.7.7 Повторение предыдущих шагов методики при необходимости

Как правило, при выполнении практических расчетов не удастся безошибочно с первого раза определить все параметры вычислительной постановки, численного метода, накопления данных и их обработки. Например, некоторые зазоры между элементами геометрии не были закрыты, что привело к построению в них сеточных элементов низкого качества и ухудшению сходимости метода Ньютона, при анализе мгновенных полей течения стало ясно, что некоторые важные зоны течения недостаточно разрешены сеткой, или на спектрах в точках ближнего поля была обнаружена чрезмерная интенсивность высокочастотных пульсаций, свидетельствующая о возникновении локальной неустойчивости численного метода. Указанные обстоятельства весьма распространены, и полезной практикой при проведении численного моделирования является итеративное решение задачи, когда информация с каждого шага методики внимательно анализируется и замеченные проблемы устраняются сразу посредством возвращения к предыдущим этапам вместе с внесением необходимых исправлений.

Глава 2. Схема EBR с криволинейными реконструкциями

2.1 Мотивация

Применение прямолинейных квазиодномерных реконструкций, используемых в EBR схемах для аппроксимации конвективных потоков, вообще говоря, допустимо на любом ребре неструктурированной смешанно-элементной сетки, однако точность получаемых таким образом схем может значительно зависеть от локальной сеточной структуры. В частности, в области пограничного слоя вблизи криволинейной геометрии высокая степень анизотропии элементов призматической сетки может приводить в случае EBR схем с прямолинейными реконструкциями к уменьшению точности или возникновению локальной неустойчивости. Данный эффект в наибольшей степени обусловлен использованием прямолинейных реконструкций в тангенциальном направлении относительно обтекаемой геометрии. Его возможная причина проиллюстрирована на рисунке 3, где вблизи криволинейной геометрии изображена равномерная сетка, состоящая из анизотропных призматических элементов. Видно, что расстояния между точками прямолинейной реконструкции существенно различаются, то есть криволинейность сетки интерпретируется численным методом как ее значительная неравномерность.

Для устранения указанных негативных эффектов предлагается заменить реберно-ориентированные прямолинейные реконструкции на реберно-ориентированные криволинейные реконструкции.

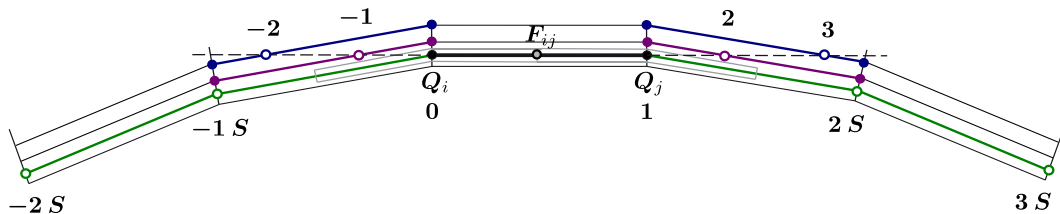


Рисунок 3. Шаблоны схем EBR5 и EBR5 IJK для ребра ij на анизотропной структурированной сетке в пристенной области

2.2 Структурированные сетки

Построение криволинейных реконструкций на структурированных сетках возможно при помощи тривиального алгоритма. Его суть проиллюстрирована на рисунке 3 и заключается в использовании соседних узлов « $-2S$ », « $-1S$ », « $2S$ » и « $3S$ » в качестве точек реконструкции и применении для вычисления переменных Q_{ij} и Q_{ji} формулы (3) без каких-либо изменений. Полученный шаблон обеспечивает более сбалансированное соотношение расстояний между точками реконструкции в сравнении с шаблоном, получаемым согласно исходному алгоритму.

Обозначим схемы EBR, основанные на структурированности сетки как EBR IJK. По построению для структурированных сеток схемы EBR IJK являются конечно-разностными схемами.

2.3 Неструктурированные призматические сетки в пограничных слоях

Для призматических сеток предлагается использовать следующий алгоритм построения криволинейных шаблонов, основанных на структуре сетки в нормальном относительно обтекаемой геометрии направлении (рисунок 4). Первым шагом данного алгоритма является разметка узлов, принадлежащих призматическим слоям. Определим нулевой узловой слой как множество узлов сетки, принадлежащих обтекаемой поверхности. Далее определим первый узловой слой как множество узлов сетки, каждый из которых имеет соседний узел с нулевого слоя, причем соединение с ним обеспечивается боковым ребром призматического элемента. Определим второй узловой слой как множество узлов сетки, каждый из которых имеет соседний узел с первого слоя, причем соединение с ним обеспечивается боковым ребром призматического элемента, и так далее.

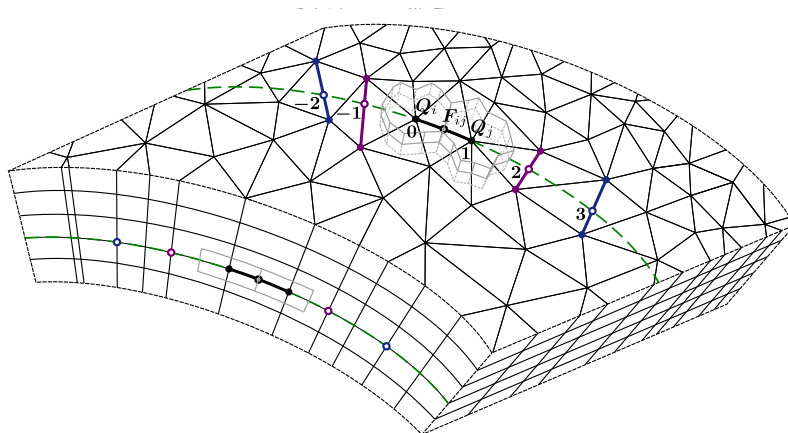
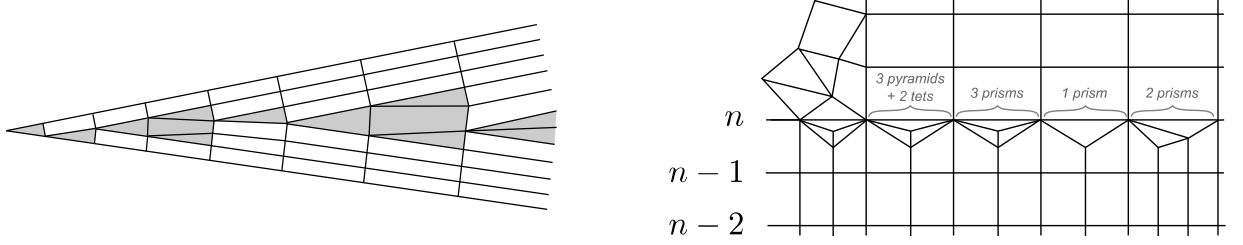


Рисунок 4. Шаблон схемы EBR5 PL для ребра ij на призматической сетке в пристенной области

Введем несколько дополнительных определений. Будем говорить, что грань сетки принадлежит узловому слою, если все ее вершины принадлежат данному слою. Будем называть нормаль к грани, принадлежащей n -му узловому слою, внешней, если она направлена от соответствующей грани с $(n-1)$ -го узлового слоя или к соответствующей грани с $(n+1)$ -го узлового слоя. *Внешней нормалью к ребру*, обе вершины которого принадлежат некоторому призматическому слою, будем называть полусумму внешних нормалей к инцидентным данному ребру граням, принадлежащим тому же призматическому слою. Если существует только одна такая грань, то внешней нормалью к ребру будем называть внешнюю нормаль к данной грани. Если указанных инцидентных граней существует более двух или не существует ни одной, то внешнюю нормаль будем считать неопределенной и исключим указанное ребро из рассмотрения

при построении криволинейных реконструкций. Примеры конфигураций призматических слоев, при которых число инцидентных граней ребра может быть отлично от двух, приведены на рисунке 5.



а. Соприкосновение призматических слоев

б. Переход между призматическими слоями и неструктурированной сеткой

Рисунок 5. Примеры конфигураций призматических слоев

Введем параметр $\theta_{\max} \in (0, \pi/2)$, значение которого будет определять выбор между прямолинейной и криволинейной реконструкцией для конкретного ребра.

Для построения криволинейного шаблона для ребра ij , принадлежащего некоторому узловому слою, будем использовать следующий алгоритм, проиллюстрированный на рисунке 6:

1. Обозначим узлы i и j индексами 0 и 1 соответственно.
2. Определим вектор $\mathbf{P}$ внешней нормали к ребру ij .
3. Определим плоскость P_{ij} как плоскость, параллельную вектору $\mathbf{P}$ и содержащую ребро ij .
4. Построим множества узлов $N_1(i)$ и $N_2(i)$ первого и второго порядка соседства для узла i согласно процедуре, описанной в параграфе 1.5 для исходной схемы EBR.
5. Исклучим из данных множеств узлы, не принадлежащие рассматриваемому узловому слою. Обозначим полученные множества как $N_1^{\text{pl}}(i)$ и $N_2^{\text{pl}}(i)$.
6. Построим множество ребер $M_1^{\text{pl}}(i)$, обе вершины которых принадлежат множеству $N_1^{\text{pl}}(i)$ и для которых скалярное произведение внешней нормали с вектором $\mathbf{P}$ положительно. Аналогичным образом построим множество $M_2^{\text{pl}}(i)$.

7. Найдём точку пересечения плоскости P_{ij} с ребрами из множества $M_1^{\text{pl}}(i)$. Если точка пересечения k , такая что $\angle(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i) \leq \theta_{\max}$ ($\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ – угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$), существует, обозначим ее индексом -1 . Если указанной точки не существует, будем использовать

на ребре ij прямолинейные реконструкции согласно параграфу 1.5 и пропустим следующие шаги алгоритма.

8. Найдем точки пересечения плоскости P_{ij} с ребрами из множества $M_2^{pl}(i)$, удовлетворяющие условию $\angle(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i) \leq \theta_{\max}$. Если существует более одной такой точки, выберем наиболее удаленную от узла i . Если таких точек не существует, пропустим данный шаг для построения более короткого криволинейного шаблона. Полученную точку обозначим индексом -2 .

9. Повторим шаги 4–8 для узла j для получения точек с индексами 2 и 3.

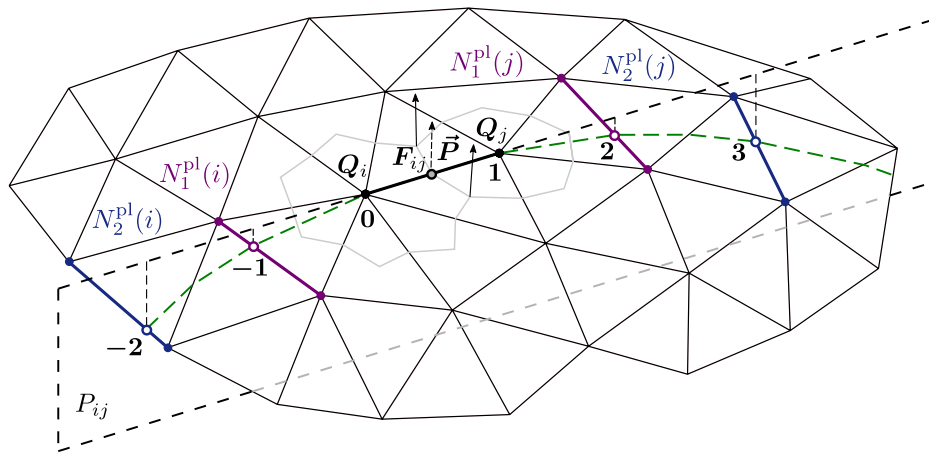


Рисунок 6. Алгоритм построения криволинейного шаблона схемы EBR5 PL

Для вычисления реконструированных значений переменных на основе криволинейных шаблонов будем использовать формулу (3). Для ребер, не принадлежащих какому-либо узловому слою, будем применять прямолинейные реконструкции. В рамках настоящей работы будем использовать значение параметра $\theta_{\max} = \pi/5$.

Обозначим построенные схемы как EBR PL (Prismatic Layers). Данные схемы, как и схемы EBR IJK, характеризуются более сбалансированными расстояниями между точками реконструкции.

Отметим, что схемы EBR IJK и EBR PL не являются более ресурсоемкими в сравнении с оригинальными схемами EBR, так как все шаги соответствующих алгоритмов выполняются только один раз на этапе подготовки расчета.

2.4 Неструктурированные смешанно-элементные сетки

Для расширения области применимости схем EBR IJK и EBR PL на смешанно-элементные неструктурированные сетки используем следующую процедуру. Для ребра, принадлежащего структурированной (или призматической) области гибридной сетки, сначала попробуем

построить криволинейный шаблон согласно схеме EBR5 IJK (или EBR5 PL). Если построить указанный шаблон не удалось, что, например, может произойти в случае близости ребра к переходу между структурированной (или призматической) и неструктурированной областями, попробуем построить более короткий криволинейный шаблон согласно схемам EBR3 IJK (или EBR3 PL). Если более короткий шаблон также не удалось построить, что, например, имеет место в случае принадлежности одной из вершин ребра указанной поверхности перехода, будем использовать на данном ребре стандартные криволинейные реконструкции. Для ребер, не принадлежащих структурированным (или призматическим) слоям, будем использовать только прямолинейные реконструкции.

Глава 3. Реализация схемы EBR PL в программном комплексе NOISEtte

3.1 Общая структура модуля

Для выполнения тестовых и практических расчетов предложенная в предыдущей главе схема EBR PL была реализована в качестве отдельного модуля в программном комплексе NOISEtte (свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2023665709 (19.07.2023) «Программный модуль EBR-PL построения криволинейных реконструкций для аппроксимации конвективных потоков в призматических слоях неструктурированной смешанно-элементной сетки»).

Общая структура модуля EBR-PL и схема его взаимодействия с кодом NOISEtte представлены на рисунке 7. На этапе чтения конфигурационных файлов происходит обращение к модулю для считывания значения параметра $\theta_{\max}$ и меток поверхностей, в окрестности которых требуется построение криволинейных реконструкций. Если в список меток пуст, то криволинейные реконструкции в расчете не применяются и дальнейшие шаги алгоритма пропускаются. Если параметр $\theta_{\max}$ не задан, то по умолчанию используется значение $\theta_{\max} = \pi/5$. На этапе обработки сетки выполняется процедура инициализации призматических слоев, заключающаяся в разметке узловых слоев и заполнении массива векторов роста данных слоев, необходимого для ориентации внешних нормалей к ребрам (см. подробнее в параграфе 3.2). На этапе построения шаблонов реконструкции, который также относится к этапу работы с сеткой, для каждого ребра, обе вершины которого принадлежат некоторому призматическому слою, производится обращение к модулю EBR-PL для построения криволинейного шаблона (см. подробнее в параграфе 3.3). Сохранение полученного криволинейного шаблона производится в те же структуры данных, которые используются в базовом алгоритме для прямолинейных шаблонов реконструкции (неиспользуемый коэффициент линейной интерполяции полагается равным нулю). Если криволинейный шаблон в силу особенностей локальной конфигурации сетки построить не удалось, выполняется построение прямолинейного шаблона согласно базовому алгоритму кода NOISEtte [96]. По завершении указанного этапа все массивы, необходимые для построения криволинейных реконструкций, удаляются и занятая ими память освобождается.

Из описанной выше схемы нетрудно видеть, что функционал модуля EBR-PL применяется только на стадии подготовки к расчету. Так как полученные шаблоны криволинейных реконструкций не требуют какой-либо специальной обработки в ходе проведения расчетов, использование модуля EBR-PL никак не влияет на производительность и высокую параллельную

эффективность кода NOISEtte [73] и полностью совместимо с его работой в CPU, GPU (OpenCL) и гибридном CPU+GPU режимах.

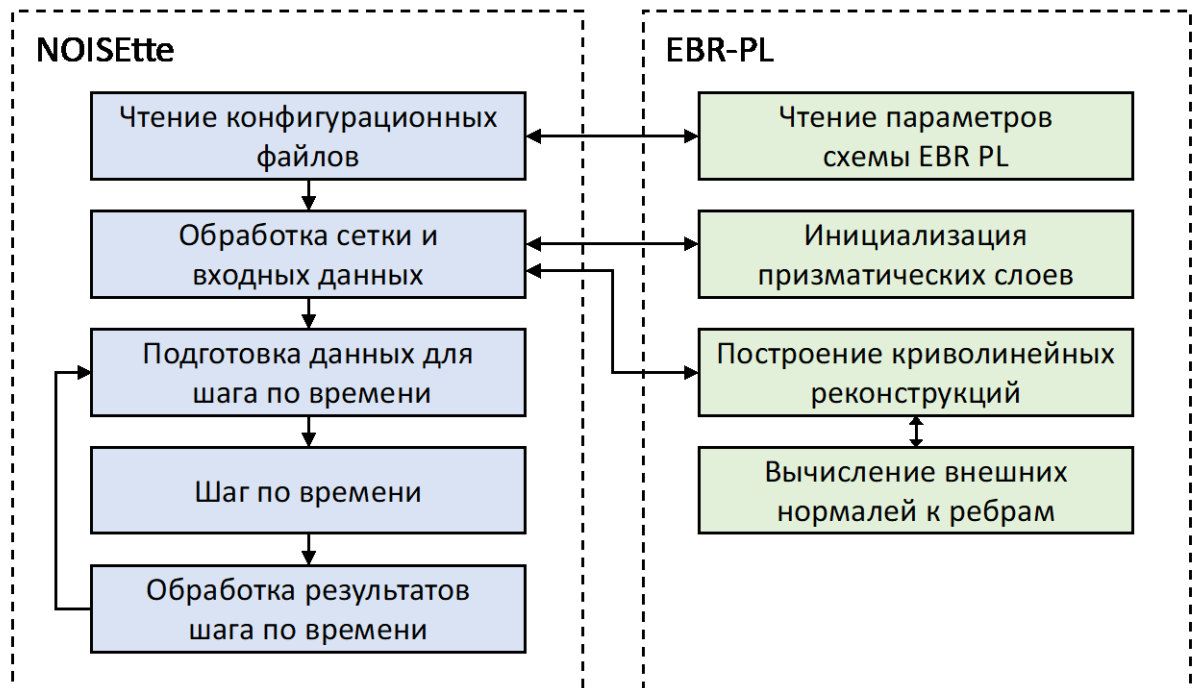


Рисунок 7. Структура программного модуля EBR-PL

3.2 Алгоритм инициализации призматических слоев

Инициализация призматических слоев с модуле EBR-PL производится согласно следующему алгоритму:

1. Создадим поузловой и поэлементный массивы меток призматических слоев, выполним их инициализацию некоторым значением по умолчанию (например, -1).

2. Присвоим нулевую метку всем узлам, принадлежащим поверхностям, вокруг которых требуется построить криволинейные реконструкции. Произведем обмен поузловыми метками между MPI процессами.

3. Если на предыдущем шаге был добавлен хотя бы один узел, выполним цикл по всем призматическим элементам сетки (четырёхугольникам в 2D постановке или гексаэдрам и треугольным призмам в 3D постановке):

- а. Если элемент является четырёхугольником и две его вершины, соединенные ребром, принадлежат предыдущему узловому слою, а две другие либо не размечены, либо имеют метку текущего узлового слоя, то присвоим метку текущего углового слоя элементу и всем его не размеченным вершинам.

б. Если элемент является гексаэдром и все узлы одной из его граней принадлежат предыдущему узловому слою, а остальные узлы элемента либо неразмечены, либо имеют метку текущего узлового слоя, то присвоим метку текущего углового слоя элементу и всем его неразмеченным вершинам.

в. Если элемент является треугольной призмой и все узлы одного из ее треугольных оснований принадлежат предыдущему узловому слою, а остальные узлы элемента либо неразмечены, либо имеют метку текущего узлового слоя, то присвоим метку текущего углового слоя элементу и всем его неразмеченным вершинам.

г. Произведем обмен поузловыми метками между MPI процессами.

4. Создадим и заполним поузловой массив векторов роста призматических слоев. Для узла с нулевого слоя указанный вектор равен разности радиус-вектора соседнего узла с первого слоя и радиус-вектора данного узла, для узла с ненулевого слоя рассматриваемый вектор равен разности радиус-вектора данного узла и радиус-вектора соседнего узла с предыдущего слоя, для остальных узлов вектор роста призматических слоев равен нулю. Если для некоторого узла вектор роста призматических слоев не может быть однозначно определен (см. рисунок 5а), то положим указанный вектор равным нулю, чтобы исключить неоднозначность из рассмотрения.

Вектора роста призматических слоев используются для корректной ориентации внешних нормалей к граням и ребрам в алгоритме поиска точек криволинейной реконструкции. Если обе вершины ребра, принадлежащего некоторому призматическому слою, имеют ненулевые вектора роста призматических слоев, то в качестве вектора, определяющего направление внешней нормали, для единообразия выбирается вектор наибольшей длины. Если только одна вершина имеет ненулевой вектор роста призматических слоев, то именно он используется для ориентации внешней нормали. В случае, если обе вершины имеют нулевые вектора роста призматических слоев, внешние нормали к инцидентным граням ребра считаются неопределенными и данное ребро исключается из рассмотрения при построении криволинейных реконструкций.

3.3 Алгоритм поиска точек криволинейной реконструкции

Пусть оба узла ребра ij , в средней точке которого аппроксимируется конвективный поток, принадлежат некоторому призматическому слою, и внешняя нормаль к данному ребру определена. Без ограничения общности будем полагать, что искомая точка реконструкции k располагается в направлении от узла j к узлу i ($k < 0$ согласно обозначениям параграфа 2.3), предыдущую точку реконструкции будем обозначать индексом $k+1$. Тогда для нахождения точки реконструкции k для каждого ребра из множества $M_{-k}^{pl}(i)$ предлагается использовать следующий алгоритм:

1. Обозначим вершины рассматриваемого ребра из множества $M_{-k}^{\text{pl}}(i)$ индексами a и b .
2. Введем вектора $\mathbf{a} = \mathbf{r}_a - \mathbf{r}_{k+1} - (\mathbf{P} \cdot (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_{k+1}) / \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}) \mathbf{P}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{r}_b - \mathbf{r}_{k+1} - (\mathbf{P} \cdot (\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_{k+1}) / \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}) \mathbf{P}$. По построению $\mathbf{a} \cdot \mathbf{P} = 0$ и $\mathbf{b} \cdot \mathbf{P} = 0$. Если одна из компонент вектора $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ отрицательна, а соответствующие компоненты векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ положительны, то пропустим следующие шаги алгоритма. Аналогично, если одна из компонент вектора $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ положительна, а соответствующие компоненты векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ отрицательны, то пропустим следующие шаги алгоритма.
3. Найдем коэффициенты разложения $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}$: $\alpha = |(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \mathbf{b} \mathbf{P}| / |\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{P}|$, $\beta = |\mathbf{a} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \mathbf{P}| / |\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{P}|$, где $|\cdot|$ – определитель.
4. Введем коэффициенты $\alpha' = \alpha / (\alpha + \beta)$ и $\beta' = \beta / (\alpha + \beta)$. Если значение одного из введенных коэффициентов отрицательно, пропустим следующие шаги алгоритма.
5. Положим $\mathbf{r}'_k = \alpha' \mathbf{r}_a + \beta' \mathbf{r}_b$. Если $(\mathbf{r}'_k - \mathbf{r}_i) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) < |\mathbf{r}'_k - \mathbf{r}_i| |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| \cos(\theta_{\max})$, пропустим следующие шаги алгоритма. Если внешняя нормаль к рассматриваемому ребру не определена или ее скалярное произведение с вектором $\mathbf{P}$ отрицательно, пропустим следующие шаги алгоритма. Если вектор $\mathbf{r}_k$ не определен или $|\mathbf{r}'_k| > |\mathbf{r}_k|$, положим $\mathbf{r}_k = \mathbf{r}'_k$.

Проверка направления внешней нормали, введенная в пункте 5, необходима для дополнительного контроля набора ребер, которые участвуют в построении криволинейной реконструкции. Без данной проверки, например, возможна ситуация, когда вблизи задней кромки крыла точка реконструкции будет располагаться на противоположной по отношению к ребру ij стороне геометрии (рисунок 8), что не вполне корректно с физической точки зрения. Указанная проверка может быть выполнена и на более ранних этапах алгоритма, однако это приведет только к увеличению времени поиска точек реконструкции, так как в подавляющем большинстве случаев ребра исключаются из рассмотрения по другим критериям, изложенным в пунктах 2, 4 и 5.

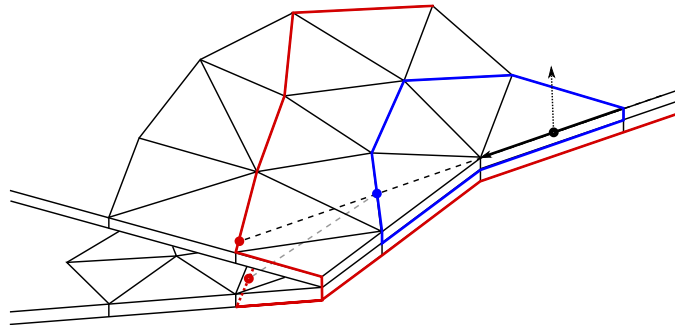


Рисунок 8. Призматическая сетка с Н-топологией вблизи острой кромки обтекаемого тела

Глава 4. Тестирование разработанного метода на модельных задачах

4.1 Распространение акустической волны в бесконечном цилиндрическом канале при наличии вязкости и теплопроводности

4.1.1 Мотивация

Для верификации EBR схем, основанных на криволинейных квазиодномерных реконструкциях, рассмотрим линейную задачу распространения акустической волны в бесконечном цилиндрическом канале при наличии вязкости и теплопроводности. Главной особенностью данной задачи является наличие пограничного слоя вблизи стенки канала, что дает возможность количественно оценить точность различных EBR схем при моделировании течений с большими значениями градиентов вблизи криволинейных геометрий.

Альтернативным способом верификации реализованных схем является применение метода искусственных решений (manufactured solutions), которые могут имитировать пограничные слои [97,98] и использоваться для криволинейных геометрий [98]. В настоящей работе данный метод не применяется, чтобы избежать ошибок, связанных с аппроксимацией искусственных источников членов.

4.1.2 Математическая постановка

Акустические волны при наличии вязкости и теплопроводности среды описываются линеаризованными уравнениями Навье–Стокса. Для идеального газа и среднего поля течения $\bar{\rho} = 1$, $\bar{\mathbf{u}} = 0$ и $\bar{p} = 1 / \gamma$ данные уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla p' &= \mu \left(\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right), \\ \frac{\partial (p' - \rho')}{\partial t} &= \frac{\mu}{\text{Pr}} \Delta (\gamma p' - \rho'), \end{aligned} \quad (4)$$

где ρ' и p' – пульсационные компоненты плотности и давления соответственно, μ – коэффициент динамической вязкости, Pr – число Прандтля.

Для бесконечной цилиндрической области $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $z \in \mathbb{R}$ и граничных условий

$$\mathbf{u}|_{r=R} = 0, \quad (\gamma p' - \rho')|_{r=R} = 0, \quad (5)$$

существуют точные решения вида

$$\mathbf{Q}'(r, \varphi, z, t) = \mathbf{Q}'_{m, \nu, k}(r) e^{i\nu\varphi + ikz + i\omega_{m, \nu, k}t}, \quad (6)$$

где $\mathbf{Q}' = (\rho', u_r, u_\varphi, u_z, p')^T$, $m \in \mathbb{N}$ – индекс радиальной моды, $\nu \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k \in \mathbb{R}$, $\omega_{m, \nu, k} \in \mathbb{C}$.

Точное решение для $\nu = 0$ было получено Кирхгофом [99]. Точное решение для произвольных радиальных, азимутальных и аксиальных мод было реализовано в открытом коде ColESo [100,101], подробности реализации представлены в [102].

4.1.3 Вычислительная постановка

Рассмотрим задачу (4)–(5) с параметрами $\mu = 10^{-6}$, $\text{Pr} = 1$, $\gamma = 1.4$, $R = 1$. Начальные условия определим согласно точному решению (6) для $m = 2$, $\nu = 8$, $k = 0$ и используем периодические условия для $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/4$. Данное решение изображено на рисунке 9; соответствующая частота $\omega_{m, \nu, k}$ приближенно равна $14.11 + 3.00 \times 10^{-3} i$.

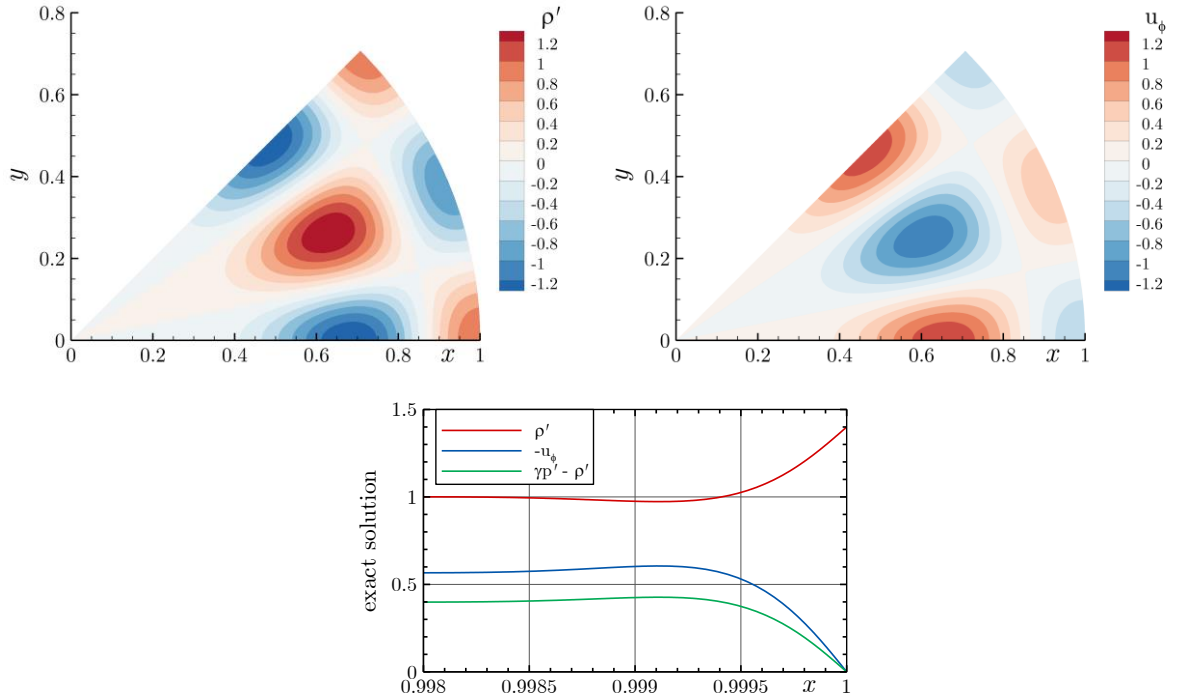


Рисунок 9. Акустическая волна в бесконечном цилиндрическом канале: точное решение задачи для $\mu = 10^{-6}$, $\text{Pr} = 1$, $\gamma = 1.4$, $R = 1$, соответствующее моде $m = 2$, $\nu = 8$, $k = 0$, при $t = 0$

Построим сетки согласно следующему принципу. Погрешность, возникающая при аппроксимации схемой второго порядка производной некоторой функции q , может быть оценена как $\varepsilon(r) \approx h^2(r) \left| d^3 q(r) / dr^3 \right|$, где $h(r)$ – величина шага сетки в радиальном направлении. Чтобы обеспечить сбалансированное распределение ошибки аппроксимации, введем требование $\varepsilon(r)h(r) \approx \text{const}$, которое приводит к выбору

$$h(r) \approx C \left| d^3 q(r) / dr^3 \right|^{-1/3}.$$

Исходя из описанных соображений, будем строить сетки с шагом

$$h(r) \approx \min \left\{ h_{\max}, C \left\| d^3 \mathbf{Q}'_{m,\nu,k}(r) / dr^3 \right\|_2^{-1/3} \right\}, \quad (7)$$

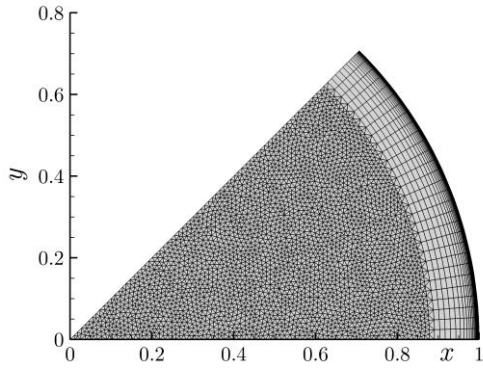
где $h_{\max} = 2\pi / (2\nu N_\varphi)$ – величина шага сетки в азимутальном направлении при $r = 1/2$, N_φ – число узлов в данном направлении, $C = 6 / N_\varphi$ – константа, значение которой выбрано с целью обеспечения $h(r) = h_{\max}$ для $r \lesssim 0.98$.

Используя формулу (7), построим три типа 2D сеток, примеры которых показаны на рисунке 10. Параметры всех 2D сеток представлены в таблице 1, где N – общее число узлов сетки. Сетки первого типа являются структурированными только в области $0.9 \leq r \leq 1$, и в остальной области заполнены неструктурированной треугольной сеткой. Сетки второго типа имеют неструктурированную подобласть при $0 \leq r \leq 0.1$, а в остальной области являются структурированными. Сетки третьего типа получаются из сеток второго типа путем усечения при $r = 0.1$, и, следовательно, являются полностью структурированными. Так как усеченные сетки требуют дополнительных граничных условий при $r = 0.1$, положим радиальную компоненту скорости и вязкий поток равными нулю на данной границе. Причина использования усеченных сеток заключается в простоте их построения и обеспечении ими точности, сравнимой с точностью полных сеток, так как $\left\| \mathbf{Q}'_{2,8,0}(0.1) \right\|_\infty \approx 3.5 \times 10^{-5}$ и $\mathbf{Q}'_{m,\nu,k}(r) \sim r^{\nu-1}$ при r стремящимся к нулю ($\nu > 0$).

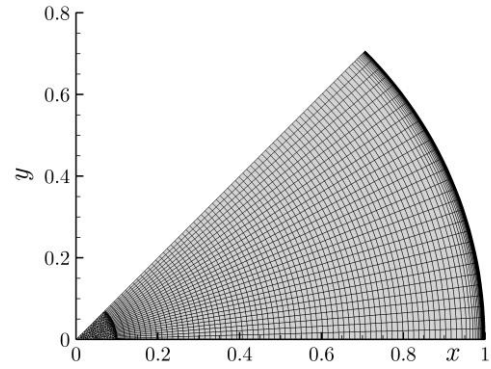
В 3D постановке рассмотрим следующую расчетную область: $0.1 \leq r \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq \pi/4$, $0 \leq z \leq \pi/20$. При $z = 0$ и $z = \pi/20$ зададим периодические условия, все остальные граничные зададим такими же, как и в 2D постановке с областью $0.1 \leq r \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq \pi/4$. Для построения 3D сеток сначала построим поверхностные сетки для $r = 1$, $0 \leq \varphi \leq \pi/4$, $0 \leq z \leq \pi/20$, а затем продублируем их вдоль радиального направления так, чтобы они совпадали с соответствующими 2D сетками в сечениях $z = 0$ и $z = \pi/20$. Два типа 3D сеток, используемых в данном исследовании, показаны на рисунке 11. Для первого типа поверхностные сетки строятся при помощи метода продвигающегося фронта [103], который в большей части расчетной области создает сетку, близкую к TI сетке из правильных треугольников. Поверхностные сетки для второго типа являются полностью неструктурированными. Параметры 3D сеток приведены в таблице 2, где N_{surf} – число узлов на стенке канала.

Во всех расчетах, представленных в настоящей работе, для аппроксимации конвективных потоков используются схемы EBR, а для аппроксимации диффузионных потоков применяется метод локальных разбиений сеточных элементов [79]. В данном параграфе для интегрирования по времени будем использовать явный метод Рунге-Кутты четвертого порядка. Шаг по времени

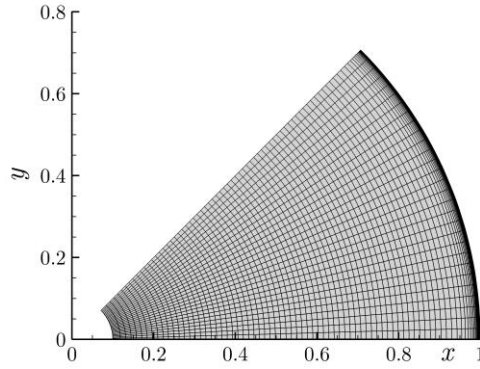
выберем для обеспечения значения $CFL = 1$, расчеты будем проводить до $t = 20$, что примерно соответствует 45 периодам колебаний.



Неструктурированная сетка при $0 \leq r \leq 0.9$,
структурированная сетка при $0.9 \leq r \leq 1$



Неструктурированная сетка при $0 \leq r \leq 0.1$,
структурированная сетка при $0.1 \leq r \leq 1$



Структурированная сетка для расчетной области $0.1 \leq r \leq 1$

Рисунок 10. Три типа 2D сеток для $N_\varphi = 30$ ($h_{\min} = 6.1 \times 10^{-5}$)

Таблица 1. Параметры 2D сеток, использованных в задаче об акустической волне

Тип сетки		N_φ	N_r	N
Неструктурированная область	Структурированная область			
$0 \leq r \leq 0.9$	$0.9 \leq r \leq 1$	30	107	3 981
		60	200	15 534
$0 \leq r \leq 0.1$	$0.1 \leq r \leq 1$	30	112	3 134
		60	212	11 661
—	$0.1 \leq r \leq 1$	30	98	2 940
		60	183	10 980
		120	354	42 480

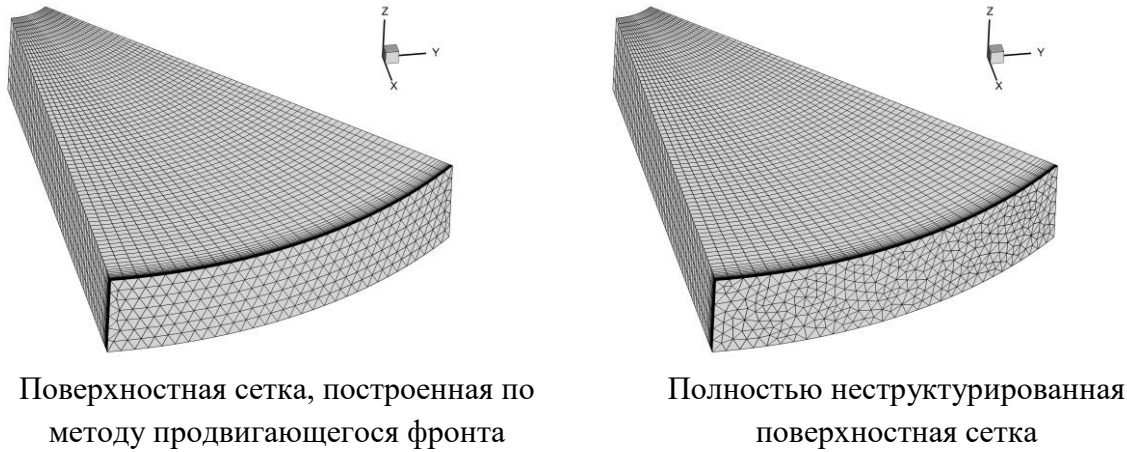
Рисунок 11. Два типа 3D сеток для $N_\varphi = 30$

Таблица 2. Параметры 3D сеток, использованных в задаче об акустической волне

Тип сетки	N_φ	N_r	N_z	N_{surf}	N
Поверхностная сетка,	30	98	7	252	2.5×10^4
построенная по методу	60	183	13	926	1.7×10^5
продвигающегося фронта	120	354	25	3 529	1.2×10^6
Полностью	30	98	7	330	3.2×10^4
неструктурированная	60	183	13	1 174	2.1×10^5
поверхностная сетка	120	354	25	4 543	1.6×10^6

4.1.4 Численные результаты

Пространственные распределения ошибки по функции плотности, полученные в 2D расчетах при помощи схем EBR5 и EBR5 IJK, представлены на рисунке 12. Видно, что для любого типа сетки и сеточного разрешения схема EBR5 IJK дает меньший уровень ошибки в сравнении со схемой EBR5. При фиксированном сеточном разрешении схема EBR5 обеспечивает практически одинаковое распределение ошибок для любого типа сетки, в то время как схема EBR5 IJK дает большую ошибку для сеток первого типа в сравнении с сетками второго и третьего типа. Для сеток первого типа ошибка схемы EBR5 IJK меньше соответствующей ошибки схемы EBR5 примерно в 1.5 раза, для остальных типов сеток – приблизительно в 7 раз. Эволюция ошибок во времени и итоговые значения ошибок на момент $t = 20$ для 2D расчетов на структурированных сетках приведены на рисунке 13 и в таблице 3 соответственно. Видно, что ошибка, возникающая из-за использования прямолинейных реконструкций в области $0.1 \leq r \leq 0.9$, является одной из основных компонент общей численной ошибки. Далее будем рассматривать только результаты, полученные на сетках третьего типа.

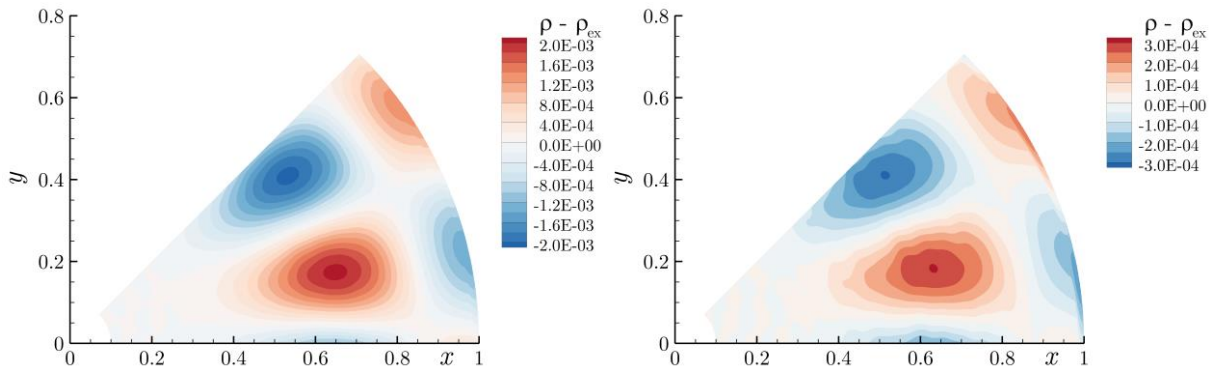
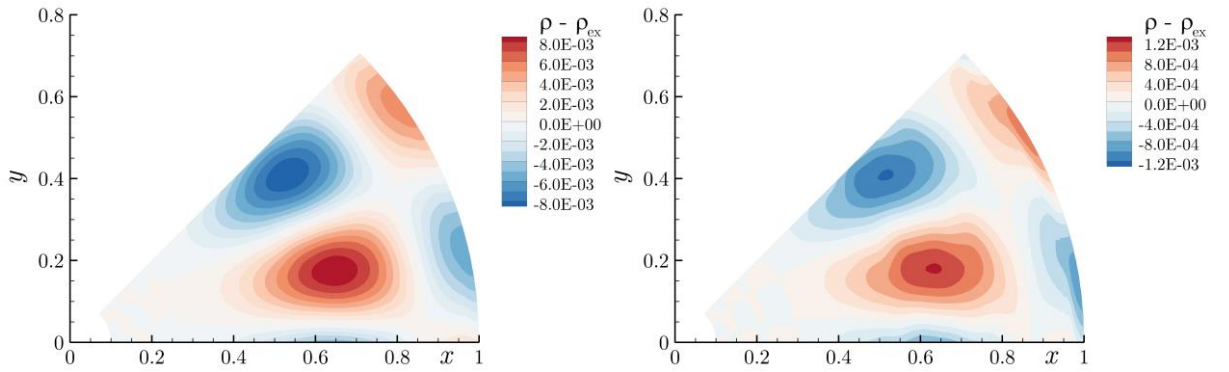
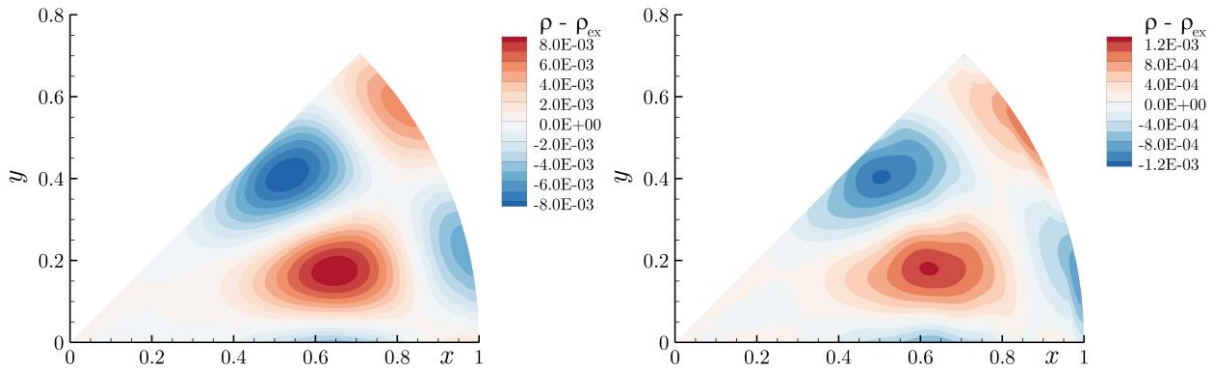
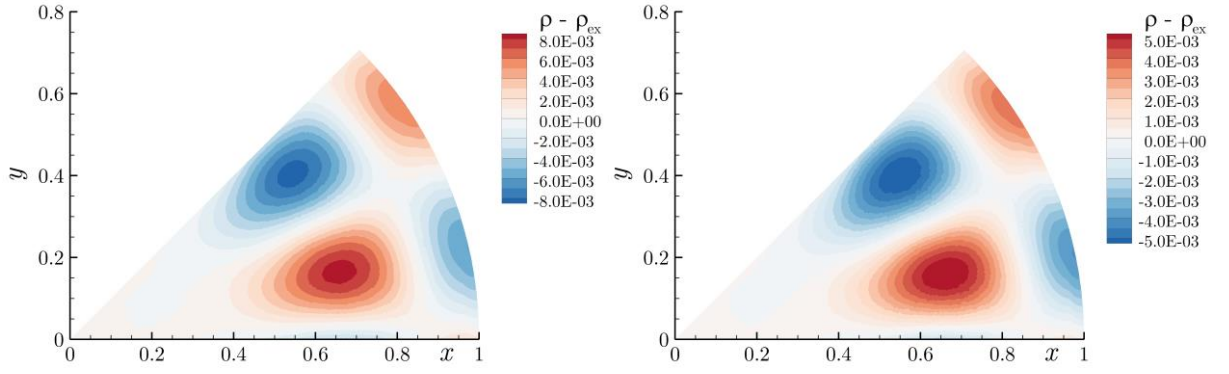


Рисунок 12. Пространственные распределения ошибки по функции плотности при $t = 20$, полученные в 2D расчетах при помощи схем EBR5 (слева) и EBR5 IJK (справа)

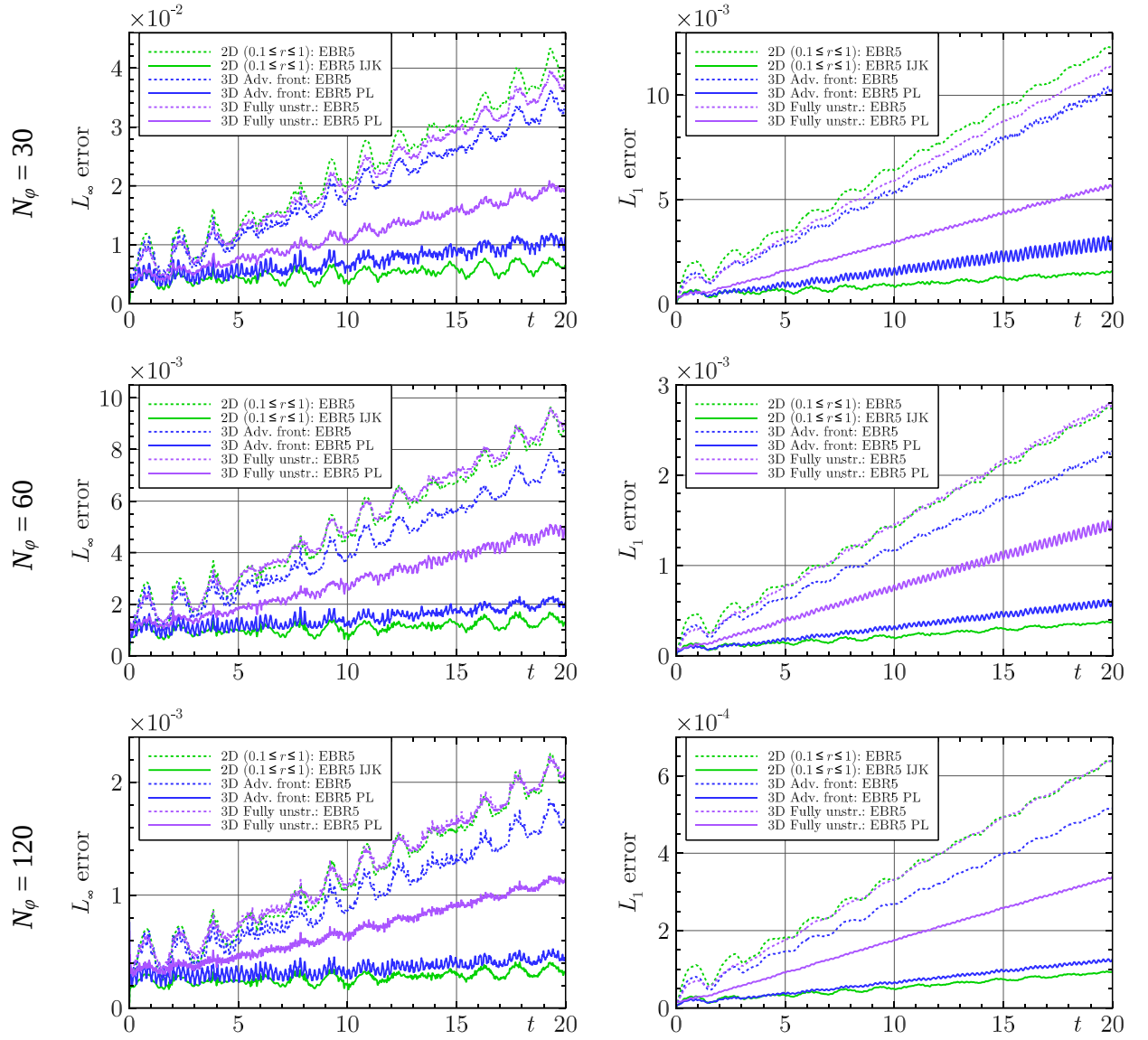


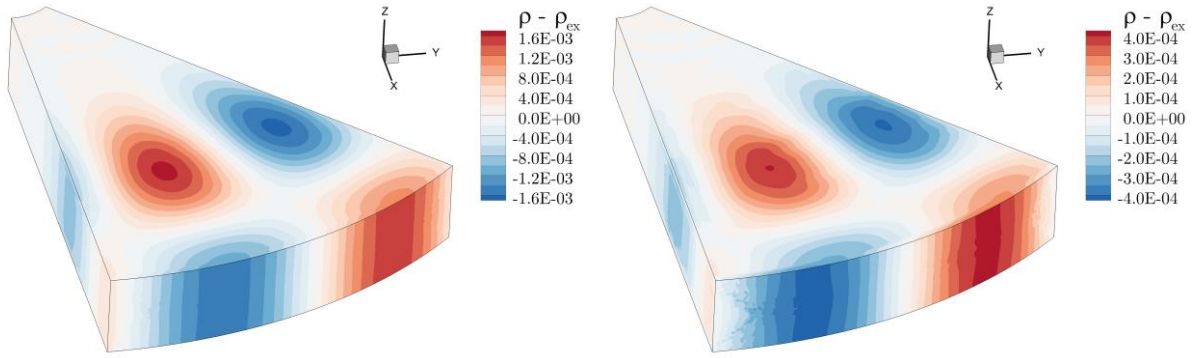
Рисунок 13. Зависимость от времени ошибки по функции плотности в нормах L_∞ and L_1

Таблица 3. Задача об акустической волне: ошибка по функции плотности в норме L_1 ($t = 20$)

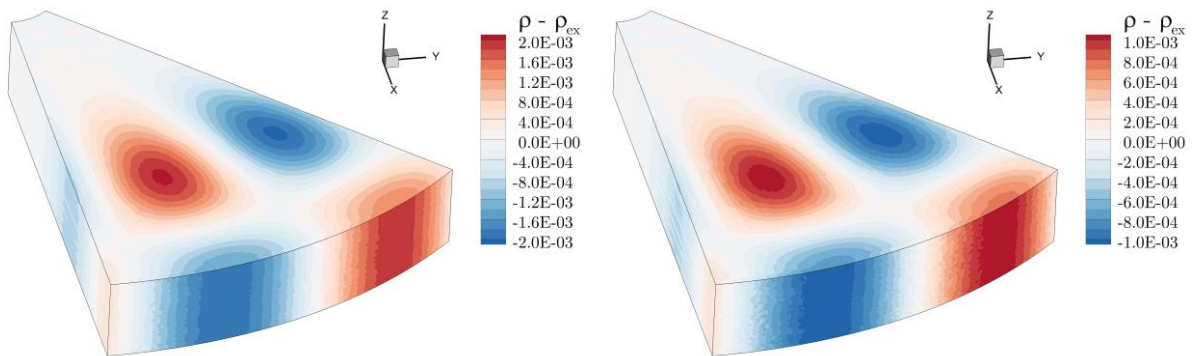
Тип сетки	N_φ	EBR5	Порядок схемы	EBR5 IJK / EBR5 PL	Порядок схемы	Отно- шение
2D ($0.1 \leq r \leq 1$)	30	1.233×10^{-2}	—	1.552×10^{-3}	—	7.95
	60	2.742×10^{-3}	2.17	3.758×10^{-4}	2.05	7.30
	120	6.381×10^{-4}	2.10	9.352×10^{-5}	2.01	6.82
3D (поверхностная сетка, построенная по методу продвигающегося фронта)	30	1.040×10^{-2}	—	3.186×10^{-3}	—	3.26
	60	2.273×10^{-3}	2.19	6.178×10^{-4}	2.37	3.68
	120	5.159×10^{-4}	2.14	1.263×10^{-4}	2.29	4.09
3D (полностью неструктурированная поверхностная сетка)	30	1.136×10^{-2}	—	5.589×10^{-3}	—	2.03
	60	2.823×10^{-3}	2.01	1.510×10^{-3}	1.89	1.87
	120	6.396×10^{-4}	2.14	3.391×10^{-4}	2.15	1.89

Распределения ошибки по функции плотности, полученные в 3D расчетах, приведены на рисунке 14, эволюция ошибок во времени показана на рисунке 13, а итоговые ошибки на момент $t = 20$ сведены в таблице 3. Видно, что схема EBR5 PL дает более точные результаты в сравнении со схемой EBR5, а ошибки, полученные при использовании схемы EBR5 на различных сетках, очень близки друг к другу. За счет использования криволинейных реконструкций точность схемы EBR5 возрастает приблизительно в 3-4 раза для 3D сеток первого типа и приблизительно в 2 раза для 3D сеток второго типа. Полученная зависимость точности схемы EBR5 PL от типа сетки объясняется уменьшением благодаря криволинейным реконструкциям компоненты ошибки, связанной с направлением, нормальным по отношению к стенке канала. Поскольку компонента ошибки, связанная с поверхностной сеткой, не изменяется при использовании криволинейных реконструкций, свойства получаемого метода аналогичны свойствам схемы EBR5 на соответствующей 2D сетке, то есть меньшая численная ошибка достигается на сетках, являющихся в тангенциальных направлениях относительно стенки канала трансляционно-инвариантными (ТИ) или близкими к ним. Как видно из рисунка 13, на сетках, построенных по методу продвигающегося фронта, ошибки, полученные при использовании схемы EBR5 PL, по мере увеличения разрешения сетки постепенно приближаются к аналогичным ошибкам, полученным при использовании схемы EBR5 IJK. Это происходит потому, что при увеличении сеточного разрешения метод продвигающегося фронта заполняет все большую площадь поверхности цилиндрического канала треугольниками, близкими по форме к правильным, и, следовательно, шаблоны реконструкций схемы EBR PL на получаемых 3D сетках постепенно становятся все более схожи с шаблонами реконструкций схемы EBR IJK на соответствующих 2D сетках.

Решение рассматриваемой задачи при помощи схем EBR3, основанных на более коротких шаблонах, не показало значимого понижения численной ошибки при использовании криволинейных реконструкций (EBR3 IJK в 2D и EBR3 PL в 3D), поэтому в настоящей работе соответствующие результаты не приводятся.



Поверхностная сетка, построенная по методу продвигающегося фронта: $N_\varphi = 120$



Полностью неструктурированная поверхностная сетка: $N_\varphi = 120$

Рисунок 14. Пространственные распределения ошибки по функции плотности при $t = 20$, полученные в 3D расчетах при помощи схем EBR5 (слева) и EBR5 PL (справа)

4.2 Обтекание сегмента с профилем NASA 0012

4.2.1 Физическая постановка

Для продолжения тестирования схем EBR IJK и EBR PL рассмотрим задачу обтекания аэродинамического профиля NASA 0012 [104]. Постановка задачи формулируется следующим образом: аэродинамический профиль единичной длины помещается в однородный поток воздуха, характеризующийся числом Маха 0.15, числом Рейнольдса 6×10^6 и температурой 300 К, и обтекается под углами атаки $\alpha = 0^\circ, 10^\circ, 15^\circ$.

4.2.2 Вычислительная постановка

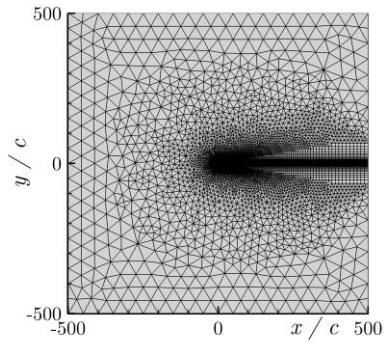
Для численного решения задачи будем применять RANS уравнения с моделью турбулентности SA [11] и положим набегающий поток полностью турбулентным. Динамическую вязкость будем определять согласно закону Сазерленда.

В 2D постановке используем квадратную расчетную область $-500 \leq x/c, y/c \leq 500$ с исключенной из нее внутренней частью аэродинамического профиля. Переднюю кромку профиля расположим в точке с координатами (0,0). В 3D постановке используем растяжение данной области вдоль отрезка $0 \leq z/c \leq 0.25$. На поверхности профиля зададим условия $\mathbf{u} = 0$, $\partial T / \partial \mathbf{n} = 0$ и $\nu_t = 0$, где ν_t – турбулентная вязкость. На внешних границах в случае входа зафиксируем все параметры потока, кроме давления, которое будем экстраполировать из внутренней области, в случае выхода, наоборот, зафиксируем только давление, а остальные параметры будем экстраполировать. Для 3D области на границах $z/c = 0$ и $z/c = 0.25$ поставим периодические условия.

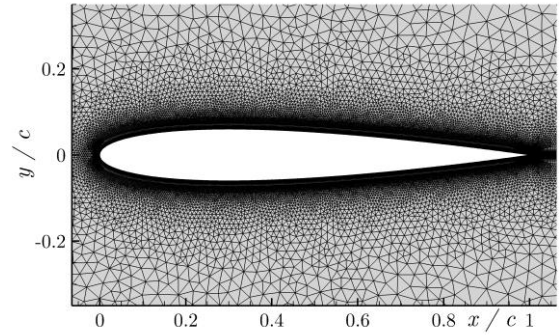
2D расчеты будем проводить на последовательности гибридных сеток, состоящих из слоев четырехугольников вблизи аэродинамического профиля и неструктурированной треугольной сетки в остальной области. Параметры использованных сеток приведены в таблице 4, где N – общее число узлов сетки, N_{surf} – число узлов на обтекаемой поверхности. Для тестирования EBR схем в 2D постановке также применялась структурированная сетка 897×257 , использованная в [104] для получения численных результатов. Примеры описанных сеток показаны на рисунке 15.

Таблица 4. Параметры 2D сеток, использованных для обтекания профиля NASA 0012

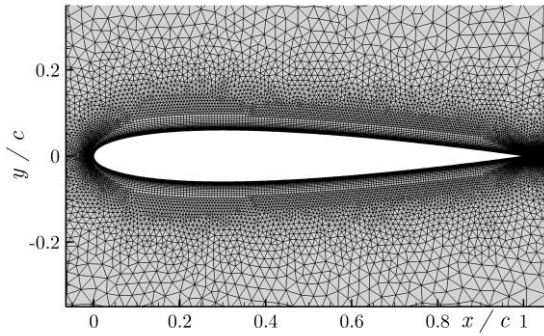
2D сетка	x1	x2	x3	x4	x8	897×257
N	5.5×10^4	5.1×10^4	6.9×10^4	8.3×10^4	8.4×10^4	2.3×10^5
N_{surf}	102	162	246	442	930	513



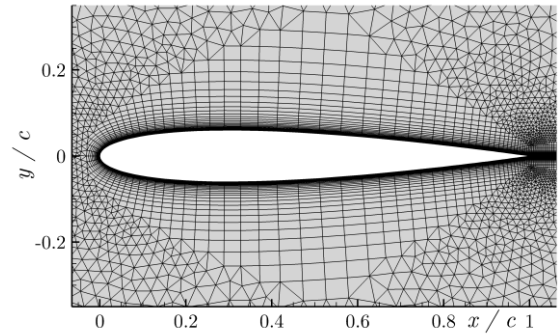
x8: вид всей расчетной области



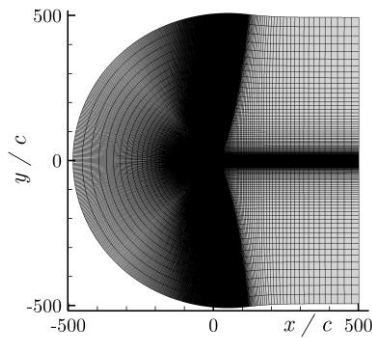
x8



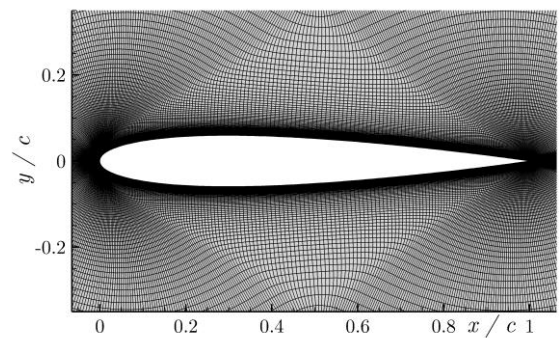
x4



x1



897×257: вид всей расчетной области



897×257

Рисунок 15. Примеры 2D сеток, использованных для обтекания профиля NASA 0012

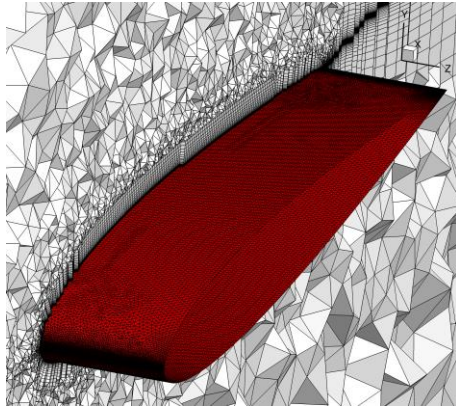
3D расчеты проведем на аналогичной последовательности сеток, состоящих из слоев треугольных призм вблизи поверхности крыла. Данные сетки совпадают с соответствующими 2D сетками в сечениях $z/c = 0$ и $z/c = 0.25$, их параметры приведены в таблице 5, где $N_{\text{surf}, z=0}$ — число узлов на поверхности крыла при $z/c = 0$. Примеры 3D сеток показаны на рисунке 16. Все сетки, описанные в данном параграфе, удовлетворяют условию $y^+ < 1$ для рассматриваемых углов атаки.

Для интегрирования по времени будем использовать неявную схему первого порядка, разрешаемую одной или двумя итерациями метода Ньютона, с максимальным временным шагом, обеспечивающим стабильность вычислительного процесса. Получаемая система линейных

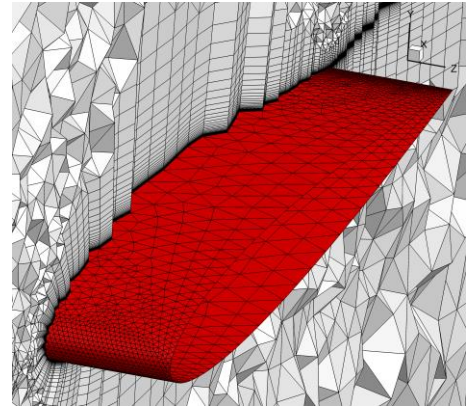
алгебраических уравнений решается методом BiCGStab с предобуславливателем ILU0. Вычисления проводятся до сходимости значений аэродинамических коэффициентов (рисунок 17). Начальные поля течения, соответствующие потоку без профиля, использовались только для расчетов на 2D сетке x4, начальные условия для всех остальных расчетов были получены интерполяцией сошедшихся решений с указанной сетки.

Таблица 5. Параметры 3D сеток, использованных для обтекания сегмента NASA 0012

3D сетка	x1	x2	x3	x4	x8
N	5.2×10^5	8.0×10^5	1.4×10^6	2.9×10^6	9.7×10^6
N_{surf}	3.2×10^3	6.5×10^3	1.5×10^4	4.0×10^4	1.8×10^5
$N_{\text{surf}, z=0}$	102	162	246	442	930



x4



x1

Рисунок 16. Примеры 3D сеток, использованных для обтекания сегмента NASA 0012

На самых грубых сетках 2D x1 и 3D x1 схемы EBR с прямолинейными реконструкциями оказались неустойчивыми из-за значительной неравномерности шаблонов. Для повышения устойчивости данных схем был введен параметр M_{ratio} , который соответствовал максимально допустимому отношению расстояний между точками реконструкции (см. параграф 1.5). Если для некоторого ребра максимальное отношение расстояний превышало M_{ratio} , то на нем выполнялось переключение на схему EBR3 с более коротким шаблоном. Если максимальное отношение расстояний внутри шаблона реконструкции EBR3 все еще превышало M_{ratio} , то производилось умножение коэффициента ξ_{-1} в формуле (3) на $\min\{M_{\text{ratio}} \times |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_{-1}| / |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, 1\}$. Для указанных сеток значение $M_{\text{ratio}} = 20$ позволило достичь устойчивости вычислительного процесса.

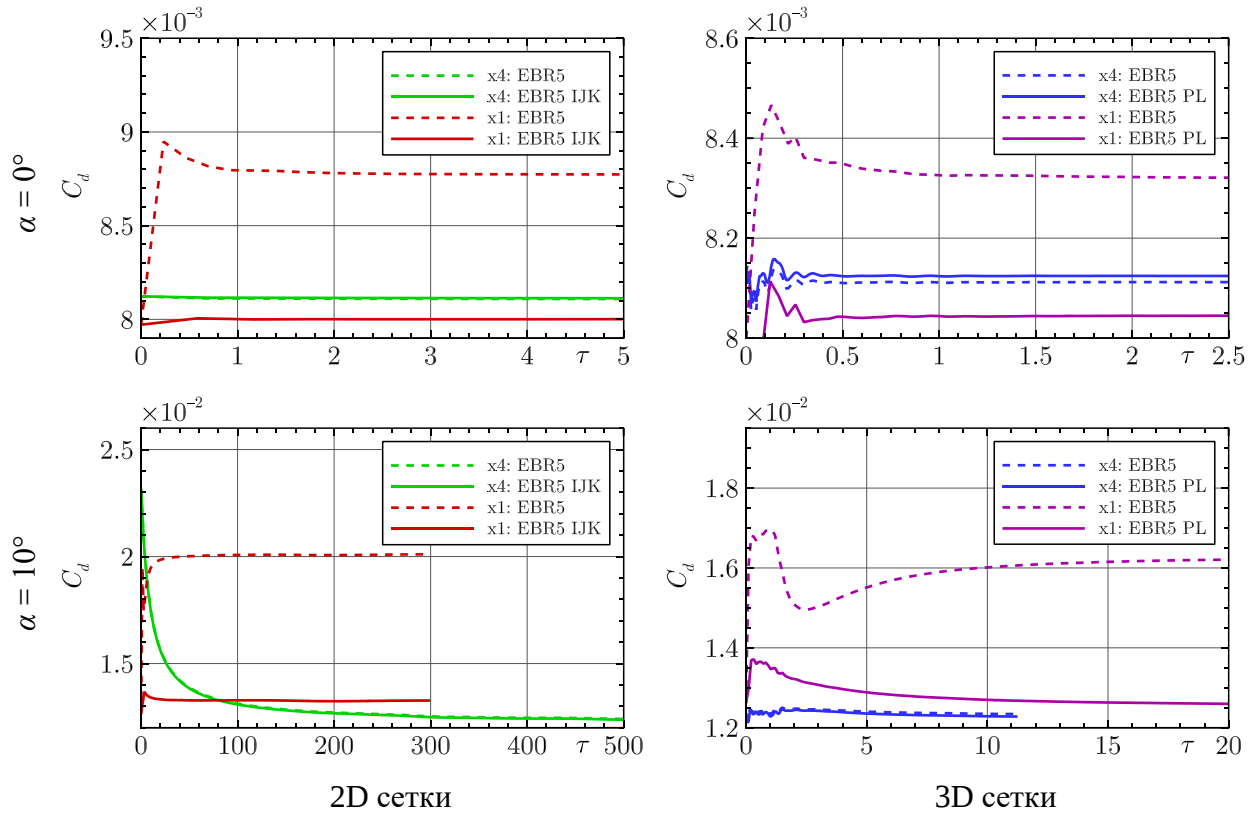


Рисунок 17. Сходимость коэффициента лобового сопротивления при обтекании NACA 0012

4.2.3 Численные результаты на подробных сетках

Проведем сравнение результатов, полученных при помощи схем EBR5, EBR5 IJK и EBR5 PL на подробных гибридных 2D и 3D сетках и структурированной сетке 897×257 , с экспериментальными и численными данными из [104].

Сравнение коэффициентов подъемной силы и лобового сопротивления приведено в таблице 6. Видно, что отличие полученных аэродинамических коэффициентов от соответствующих средних значений, посчитанных по данным из [104], не превышает 1% по коэффициенту подъемной силы для всех рассмотренных углов атаки; отличие по коэффициенту лобового сопротивления не превышает 1% для $\alpha = 0^\circ$, приблизительно равно 2% для $\alpha = 10^\circ$ и 4% для $\alpha = 15^\circ$. Отметим, что на одной и той же сетке разница между результатами, полученными при помощи схем EBR5 с прямолинейными и криволинейными реконструкциями, не превышает 0.1% для коэффициентов подъемной силы и 1% для коэффициентов лобового сопротивления. 3D расчеты проводились только для углов атаки 0° и 10° .

Распределения коэффициентов давления и трения показаны на рисунке 18. Видно, что результаты, полученные при помощи схем EBR5 IJK и EBR5 PL, качественно соответствуют экспериментальным данным и практически совпадают с численными результатами, приведенными в [104].

Таблица 6. Коэффициенты подъемной силы ($C_{y\alpha}$) и лобового сопротивления ($C_{x\alpha}$), полученные при помощи схем EBR5, EBR5 IJK и EBR5 PL на подробных сетках

Сетка	Код / Схема	0°: $C_{y\alpha}$	10°: $C_{y\alpha}$	15°: $C_{y\alpha}$	0°: $C_{x\alpha}$	10°: $C_{x\alpha}$	15°: $C_{x\alpha}$
897×257	CFL3D	~ 0	1.0909	1.5461	0.00819	0.01231	0.02124
897×257	FUN3D	~ 0	1.0983	1.5547	0.00812	0.01242	0.02159
897×257	NTS	~ 0	1.0891	1.5461	0.00813	0.01243	0.02105
897×257	EBR5	~ 0	1.0946	1.5437	0.00810	0.01264	0.02219
897×257	EBR5 IJK	~ 0	1.0940	1.5436	0.00810	0.01259	0.02203
2D x8	EBR5	~ 0	1.0875	1.5339	0.00811	0.01239	0.02179
2D x8	EBR5 IJK	~ 0	1.0871	1.5345	0.00812	0.01237	0.02166
3D x8	EBR5	~ 0	1.0862	—	0.00810	0.01234	—
3D x8	EBR5 PL	~ 0	1.0865	—	0.00810	0.01233	—

Пространственные распределения коэффициента трения, полученные при помощи схем EBR5 и EBR5 PL на подробных 3D сетках для $\alpha = 0^\circ$, представлены на рисунке 19. Видно, что вблизи передней кромки сегмента использование прямолинейных реконструкций приводит к нефизичным флуктуациям коэффициента трения, которые имеют место даже на самой подробной сетке. Также нетрудно заметить, что использование криволинейных реконструкций позволяет устранить данный эффект. Аналогичные свойства численных решений наблюдается для схем EBR3 и для других углов атаки.

4.2.4 Численные результаты на грубых сетках

Для более детального изучения свойств схем EBR с криволинейными реконструкциями проанализируем численные результаты, полученные на последовательностях 2D и 3D сеток.

Зависимости коэффициента сопротивления сил давления и коэффициента сопротивления вязких сил от количества узлов сетки на поверхности аэродинамического профиля для $\alpha = 0^\circ$ представлены на рисунке 20. Более подробные сетки ожидаемо позволяют получить более точные численные результаты, а схемы EBR5 демонстрируют более высокую точность в сравнении со схемами EBR3. Результаты расчетов на 3D сетках оказываются ближе к целевым значениям аэродинамических коэффициентов, чем соответствующие результаты на 2D сетках, что можно объяснить различием в плотности узлов между равномерными четырехугольными и равномерными треугольными сетками. Видно, что криволинейные реконструкции обеспечивают значительное повышение точности на грубых сетках; на подробных сетках отличие между результатами, полученными с помощью прямолинейных и криволинейных реконструкций, практически отсутствует из-за постепенного выпрямления криволинейных шаблонов в

пограничном слое. Отметим, что на самых грубых сетках x1 схемы EBR5 IJK и EBR5 PL позволяют получить значения аэродинамических коэффициентов, близкие к соответствующим значениям, полученным на самых подробных сетках.

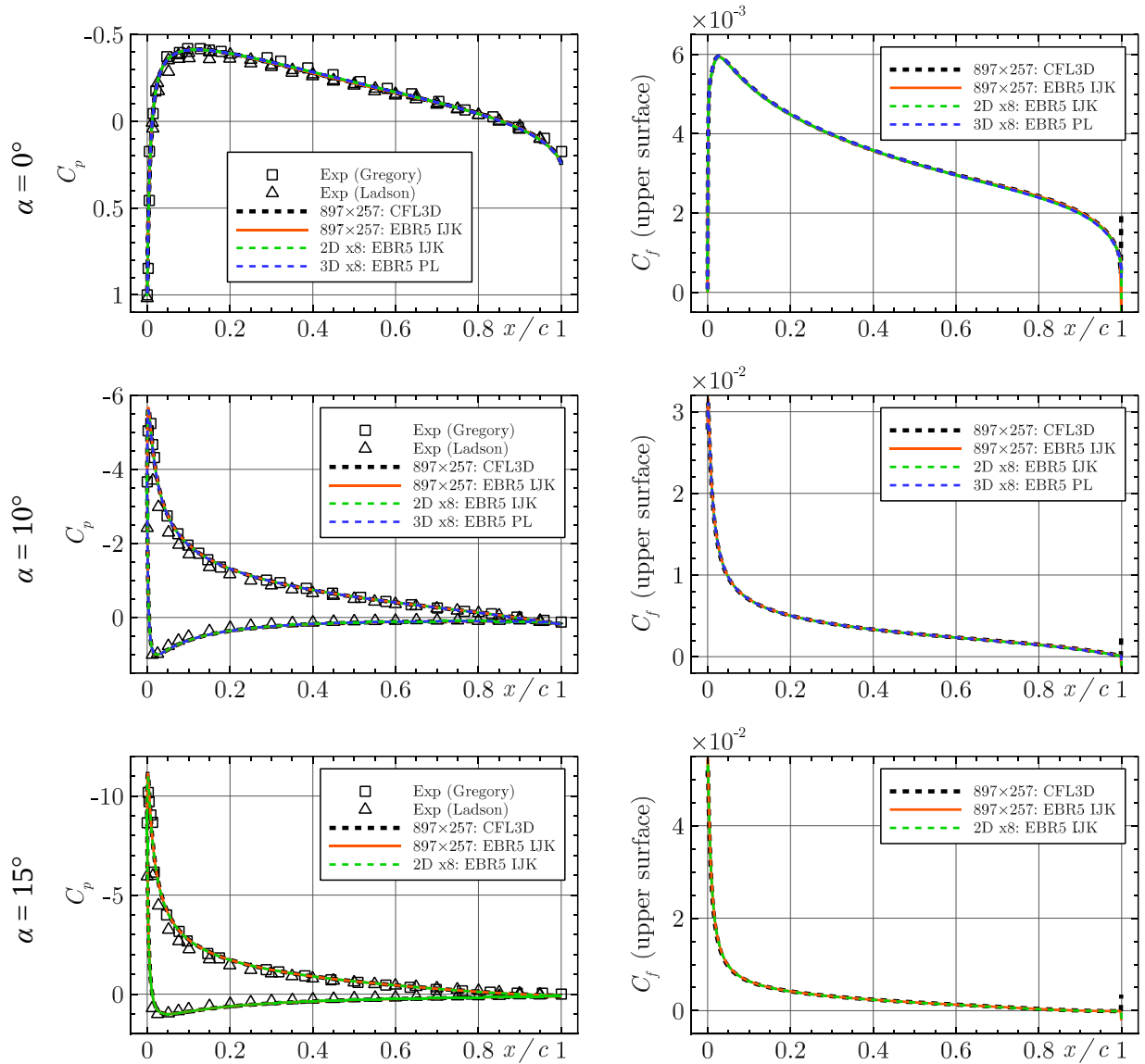


Рисунок 18. Распределения коэффициентов давления (C_p) и трения (C_f), полученные при помощи схем EBR5 IJK и EBR5 PL на подробных сетках

Описанные выше наблюдения также справедливы для $\alpha = 10^\circ$ и $\alpha = 15^\circ$, что подтверждается численными результатами, представленными на рисунках 21 и 22. Более того, данные результаты демонстрируют преимущество схем EBR3 IJK и EBR3 PL по точности не только перед схемой EBR3, но и перед схемой EBR5, которая имеет более широкий шаблон реконструкции, что еще раз подчеркивает важность использования криволинейных реконструкций в схемах EBR.

Распределения коэффициентов давления и трения, полученные на грубых 2D сетках, представлены на рисунке 23, соответствующие координаты точки отрыва потока над

поверхностью крыла приведены в таблице 7. Указанные результаты подтверждают все наблюдения, сделанные в настоящем параграфе относительно EBR схем с прямолинейными и криволинейными реконструкциями.

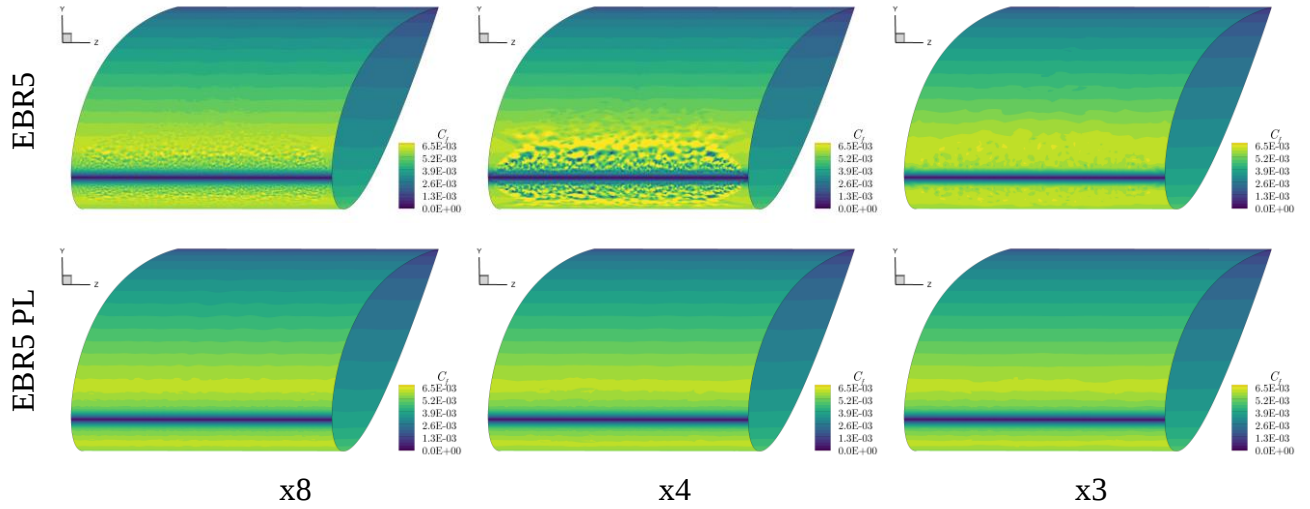


Рисунок 19. Распределения коэффициента трения на поверхности сегмента для $\alpha = 0^\circ$, полученные при помощи схем EBR5 и EBR5 PL на 3D сетках x8, x4 и x3

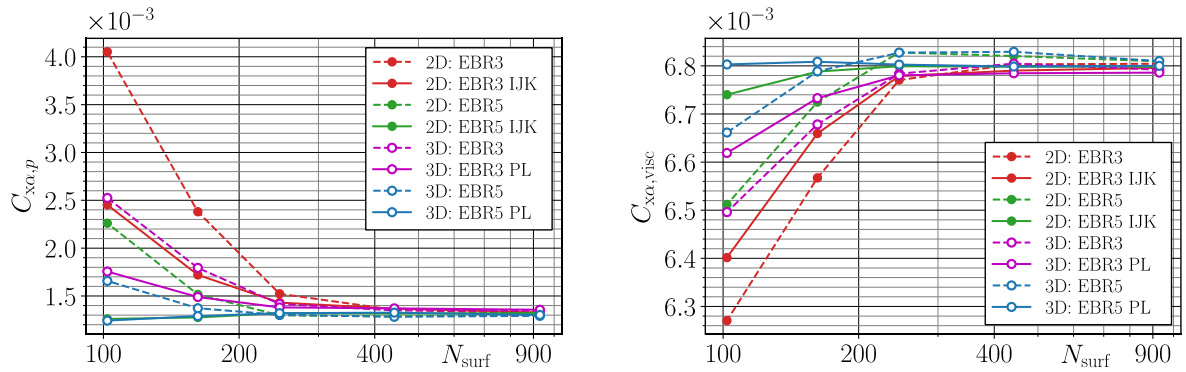


Рисунок 20. Коэффициенты сопротивления сил давления ($C_{x\alpha,p}$) и сопротивления вязких сил ($C_{x\alpha,visc}$) для $\alpha = 0^\circ$, полученные на последовательностях 2D и 3D сеток

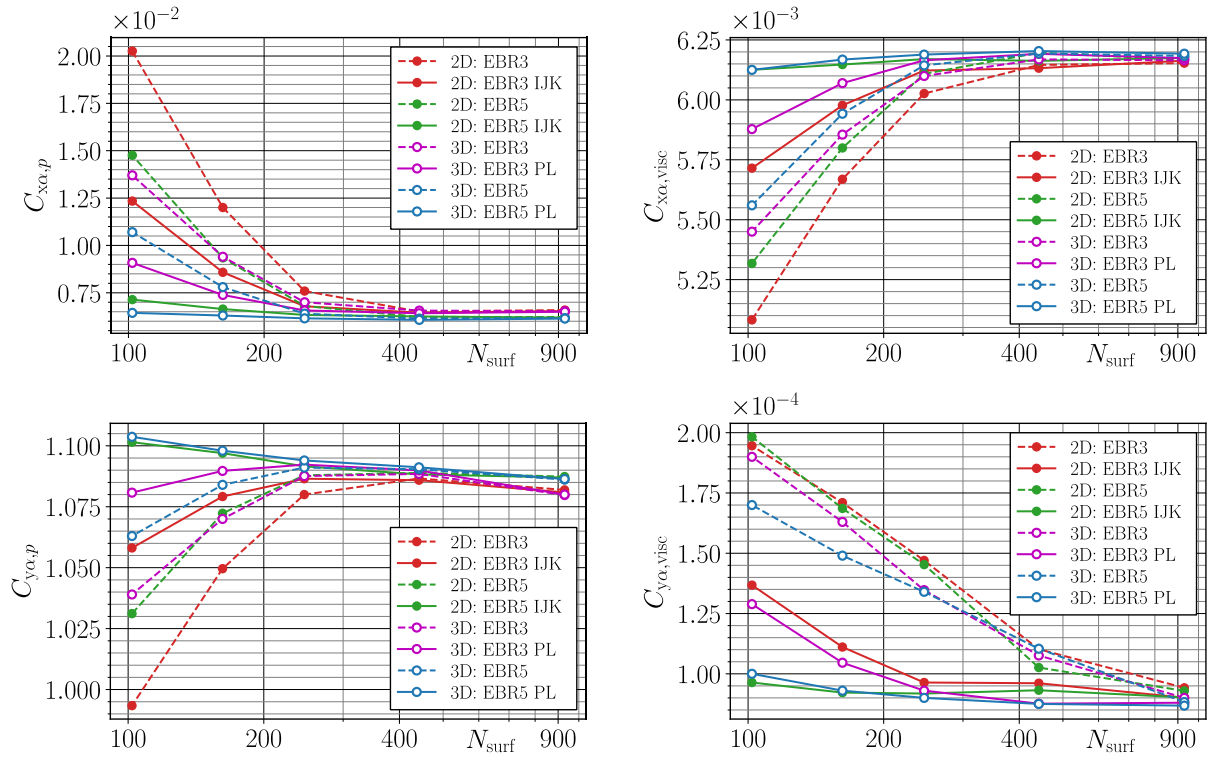


Рисунок 21. Коэффициенты сопротивления сил давления ($C_{xa,p}$), сопротивления вязких сил ($C_{xa,visc}$), подъемной силы, создаваемой полем давления ($C_{ya,p}$) и полем вязких напряжений ($C_{ya,visc}$), для $\alpha = 10^\circ$, полученные на последовательностях 2D и 3D сеток

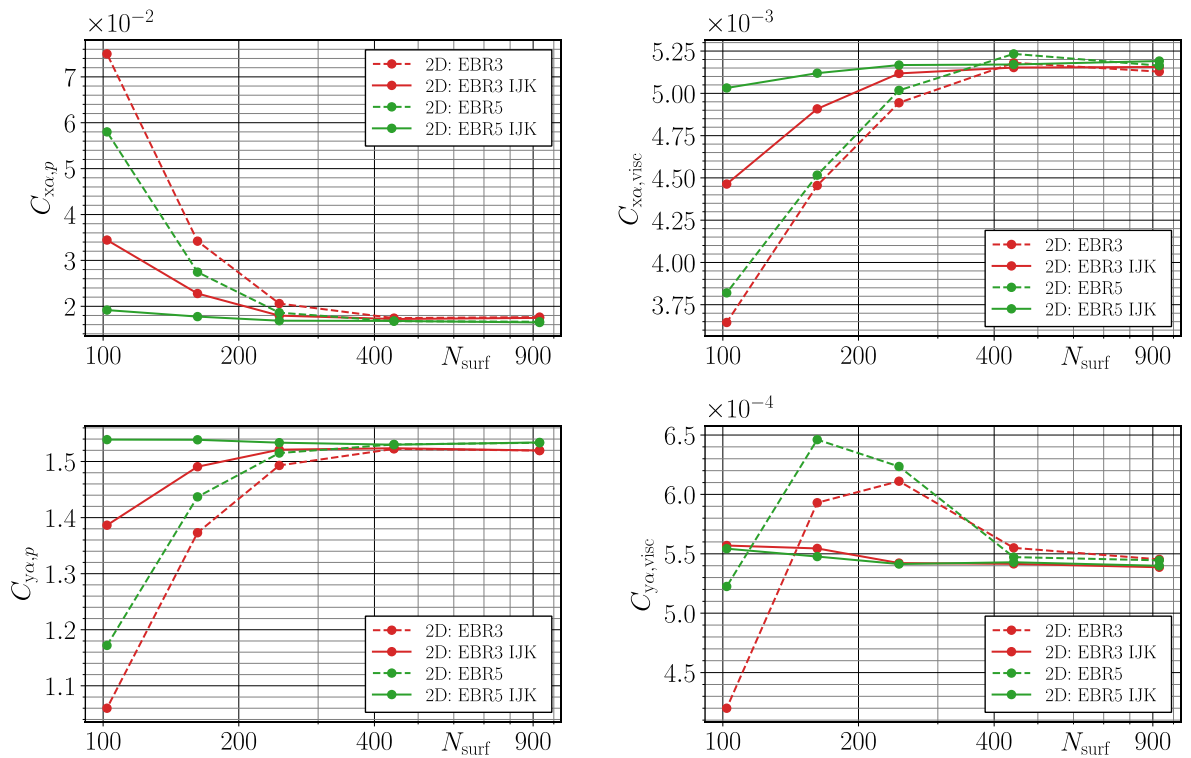


Рисунок 22. Коэффициенты сопротивления сил давления ($C_{xa,p}$), сопротивления вязких сил ($C_{xa,visc}$), подъемной силы, создаваемой полем давления ($C_{ya,p}$) и полем вязких напряжений ($C_{ya,visc}$), для $\alpha = 15^\circ$, полученные на последовательностях 2D сеток

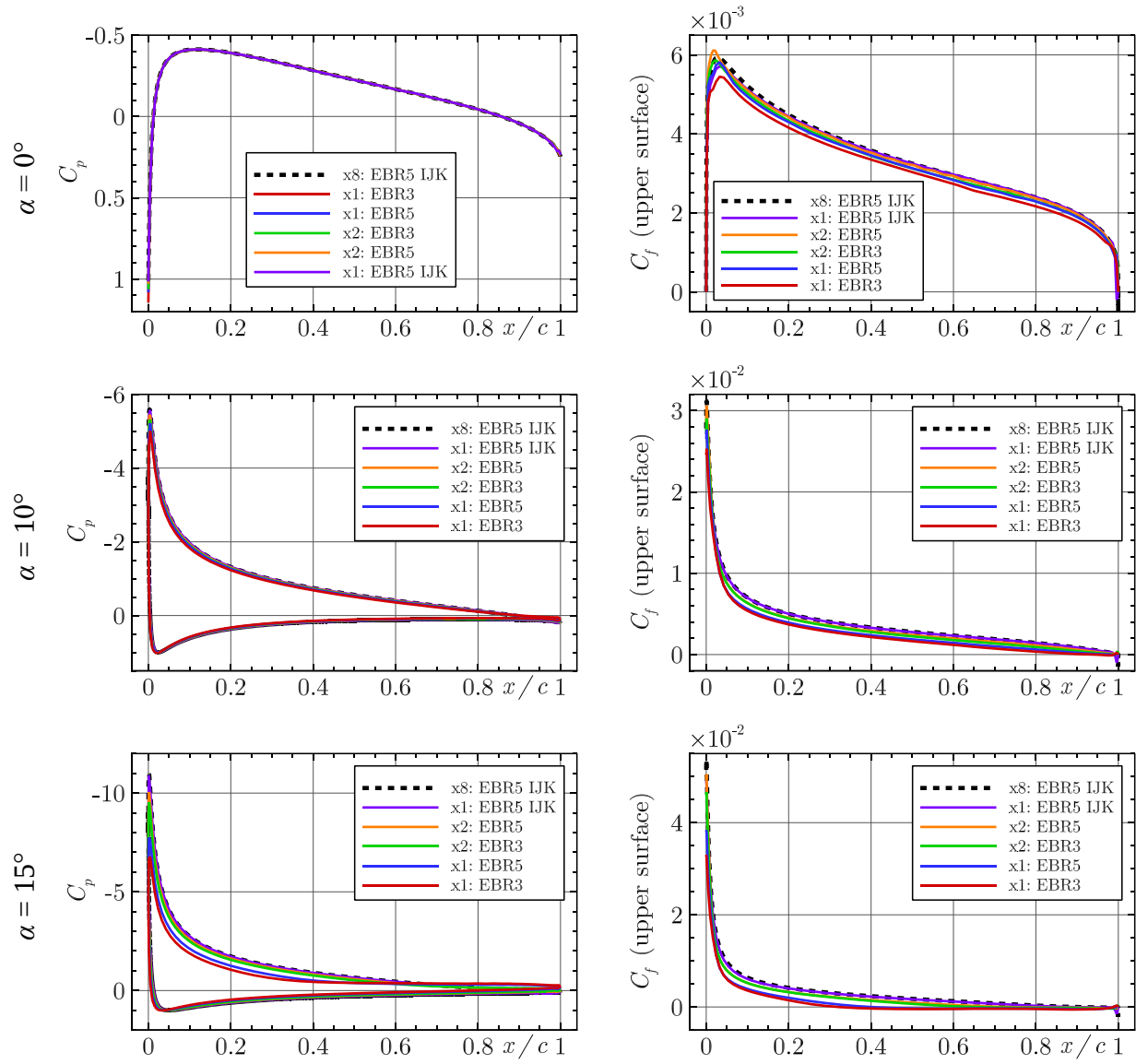


Рисунок 23. Распределения коэффициентов давления (C_p) и трения (C_f), полученные на грубых 2D сетках

Таблица 7. Координаты x/c точки отрыва при обтекании NACA 0012

Сетка	Код / Схема	$\alpha = 10^\circ$	$\alpha = 15^\circ$
897×257	CFL3D	нет отр.	0.91
897×257	EBR5 IJK	нет отр.	0.91
2D x8	EBR5 IJK	нет отр.	0.90
3D x8	EBR5 PL	нет отр.	–
2D x1	EBR5 IJK	нет отр.	0.89
2D x2	EBR5	0.994	0.74
2D x2	EBR3	0.987	0.66
2D x1	EBR5	0.980	0.40
2D x1	EBR3	0.935	0.32
3D x1	EBR5	нет отр.	–
3D x1	EBR3	0.973	–

4.3 Обтекание винта вертолета на режиме висения

4.3.1 Физическая постановка

Для сравнения EBR схем с прямолинейными и криволинейными реконструкциями на решении более практических задач была выбрана задача об обтекании модельного двухлопастного винта вертолета на режиме висения [105]. Согласно указанной постановке рассматривается вращение двухлопастного винта с лопастями, основанными на аэродинамическом профиле NASA 0012, радиус винта $R = 1.143$ м, длина хорды лопастей $c = 0.1905$ м. Для расчетов были выбраны угол установки 8° и скорости вращения 650, 1750 и 2300 об/мин. Соответствующие параметры течения вблизи законцовки лопасти приведены в таблице 8.

Таблица 8. Параметры обтекания модельного винта вертолета

об/мин	M_{tip}	$Re_{c,tip}$	U_{tip}
650	0.23	9.8×10^5	78 м/с
1750	0.61	2.6×10^6	209 м/с
2300	0.80	3.4×10^6	275 м/с

4.3.2 Вычислительная постановка

Как и в параграфе 4.2, будем использовать RANS уравнения с моделью турбулентности SA и положим поток полностью турбулентным. Введем векторную функцию $\mathbf{Q} = (\rho, \rho u_{\tilde{x}}, \rho u_{\tilde{y}}, \rho u_z, E, \rho \tilde{\nu})^T$, где $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ – оси, вращающиеся вместе с лопастью, $\tilde{\nu}$ – модифицированная турбулентная вязкость. Данная постановка приводит к возникновению в системе уравнений дополнительного члена, соответствующего вращению осей [106]. В силу симметрии задачи в RANS постановке, будем рассматривать только одну лопасть и зададим угловые периодические условия. Расчетная область представляет собой полуцилиндр радиусом 3×10^4 м и высотой 6×10^4 м, из которого исключена внутренняя часть лопасти. На поверхности лопасти заданы условия $\mathbf{u} = 0$, $\partial T / \partial \mathbf{n} = 0$ и $v_t = 0$, на внешних границах используются условия свободного потока.

Для исследования поведения EBR схем в пограничном слое были построены три сетки (x2, x1 и x1c), отличающиеся разрешением на поверхности лопасти. Общая структура данных сеток показана на рисунке 24. Сеточное разрешение вблизи законцовки лопасти представлено на рисунке 25. Параметры рассматриваемых сеток приведены в таблице 9. Для всех сеток величина первого пристеночного шага по нормали к стенке удовлетворяет требованию $y^+ < 1$ для наибольшей скорости вращения.

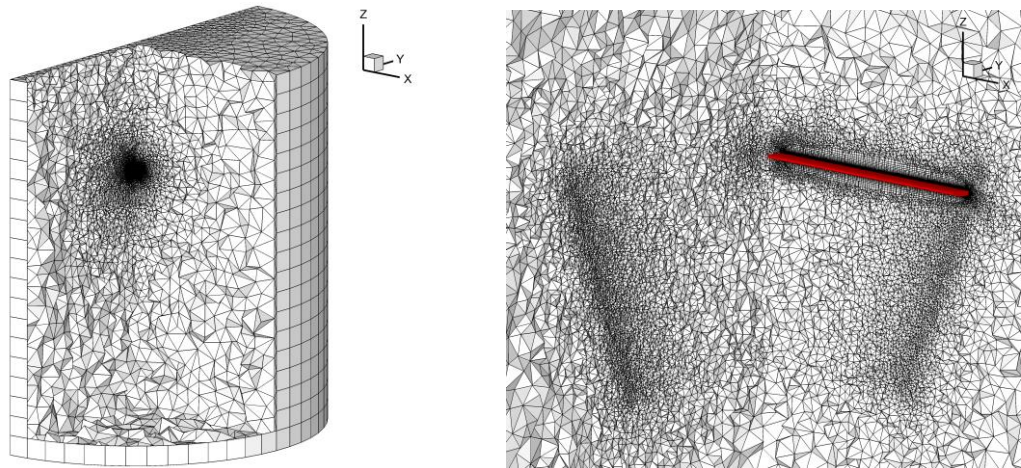


Рисунок 24. Общая структура сеток, использованных при обтекании модельного винта вертолета

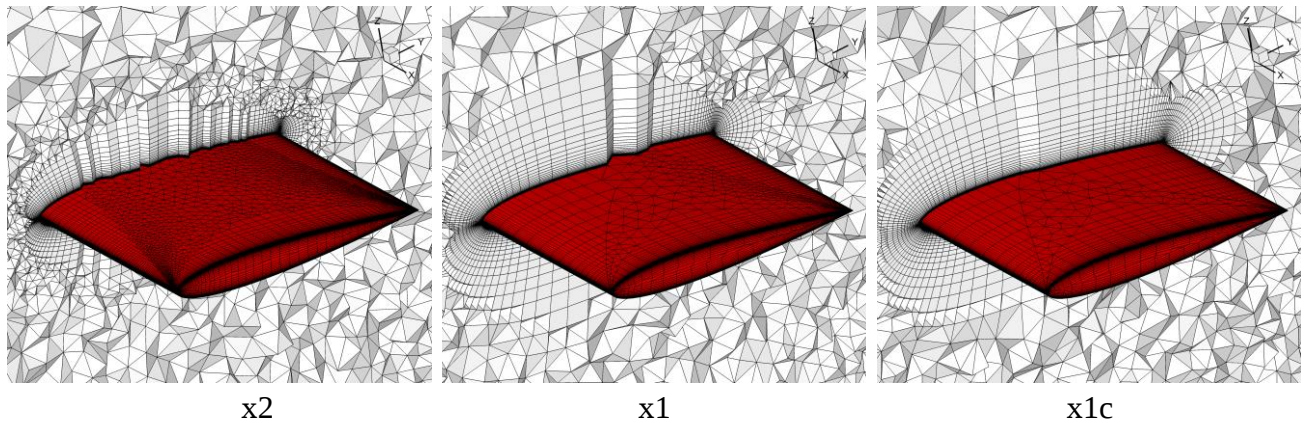


Рисунок 25. Разрешение сеток вблизи законцовки лопасти

Таблица 9. Параметры сеток, использованных для обтекания модельного винта вертолета

Сетка	$N_{\text{leading edge}}$	$N_{\text{upper edge of tip}}$	$N_{\text{trailing edge}}$	N_{surf}	N
x2	300	80	300	4.9×10^4	3.2×10^6
x1	90	50	150	1.9×10^4	1.7×10^6
x1c	80	40	75	1.2×10^4	1.3×10^6

Для скорости вращения 650 об/мин применялись схемы EBR5 и EBR5 PL, для 1750 об/мин – схемы EBR5, EBR5 PL, EBR-WENO5 и EBR-WENO5 PL, для 2300 об/мин – схемы EBR-WENO5 и EBR-WENO5 PL. Использование схем EBR-WENO5 при высоких скоростях вращения винта необходимо, так как схемы EBR5 могут терять устойчивость при приближении к трансзвуковым

режимам обтекания. Контроль устойчивости вблизи законцовки для всех схем производится при помощи параметра $M_{ratio} = 3$ (см. параграф 4.2.2).

Остальные параметры моделирования были выбраны согласно параграфу 4.2.2.

Для каждой скорости вращения только в одном расчете использовались начальные условия невозмущенного потока: для 650 об/мин в расчете по схеме EBR5 PL на сетке x2, для 1750 об/мин в расчете по схеме EBR-WENO5 PL на сетке x1c и для 2300 об/мин в расчете по схеме EBR-WENO5 PL на сетке x2. Начальные условия для всех остальных расчетов были получены посредством интерполяции соответствующих сошедшихся решений. Сходимость численных решений показана на рисунке 26.

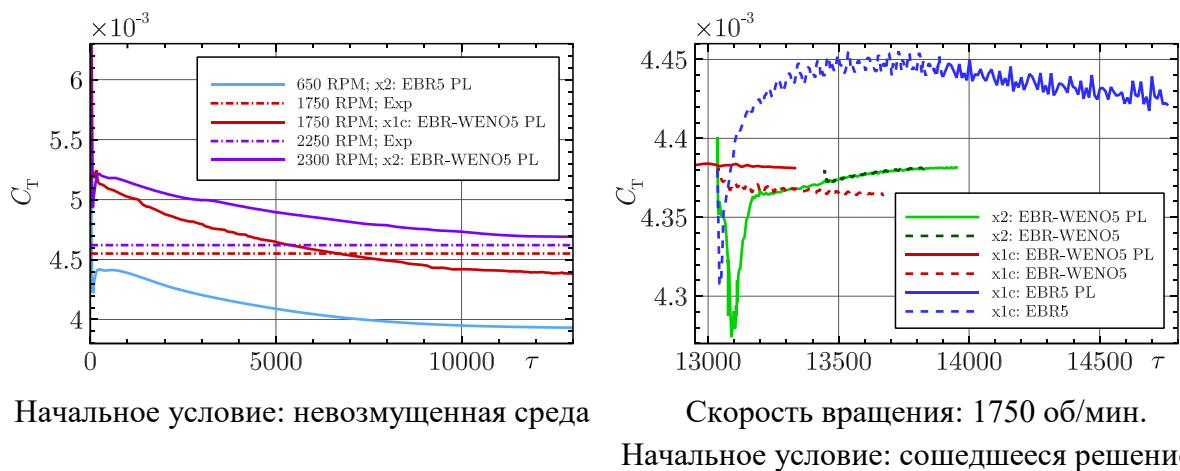


Рисунок 26. Сходимость коэффициента тяги при обтекании модельного винта вертолета (полный оборот винта соответствует временному интервалу $\Delta\tau \approx 38$)

4.3.3 Численные результаты

Поле течения, полученное при помощи схемы EBR-WENO5 PL для 1750 об/мин, представлено рисунке 27. Координаты центра концевой вихря, полученные при помощи схем EBR с криволинейными реконструкциями для различных скоростей вращения винта, показаны на рисунке 28. На рисунке 29 численные результаты сопоставлены с экспериментальными данными по коэффициенту давления. Отличия в получаемых значениях коэффициента давления при использовании прямолинейных и криволинейных реконструкций практически отсутствуют.

Проведем сравнения распределений коэффициента трения и функции плотности на поверхности лопасти. Соответствующие результаты для 650 об/мин показаны на рисунках 30 и 31. Как и в сравнении по коэффициенту давления, значимые различия между результатами схем EBR5 и EBR5 PL отсутствуют. Далее рассмотрим коэффициент трения и функцию плотности для скорости вращения 1750 об/мин, которые приведены на рисунках 32 и 33 соответственно. Хотя схемы EBR5 и EBR5 PL по-прежнему дают практически совпадающие численные решения,

заметные различия возникают между результатами, полученными при помощи схем EBR-WENO5 и EBR-WENO5 PL. По аналогии с обтеканием сегмента с профилем NACA 0012 использование схемы EBR-WENO5 с прямолинейными реконструкциями приводит к появлению локальных нефизичных флуктуаций коэффициента трения на границах между различными типами поверхностных сеток. Указанное нефизичное поведение наблюдается и в распределениях функции плотности, которое особенно отчетливо проявляется вблизи законцовки на самой грубой сетке $x1c$. Как и ранее, замена прямолинейных реконструкций на криволинейные приводит к устранению описанных численных эффектов.

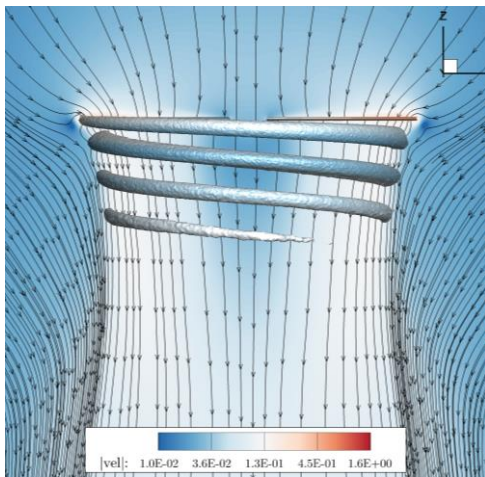


Рисунок 27. Поле модуля скорости для 1750 об/мин, полученное при помощи схемы EBR-WENO5 PL на сетке $x2$ (линии тока изображены в плоскости $y = 0$; изоповерхности соответствуют значению Q -критерия = 0.001)

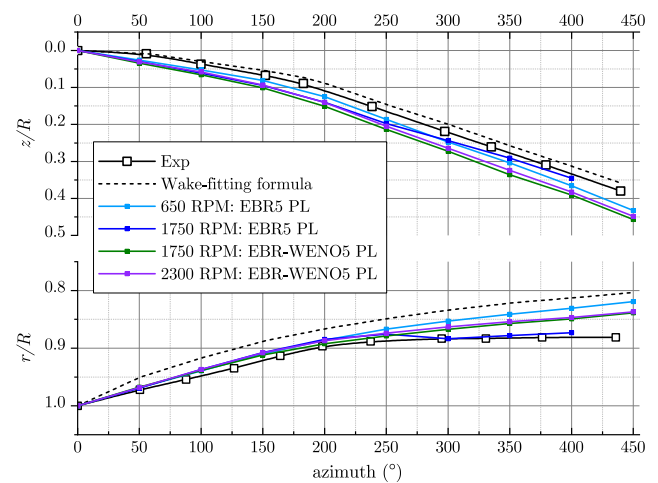


Рисунок 28: Координаты центра концевой вихря, полученные при помощи EBR схем с криволинейными реконструкциями на сетке $x2$ в сравнении с данными из [105]

Наблюдения, сделанные для схем EBR-WENO5 и EBR-WENO5 PL, полностью подтверждаются результатами для скорости вращения винта 2300 об/мин, представленными на рисунках 34 и 35.

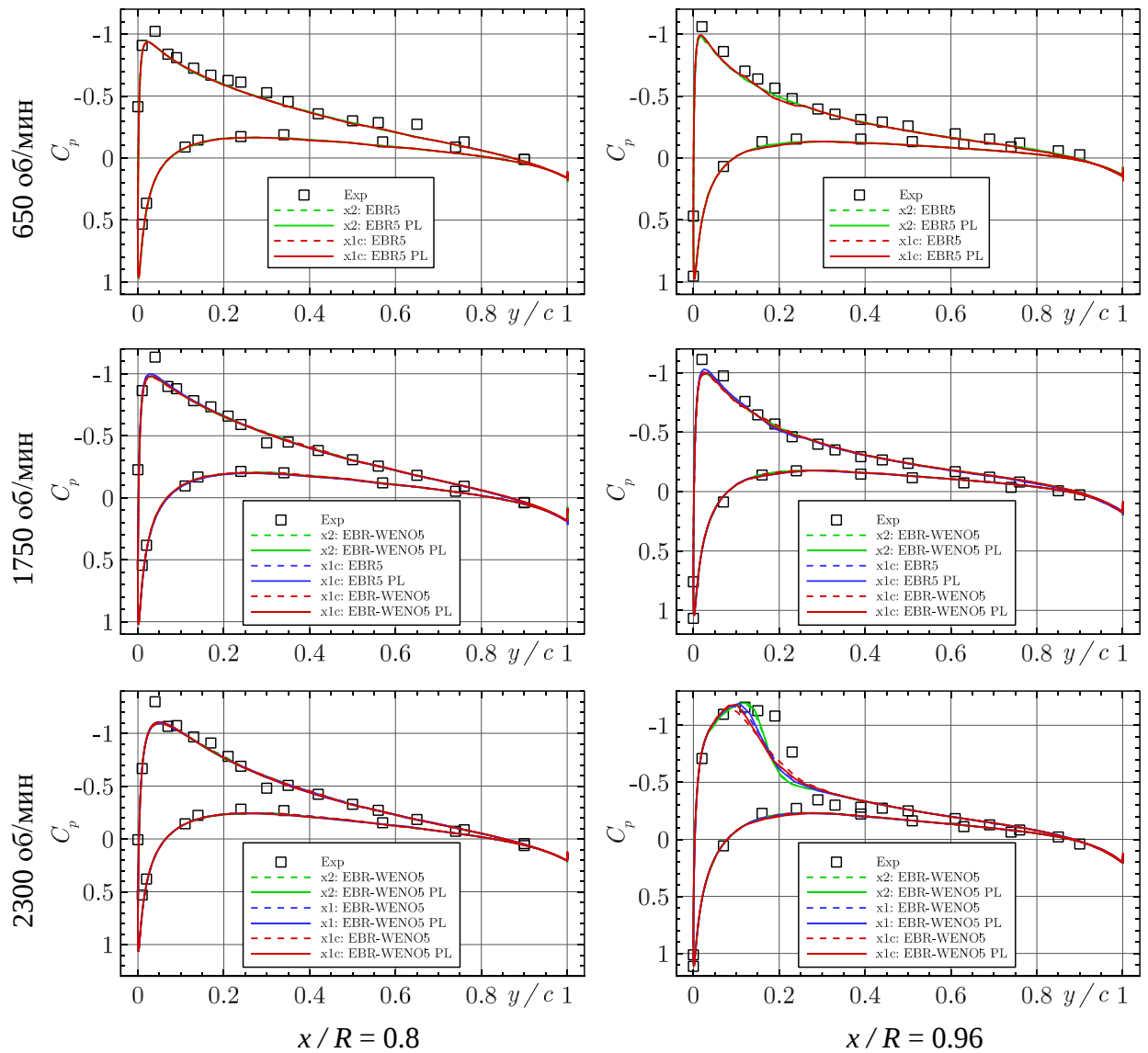


Рисунок 29. Распределения коэффициента давления, полученные при помощи EBR схем, в сравнении с экспериментальными данными [105]

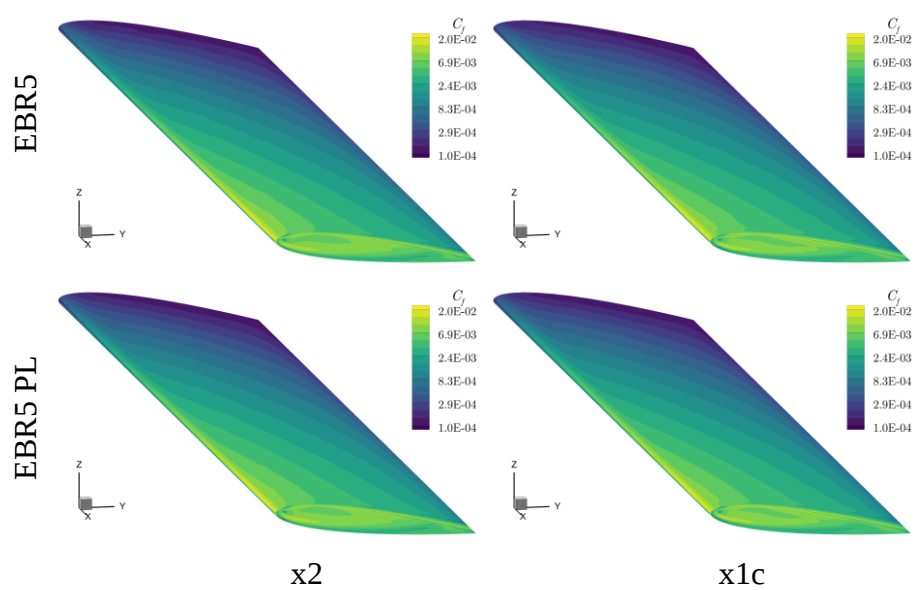


Рисунок 30. Распределения коэффициента трения на поверхности лопасти при 650 об/мин

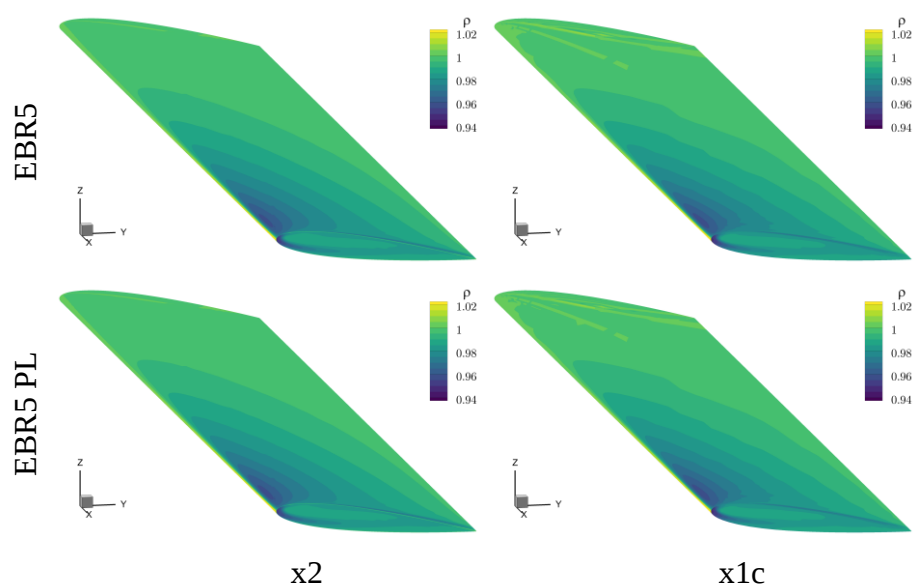


Рисунок 31. Распределения функции плотности на поверхности лопасти при 650 об/мин

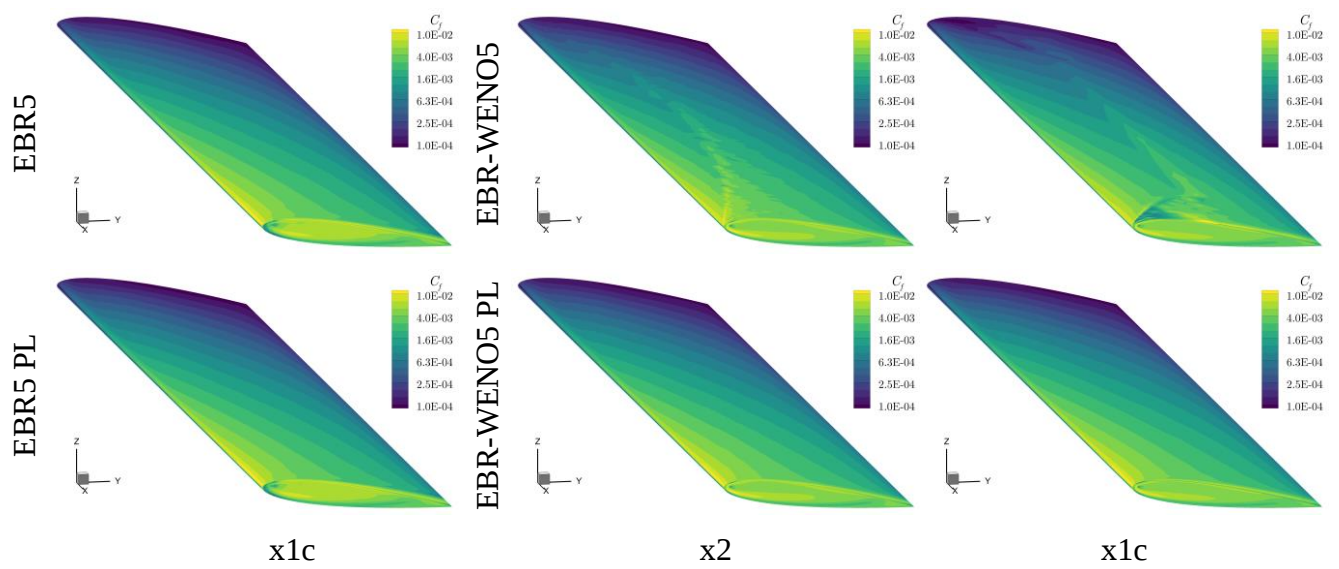


Рисунок 32. Распределения коэффициента трения на поверхности лопасти при 1750 об/мин

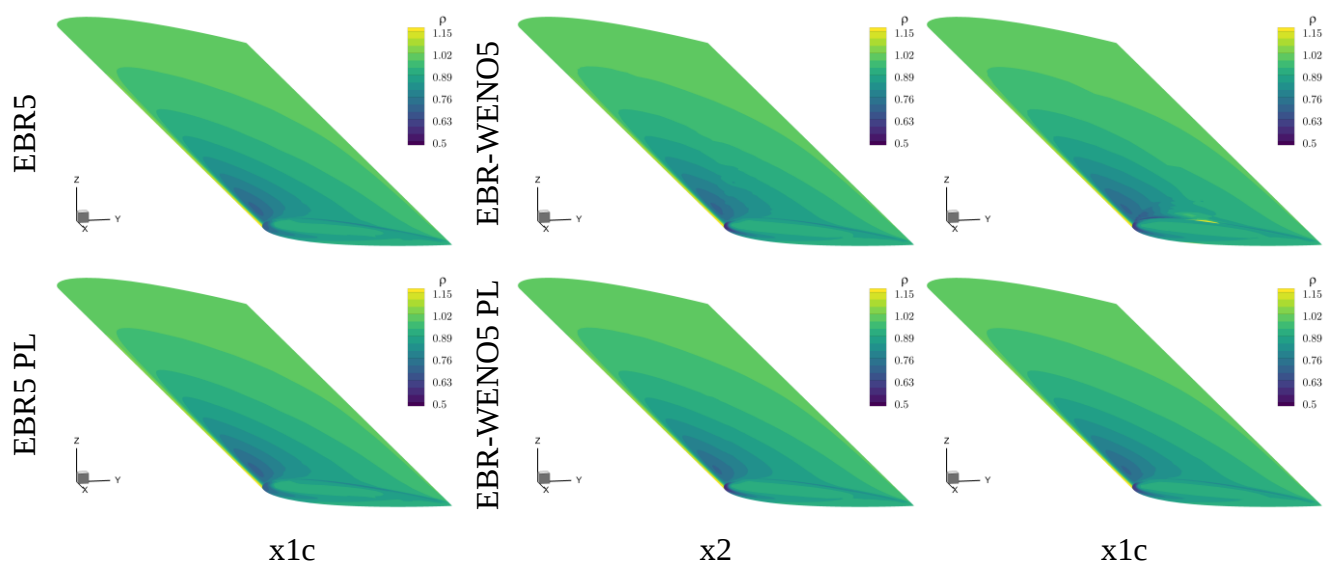


Рисунок 33. Распределения функции плотности на поверхности лопасти при 1750 об/мин

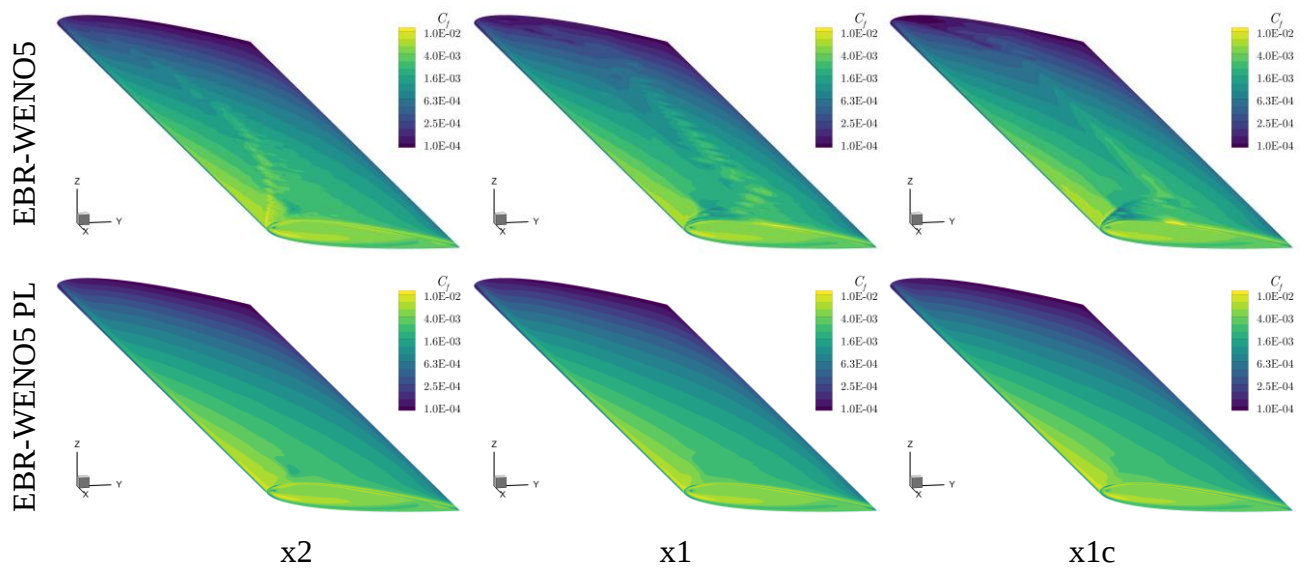


Рисунок 34. Распределения коэффициента трения на поверхности лопасти при 2300 об/мин

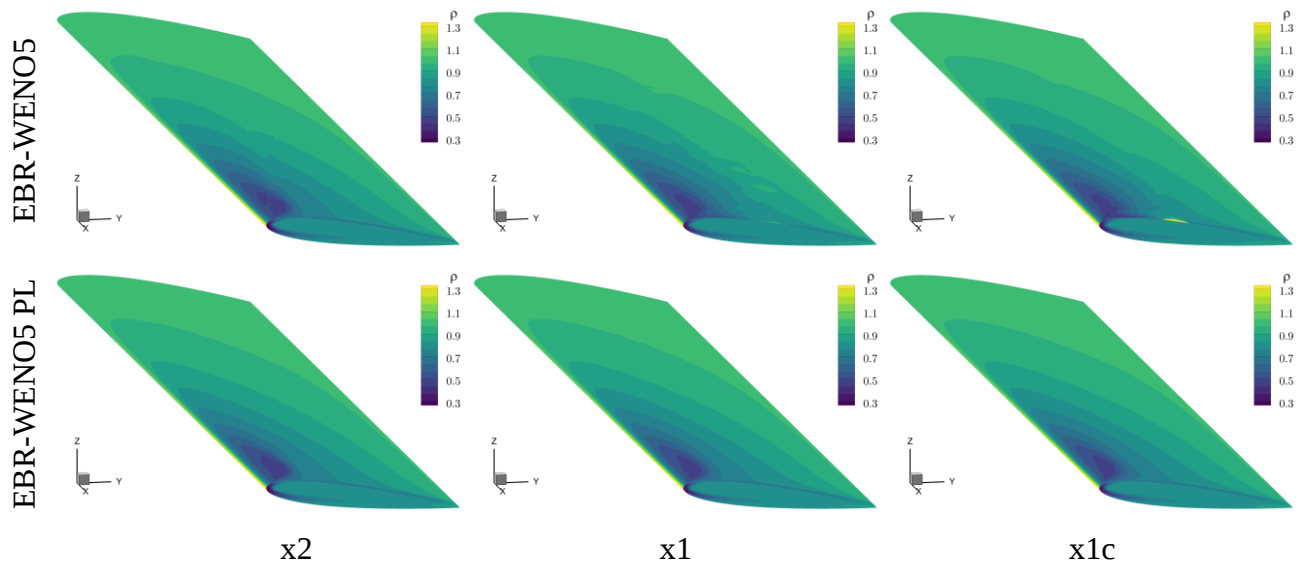


Рисунок 35. Распределения функции плотности на поверхности лопасти при 2300 об/мин

4.4 Обтекание геометрии NASA CRM-HL

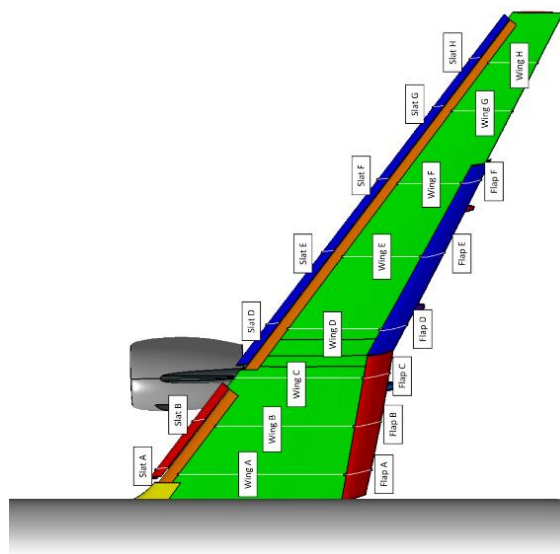
4.4.1 Физическая постановка

Для оценки применимости схемы EBR5 PL для моделирования обтекания планера самолета была выбрана постановка, использовавшаяся при проведении четвертого AIAA CFD High-Lift Prediction Workshop (HLPW). Мероприятия HLPW посвящены вопросам тестирования и валидации численных методов для решения аэродинамических задач с акцентом на анализ возможностей существующих подходов для корректного моделирования режимов, характеризующихся большими углами атаки. Основной задачей на четвертом HLPW [107] являлось обтекание 10%-ой модельной геометрии пассажирского самолета NASA Common Research Model (CRM) в конфигурации High Lift (HL) [108], соответствующей режиму посадки, т.е. с выпущенными предкрылками и закрылками. Рассматривались углы атаки от 2° до 20° .

Экспериментальные данные, опубликованные в рамках четвертого HLPW, были получены в 5-метровой низкоскоростной аэродинамической трубе QinetiQ [109] (рисунок 36а). В ходе эксперимента для каждого угла атаки были записаны значения давления на поверхности крыла в сечениях, указанных на рисунке 36б, при помощи масляных картин и шелковинок зафиксированы визуальные характеристики течения, определены коэффициенты подъемной силы и лобового сопротивления. Также были предоставлены скорректированные значения углов атаки и аэродинамических коэффициентов, позволяющие сопоставить экспериментальные данные с результатами расчетов, использующих постановку с обтеканием планера в свободном потоке.



а. 10%-ая модель CRM-HL в 5-метровой низкоскоростной аэродинамической трубе QinetiQ



б. Сечения, в которых записывались экспериментальные значения коэффициента давления

Рисунок 36. Эксперимент, проведенный в рамках четвертого HLPW [107]

Рассмотрим одну из постановок, использованных на четвертом HLPW, близкую к обтеканию планера самолета на режиме посадки. Уменьшенная 10%-ая модель CRM-HL (рисунок 37) в конфигурации с отклонением предкрылков на $30^\circ/30^\circ$ (ближний/дальний) и закрылков на $40^\circ/37^\circ$ (ближний/дальний) обтекается в свободном потоке под углом атаки $\alpha = 7.05^\circ$. Длина фюзеляжа 10%-ой модели равна 247.1 дюймам (6.276 м), полуразмах крыла равен 115.675 дюймам (2.938 м), средняя аэродинамическая хорда крыла s равна 27.58 дюймам (0.701 м) и расположена на удалении 46.875 дюймов (1.191 м) от плоскости симметрии [110]. Поток характеризуется числом Маха $M = 0.2$ и числом Рейнольдса $Re_c = 5.49 \times 10^6$, посчитанным по средней аэродинамической хорде s . Температура потока равна 289.44 К.

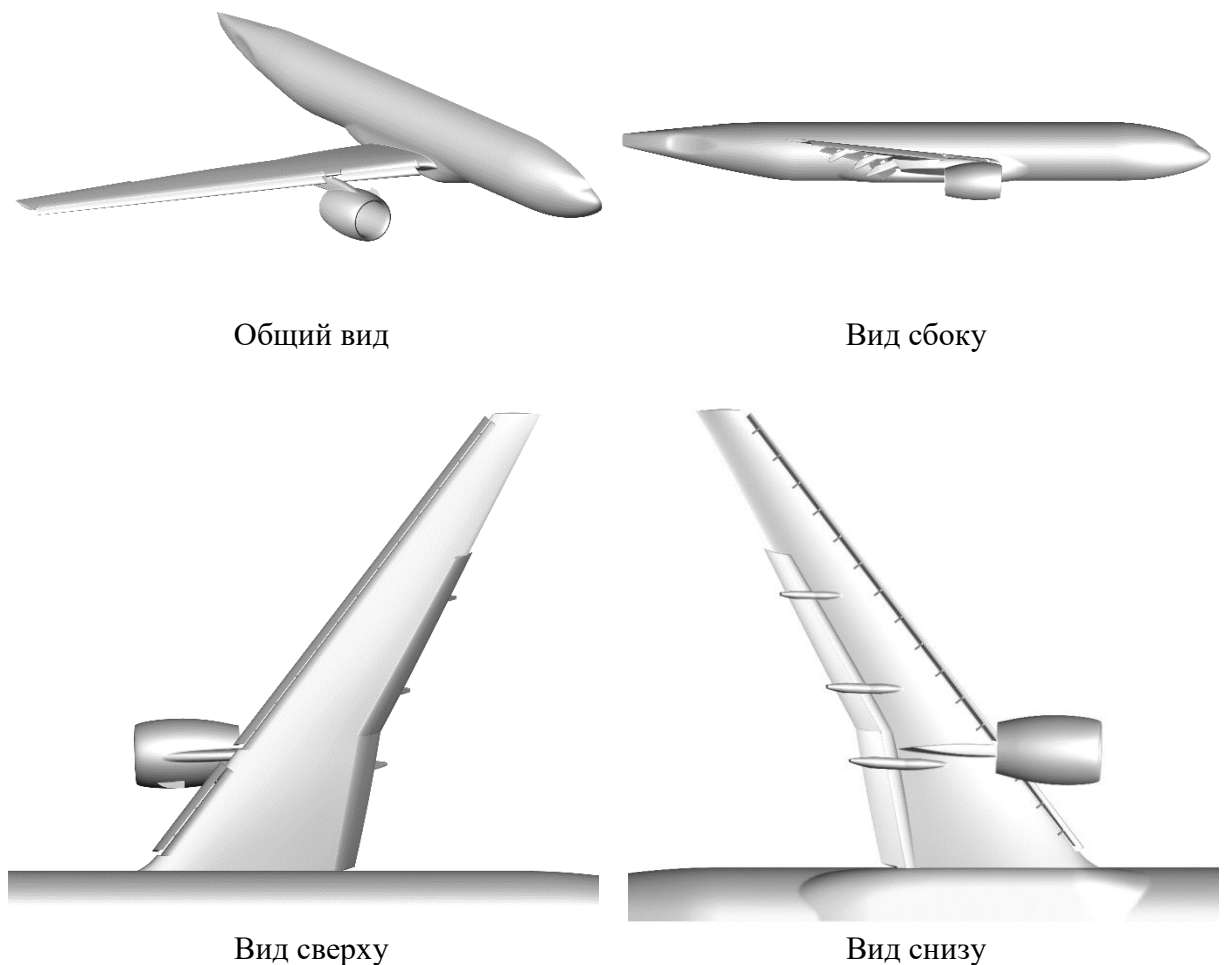


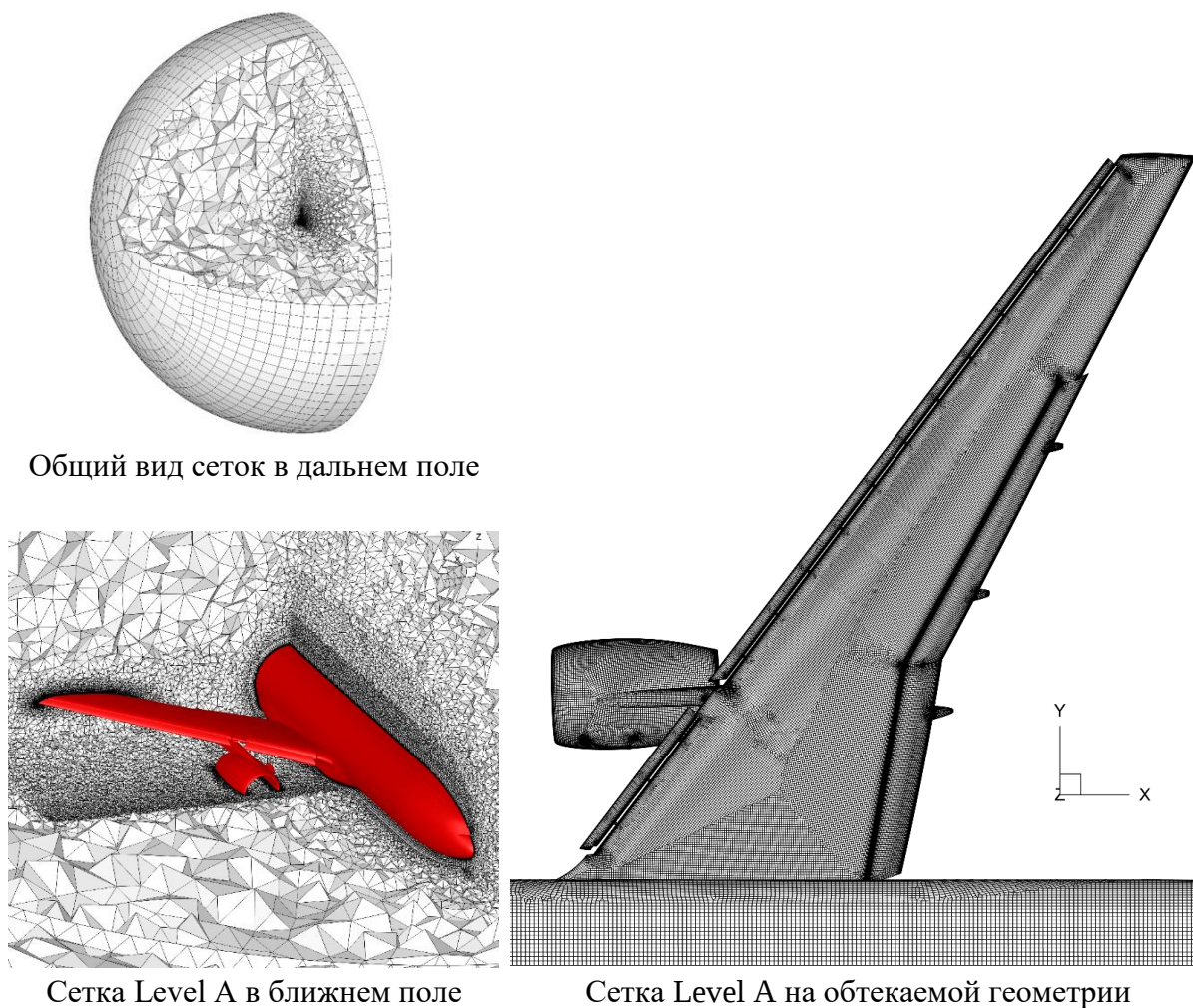
Рисунок 37. Геометрия CRM-HL в конфигурации с отклонением предкрылков на $30^\circ/30^\circ$ (ближний/дальний) и закрылков на $40^\circ/37^\circ$ (ближний/дальний)

4.4.2 Вычислительная постановка

Расчетная область представляет собой половину шара радиуса $R/c = 1700$ с исключенной из него внутренней частью обтекаемого тела. Обтекаемая геометрия располагается в центре данного шара. Ввиду симметрии задачи, расчетная область содержит только половину геометрии CRM-HL, вторая половина моделируется условиями отражения на плоскости симметрии.

Граница тела определяется условиями $\mathbf{u} = 0$, $\partial T / \partial n = 0$ и $v_t = 0$, в дальнем поле задаются условия свободного потока. Для моделирования используется RANS подход с моделью турбулентности SA, поток полагается полностью турбулентным

Расчеты будем проводить на последовательности гибридных неструктурированных сеток (Level A, Level B и Level C), предоставленной организаторами четвертого HLPW [107]. Сетки данной последовательности состоят из призматических слоев вблизи обтекаемого тела, которые при достижении изотропии ячеек по мере удаления от тела переходят в неструктурированную тетраэдральную сетку, разрешение которой постепенно уменьшается в дальнем поле (рисунок 38). Общее число узлов и число узлов на обтекаемой поверхности для использованных сеток приведены в таблице 10. Для аппроксимации конвективных потоков применялась схема EBR5 PL. Расчеты велись до статистической сходимости коэффициентов подъемной силы и лобового сопротивления.



Общий вид сеток в дальнем поле

Сетка Level A в ближнем поле

Сетка Level A на обтекаемой геометрии

Рисунок 38. Общая структура сеток, использованных при обтекании CRM-HL

Таблица 10. Коэффициенты подъемной силы (C_{ya}) и лобового сопротивления (C_{xa}), полученные при обтекании CRM-HL в свободном потоке для $\alpha = 7.05^\circ$

Сетка	N	N_{surf}	C_{ya}	C_{ya} diff	C_{ya} diff, %	C_{xa}	C_{xa} diff	C_{xa} diff, %
Level A	12 332 217	393 972	1.735	-0.044	2.45%	0.1785	-0.0082	4.40%
Level B	32 303 132	700 270	1.764	-0.015	0.82%	0.1830	-0.0037	1.99%
Level C	91 981 488	1 297 525	1.760	-0.019	1.05%	0.1835	-0.0032	1.72%
Exp	—	—	1.77862	—	—	0.18671	—	—

4.4.3 Численные результаты

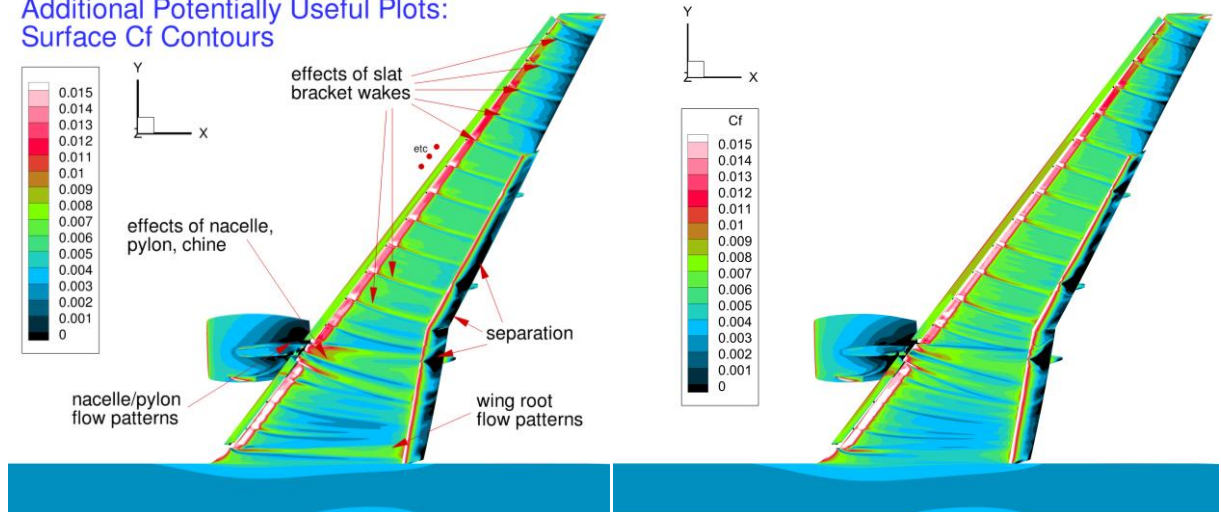
Распределения коэффициента трения и линии тока, полученные при помощи кода NOISEtte и схемы EBR PL на сетке Level C, были сопоставлены с численными данными из [107] (рисунки 39 и 40). Сравнение показало качественное соответствие численных результатов.

Сопоставление распределений коэффициента трения, полученных на различных сетках, с экспериментальной масляной картиной течения проведено на рисунке 41. Видно, что положение отрыва на закрылках в расчете предсказывается недостаточно точно. Причем увеличение сеточного разрешения не позволяет добиться существенного улучшения положения точек отрыва.

Расчетные и экспериментальные значения коэффициента давления на обтекаемой геометрии показаны на рисунках 42, 43 и 44 (положение соответствующих сечений проиллюстрировано на рисунке 36б). Наибольшего качественного соответствия удастся достигнуть на поверхности крыла; на предкрылках и закрылках, особенно в сечениях, содержащих отрывы потока, соответствие численных и экспериментальных данных несколько снижается.

Сравнение с экспериментом по коэффициентам подъемной силы и лобового сопротивления проведено в таблице 10. Согласно приведенным значениям, увеличение сеточного разрешения повышает соответствие результатов моделирования и доступных экспериментальных данных, однако наибольшее улучшение результатов достигается при переходе с сетки Level A на сетку Level B. Эффект от перехода с сетки Level B на сетку Level C менее заметен, и даже приводит к небольшому повышению отклонения от эксперимента по коэффициенту подъемной силы. Достигнутое отличие от экспериментальных данных на сетках Level B и Level C составило приблизительно 1% по коэффициенту подъемной силы и приблизительно 2% по коэффициенту лобового сопротивления.

Additional Potentially Useful Plots:
Surface Cf Contours

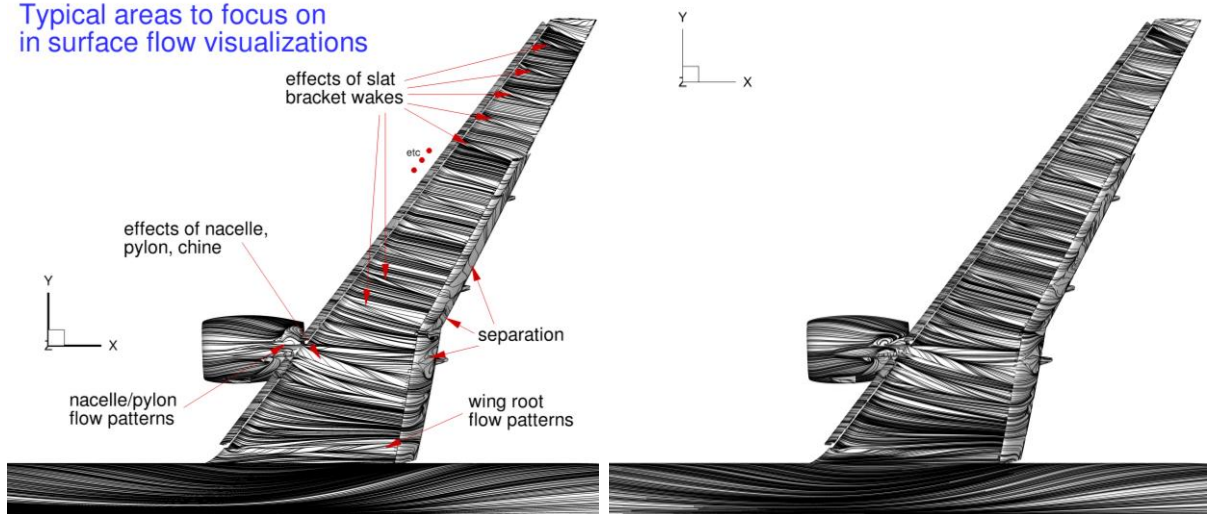


а. Численные данные из [107]

б. NOISEtte: EBR5 PL. Сетка Level C

Рисунок 39. Распределения коэффициента трения для $\alpha = 7.05^\circ$

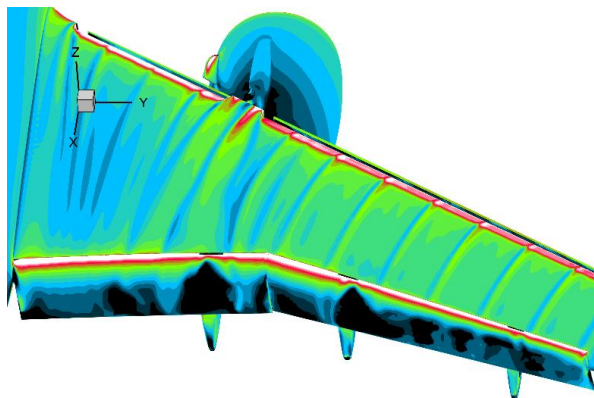
Typical areas to focus on
in surface flow visualizations



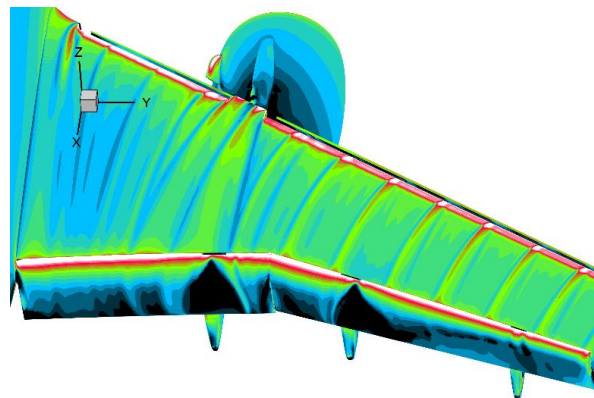
Численные данные из [107]

NOISEtte: EBR5 PL. Сетка Level C

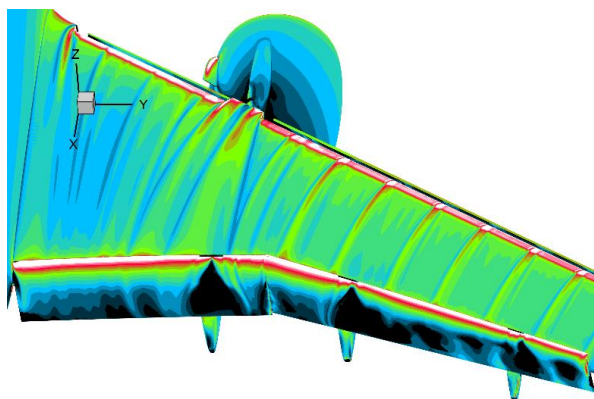
Рисунок 40. Линии тока для $\alpha = 7.05^\circ$



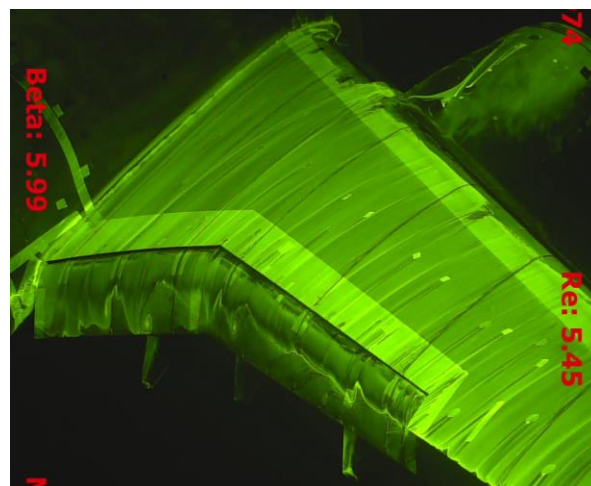
NOISEtte: EBR5 PL. Сетка Level A



NOISEtte: EBR5 PL. Сетка Level B



NOISEtte: EBR5 PL. Сетка Level C



Эксперимент [107] (масляная картина)

Рисунок 41. Распределения коэффициента трения для $\alpha = 7.05^\circ$, полученные на различных сетках, в сравнении с экспериментальными данными [107]

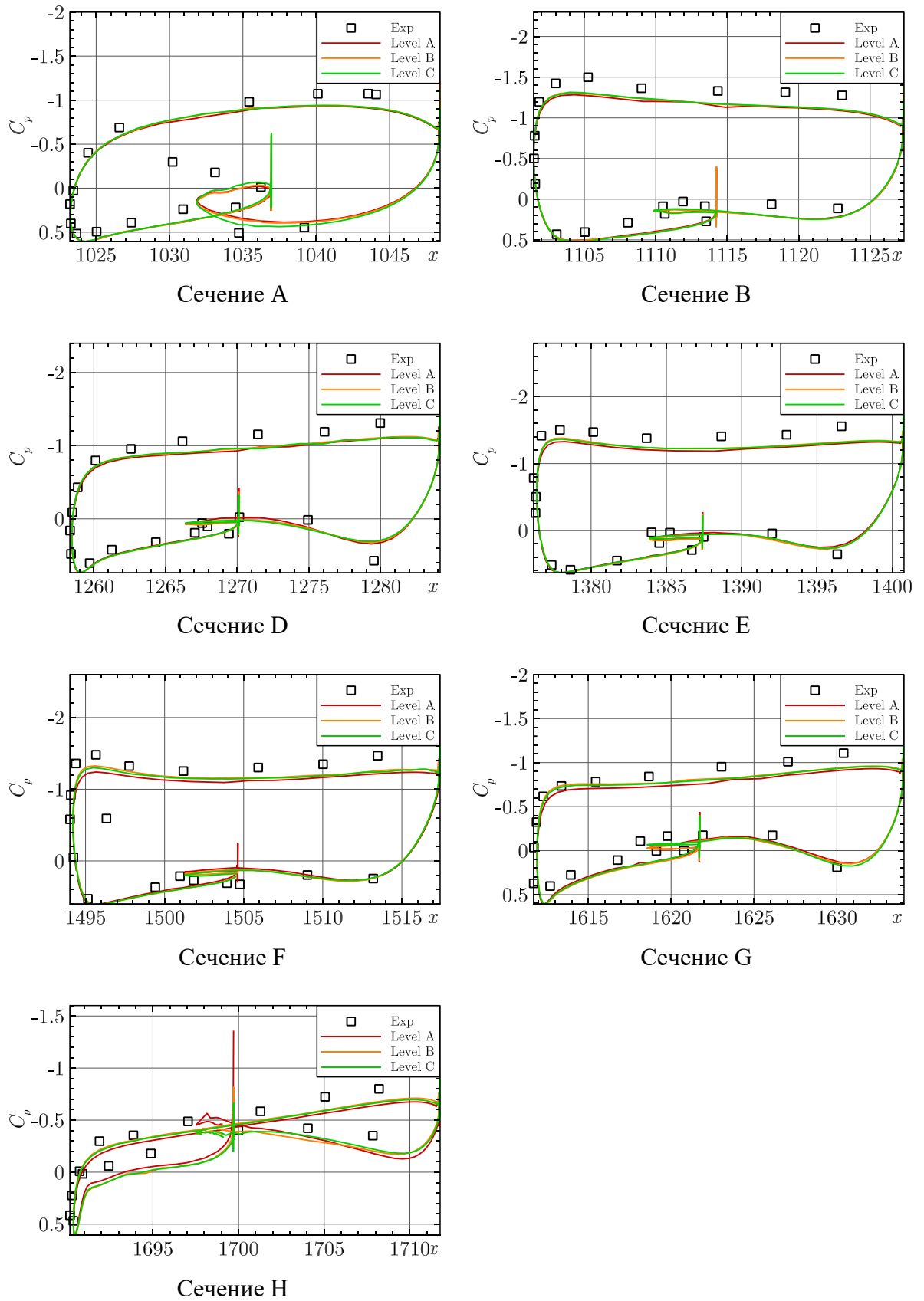


Рисунок 42. Распределения коэффициента давления на предкрылках для $\alpha = 7.05^\circ$, полученные на различных сетках, в сравнении с экспериментальными данными [107]

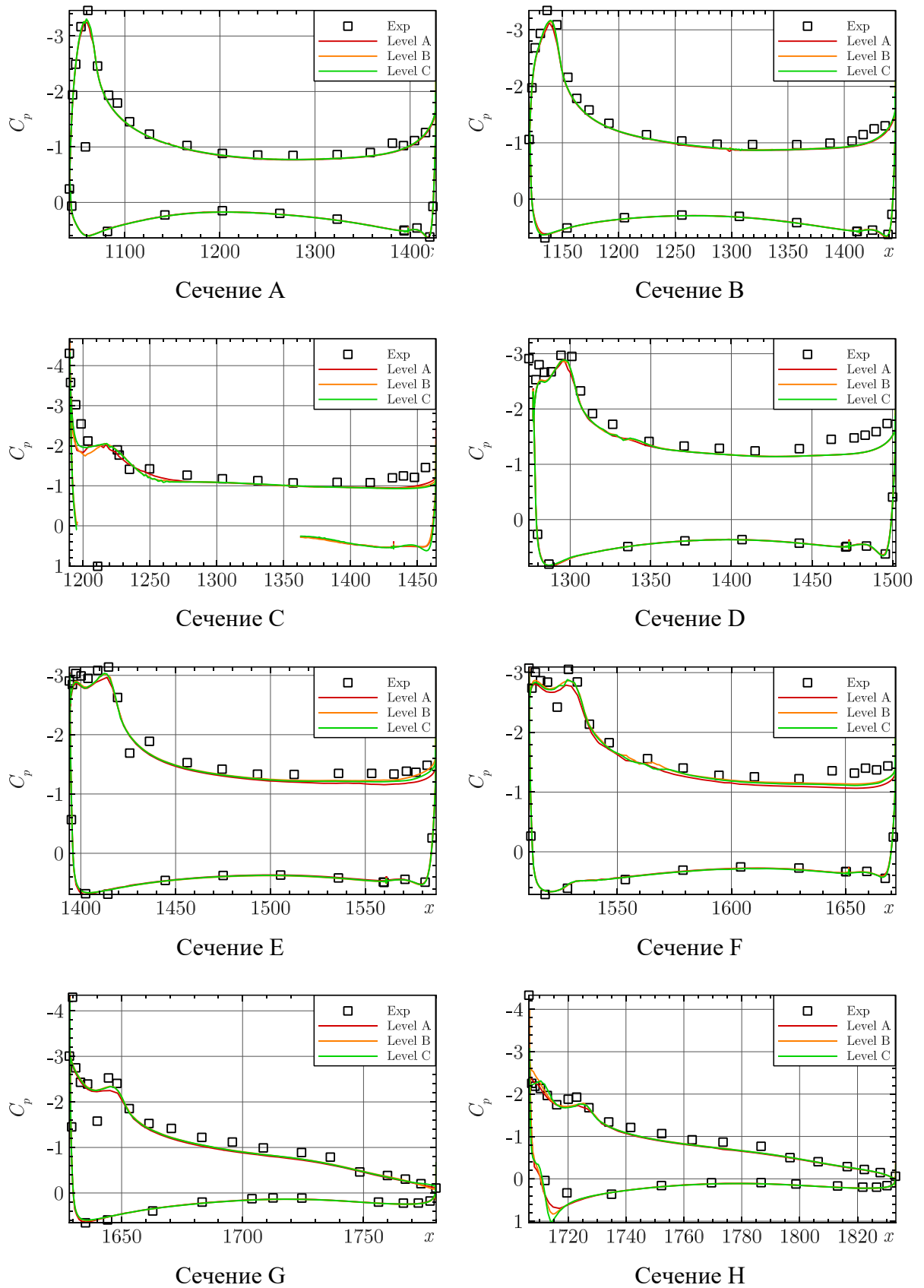


Рисунок 43. Распределения коэффициента давления на крыле для $\alpha = 7.05^\circ$, полученные на различных сетках, в сравнении с экспериментальными данными [107]

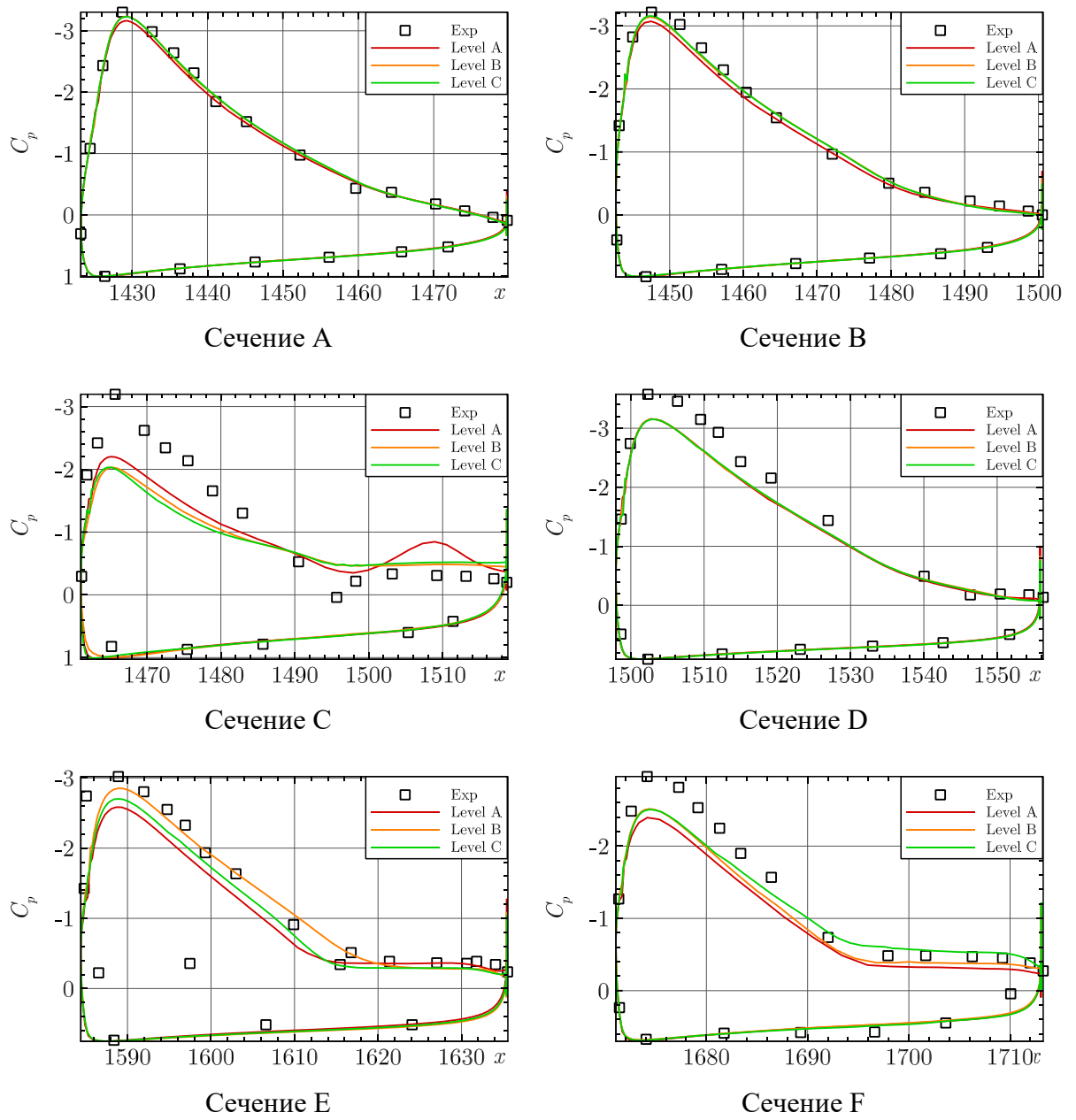


Рисунок 44. Распределения коэффициента давления на закрылках для $\alpha = 7.05^\circ$, полученные на различных сетках, в сравнении с экспериментальными данными [107]

4.5 Обтекание треугольного крыла

4.5.1 Физическая постановка

Крылья треугольной формы широко применяются для летательных аппаратов, предназначенных для трансзвуковых и сверхзвуковых скоростей полета. Основным преимуществом данных крыльев по сравнению со стреловидными крыльями является обеспечение меньшей силы лобового сопротивления и большей прочности планера на сверхзвуковых режимах полета. На дозвуковых скоростях крылья треугольной формы в сравнении со стреловидными крыльями характеризуются меньшим аэродинамическим качеством, а потому требуют повышения угла атаки для сохранения величины подъемной силы. При значительном повышении угла атаки, что наиболее характерно для режимов снижения и посадки, над поверхностью треугольного крыла формируется устойчивое вихревое течение. На углах атаки, близких к критическому, в ядре основного вихря возникает обратный градиент давления, приводящий к существенно нестационарному течению вблизи задней кромки крыла, которое в литературе часто обозначается как распад или «взрыв» вихря (vortex breakdown).

В настоящем параграфе проведем тестирование схемы EBR5 PL на задаче моделирования обтекания треугольного крыла с острой передней кромкой в постановках, предложенных в рамках второго International Vortex Flow Experiment (VFE-2) [111–113]. Геометрия крыла, его основные параметры и расположение сечений, в которых производилось измерение коэффициента давления и компонент вектора скорости, приведены на рисунке 45. Рассмотрим следующие режимы обтекания:

1. $M = 0.14$, $Re_{mac} = 2 \times 10^6$, $\alpha = 13^\circ$,
2. $M = 0.14$, $Re_{mac} = 2 \times 10^6$, $\alpha = 18^\circ$,
3. $M = 0.07$, $Re_{mac} = 1 \times 10^6$, $\alpha = 23^\circ$,

где M – число Маха, Re_{mac} – число Рейнольдса, посчитанное по средней аэродинамической хорде $c_{mac} = 2/3 \times c_r$, c_r – корневая хорда, α – угол атаки. Соответствующие экспериментальные данные были получены в Мюнхенском техническом университете (TUM) [112–114].

4.5.2 Вычислительная постановка

Моделирование первых двух режимов обтекания проводилось в рамках RANS подхода, третьего – в рамках DDES подхода. Для RANS расчетов использовались модели турбулентности SA RC [74], SST [12], SST RC [75], SST RC Mod [76]. Для DDES расчетов в LES области применялся подсеточный масштаб $\Delta = \tilde{\Delta}_\omega$ [17] и подсеточная LES модель σ [77], в RANS области использовалась модель турбулентности SA [11].

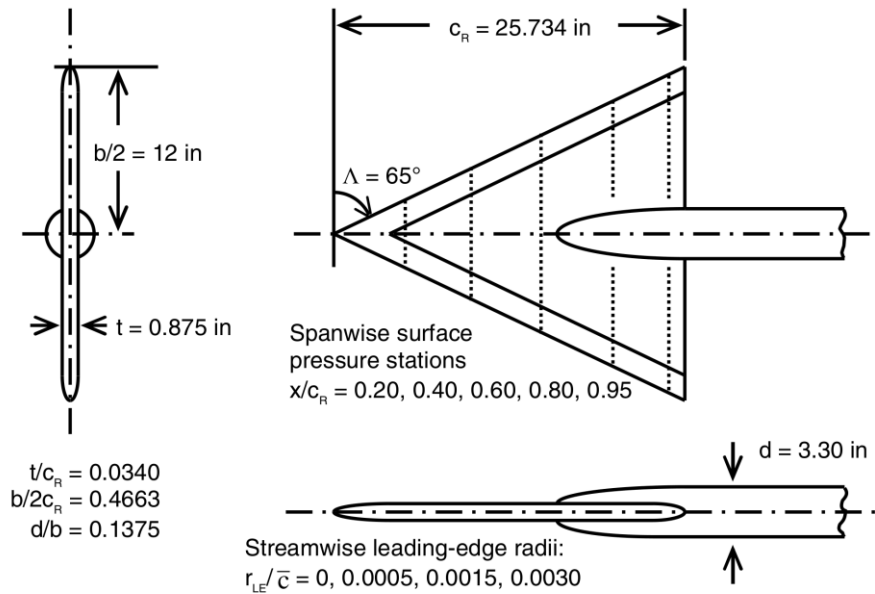


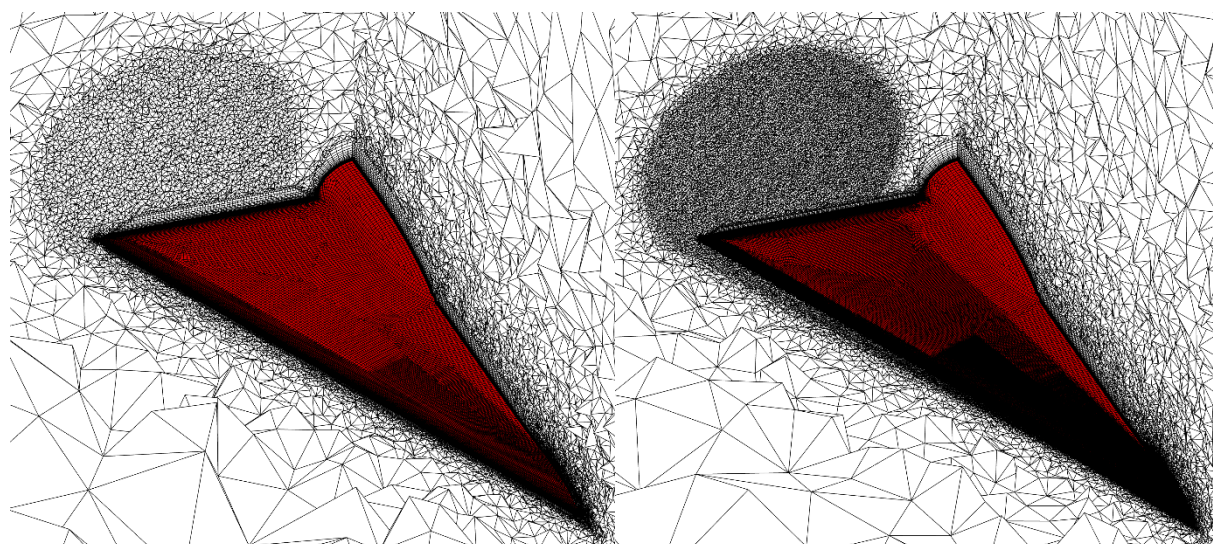
Рисунок 45. Геометрия треугольного крыла (иллюстрация взята из работы [111]). Пунктиром обозначены сечения, в которых производилось измерение коэффициента давления и продольной компоненты вектора скорости

Размер расчетной области по каждому направлению был равен $200c_R$. В плоскости $y = 0$ задавались условия проскальзывания, в дальнем поле использовались условия однородного потока. На границе крыла задавались условия прилипания и адиабатичности.

В качестве схемы для аппроксимации конвективных потоков применялась схема EBR5 PL, для аппроксимации вязких потоков использовался метод локальных разбиений [79]. Интегрирование по времени проводилось по неявной схеме BDF1 в случае RANS расчетов и неявной схеме BDF2 в случае DDES расчетов. На каждом шаге по времени для решения системы нелинейных уравнений применялся метод Ньютона. В RANS расчетах использовалась одна итерация метода Ньютона, в DDES расчетах – две. Решение системы линейных уравнений определялось посредством метода BiCGStab с предобуславливателем SGS.

RANS моделирование проводилось на двух сетках: Coarse и Fine (рисунок 46). Шаг по времени выбирался максимальным, обеспечивающим стабильность счета. По достижении установившегося режима для получения стационарной картины течения производилось осреднение решения на интервале в 10 безразмерных единиц времени.

Для DDES моделирования использовалась только сетка Fine, минимальный вес противоточной компоненты схемы EBR5 PL в области высокого сеточного разрешения полагался равным 0.2. Шаг по времени выбирался исходя из рекомендаций [114,116] и был равен 3×10^{-4} безразмерных единиц времени. Для получения осредненных характеристик течения использовался интервал осреднения, равный 12.6 безразмерным единицам времени.



Сетка Coarse (3 572 912 узлов,
59 188 узлов на поверхности крыла)

Сетка Fine (10 918 276 узлов,
149 331 узлов на поверхности крыла)

Рисунок 46. Сетки, используемые для моделирования обтекания треугольного крыла

4.5.3 Численные результаты

Результаты моделирования обтекания треугольного крыла для $M = 0.14$, $Re_{mac} = 2 \times 10^6$, $\alpha = 13^\circ$ представлены на рисунках 47 и 48. Видно, что как на грубой, так и на подробной сетке, результаты, наиболее близкие к экспериментальным данным, были получены при помощи модели SST без поправки на кривизну линий тока и вращение. Стоит отметить, что модель SST RC Mod (как и остальные модели с RC поправками) завышает интенсивность вихря в передней части крыла. Нетрудно видеть, что для данной постановки выбор модели турбулентности оказывает большее влияние на получаемое решение, нежели изменение сеточного разрешения.

Результаты моделирования обтекания треугольного крыла для $M = 0.14$, $Re_{mac} = 2 \times 10^6$, $\alpha = 18^\circ$ представлены на рисунках 49 и 50. Наибольшее качественное соответствие экспериментальным данным по значениям коэффициента давления обеспечивает модель SST RC Mod, хотя даже у нее наблюдаются существенные расхождения с экспериментом по пространственному распределению продольной компоненты скорости. Модель SA RC в целом также дает качественно соответствующий эксперименту результат, но имеет при этом тенденцию к занижению турбулентной вязкости, и, как следствие, к повышению интенсивности моделируемых вихрей. Отметим, что использование модели SST RC привело к возникновению ложного «взрыва» вихря на обеих сетках. Данное наблюдение подтверждается повышением коэффициента давления на 0.3 в сечении $x/c_r = 0.8$ на подробной сетке.

Мгновенное и осредненное поля течения, полученные при DDES моделировании режима с $M = 0.07$, $Re_{mac} = 1 \times 10^6$, $\alpha = 23^\circ$ на подробной сетке, приведены на рисунке 51. Видно, что

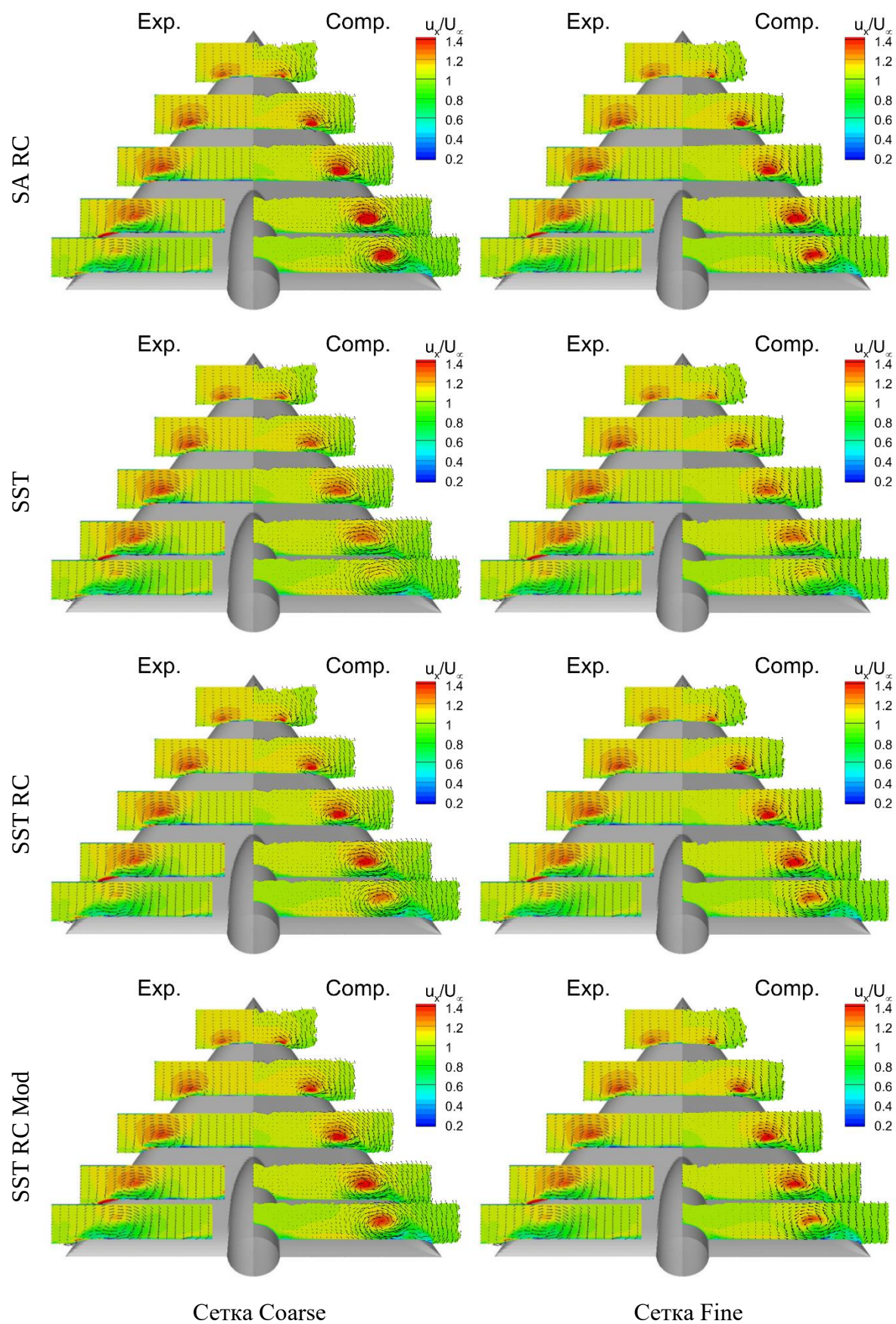


Рисунок 47. $M = 0.14$, $Re_{mac} = 2 \times 10^6$, $\alpha = 13^\circ$. Распределения продольной компоненты скорости в сечениях

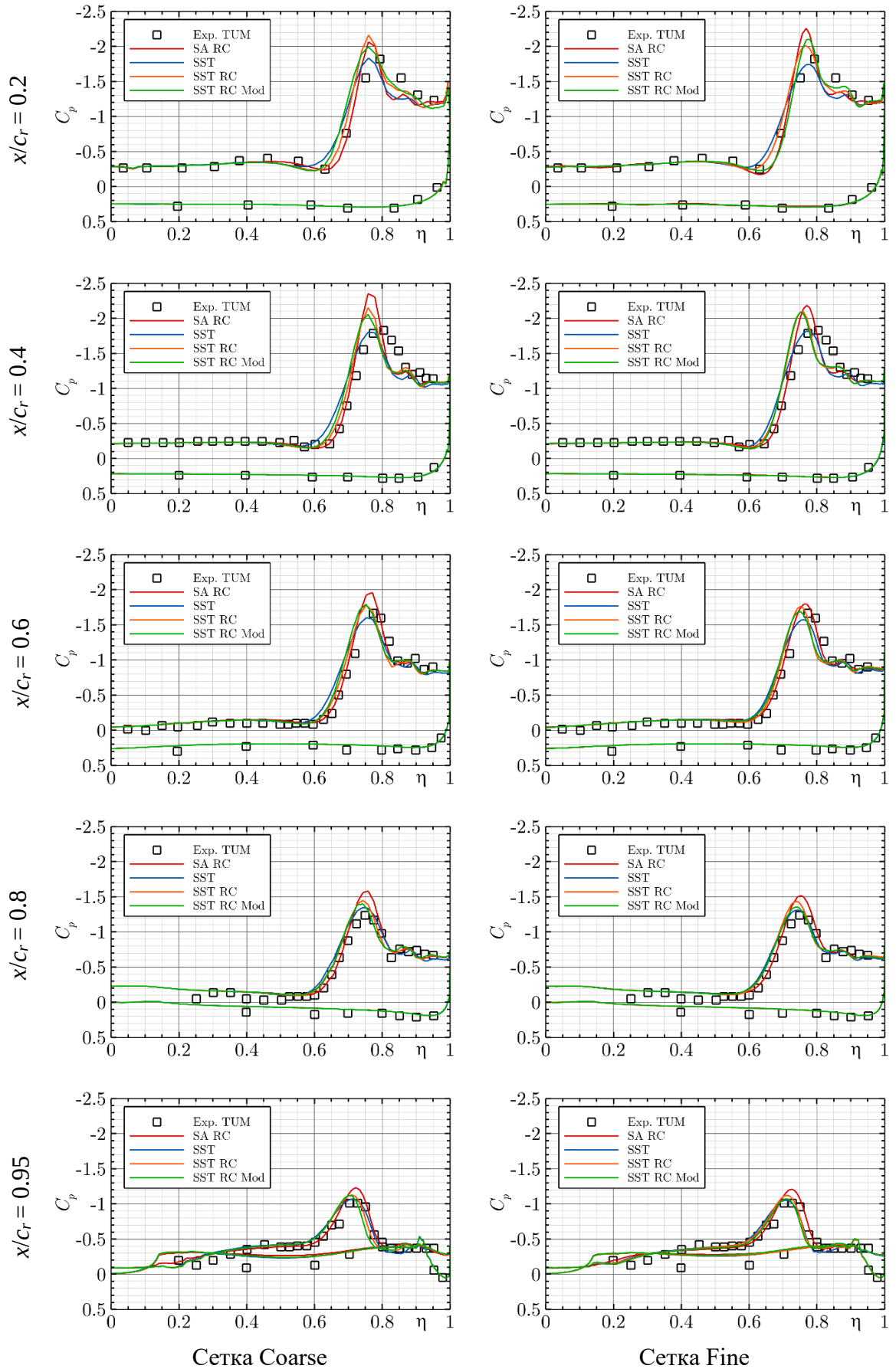


Рисунок 48. $M = 0.14$, $Re_{mac} = 2 \times 10^6$, $\alpha = 13^\circ$. Распределения коэффициента давления в сечениях

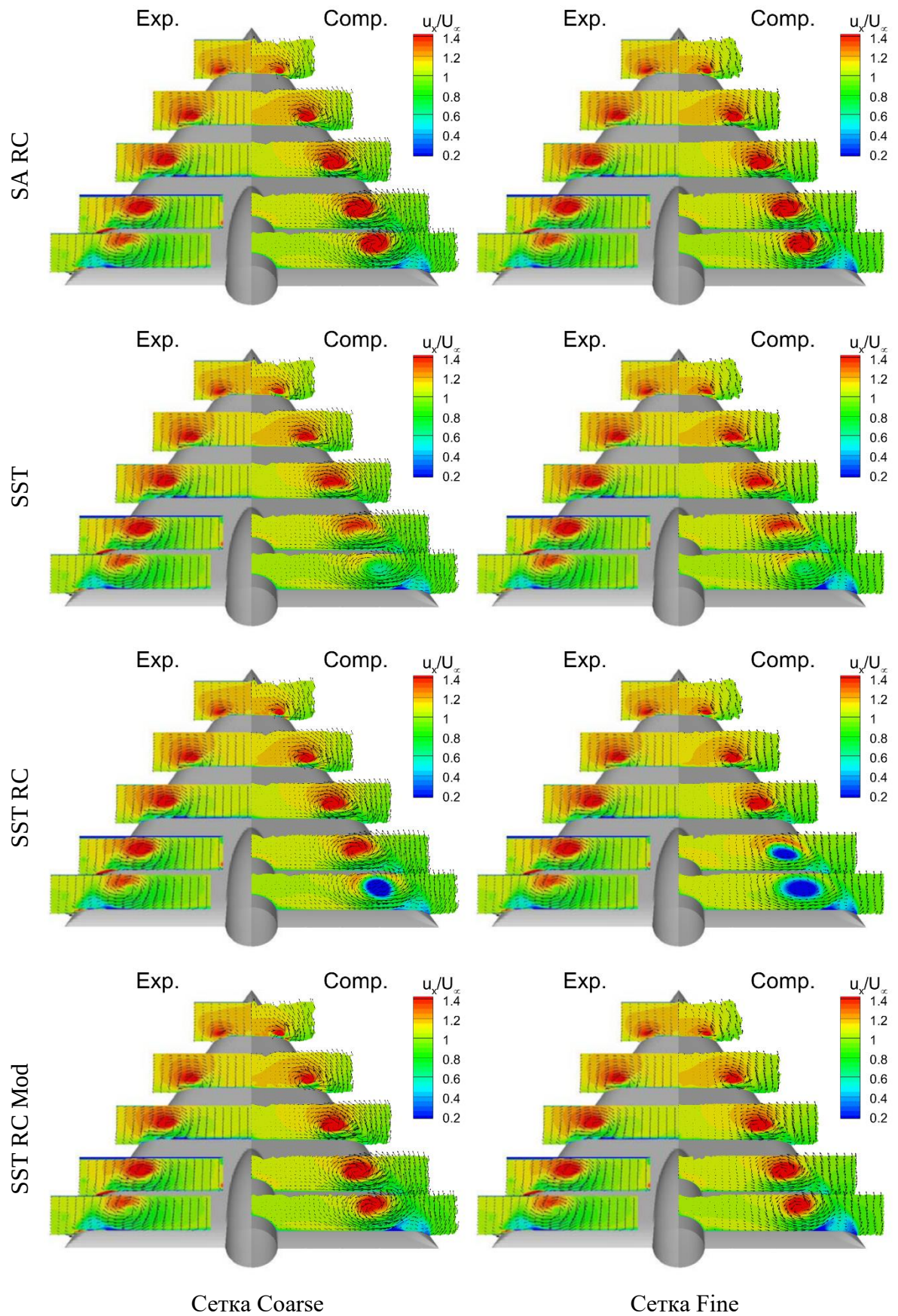


Рисунок 49. $M = 0.14$, $Re_{\text{mac}} = 2 \times 10^6$, $\alpha = 18^\circ$. Распределения продольной компоненты скорости в сечениях

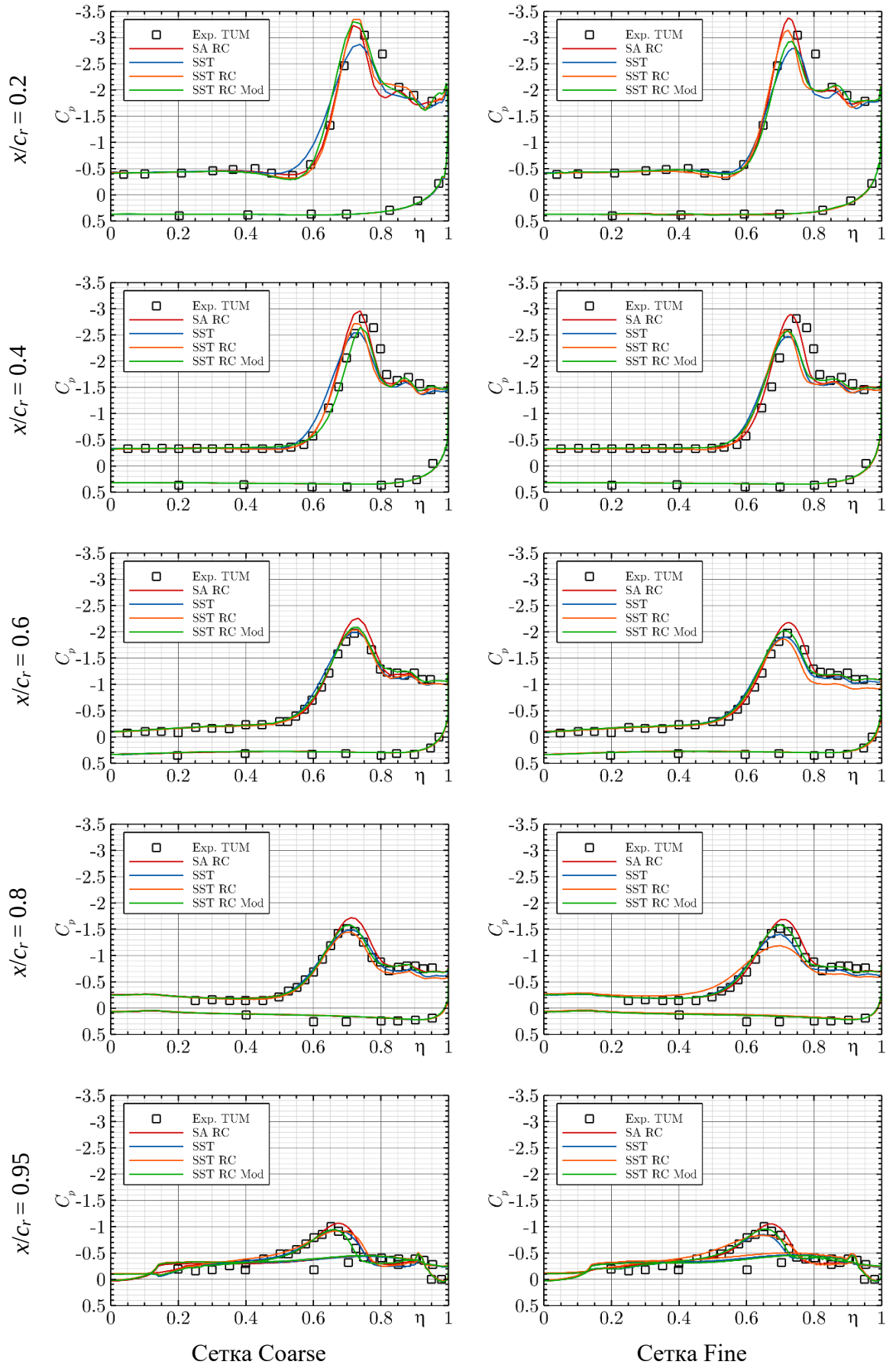
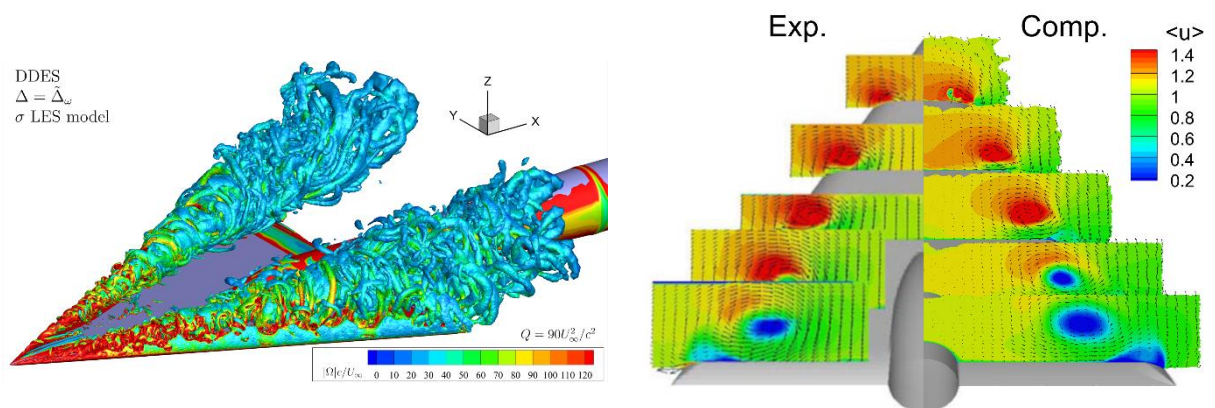


Рисунок 50. $M = 0.14$, $Re_{mac} = 2 \times 10^6$, $\alpha = 18^\circ$. Распределения коэффициента давления в сечениях

полученные осредненные значения продольной компоненты скорости качественно соответствуют данным эксперимента, хотя в расчете и имеет место некоторое завышение размера области обратного градиента давления. Сравнение с экспериментальными данными и результатами расчетов других авторов по среднему значению коэффициента давления проведено на рисунке 52. Нетрудно видеть, что результаты, полученные при помощи кода NOISEtte, и результаты, полученные с использованием других кодов, демонстрируют качественное согласование с экспериментом в сечениях $x/c_r = 0.4-0.95$. В сечении же $x/c_r = 0.2$ при помощи NOISEtte была получена бóльшая близость к эксперименту в области экспериментально наблюдаемого минимума давления одновременно с нефизичным понижением давления в окрестности точки $\eta=0.85$. Соответствие результатов NOISEtte экспериментальным данным по среднеквадратичному отклонению коэффициента давления на поверхности крыла носит исключительно качественный характер (рисунок 53), причем в сечениях $x/c_r = 0.4, 0.6$ имеет место близость координат глобальных максимумов между расчетом и экспериментом. При сравнении с результатами других авторов можно заключить, что результаты DDES моделирования при помощи кода NOISEtte позволили получить одни из наиболее близких к эксперименту распределений средних и пульсационных характеристик течения.



Мгновенная картина течения,
визуализированная при помощи
изоповерхностей, соответствующих
безразмерному значению Q-критерия 90,
раскрашенных по модулю завихренности

Распределения среднего значения
продольной компоненты скорости в
сечениях

Рисунок 51. $M = 0.07$, $Re_{mac} = 1 \times 10^6$, $\alpha = 23^\circ$. Поля течения, полученные при помощи DDES моделирования на сетке Fine

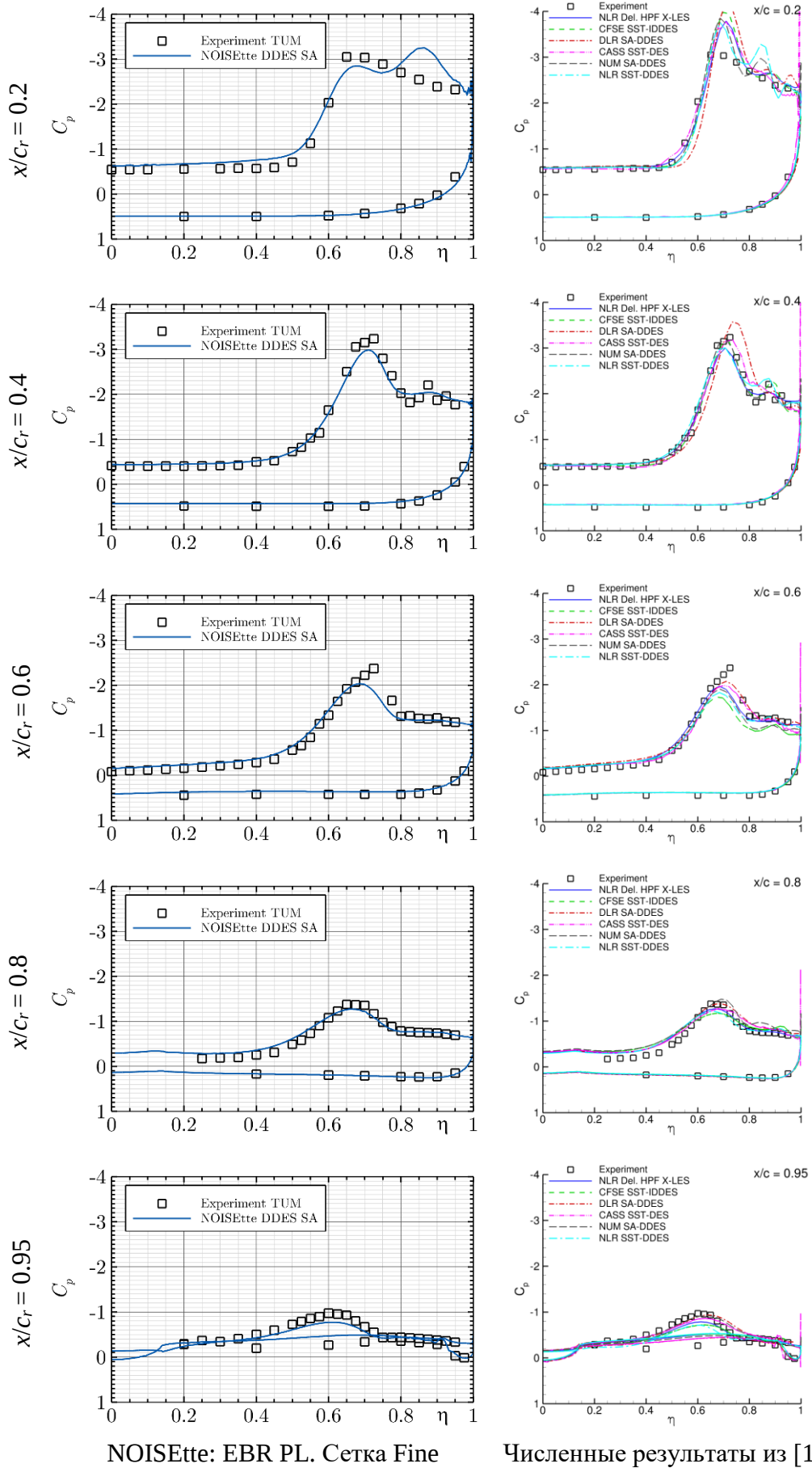
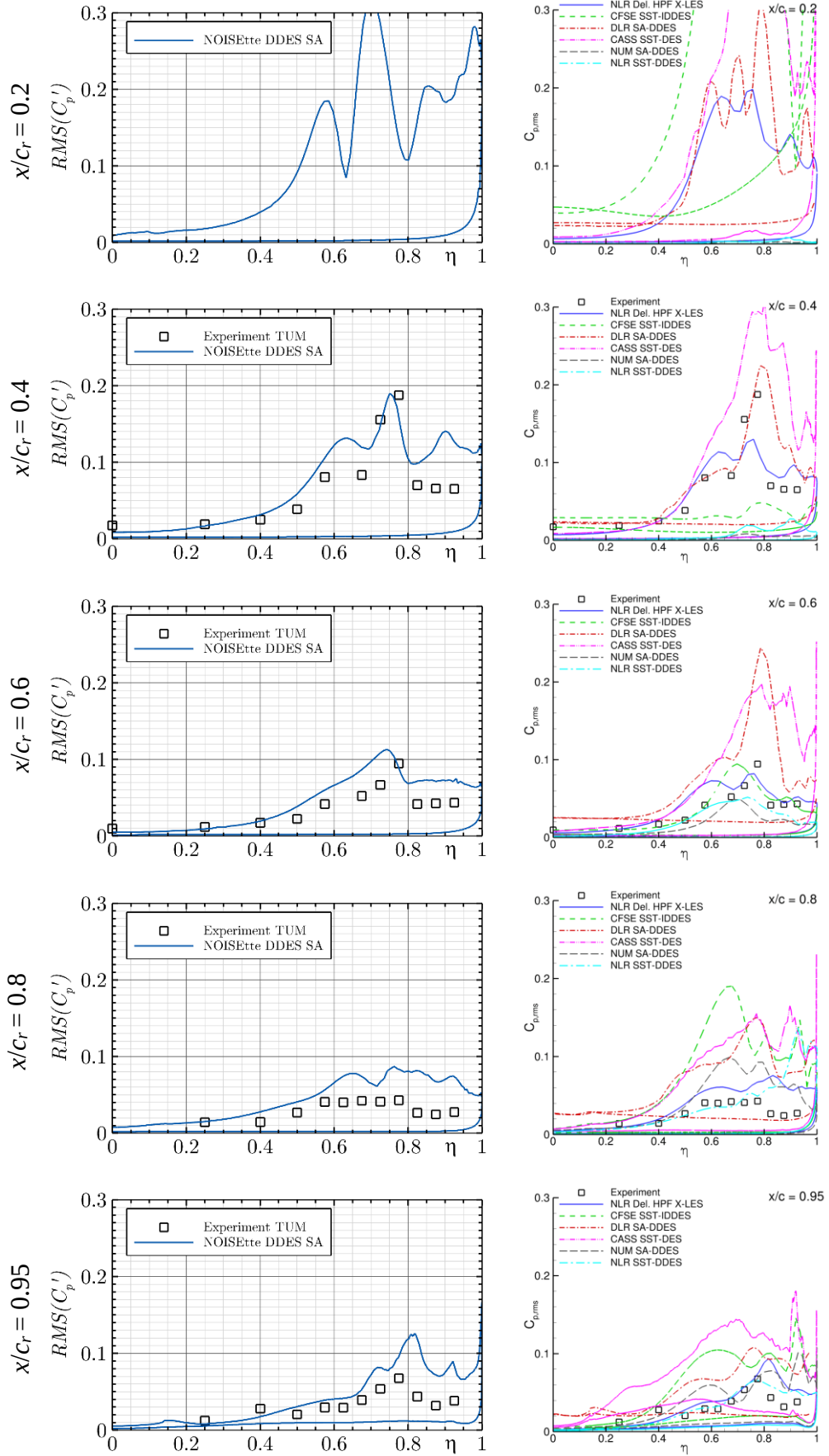


Рисунок 52. $M = 0.07$, $Re_{\text{mac}} = 1 \times 10^6$, $\alpha = 23^\circ$. Распределения коэффициента давления в сечениях



NOISEtte: EBR PL. Сетка Fine

Численные результаты из [114]

Рисунок 53. $M = 0.07$, $Re_{mac} = 1 \times 10^6$, $\alpha = 23^\circ$. Распределения $RMS(C_p')$ в сечениях

Глава 5. Моделирование шума крыла прототипа сверхзвукового пассажирского самолета на режиме посадки

5.1 Введение

В настоящее время как в России, так и в других странах существуют проекты, нацеленные на создание сверхзвуковых пассажирских самолетов (СПС) нового поколения, ориентированных в первую очередь на бизнес перелеты небольшого числа пассажиров. Основным требованием к новым моделям СПС является обеспечение низкого уровня звукового удара, представляющего собой короткое акустическое возмущение высокой интенсивности, создаваемое самолетом при движении со сверхзвуковой скоростью и распространяющееся до поверхности земли. Важными задачами являются также оптимизация аэродинамических характеристик планера СПС для всех режимов полета и достижение высокой топливной эффективности. К обязательным требованиям относится и соответствие текущим сертификационным нормам Международной организации гражданской авиации (ICAO) по шуму при взлете, снижении и посадке, так как в случае несоблюдения указанных норм самолету будет запрещена посадка в большинстве аэропортов мира.

Известно, что для современных дозвуковых гражданских самолетов наибольший вклад в общий шум при взлете вносит работа двигателя [115]. Источники, связанные с двигателем (в первую очередь, вентилятор и турбина) оказывают существенное влияние и на шум самолета при посадке, однако в связи с высокими значениями степени двухконтурности современных двигателей гражданских самолетов их вклад перестает быть доминирующим и дополняется шумом элементов планера, таких как шасси, предкрылки и закрылки [23,115,116]. В случае же СПС из-за пониженной степени двухконтурности двигателя и конструктивных особенностей крыла с высокой вероятностью шум двигателя и истекающей из него струи будут доминирующими источниками шума не только при взлете, но и на посадке. Однако данное предположение нуждается в более строгом численном и/или экспериментальном подтверждении.

В настоящей главе представлены результаты численного исследования шума крыла прототипа СПС на режиме посадки при помощи вихреразрешающего моделирования, основанного на DDES подходе. В отечественной практике подобное исследование проводится впервые.

Ранее моделирование шума крыла другого прототипа СПС на режиме посадки было выполнено сотрудниками NASA совместно со специалистами Dassault Systèmes при помощи кода PowerFLOW [117–119], основанного на численном решении решеточных уравнений Больцмана (lattice Boltzmann methods).

5.2 Физическая постановка

Полноразмерная геометрия прототипа планера СПС (рисунок 54), предоставленная в рамках Программы создания и развития научного центра мирового уровня «Сверхзвук», с углами установки отклоняемых носков 10° и элеронов $10^\circ-20^\circ-20^\circ-10^\circ$ обтекается в свободном потоке со скоростью $U_\infty = 68$ м/с под углом атаки 10° при давлении и температуре на бесконечности 101325 Па и 288.15 К соответственно. Число Маха равно 0.2, число Рейнольдса, посчитанное по характерной длине $L = 1$ м – 4.6×10^6 . Размах крыла – 20 м, длина рассматриваемой геометрии – 45 м.

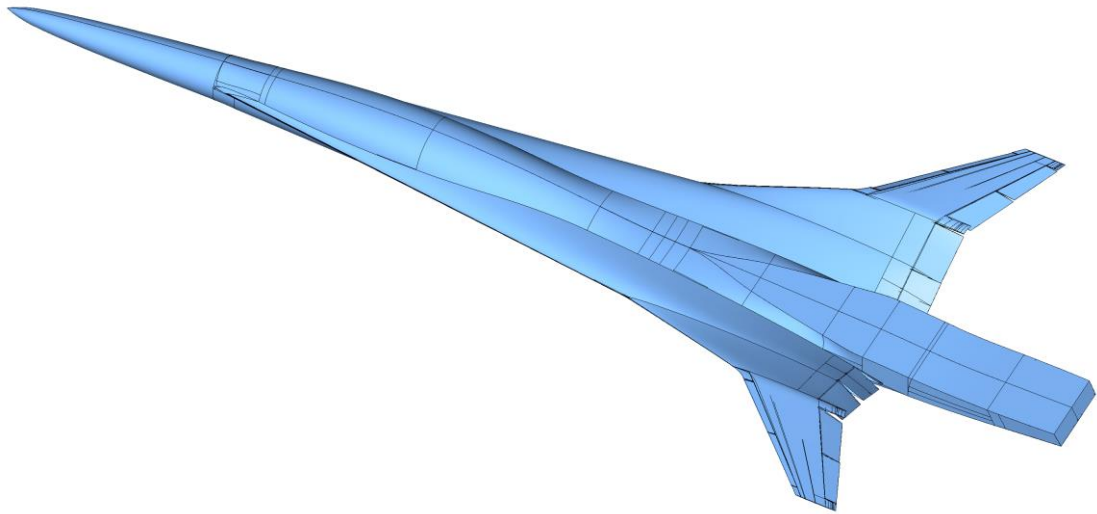


Рисунок 54. Геометрия прототипа планера СПС в посадочной конфигурации

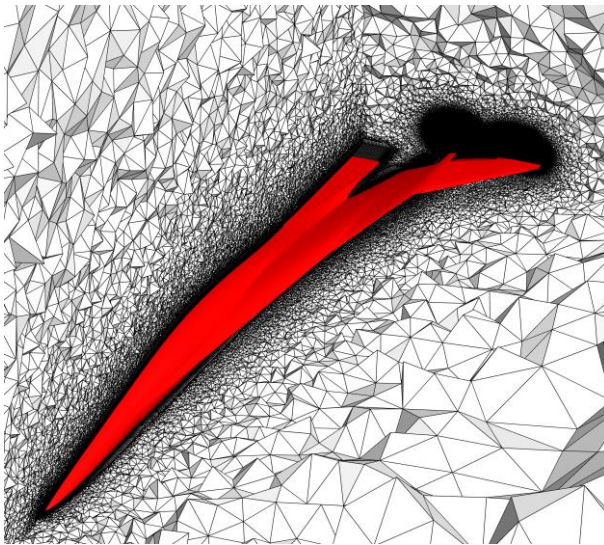
5.3 Вычислительная постановка

Для предварительного изучения аэродинамики целевого течения применялось RANS моделирование с моделью турбулентности SST RC Mod [76], вихреразрешающие расчеты проводились согласно подходу DDES с подсеточным масштабом $\Delta = \tilde{\Delta}_\omega$ [17] и подсеточной LES моделью σ [77] в LES области и моделью турбулентности SA [11] в RANS области.

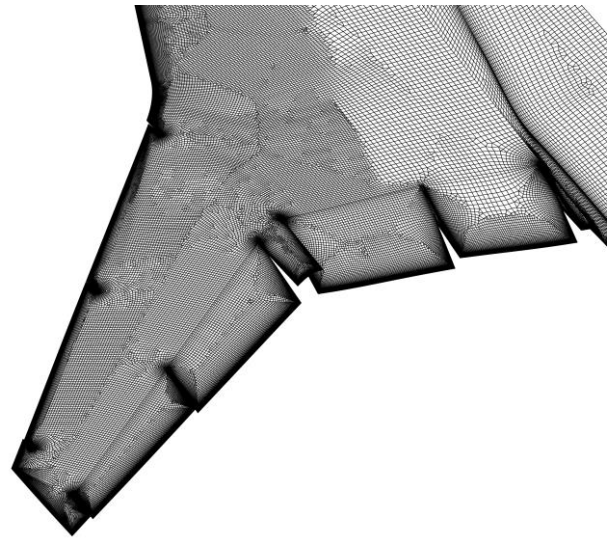
В силу симметричности изучаемой геометрии и параметров обтекания, моделирование выполнялись только для половины геометрии. В плоскости симметрии $y = 0$ задавались условия проскальзывания, в дальнем поле использовались условия свободного потока. На обтекаемой геометрии задавались условия прилипания и адиабатичности. Расчетная область представляла собой параллелепипед размера $2000 \text{ м} \times 2000 \text{ м} \times 1000 \text{ м}$ с исключенной из него внутренней частью планера СПС. Центр границы расчетной области, принадлежащей плоскости симметрии, совпадал с точкой для расчета момента тангажа (mz), расположенной на удалении 31.5 м от носика СПС вдоль оси x. Для целей визуализации полученные поля течения дублировались и отражались относительно плоскости симметрии.

В качестве схемы для аппроксимации конвективных потоков применялась схема EBR5 PL, для аппроксимации вязких потоков использовался метод локальных разбиений [79]. Интегрирование по времени проводилось по неявной схеме BDF1 в случае RANS расчетов и неявной схеме BDF2 в случае DDES расчетов. На каждом шаге по времени для решения системы нелинейных уравнений применялся метод Ньютона. В RANS расчетах использовалась одна итерация метода Ньютона, в DDES расчетах – две. Решение системы линейных уравнений определялось посредством метода BiCGStab с предобуславливателем SGS.

Моделирование проводилось на сетках Level A и Level B, их общий вид показан на рисунке 55. Параметры указанных сеток приведены в таблице 11, где h_{fuselage} – длина сеточного ребра в тангенциальном направлении вблизи фюзеляжа и нижней поверхности крыла, h_{vortices} – длина сеточного ребра в области устойчивого вихревого течения над поверхностью крыла. Вне призматических слоев зона повышенного сеточного разрешения над поверхностью крыла была заполнена изотропной неструктурированной тетраэдральной сеткой.



Сетка Level A в ближнем поле



Сетка Level A на поверхности СПС

Рисунок 55. Общий вид сеток, использованных для моделирования обтекания СПС на режиме посадки

Таблица 11. Параметры сеток, использованных для обтекания крыла СПС на режиме посадки

Сетка	N_{nodes}	N_{elements}	$N_{\text{surf_nodes}}$	$N_{\text{surf_elements}}$	h_{fuselage}	h_{vortices}
Level A	21 166 948	46 552 132	337 330	342 475	70 мм	35 мм
Level B	61 601 940	219 587 977	678 233	687 362	70 мм	17.5 мм

В RANS расчетах шаг по времени выбирался максимальным, обеспечивающим стабильность счета. По достижении установившегося режима для получения стационарной картины течения производилось осреднение решения на интервале в $50-150 L/U_\infty$.

При DDES моделировании минимальный вес противоточной компоненты схемы EBR5 PL в области повышенного сеточного разрешения полагался равным 0.15. Шаг по времени выбирался исходя из необходимости минимизации областей решения, содержащих численные осцилляции, и в терминах $CFL_{vortices} = \Delta t \times (c_\infty + U_\infty) / h_{vortices}$ составил 0.083 на сетке Level A и 0.125 на сетке Level B, где c_∞ – скорость звука на бесконечности. В качестве начальных полей для DDES расчета использовалось осредненное RANS решение. После выхода вихреразрешающего расчета на установившийся режим по аэродинамическим коэффициентам и проверки полей течения на отсутствие крупных областей, содержащих численные осцилляции, производилась запись акустических данных в ближнем поле и накопление осредненного решения во всей расчетной области. Запись данных выполнялась в течение $60 L/U_\infty$ или 0.88 с, что позволило получить сглаженные спектры в точках ближнего и дальнего полей с минимальной разрешаемой частотой 20 Гц при помощи осреднения спектров по 30 временным интервалам с шириной перекрытия 0.5 (см. подробнее пункты 4 и 5 параграфа 1.7.6).

Для оценки акустических характеристик течения в ближнем поле проводилась запись пульсаций давления в точках на кривых, изображенных на рисунке 56. Расстояние между точками равнялось приблизительно 10 см, некоторым из них были присвоены числовые метки. Нижняя кривая располагалась приблизительно на 4 см ниже кромки крыла, верхние кривые находились приближенно над центрами наиболее крупных вихрей, формирующихся над поверхностью крыла.

Для расчета акустических пульсаций давления в точках дальнего поля применялся метод FWH второго порядка [34], детали его реализации в программном комплексе NOISEtte описаны в работе [120]. Вблизи границ области повышенного сеточного разрешения для накопления необходимых данных была построена соответствующая поверхность с пятью замыканиями (рисунок 57). Важно отметить, что данная поверхность содержала щель со стороны фюзеляжа, чтобы не допустить пересечения с поверхностью крыла. С формальной точки зрения незамкнутую поверхность нельзя применять для метода FWH, однако построение замкнутой поверхности в рассматриваемой задаче нежелательно по следующим причинам.

Если мы расположим поверхность FWH на значительном расстоянии от планера СПС, как, например, было сделано в работах [118,119], то в силу необходимости разрешения акустических пульсаций на поверхности FWH потребуется использовать повышенное сеточное разрешение в окрестности всего планера СПС, что приведет к кратному увеличению вычислительной стоимости. Если значимые акустические источники содержатся практически по всей окрестности

обтекаемого тела, такой подход является оправданным, но в рассматриваемой задаче фюзеляж практически не создает крупномасштабных турбулентных пульсаций, которые бы оказывали существенное влияние на общий шум планера.

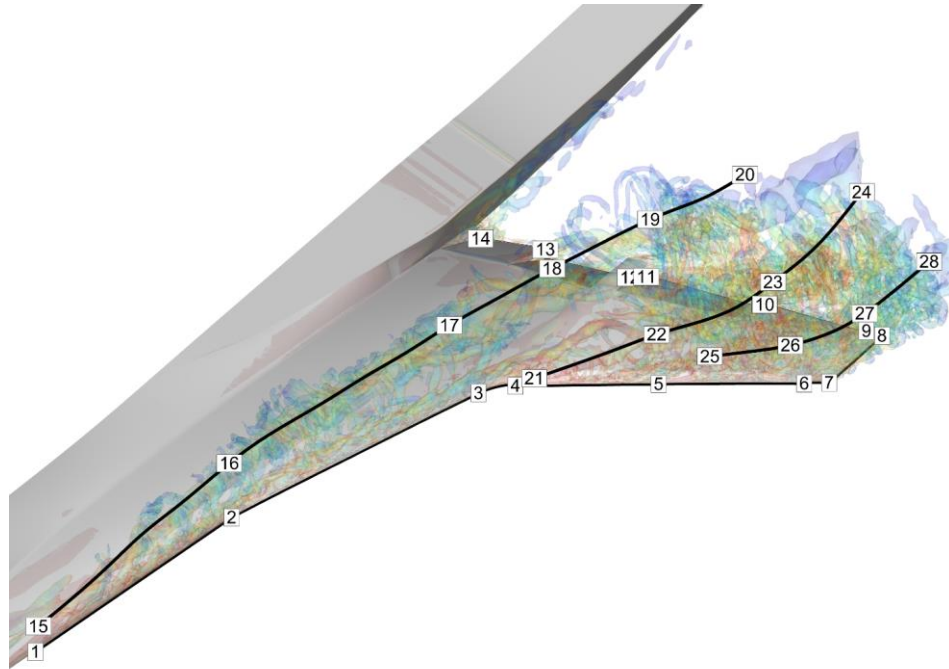


Рисунок 56. Положение точек записи пульсаций давления в ближнем поле

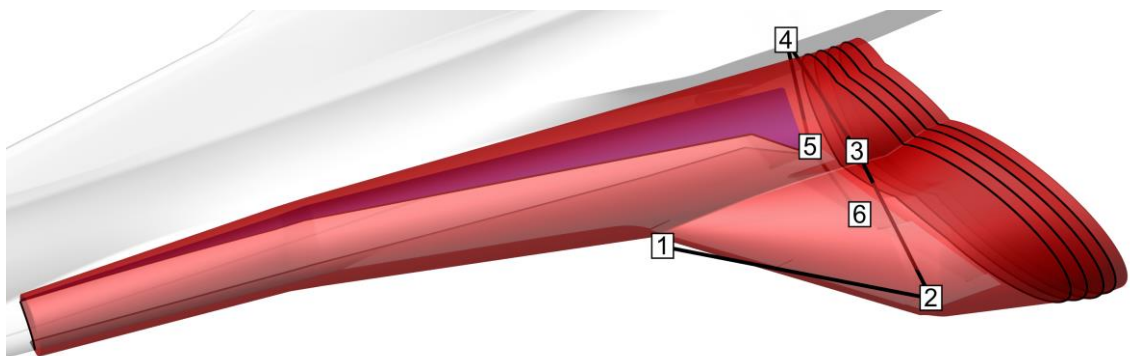


Рисунок 57. Положение поверхности FWH и точек ближнего поля, использованных для тестирования метода FWH

Теоретически, можно предложить замкнутую поверхность FWH, которая являлась бы объединением поверхности, изображенной на рисунке 57, с некоторой поверхностью, которая немного отстоит от обтекаемой геометрии и содержит внутри себя фюзеляж и корневую часть крыла. Однако если разрешение сетки вблизи фюзеляжа и корневой части крыла является более грубым, акустические возмущения, распространяющиеся от концевой части крыла в сторону плоскости симметрии, достаточно быстро затухнут из-за высокой численной диссипации, и,

следовательно, вклад от интегрирования по дополнительной поверхности при применении метода FWH будет близок к нулю. Использование же повышенного сеточного разрешения вблизи фюзеляжа и корневой части крыла нежелательно из-за существенного и неоправданного увеличения вычислительной стоимости DDES расчета.

Основная проблема в расположении поверхности для записи данных согласно рисунку 57 заключается в невозможности моделирования отражения акустических волн от верхней части крыла при использовании метода FWH. При DDES расчете волны, распространяющиеся вниз вблизи части поверхности FWH, наиболее близкой к фюзеляжу, будут отражаться от крыла, тогда как при расчете по методу FWH данные волны будут распространяться в область под крылом без какого-либо отражения. Для оценки влияния указанного эффекта на характеристики пульсаций в точках дальнего поля построенная поверхность была разделена на основную часть, обозначенную на рисунке 57 красным цветом, и дополнительную, обозначенную синим цветом. Далее будем использовать метку «FWH» для обозначения расчета шума с использованием только основной части поверхности и метку «FWH Ext» для обозначения расчета шума с совместным использованием основной и дополнительной части. Отметим, что все замыкания (end caps; e.c.) принадлежат основной части поверхности.

Для поиска оптимальных параметров дискретизации поверхности FWH в каждом DDES расчете будем записывать необходимые данные на трех типах сеток, состоящих преимущественно из четырехугольников. Меткой «Coarse» обозначим изотропные сетки с длиной ребра $2h_{\text{vortices}}$, меткой «Fine» – изотропные сетки с длиной ребра h_{vortices} , меткой «Mixed» – сетки с длиной ребра h_{vortices} на замыканиях и длиной ребра $2h_{\text{vortices}}$ в остальной области. В соответствии с пунктом 2 параграфа 1.7.4 на сетках «Coarse» и «Mixed» будем записывать данные с частотой $(c_{\infty} + U_{\infty}) / (2h_{\text{vortices}})$, на сетках «Fine» – с частотой $(c_{\infty} + U_{\infty}) / h_{\text{vortices}}$.

Корректность описанной постановки для расчета шума при помощи метода FWH была протестирована путем сравнения спектров пульсаций давления, полученных при помощи DDES расчета и применения метода FWH, в точках ближнего поля, обозначенных числовыми индексами на рисунке 57 и расположенных во внешней по отношению к поверхности FWH области.

Положение точек дальнего поля, в которых производился расчет шума крыла СПС, показано на рисунке 58.

Все DDES расчеты проводились с использованием графических процессоров NVIDIA Tesla V100. При выполнении расчета на сетке Level A были задействованы 8 GPU (4 вычислительных узла с 2 GPU на каждом) в течение на 21 часа для накопления данных за $60 L/U_{\infty}$. При выполнении расчета на сетке Level B были задействованы 24 GPU (12 вычислительных узлов) в течении 24

часов для достижения установившегося течения при старте с полей, полученных из DDES расчета на сетке Level A, и еще в течение 72 часов для накопления данных за $60 L/U_\infty$.

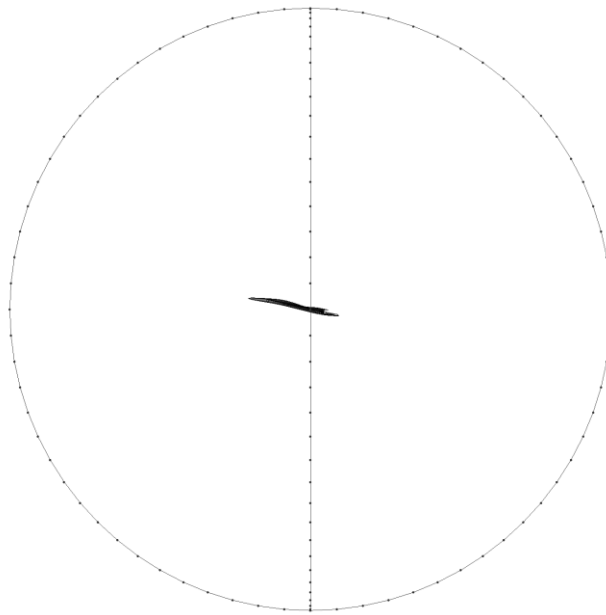


Рисунок 58. Положение точек дальнего поля, в которых производился расчет шума крыла СПС (все точки принадлежат поверхности сферы радиуса 150 м)

5.4 Аэродинамика

На рисунке 59 показаны осредненные поля течения, полученные в результате DDES расчетов на сетках Level A и Level B. Видно, что при рассматриваемом режиме обтекания над крылом формируется устойчивые крупномасштабные вихри, создающие на верхней поверхности крыла значительную область разрежения, способствующую повышению подъемной силы планера. Отметим, что несмотря на некоторые различия в деталях, приведенные картины течения, полученные на сетках Level A и Level B, являются качественно близкими.

Для количественного сравнения результатов RANS и DDES моделирования на сетках Level A и Level B рассмотрим соответствующие значения аэродинамических коэффициентов в таблице 12. Видно, что отличие между результатами RANS и DDES расчетов по коэффициенту подъемной силы составляет приблизительно 3%, по коэффициенту лобового сопротивления – приблизительно 5%, по моменту тангажа – 10-15%. Из приведенных данных также следует, что при измельчении сетки разница между RANS и DDES решениями по аэродинамическим коэффициентам сохраняется ($C_{x\alpha}$) или немного увеличивается ($C_{y\alpha}$, m_z).

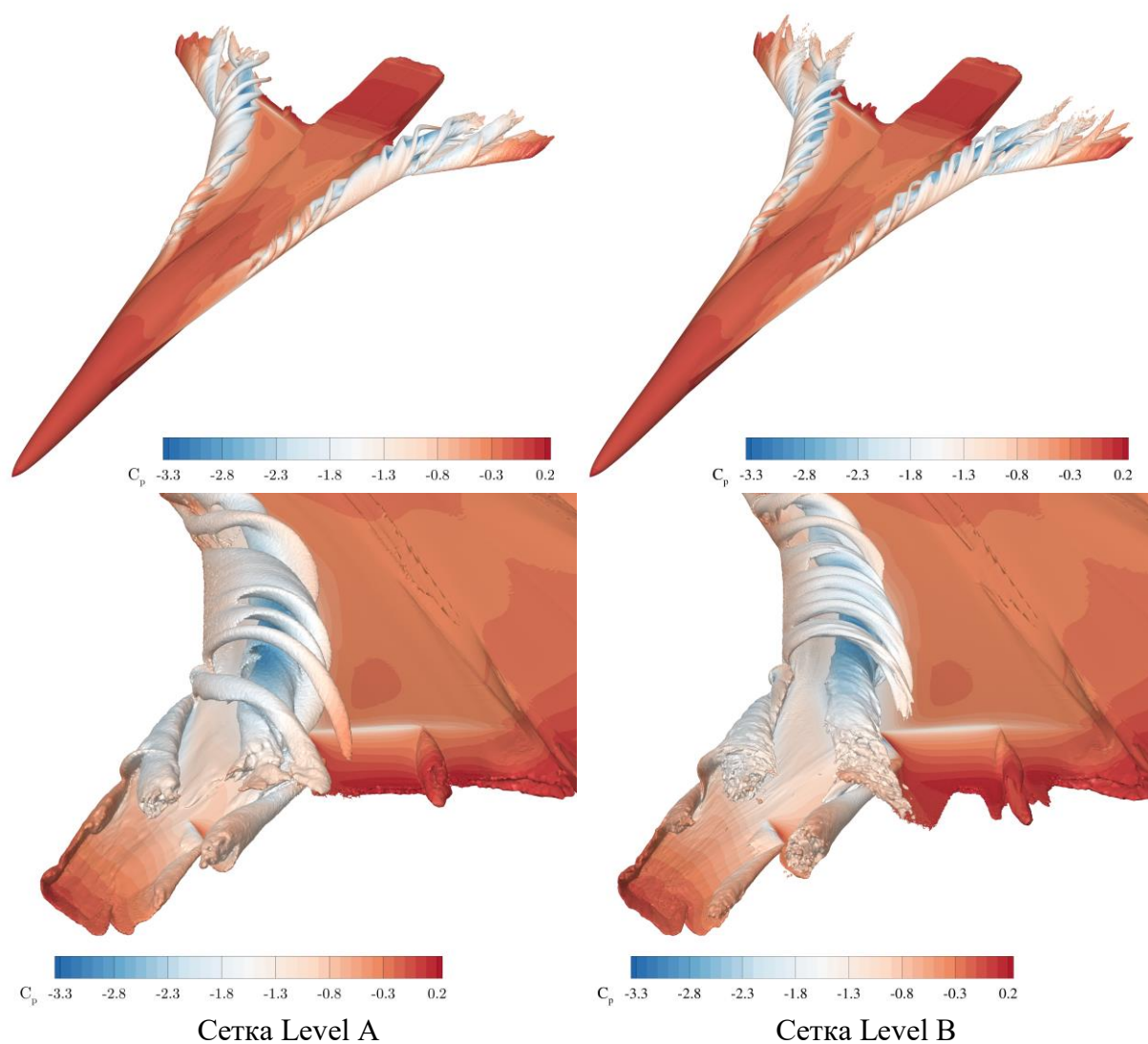


Рисунок 59. Осредненные поля течения, полученные при помощи DDES моделирования. Изображены изоповерхности модуля завихренности, соответствующие значению 200 1/с, раскрашенные по коэффициенту давления

Таблица 12. Коэффициенты подъемной силы (C_{ya}), лобового сопротивления (C_{xa}) и момента тангажа (m_z), полученные при обтекании СПС на режиме посадки

	C_{ya}	C_{ya} diff	C_{ya} diff, %	C_{xa}	C_{xa} diff	C_{xa} diff, %	m_z	m_z diff	m_z diff, %
RANS (Level A)	0.907	0.025	2.9%	0.2244	0.0102	4.8%	-0.0638	-0.0060	10.3%
RANS (Level B)	0.914	0.032	3.7%	0.2255	0.0113	5.3%	-0.0677	-0.0099	17.1%
DDES (Level A)	0.878	-0.004	0.4%	0.2132	-0.0010	0.5%	-0.0566	0.0013	2.2%
DDES (Level B)	0.881	0	0.0%	0.2142	0	0.0%	-0.0578	0	0.0%

5.5 Акустика в ближнем поле

Мгновенные картины течения, полученные в DDES расчетах после этапа установления, показаны на рисунке 60. Нетрудно видеть, что турбулентное вихревое течение над поверхностью крыла является источником акустических пульсаций. Вблизи же фюзеляжа течение практически стационарно и не содержит значимых акустических источников. Увеличение сеточного разрешения ожидаемо дало возможность воспроизводить более мелкие турбулентные структуры над поверхностью крыла, что привело к появлению более высоких частот в составе моделируемого шума. За пределами области повышенного сеточного разрешения над поверхностью крыла акустические пульсации быстро затухают вследствие увеличения шага сетки по мере удаления от обтекаемой геометрии.

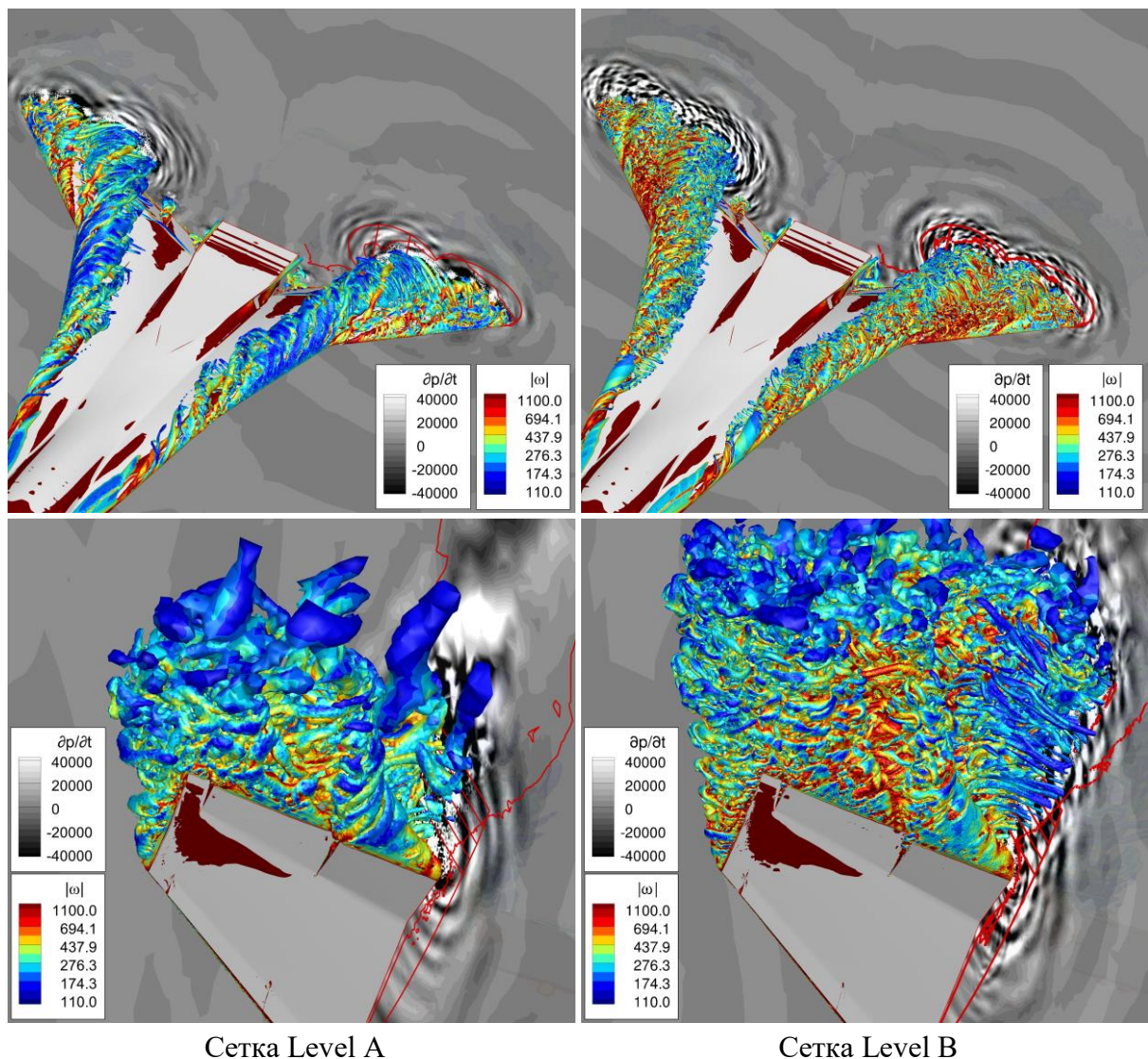


Рисунок 60. Мгновенные поля течения, полученные при помощи DDES моделирования. Изображены изоповерхности Q-критерия, соответствующие значению 5000 1/c^2 . Гладкая кривая соответствует положению поверхности FWH, негладкая кривая – изоповерхности среднего поля модуля завихренности, соответствующей значению 2 1/c

На рисунке 61 показан спектральный состав шума в точках ближнего поля, пространственное положение которых изображено на рисунке 56. Приведенные данные показывают, что вблизи углов тонкой кромки крыла или его механизации спектры акустических пульсаций являются более широкополосными по сравнению с остальной областью. Указанный эффект объясняется использованием более высокого локального сеточного разрешения для корректной дискретизации соответствующих особенностей геометрии. Стоит отметить, что получаемые высокочастотные компоненты шума не обязательно являются физически обоснованными, так как в остальной области используется более грубое разрешение, а также существует вероятность возникновения в данной области численной неустойчивости. При продвижении вдоль кромки крыла в сторону его законцовки спектры практически линейно сдвигаются в направлении низких частот. Данную закономерность можно объяснить тем, что, как следует из рисунка 60, основными источниками шума крыла являются вихри над его поверхностью, и увеличение их характерных размеров по мере продвижения к законцовке приводит к соответствующему частотному сдвигу. Заметим также, что на представленных спектрах присутствуют узкополосные высокочастотные максимумы интенсивности, которые достаточно сильно зависят от сеточного разрешения. Данные максимумы возникают из-за наличия при расчете небольших областей численной неустойчивости, положение которых значительно меняется при модификации параметров численного метода или сеточного разрешения. На кривой, расположенной над центром основного вихря, разрешение сеток для DDES расчета является постоянным, и численная неустойчивость не возникает из-за отсутствия очень мелких сеточных элементов, поэтому соответствующая спектральная картина практически не содержит резких повышений ширины разрешаемой частотной области и узкополосных высокочастотных максимумов интенсивности.

Спектры акустических пульсаций в точках ближнего поля, которым на рисунке 56 были присвоены числовые метки, представлены на рисунке 62. Как и на рисунке 61, видно, что шум в точках ближнего поля является широкополосным, и в большинстве точек более высоким частотам соответствует меньшая интенсивность шума. Аналогичный характер акустических пульсаций был получен в работах [118,119]. Влияние небольших областей численной неустойчивости на спектральные характеристики шума нетрудно выявить при сравнении численных результатов с различных сеток. Например, при переходе от сетки Level A к сетке Level B в точках 11, 12 локальные узкополосные высокочастотные максимумы интенсивности пропали, а в точках 5, 6, 10 – наоборот, возникли. Заметим, что указанные локальные максимумы интенсивности не оказали существенного влияния на общий характер спектров шума в ближнем поле.

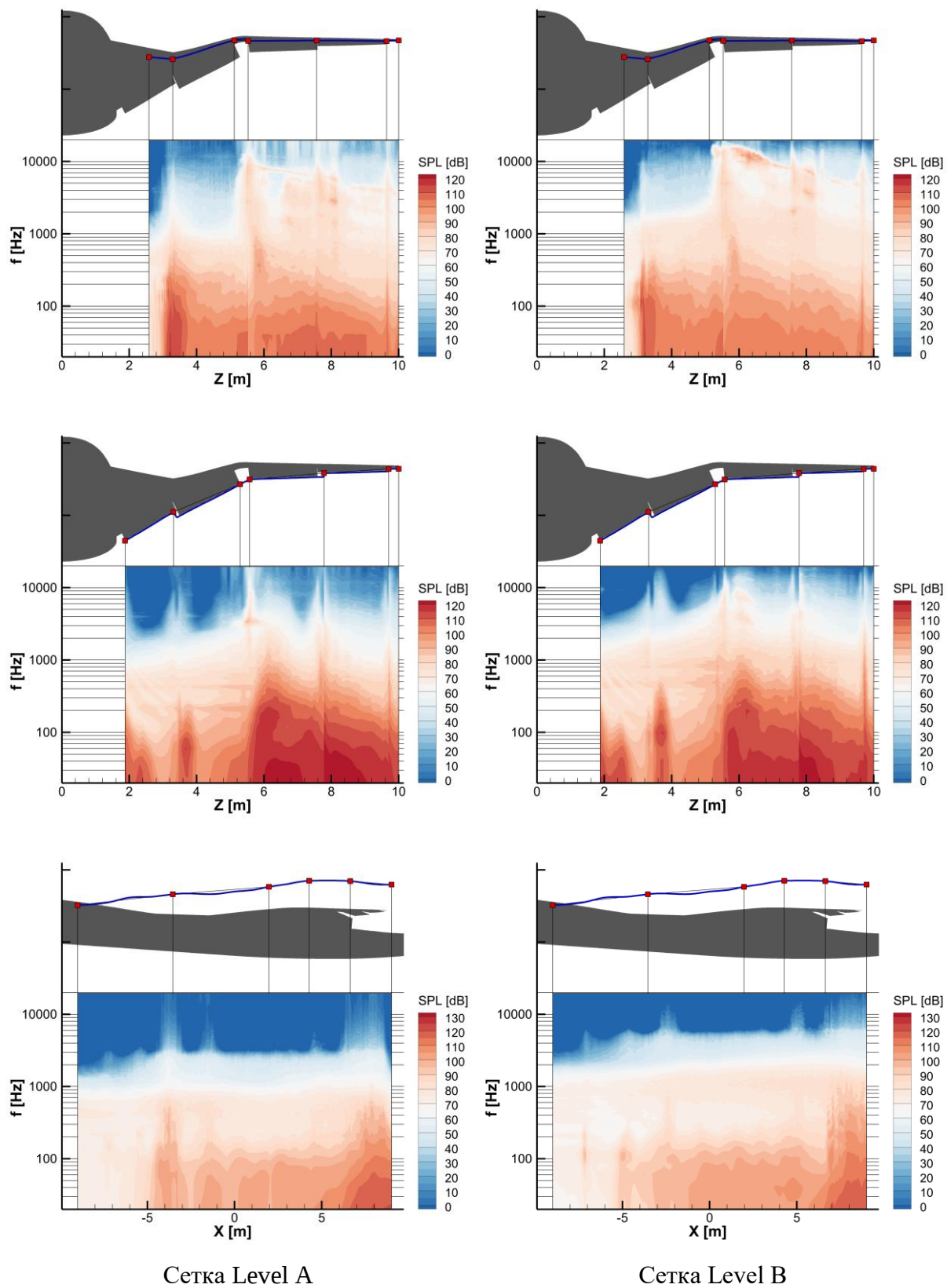


Рисунок 61. Пространственные распределения спектров пульсаций давления в ближнем поле

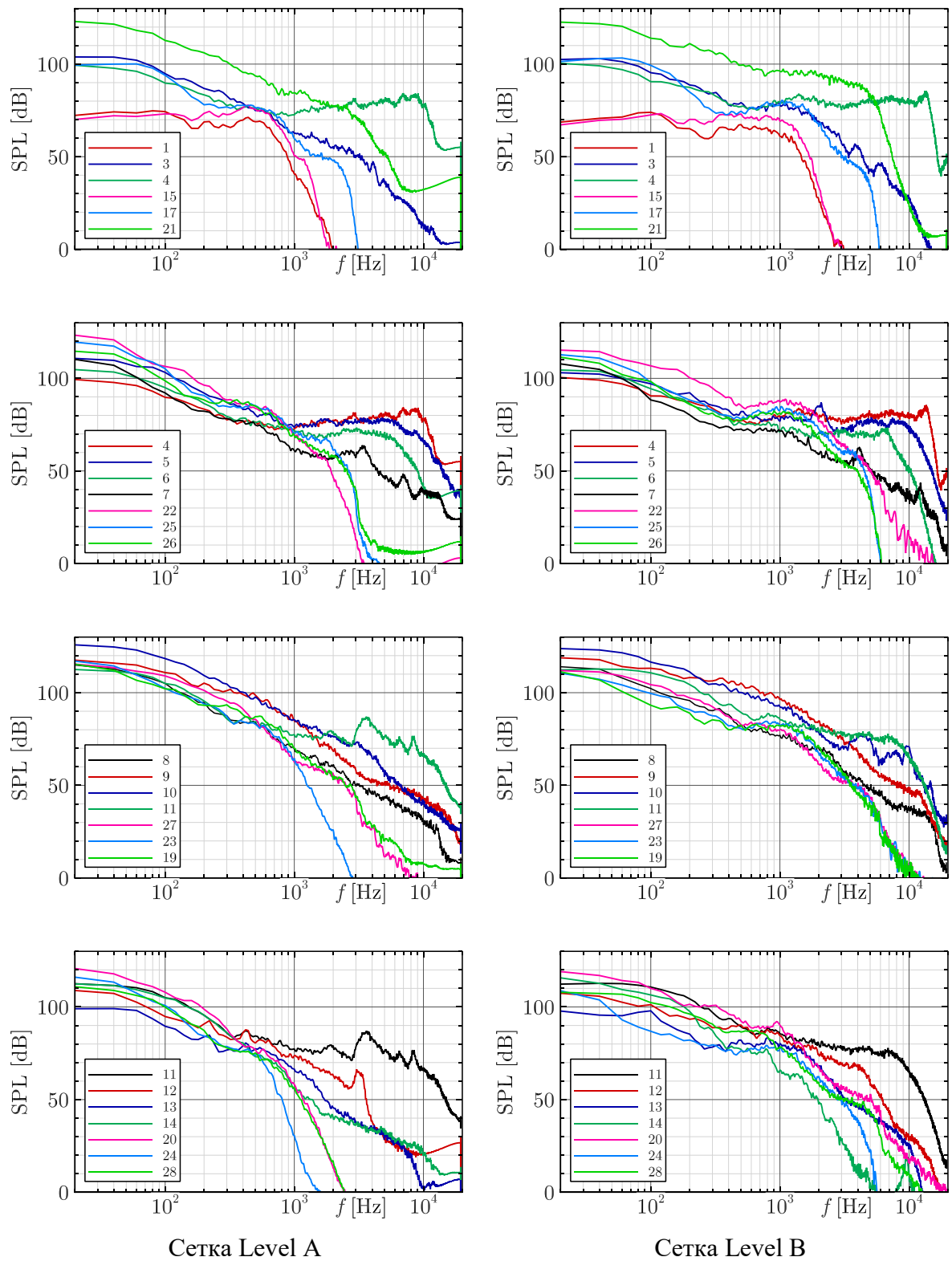


Рисунок 62. Спектры акустических пульсаций в точках ближнего поля

5.6 Акустика в дальнем поле

Результаты тестирования метода FWH путем сравнения спектров пульсаций давления, полученных при помощи DDES расчета и применения метода FWH, в точках ближнего поля представлены на рисунках 63 и 64.

Сравнение результатов тестирования для сеток Coarse FWH и Fine FWH проведено на рисунке 63. Видно, что для сетки Coarse FWH желательно использование 5 замыканий, так как применение 3 замыканий приводит к повышению ошибки приблизительно на 2 дБ для некоторых полос частот. Для сетки Fine FWH разница между использованием 3 и 5 замыканий практически отсутствует. Заметим, что применение Coarse FWH оправдано, поскольку дополнительные высокие частоты, разрешаемые Fine FWH, не разрешаются при DDES расчете, что видно по резкому затуханию соответствующей части спектра. Так как использование сеток Coarse FWH и Fine FWH без замыканий дает для рассматриваемых точек ближнего поля практически идентичный результат, очень близкий к данным прямого расчета, и в силу того, что Fine FWH с одним замыканием приводит к более точному результату, чем Coarse FWH с одним замыканием, для уменьшения извлекаемого объема данных при сохранении высокой точности возникает идея применения для расчета шума в дальнем поле смешанного разрешения на поверхности FWH (Mixed FWH) с частотой записи данных, соответствующей Coarse FWH.

Сравнение результатов тестирования для поверхностей FWH и FWH Ext показано на рисунке 64. Видно, что использование расширенной поверхности FWH не оказывает существенного влияния на получаемые спектры в точках ближнего поля.

На рисунке 65 приведены полученные при помощи метода FWH спектры шума крыла СПС на режиме посадки в точках дальнего поля (рисунок 58) в зависимости от используемой расчетной сетки и разрешения на поверхности FWH. Нетрудно видеть, что спектры, полученные по результатам расчетов на сетках Level A и Level B, несмотря на качественное соответствие, количественно различаются между собой приблизительно на 2.5 дБ в широком диапазоне частот. Заметим, что отличие спектров, посчитанных с использованием Coarse FWH и Fine FWH для точек дальнего поля, составляет менее 1 дБ.

Зависимость спектров шума крыла СПС на режиме посадки в точках дальнего поля от использования расширенной поверхности FWH (FWH Ext) проиллюстрирована на рисунке 66. Основное влияние дополнительная часть поверхности FWH оказывает на низкочастотную часть спектра (менее 100 Гц), в которой разница между FWH и FWH Ext может составлять от 2 до 5 дБ. На рисунке 66 также праведен спектральный состав шума в дальнем поле, посчитанный по данным с сетки Mixed FWH. Нетрудно заметить, что спектры, полученные при помощи Mixed FWH и Fine FWH, имеют видимые отличия только в высокочастотной части спектра, которая не разрешается корректно при прямом DDES расчете.

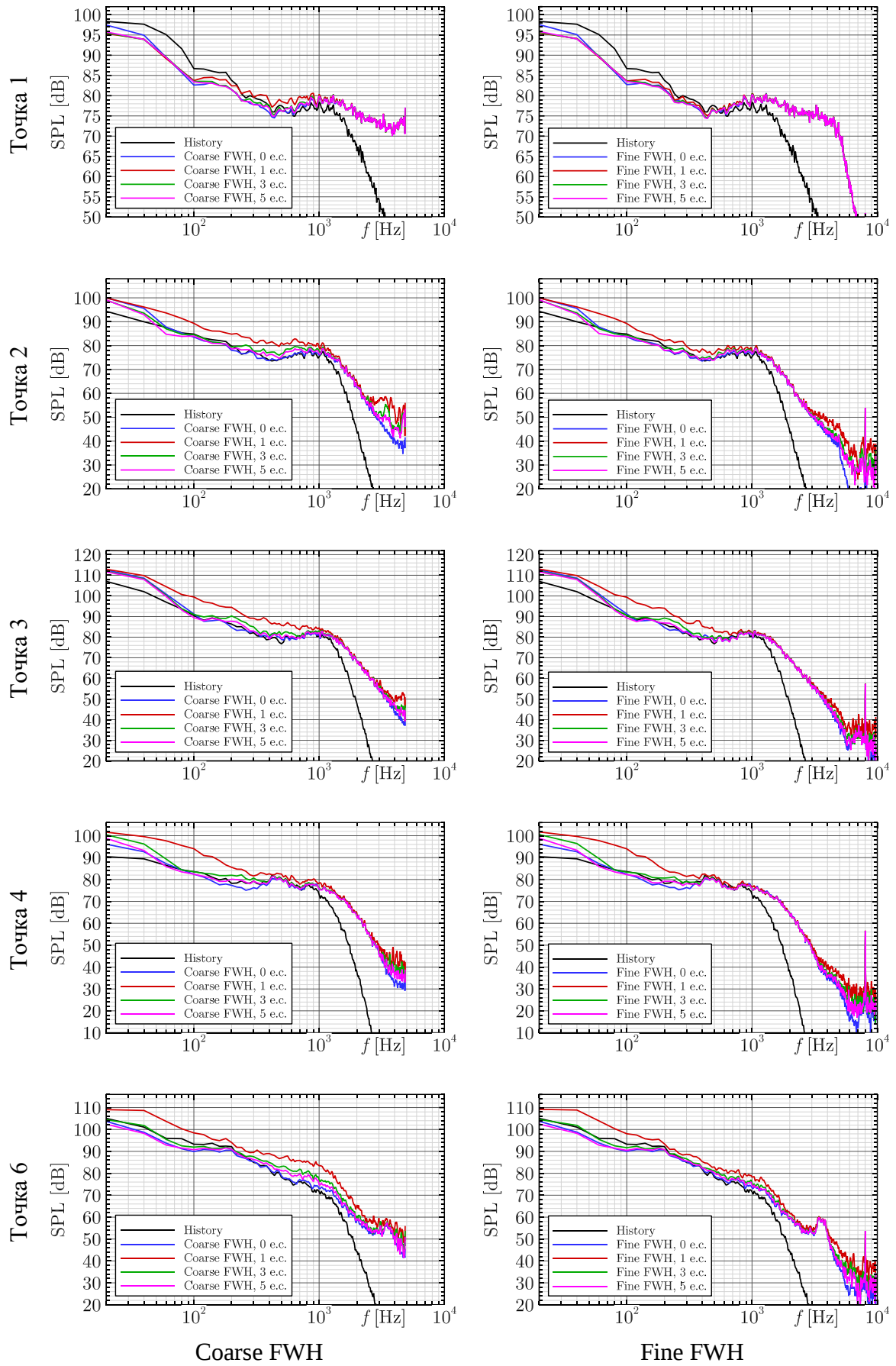


Рисунок 63. Тестирование метода FWH на сетке Level B. Спектры шума, полученные напрямую из DDES расчета, обозначены как History

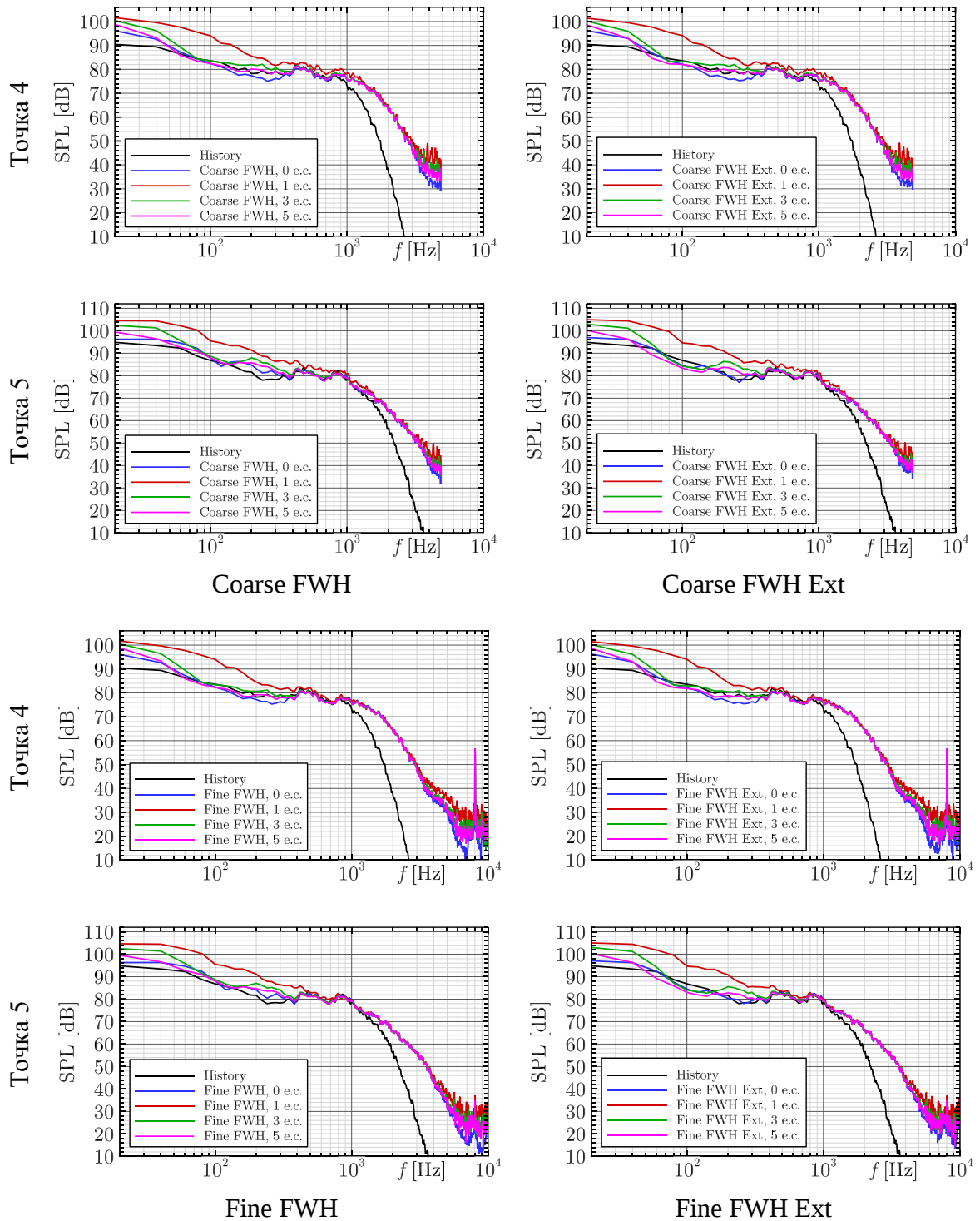


Рисунок 64. Тестирование зависимости спектров шума в ближнем поле от использования расширенной поверхности FWH (FWH Ext) на сетке Level B. Спектры шума, полученные напрямую из DDES расчета, обозначены как History

Отметим, что использование Coarse FWH вместо Fine FWH приводит к экономии приблизительно в 8 раз дискового пространства, необходимого для хранения нестационарных данных с поверхности FWH, и уменьшению в 2 раза частоты записи данных при выполнении DDES расчета. В частности, при расчете на сетке Level B для поверхностной сетки Fine FWH

было накоплено 523 ГБ нестационарных данных, а для Coarse FWH – 72 ГБ. Так как соответствующее влияние на спектры находится в пределах 1 дБ, данная замена оказывается вполне оправданной. В расчетах, для которых необходима более высокая степень точности и надежности получаемых результатов, возможно использование разрешения Mixed FWH. В рассмотренной задаче на сетке Level B экономия дискового пространства при использовании Mixed FWH в сравнении с Fine FWH составила 3.3 раза (158 ГБ накопленных данных вместо 523 ГБ) в совокупности с в 2 раза меньшей частотой записи данных. Если в некоторой задаче площадь замыканий будет малой относительно всей поверхности FWH, то применение Mixed FWH в сравнении с Fine FWH приведет к уменьшению необходимого дискового пространства для хранения данных приблизительно в 8 раз.

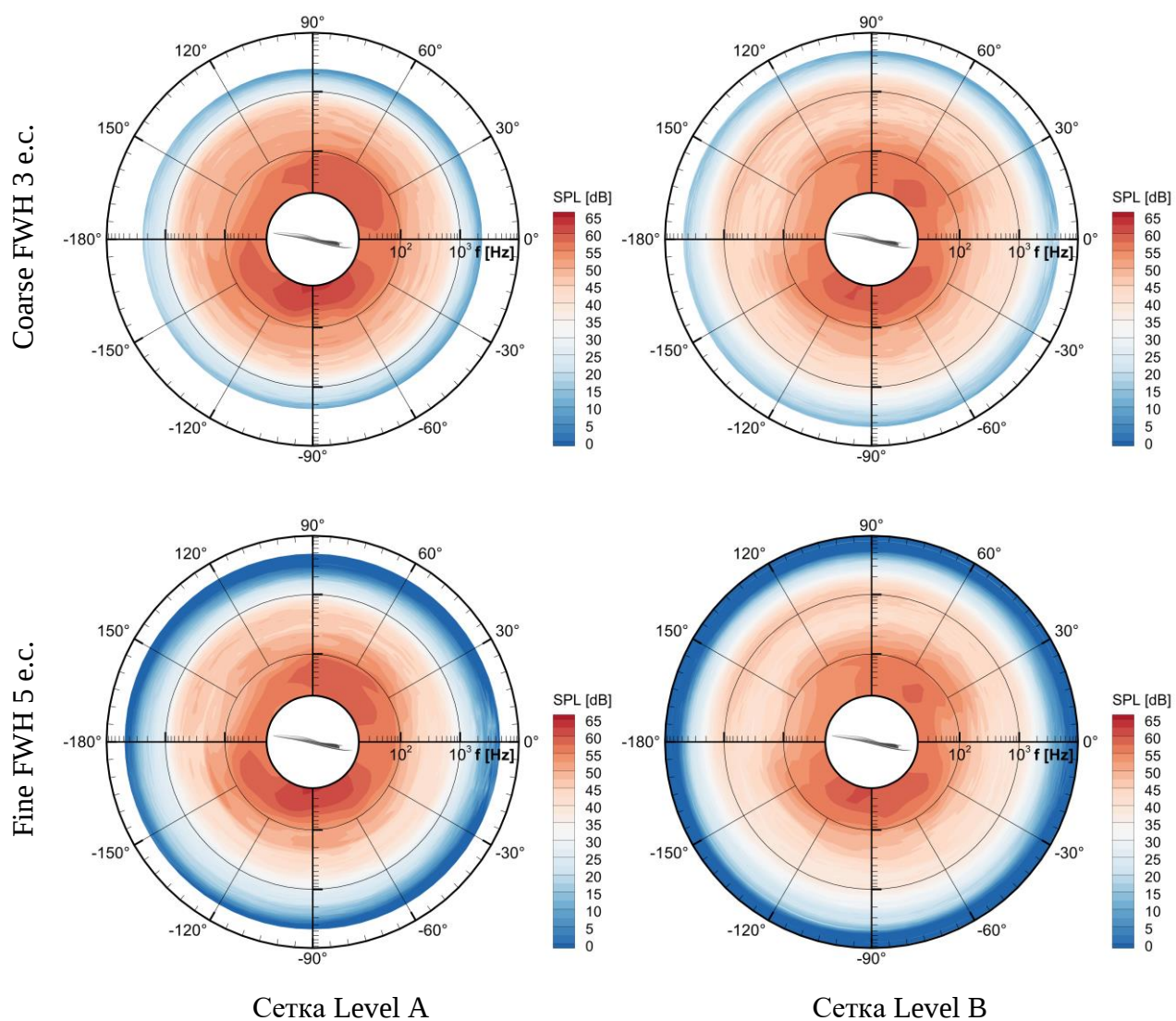


Рисунок 65. Спектры шума крыла СПС на режиме посадки в точках дальнего поля, полученные на различных сетках и для различного разрешения на поверхности FWH

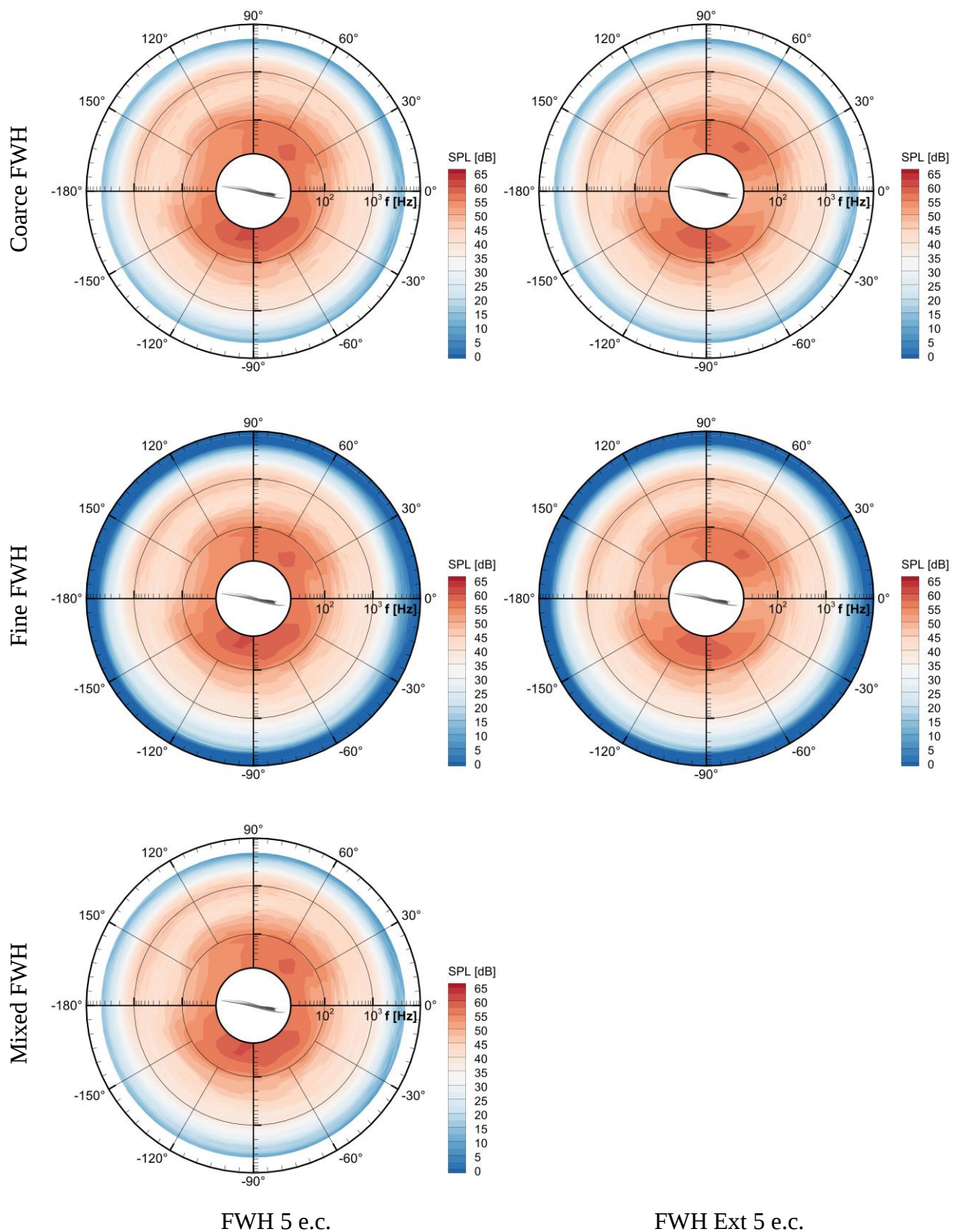


Рисунок 66. Тестирование зависимости спектров шума крыла СПС на режиме посадки в точках дальнего поля от использования расширенной поверхности FWH (FWH Ext) и различного сеточного разрешения на поверхности FWH (Coarse, Fine, Mixed). Входные данные получены на сетке Level B.

Заключение

Основные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

1. Разработана методика моделирования турбулентных течений и создаваемых ими акустических полей для авиационных приложений с использованием схем повышенной точности на неструктурированных сетках.
2. Разработана новая схема, позволяющая в расчетах задач внешнего обтекания повысить точность численных результатов за счет применения криволинейных реконструкций в призматических слоях неструктурированных сеток.
3. В составе программного комплекса NOISEtte при сохранении высокой параллельной эффективности и масштабируемости кода создан модуль, реализующий новый тип реконструкций.
4. Продемонстрированы преимущества новой схемы в задачах распространения акустической волны в цилиндрическом канале, обтекания сегмента с аэродинамическим профилем NASA 0012 и обтекания модельного двухлопастного винта.
5. С использованием разработанной методики вихреразрешающего моделирования проведены передовые суперкомпьютерные расчеты по моделированию турбулентного течения вблизи крыла прототипа сверхзвукового пассажирского самолета на режиме посадки и получены оценки спектральных характеристик производимого им шума для ближнего и дальнего полей.

Список сокращений

2D – двумерное пространство

3D – трехмерное пространство

BDF – Backward Differentiation Formula, формула обратного дифференцирования

BiCGStab – Bi-Conjugate Gradient Stabilized method, стабилизированный метод бисопряженных градиентов

CFL – Courant–Friedrichs–Lewy number, число Куранта

CPU – Central Processing Unit, центральный процессор

CRM-HL – Common Research Model in High Lift configuration

DDES – Delayed Detached Eddy Simulation, моделирование отсоединенных вихрей с запаздыванием

DES – Detached Eddy Simulation, моделирование отсоединенных вихрей

DG – Discontinuous Galerkin method, разрывный метод Галёркина

DNS – Direct Numerical Simulation, прямое численное моделирование

EBR – Edge-Based Reconstruction schemes, схемы, основанные на квазиодномерных реберно-ориентированных реконструкциях

FC – Flux Correction method, метод коррекции потоков

FWH – Ffowcs Williams – Hawking method, метод Фокса Уильямса – Хокинга

GPU – Graphics Processing Unit, графический процессор

HLPW – High-Lift Prediction Workshop

IJK – topology of structured mesh (ijk-indexing), топология структурированной сетки (ijk-индексация)

ILU0 – Incomplete LU decomposition, неполное LU разложение

LES – Large Eddy Simulation, моделирование крупных вихрей

MPI – Message Passing Interface, интерфейс передачи сообщений

OASPL – Overall Sound Pressure Level, общий уровень звукового давления

PL – Prismatic Layer, призматический слой

RANS – Reynolds-Averaged Navier-Stokes equations, осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье–Стокса

RC – Rotation/Curvature correction, поправка на кривизну линий тока и вращение

RMS – Root Mean Square, среднеквадратическое отклонение

SA – Spalart–Allmaras turbulence model, модель турбулентности Спаларта–Аллараса

SGS – Symmetric Gauss-Seidel preconditioner, симметричный предобуславливатель Гаусса–Зейделя

SST – Menter's Shear Stress Transport turbulence model, модель турбулентности Ментера

TI – Translation-Invariant mesh, трансляционно-инвариантная сетка

TVD – Total Variation Diminishing, уменьшение суммарной вариации численного решения

WENO – Weighted Essentially Non-Oscillatory scheme

СПС – Сверхзвуковой Пассажирский Самолет

Список литературы

1. Болсуновский А.Л., Брагин Н.Н., Бузоверя Н.П., Перченков Е.С., Чернышев И.Л., Скоморохов С.И. Расчетно-экспериментальные исследования малолетного самолета с ламинарным крылом и двигателями над задней кромкой крыла // Математическое моделирование. 2022. Т. 34. № 7. С. 5–23. <https://doi.org/10.20948/mm-2022-07-01>.
2. Bolsunovsky A.L., Buzoverya N.P., Karas O.V., Skomorokhov S.I. An experience in aerodynamic design of transport aircraft // 28th International Congress of the Aeronautical Sciences (ICAS). 2012. URL: https://icas.org/icas_archive/icas2012/papers/479.pdf (дата обращения: 26.05.2024).
3. Liburdy J. Intermediate Fluid Mechanics. Oregon State University, 2021. 179 p. URL: <https://open.oregonstate.edu/intermediate-fluid-mechanics> (дата обращения: 26.05.2024).
4. Ashby D.L. Potential Flow Theory and Operation Guide for the Panel Code PMARC // NASA Technical Report. 1999. URL: <https://ntrs.nasa.gov/citations/20000032961> (дата обращения: 26.05.2024).
5. Aeolus ASP: engineering software for aerodynamic analysis and shape optimization [Электронный ресурс]. URL: <https://aeolus-aero.com> (дата обращения: 26.05.2024).
6. FlightStream: panel methods aerodynamic solver [Электронный ресурс]. URL: <https://researchinflight.com> (дата обращения: 26.05.2024).
7. MachLine: a modern, subsonic-supersonic, unstructured, aerodynamic panel code [Электронный ресурс]. URL: <https://github.com/usuaero/MachLine> (дата обращения: 26.05.2024).
8. Karas O. V, Kovalev V.E. The codes for fast computations of viscous transonic flow over wing / body / nacelle / tail configuration [Электронный ресурс]. URL: https://blwf-aero.ru/BLWF_code/BLWF_Presentation/PresentationBLWF_en.pdf (дата обращения: 26.05.2024).
9. Batina J.T. Advanced Small Perturbation Potential Flow Theory for Unsteady Aerodynamic and Aeroelastic Analyses // NASA Technical Report. 2005. URL: <https://ntrs.nasa.gov/citations/20050245109> (дата обращения: 26.05.2024).
10. RTO Technical report 26. Verification and Validation Data for Computational Unsteady Aerodynamics: Section 4. F-5 CFD Results. 2000 [Электронный ресурс]. URL: <https://data.nasa.gov/dataset/RTO-TR-26/nf5j-hpex> (дата обращения: 26.05.2024).
11. Spalart P.R., Allmaras S.R. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows // AIAA Paper 92–0439. 1992. <https://doi.org/10.2514/6.1992-439>.

12. Menter F.R., Kuntz M., Langtry R. Ten Years of Industrial Experience with the SST Turbulence Model // *Turbulence, Heat and Mass Transfer* 4. 2003. P. 625–632. URL: https://www.researchgate.net/publication/228742295_Ten_years_of_industrial_experience_with_the_SST_turbulence_model (дата обращения: 26.05.2024).
13. Heinz S. A review of hybrid RANS-LES methods for turbulent flows: Concepts and applications // *Progress in Aerospace Sciences*. 2020. V. 114:100597. <https://doi.org/10.1016/J.PAEROSCI.2019.100597>.
14. DESider – A European Effort on Hybrid RANS-LES Modelling // *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design* / ed. Haase W., Braza M., Revell A. 2009. V. 103. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-92773-0>.
15. Spalart P.R. Detached-Eddy Simulation // *Annual Review of Fluid Mechanics*. 2009. V. 41. P. 181–202. <https://doi.org/10.1146/ANNUREV.FLUID.010908.165130>.
16. Mockett C., Fuchs M., Thiele F. Progress in DES for wall-modelled LES of complex internal flows // *Computers & Fluids*. 2012. V. 65. P. 44–55. <https://doi.org/10.1016/J.COMPFLUID.2012.03.014>.
17. Mockett C., Fuchs M., Garbaruk A., Shur M., Spalart P., Strelets M., Thiele F., Travin A. Two non-zonal approaches to accelerate RANS to LES transition of free shear layers in DES // *Progress in Hybrid RANS-LES Modelling*. 2015. V. 130. P. 187–201. https://doi.org/10.1007/978-3-319-15141-0_15.
18. Shur M.L., Spalart P.R., Strelets M.K., Travin A.K. An Enhanced Version of DES with Rapid Transition from RANS to LES in Separated Flows // *Flow, Turbulence and Combustion*. 2015. V. 95. P. 709–737. <https://doi.org/10.1007/S10494-015-9618-0>.
19. Shur M.L., Spalart P.R., Strelets M.K., Travin A.K. A hybrid RANS-LES approach with delayed-DES and wall-modelled LES capabilities // *International Journal of Heat and Fluid Flow*. 2008. V. 29. P. 1638–1649. <https://doi.org/10.1016/J.IJHEATFLUIDFLOW.2008.07.001>.
20. Delfs J., Bertsch L., Zellmann C., Rossian L., Far E.K., Ring T., Langer S.C. Aircraft Noise Assessment – From Single Components to Large Scenarios // *Energies*. 2018. V. 11. P. 429. <https://doi.org/10.3390/EN11020429>.
21. Ewert R., Delfs J.W., Lummer M., Bauer M. The Simulation of Airframe Noise Applying Euler-Perturbation and Acoustic Analogy Approaches // *International Journal of Aeroacoustics*. 2005. V. 4. P. 69–91. <https://doi.org/10.1260/1475472053729996>.

22. Delfs J.W., Bauer M., Ewert R., Grogger H.A., Lummer M., Lauke T.G.W. Numerical Simulation of Aerodynamic Noise with DLRs aeroacoustic code PIANO. User Manual. 2008. [Электронный ресурс]. URL: https://elib.dlr.de/118928/1/Piano_handbook_5.2_open.pdf (дата обращения: 26.05.2024).
23. Dobrzynski W., Ewert R., Pott-Pollenske M., Herr M., Delfs J. Research at DLR towards airframe noise prediction and reduction // *Aerospace Science and Technology*. 2008. V. 12. P. 80–90. <https://doi.org/10.1016/J.AST.2007.10.014>.
24. Cozza I., Arina R., Schipani C. Eulerian Solenoidal Digital Filtering Technique for Broadband Trailing-Edge Noise Prediction // 16th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. AIAA paper 2010-3876. 2010. <https://doi.org/10.2514/6.2010-3876>.
25. Ewert R., Dierke J., Siebert J., Neifeld A., Appel C., Siefert M., Kornow O. CAA broadband noise prediction for aeroacoustic design // *Journal of Sound and Vibration*. 2011. V. 330. P. 4139–4160. <https://doi.org/10.1016/J.JSV.2011.04.014>.
26. Ewert R. Broadband slat noise prediction based on CAA and stochastic sound sources from a fast random particle-mesh (RPM) method // *Computers & Fluids*. 2008. V. 37. P. 369–387. <https://doi.org/10.1016/J.COMPFLUID.2007.02.003>.
27. Bailly C., Juve D. A stochastic approach to compute subsonic noise using linearized Euler's equations // 5th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference and Exhibit. AIAA paper 99-1872. 1999. <https://doi.org/10.2514/6.1999-1872>.
28. Morris P., Long L., Scheidegger T., Wang Q., Pilon A. High speed jet noise simulations // 4th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. AIAA paper 98-2290. 1998. <https://doi.org/10.2514/6.1998-2290>.
29. Ewert R., Schröder W. Acoustic perturbation equations based on flow decomposition via source filtering // *Journal of Computational Physics*. 2003. V. 188. P. 365–398. [https://doi.org/10.1016/S0021-9991\(03\)00168-2](https://doi.org/10.1016/S0021-9991(03)00168-2).
30. Pott-Pollenske M., Dobrzynski W., Buchholz H., Guérin S., Saueressig G., Finke U. Airframe noise characteristics from flyover measurements and predictions // Technical Papers of 12th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. 2006. V. 4. P. 2069–2082. <https://doi.org/10.2514/6.2006-2567>.
31. Копьев В.Ф., Зайцев М.Ю., Беляев И.В. Исследование шума обтекания крупномасштабной модели крыла с механизацией // *Акустический журнал*. 2016. Т. 62. № 1. С. 95–105. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=24776626> (дата обращения: 26.05.2024).

32. Farassat F., Myers M.K. Extension of Kirchhoff's formula to radiation from moving surfaces // Journal of Sound and Vibration. 1988. V. 123. P. 451–460. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(88\)80162-7](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(88)80162-7).
33. Farassat F., Myers M.K. The Kirchhoff Formula for a Supersonically Moving Surface // CEAS/AIAA Paper No. 95-062. 1995. URL: <https://ntrs.nasa.gov/citations/20040111236> (дата обращения: 26.05.2024).
34. Ffowcs Williams J.E., Hawkings D.L. Sound generation by turbulence and surfaces in arbitrary motion // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences. 1969. V. 264:1151. P. 321–342. <https://doi.org/10.1098/rsta.1969.0031>.
35. Lighthill M.J., Newman M.H.A. On sound generated aerodynamically I. General theory // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences. 1952. V. 211. P. 564–587. <https://doi.org/10.1098/rspa.1952.0060>.
36. Brentner K.S., Farassat F. Analytical Comparison of the Acoustic Analogy and Kirchhoff Formulation for Moving Surfaces // AIAA Journal. 1998. V. 36. P. 1379–1386. <https://doi.org/10.2514/2.558>.
37. Goldstein M.E. A generalized acoustic analogy // Journal of Fluid Mechanics. 2003. V. 488. P. 315–333. <https://doi.org/10.1017/S0022112003004890>.
38. Даулинг А.П., Карабасов С.А., Хайнс Т.П. Использование акустической аналогии и метода моделирования крупных вихрей для диагностики шума турбулентных струй // Ученые записки ЦАГИ. 2010. Т. 41. № 1. С. 59–69. URL: https://www.tsagi.ru/institute/publications/memoirs/archive_annotations/1076/ (дата обращения: 26.05.2024).
39. Wang Z.J. et al. High-order CFD methods: Current status and perspective // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 2013. V. 72. P. 811–845. <https://doi.org/10.1002/fld.3767>.
40. Dumbser M., Käser M., Titarev V.A., Toro E.F. Quadrature-free non-oscillatory finite volume schemes on unstructured meshes for nonlinear hyperbolic systems // Journal of Computational Physics. 2007. V. 226. P. 204–243. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2007.04.004>.
41. Tsoutsanis P., Titarev V.A., Drikakis D. WENO schemes on arbitrary mixed-element unstructured meshes in three space dimensions // Journal of Computational Physics. 2011. V. 230. P. 1585–1601. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2010.11.023>.

42. Tsoutsanis P., Antoniadis A.F., Drikakis D. WENO schemes on arbitrary unstructured meshes for laminar, transitional and turbulent flows // *Journal of Computational Physics*. 2014. V. 256. P. 254–276. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2013.09.002>.
43. Tsoutsanis P., Dumbser M. Arbitrary high order central non-oscillatory schemes on mixed-element unstructured meshes // *Computers & Fluids*. 2021. V. 225:104961. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2021.104961>.
44. Farmakis P.S., Tsoutsanis P., Nogueira X. WENO schemes on unstructured meshes using a relaxed a posteriori MOOD limiting approach // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2020. V. 363:112921. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.112921>.
45. Rodionov A.V. Artificial viscosity to cure the shock instability in high-order Godunov-type schemes // *Computers & Fluids*. 2019. V. 190. P. 77–97. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2019.06.011>.
46. Antoniadis A.F., Tsoutsanis P., Drikakis D. Assessment of high-order finite volume methods on unstructured meshes for RANS solutions of aeronautical configurations // *Computers & Fluids*. 2017. V. 146. P. 86–104. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2017.01.002>.
47. Silva P.A.S.F., Tsoutsanis P., Antoniadis A.F. Simple multiple reference frame for high-order solution of hovering rotors with and without ground effect // *Aerospace Science and Technology*. 2021. V. 111:106518. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2021.106518>.
48. Dumbser M., Loubère R. A simple robust and accurate a posteriori sub-cell finite volume limiter for the discontinuous Galerkin method on unstructured meshes // *Journal of Computational Physics*. 2016. V. 319. P. 163–199. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2016.05.002>.
49. Boscheri W., Semplice M., Dumbser M. Central WENO subcell finite volume limiters for Ader discontinuous Galerkin schemes on fixed and moving unstructured meshes // *Communications in Computational Physics*. 2019. V. 25. P. 311–346. <https://doi.org/10.4208/cicp.oa-2018-0069>.
50. Giuliani A., Krivodonova L. A moment limiter for the discontinuous Galerkin method on unstructured tetrahedral meshes // *Journal of Computational Physics*. 2020. V. 404:109106. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2019.109106>.
51. Zhu J., Shu C.W., Qiu J. High-order Runge-Kutta discontinuous Galerkin methods with a new type of multi-resolution WENO limiters on triangular meshes // *Applied Numerical Mathematics*. 2020. V. 153. P. 519–539. <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2020.03.013>.

52. Markert J., Gassner G., Walch S. A Sub-element Adaptive Shock Capturing Approach for Discontinuous Galerkin Methods // Communications on Applied Mathematics and Computation 2021. 2021. P. 1–43. <https://doi.org/10.1007/S42967-021-00120-X>.
53. Gaburro E., Dumbser M. A Posteriori Subcell Finite Volume Limiter for General $\mathbb{P}_{NP}$ -M $\mathbb{S}$ Schemes: Applications from Gasdynamics to Relativistic Magnetohydrodynamics // Journal of Scientific Computing. 2021. V. 86. P. 37. <https://doi.org/10.1007/s10915-020-01405-8>.
54. Dutt K., Krivodonova L. A high-order moment limiter for the discontinuous Galerkin method on triangular meshes // Journal of Computational Physics. 2021. V. 433:110188. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2021.110188>.
55. Loppi N.A., Witherden F.D., Jameson A., Vincent P.E. Locally adaptive pseudo-time stepping for high-order Flux Reconstruction // Journal of Computational Physics. 2019. V. 399:108913. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2019.108913>.
56. Barth T.J. Numerical aspects of computing high Reynolds number flows on unstructured meshes // AIAA Paper 91–0721. 1991. <https://doi.org/10.2514/6.1991-721>.
57. Katz A., Sankaran V. An efficient correction method to obtain a formally third-order accurate flow solver for node-centered unstructured grids // Journal of Scientific Computing. 2012. V. 51. P. 375–393. <https://doi.org/10.1007/s10915-011-9515-1>.
58. Pincock B., Katz A. High-order flux correction for viscous flows on arbitrary unstructured grids // Journal of Scientific Computing. 2014. V. 61. P. 454–476. <https://doi.org/10.1007/s10915-014-9833-1>.
59. Work D.G., Katz A. Aspects of the flux correction method for solving the Navier-Stokes equations on unstructured meshes // AIAA Paper 2015-0834. 2015. <https://doi.org/10.2514/6.2015-0834>.
60. Nishikawa H. First, second, and third order finite-volume schemes for advection-diffusion // Journal of Computational Physics. 2014. V. 273. P. 287–309. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2014.05.021>.
61. Bakhvalov P.A., Kozubskaya T.K. Modification of Flux Correction method for accuracy improvement on unsteady problems // Journal of Computational Physics. 2017. V. 338. P. 199–216. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2017.02.053>.
62. Stoufflet B., Periaux J., Fezoui F., Dervieux A. Numerical simulation of 3-D hypersonic Euler flows around space vehicles using adapted finite elements // AIAA Paper 87–0560. 1987. <https://doi.org/10.2514/6.1987-560>.

63. Debiez C., Dervieux A., Mer K., Nkonga B. Computation of unsteady flows with mixed finite volume/finite element upwind methods // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 1998. V. 27. P. 193–206. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0363\(199801\)27:1/4<193::AID-FLD659>3.0.CO;2-D](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0363(199801)27:1/4<193::AID-FLD659>3.0.CO;2-D).
64. Debiez C., Dervieux A. Mixed-element-volume MUSCL methods with weak viscosity for steady and unsteady flow calculations // *Computers and Fluids*. 2000. V. 29. P. 89–118. [https://doi.org/10.1016/S0045-7930\(98\)00059-0](https://doi.org/10.1016/S0045-7930(98)00059-0).
65. Abalakin I., Dervieux A., Kozubskaya T. High accuracy finite volume method for solving nonlinear aeroacoustics problems on unstructured meshes // *Chinese Journal of Aeronautics*. 2006. V. 19. P. 97–104. [https://doi.org/10.1016/s1000-9361\(11\)60289-6](https://doi.org/10.1016/s1000-9361(11)60289-6).
66. Koobus B., Alauzet F., Dervieux A. Numerical algorithms for unstructured meshes // *Computational Fluid Dynamics*, CRC Press. 2011. P. 131–203. <https://doi.org/10.1201/b11033-12>.
67. Abalakin I., Bakhvalov P., Kozubskaya T. Edge-based reconstruction schemes for unstructured tetrahedral meshes // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 2016. V. 81. P. 331–356. <https://doi.org/10.1002/fld.4187>.
68. Bakhvalov P., Kozubskaya T. EBR-WENO scheme for solving gas dynamics problems with discontinuities on unstructured meshes // *Computers and Fluids*. 2017. V. 157. P. 312–324. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2017.09.004>.
69. Shu C.-W. Essentially Non-Oscillatory and Weighted Essentially Non-Oscillatory Schemes for Hyperbolic Conservation Laws // *NASA Tech. Rep.*: 97-65. 1997. <https://doi.org/10.1007/BFb0096355>.
70. Бахвалов П.А., Козубская Т.К. О построении реберно-ориентированных схем, обеспечивающих точность на линейной функции, для решения уравнений Эйлера на гибридных неструктурированных сетках // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2017. Т. 57. № 4. С. 682–701. <https://doi.org/10.7868/S0044466917040032>.
71. Katz A., Work D. High-order flux correction/finite difference schemes for strand grids // *Journal of Computational Physics*. 2015. V. 282. P. 360–380. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2014.11.019>.
72. Tong O., Katz A., Wissink A.M., Sitaraman J. High-order methods for three-dimensional strand-cartesian grids // *AIAA Paper* 2015–0835. 2015. <https://doi.org/10.2514/6.2015-0835>.

73. Gorobets A., Bakhvalov P. Heterogeneous CPU+GPU parallelization for high-accuracy scale-resolving simulations of compressible turbulent flows on hybrid supercomputers // *Computer Physics Communications*. 2022. V. 271. P. 108231. <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2021.108231>.
74. Spalart P.R., Shur M. On the sensitization of turbulence models to rotation and curvature // *Aerospace Science and Technology*. 1997. V. 1. P. 297–302. [https://doi.org/10.1016/S1270-9638\(97\)90051-1](https://doi.org/10.1016/S1270-9638(97)90051-1).
75. Smirnov P.E., Menter F.R. Sensitization of the SST turbulence model to rotation and curvature by applying the Spalart-Shur correction term // *Journal of Turbomachinery*. 2009. V. 131. P. 1–8. <https://doi.org/10.1115/1.3070573/468836>.
76. Stabnikov A.S., Garbaruk A. V. Testing of modified curvature-rotation correction for $k-\omega$ SST model // *Journal of Physics: Conference Series*. 2016. V. 769. P. 012087. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/769/1/012087>.
77. Nicoud F., Toda H.B., Cabrit O., Bose S., Lee J. Using singular values to build a subgrid-scale model for large eddy simulations // *Physics of Fluids*. 2011. V. 23. P. 085106 <https://doi.org/10.1063/1.3623274>.
78. Roe P.L. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes // *Journal of Computational Physics*. 1981. V. 43. P. 357–372. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(81\)90128-5](https://doi.org/10.1016/0021-9991(81)90128-5).
79. Bakhvalov P.A., Surnachev M.D. Method of averaged element splittings for diffusion terms discretization in vertex-centered framework // *Journal of Computational Physics*. 2022. V. 450. P. 110819. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2021.110819>.
80. Guseva E.K., Garbaruk A. V, Strelets K. An automatic hybrid numerical scheme for global RANS-LES approaches // *Journal of Physics: Conference Series*. 2017. V. 929. P. 012099. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/929/1/012099>.
81. van der Vorst H.A. Bi-CGSTAB: A Fast and Smoothly Converging Variant of Bi-CG for the Solution of Nonsymmetric Linear Systems // *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*. 1992. V. 13. P. 631–644. <https://doi.org/10.1137/0913035>.
82. Duben A.P., Kozubskaya T.K. Evaluation of Quasi-One-Dimensional Unstructured Method for Jet Noise Prediction // *AIAA Journal*. 2019. V. 57. P. 5142–5155. <https://doi.org/10.2514/1.J058162>.
83. Duben A.P., Ruano J., Gorobets A. V., Rigola J., Trias F.X. Evaluation of Enhanced Gray Area Mitigation Approaches Based on Jet Aeroacoustics // *AIAA Journal*. 2022. V. 61. P. 612–625. <https://doi.org/10.2514/1.J062116>.

84. Duben A.P., Kozubskaya T.K., Marakueva O. V., Voroshnin D. V. Simulation of flow over high-lifted turbine cascade at low Reynolds numbers // *Journal of Physics: Conference Series*. 2021. V. 1891. P. 012018. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1891/1/012018>.
85. Duben A., Gorobets A., Soukov S., Marakueva O., Shuvaev N., Zagitov R. Supercomputer Simulations of Turbomachinery Problems with Higher Accuracy on Unstructured Meshes // *Lecture Notes in Computer Science*. 2022. V. 13708. P. 356–367. https://doi.org/10.1007/978-3-031-22941-1_26.
86. Bobkov V., Abalikin I., Kozubskaya T. Simulation of Helicopter Rotors On Unstructured Mixed Meshes Using Edge-Based Reconstruction Schemes // *14th WCCM-ECCOMAS Congress*. 2021. V. 700. P. 1–12. <https://doi.org/10.23967/wccm-eccomas.2020.308>.
87. Abalakin I. V., Bobkov V.G., Kozubskaya T.K., Vershkov V.A., Kritsky B.S., Mirgazov R.M. Numerical Simulation of Flow around Rigid Rotor in Forward Flight // *Fluid Dynamics*. 2020. V. 55. P. 534–544. <https://doi.org/10.1134/S0015462820040011/METRICS>.
88. Bobkov V., Gorobets A., Kozubskaya T., Zhang X., Zhong S. Supercomputer Simulation of Turbulent Flow Around Isolated UAV Rotor and Associated Acoustic Fields // *Communications in Computer and Information Science*. 2021. V. 1510. P. 256–269. https://doi.org/10.1007/978-3-030-92864-3_20.
89. Duben A., Kozubskaya T., Bosnyakov S. Two Cases Calling for Scale-Resolving Simulation // *Computational Methods in Applied Sciences*. 2022. V. 57. P. 77–87. https://doi.org/10.1007/978-3-031-12019-0_6.
90. Dan'kov B.N., Duben' A.P., Kozubskaya T.K. Analysis of Self-Oscillation Processes in a Cavity with a Flow of OpenType on the Basis of the Data of Vortex-Resolving Calculations // *Fluid Dynamics*. 2023. V. 58. P. 659–669. <https://doi.org/10.1134/S0015462823600517/METRICS>.
91. Гарбарук А.В. Особенности применения вихреразрешающих подходов для пристенных течений. 2019. Курс лекций «Модели физико-химической ГГД и турбулентности. Вихреразрешающие подходы» [Электронный ресурс]. URL: https://cfd.spbstu.ru/agarbaruk/SRS_methods/Term10_Part2_Lec02_les_chan.pdf (дата обращения: 26.05.2024).
92. Shur M.L., Spalart P.R., Strelets M.K. Noise Prediction for Increasingly Complex Jets. Part I: Methods and Tests // *International Journal of Aeroacoustics*. 2005. V. 4. P. 213–245. <https://doi.org/10.1260/1475472054771376>.

93. Shur M.L., Spalart P.R., Strelets M.K. Noise Prediction for Increasingly Complex Jets. Part II: Applications // International Journal of Aeroacoustics. 2005. V. 4. P. 247–266. <https://doi.org/10.1260/1475472054771385>.
94. Piersol A.G., Bendat J.S. Random Data: Analysis and Measurement Procedures. 4th Edition. John Wiley & Sons, Ltd, 2011. 640 p.
95. Heinzl G., Rüdiger A., Schilling R. Spectrum and spectral density estimation by the Discrete Fourier transform (DFT), including a comprehensive list of window functions and some new at-top windows. 2002. [Электронный ресурс]. URL: <https://hdl.handle.net/11858/00-001M-0000-0013-557A-5> (дата обращения: 26.05.2024).
96. Gorobets A. Parallel Algorithm of the NOISEtte Code for CFD and CAA Simulations // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2018. V. 39. P. 524–532. <https://doi.org/10.1134/S1995080218040078>.
97. Eça L., Klaij C.M., Vaz G., Hoekstra M., Pereira F.S. On code verification of RANS solvers // Journal of Computational Physics. 2016. V. 310. P. 418–439. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2016.01.002>.
98. Navah F., Nadarajah S. On the verification of CFD solvers of all orders of accuracy on curved wall-bounded domains and for realistic RANS flows // Computers and Fluids. 2020. V. 205. P. 104504. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2020.104504>.
99. Kirchhoff G. Ueber den Einfluss der Wärmeleitung in einem Gase auf die Schallbewegung // Annalen der Physik. 1868. V. 210. P. 177–193. <https://doi.org/10.1002/andp.18682100602>.
100. Bakhvalov P. ColESo: Collection of exact solutions for verification of numerical algorithms for simulation of compressible flows // Computer Physics Communications. 2023. V. 282. P. 108542. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.cpc.2022.108542>.
101. ColESo: Collection of exact solutions for verification of numerical algorithms for simulation of compressible flows [Электронный ресурс]. URL: <https://caa.imamod.ru/index.php/research/ColESo>, <https://github.com/bahvalo/ColESo> (дата обращения: 26.05.2024).
102. Бахвалов П.А. Звуковая волна в круглой бесконечной трубе при наличии вязкости и теплопроводности // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. Т. 135. С. 1–32. <https://doi.org/10.20948/prepr-2017-135>.

103. Pointwise. Advancing Front Mesher [Электронный ресурс]. URL: <https://www.pointwise.com/articles/advancing-front-mesher-and-faster-i-o-coming-to-pointwise> (дата обращения: 10.06.2021).
104. NASA Langley Research Center. Turbulence Modeling Resource. 2DN00: 2D NACA 0012 Airfoil Validation Case [Электронный ресурс]. URL: https://turbmodels.larc.nasa.gov/naca0012_val.html (дата обращения: 26.05.2024).
105. Caradonna F.X., Tung C. Experimental and analytical studies of a model helicopter rotor in hover. NASA-TM-81232. 1981 [Электронный ресурс]. URL: <https://ntrs.nasa.gov/citations/19820004169> (дата обращения: 26.05.2024).
106. Chen C.L., McCroskey W.J., Obayashi S. Numerical solutions of forward-flight rotor flow using an upwind method // Journal of Aircraft. 1991. V. 28. P. 374–380. <https://doi.org/10.210.2514/3.46037>.
107. 4th AIAA CFD High Lift Prediction Workshop – Test Cases [Электронный ресурс]. URL: <https://hiliftpw.larc.nasa.gov/Workshop4/testcases.html> (дата обращения: 26.05.2024).
108. Lacy D., Clark A.M. Definition of initial landing and takeoff reference configurations for the High Lift Common Research Model (CRM-HL) // AIAA Paper 2020-2771. 2020. <https://doi.org/10.2514/6.2020-2771>.
109. Evans A., Lacy D., Smith I., Rivers M. Test Summary of the NASA High-Lift Common Research Model Half-Span at QinetiQ 5-Metre Pressurized Low-Speed Wind Tunnel // AIAA Paper 2020-2770. 2020. <https://doi.org/10.2514/6.2020-2770>.
110. Lin J.C., Melton L.P., Viken S.A., Andino M.Y., Koklu M., Hannon J.A., Vatsa V.N. High Lift Common Research Model for wind tunnel testing: An active flow control perspective // AIAA Paper 2017-0319. 2017. <https://doi.org/10.2514/6.2017-0319>.
111. Hummel D. The second international vortex flow experiment (VFE-2) // Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design. 2009. V. 102. P. 105–129. https://doi.org/10.1007/978-3-540-95998-4_7.
112. Furman A., Breitsamter C. Turbulent and unsteady flow characteristics of delta wing vortex systems // Aerospace Science and Technology. 2013. V. 24. P. 32–44. <https://doi.org/10.1016/J.AST.2012.08.007>.
113. RTO Technical report AVT-113. Understanding and Modeling Vortical Flows to Improve the Technology Readiness Level for Military Aircraft. 2009.

114. ERCOFTAC Knowledge Base. Application Challenge AC1-09. Vortex breakdown above a delta wing with sharp leading edge. 2015. [Электронный ресурс]. URL: <https://www.kbwiki.ercoftac.org/w/index.php/Abstr:AC1-09> (дата обращения: 26.05.2024).
115. Zaporozhets O., Tokarev V., Attenborough K. Aircraft Noise: Assessment, prediction and control. Spon Press, 2011. 420 p.
116. Delfs J. Simulation of aircraft installation noise – a key to low noise aircraft design. 2016 [Электронный ресурс]. URL: https://ceaa.imamod.ru/2016/files/ceaa2016.pdfs/D3S01_Delfs.pdf (дата обращения: 26.05.2024).
117. Ferris R., Sacks M., Cerizza D., Ribeiro A.F.P., Khorrami M.R. Aeroacoustic Computations of a Generic Low Boom Concept in Landing Configuration: Part 1 – Aerodynamic Simulations // AIAA Aviation and Aeronautics Forum and Exposition, AIAA AVIATION Forum 2021. 2021. <https://doi.org/10.2514/6.2021-2195>.
118. Ribeiro A.F.P., Ferris R., Khorrami M.R. Aeroacoustic Computations of a Generic Low Boom Concept in Landing Configuration: Part 2 – Airframe Noise Simulations // AIAA Aviation and Aeronautics Forum and Exposition, AIAA AVIATION Forum 2021. 2021. <https://doi.org/10.2514/6.2021-2196>.
119. Khorrami M.R., Shea P.R., Winski C.S., Ravetta P.A., Ribeiro A.F.P., Ferris R., Sacks M. Aeroacoustic Computations of a Generic Low Boom Concept in Landing Configuration: Part 3 – Aerodynamic Validation and Noise Source Identification // AIAA Aviation and Aeronautics Forum and Exposition, AIAA AVIATION Forum 2021. 2021. <https://doi.org/10.2514/6.2021-2197>.
120. Бахвалов П.А., Козубская Т.К., Корнилина Е.Д., Морозов А.В., Якобовский М.В. Технология расчета акустических возмущений в дальнем поле течения // Математическое моделирование. 2011. Т. 23. № 11. С. 33–47. <https://doi.org/10.1134/S2070048212030039>.

Публикации автора по теме диссертации

1. Bakhvalov P., Kozubskaya T., **Rodionov P.** EBR schemes with curvilinear reconstructions for hybrid meshes // Computers & Fluids. 2022. V. 239. P. 105352. (**WoS, Scopus**) <https://doi.org/10.1016/J.COMPFLUID.2022.105352>.
2. Дубень А.П., Козубская Т.К., **Родионов П.В.**, Цветкова В.О. EBR схемы с криволинейными реконструкциями переменных вблизи обтекаемых тел // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2021. Т. 61, № 1. С. 3–19 (**перечень ВАК**); Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2021. V. 61. P. 1–16. (**WoS, Scopus**) <https://doi.org/10.31857/s0044466920120030>.
3. **Rodionov P.V.** Curvilinear Reconstructions for EBR Schemes On Semi-Structured Meshes // 14th WCCM-ECCOMAS Congress. 2021. V. 700. P. 1–12. (**Scopus**) <https://doi.org/10.23967/WCCM-ECCOMAS.2020.113>.
4. Бахвалов П.А., Дубень А.П., Козубская Т.К., **Родионов П.В.** EBR схемы с криволинейными реконструкциями для решения двумерных задач внешнего обтекания // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2019. № 152. С. 1–22. (**перечень ВАК**) <https://doi.org/10.20948/prepr-2019-152>.
5. Горобец А.В., Дубень А.П., Козубская Т.К., **Родионов П.В.** Подходы к численному моделированию акустического поля, создаваемого крылом самолета с механизацией на режиме посадки // Математическое моделирование. 2022. Т. 34. № 7. С. 24–48 (**перечень ВАК**); Mathematical Models and Computer Simulations. 2023. V. 15. P. 92–108. (**Scopus**) <https://doi.org/10.20948/mm-2022-07-02>.
6. Gorobets A.V., Bakhvalov P.A., Duben A.P., **Rodionov P.V.** Acceleration of NOISEtte Code for Scale-Resolving Supercomputer Simulations of Turbulent Flows // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. V. 41. P. 1463–1474. (**перечень ВАК, WoS, Scopus**) <https://doi.org/10.1134/S1995080220080077>.