

На правах рукописи

**Меретин Алексей Сергеевич**

**Разработка термодинамически согласованных  
математических моделей и методов  
математического моделирования для анализа  
тепловых методов увеличения нефтеотдачи**

Специальность 1.2.2 (05.13.18) — Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва — 2021

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)»

**Научный руководитель:** **Савенков Евгений Борисович,**  
доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник,  
федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук»

**Официальные оппоненты:** **Булгакова Гузель Талгатовна,**  
доктор физико-математических наук, профессор,  
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Уфимский государственный авиационный технический университет»

**Герке Кирилл Миронович,**  
кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник,  
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта Российской академии наук» (ИФЗ РАН)

**Ведущая организация:** Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук»

Защита диссертации состоится «17» февраля 2022 года в «11» час. «00» мин. на заседании совета 24.1.237.01 (Д 002.024.03) при ИПМ им. М.В. Келдыша РАН по адресу: 125047, Москва, Миусская пл., д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН и на сайте [www.keldysh.ru](http://www.keldysh.ru).

Автореферат разослан «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2021 года.

Ученый секретарь диссертационного совета,  
кандидат физико-математических наук



Корнилина М.А.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы исследования.** В настоящее время в связи с вводом в эксплуатацию все большего числа месторождений с трудноизвлекаемой нефтью появилась необходимость в создании новых способов разработки и методов увеличения нефтеотдачи. В частности, для месторождений с высоковязкой нефтью применяется термическое воздействие на пласт. Суть метода заключается в подводе тепла в пласт путем закачки теплоносителя либо при помощи кондуктивного теплообмена. В результате нагрева пласта увеличивается подвижность находящихся в нем флюидов и реализуются процессы химического разложения содержащихся в пласте углеводородов (для сланцевых месторождений и месторождений нефтематеринских пород — генерация синтетической нефти).

Оценка эффективности термического воздействия возможна только при проведении комплексного моделирования основных процессов, происходящих в пласте, включая тепловые и геомеханические эффекты, в том числе разрушение пласта. Кроме того, вследствие неизотермичности процесса, дополнительным условием, предъявляемым к системе уравнений модели, является их термодинамическая согласованность, под которой понимается консервативность системы уравнений и справедливость второго закона термодинамики в подходящей формулировке.

В традиционных подходах к моделированию процессов нефтедобычи основное внимание уделяется движению флюидов в пласте. При применении термических методов воздействия процесс вытеснения сопровождается изменением степени подвижности заполняющего поры флюида за счет изменения а) физико-химических свойств флюида под действием высокого давления и температуры, б) фильтрационно-емкостных свойств пласта за счет геомеханических процессов, связанных с деформацией пласта и его разрушением.

Существует ряд моделей, позволяющих описывать фильтрационные, деформационные и неизотермические процессы, а также разрушение среды. В большинстве их повреждаемость среды описывается в рамках теории континуального разрушения. В соответствии с ней разрушение пласта моделируется параметром повреждаемости (в общем случае являющимся тензором), эволюция которого описывается заданным кинетическим уравнением. Данный параметр входит в основные определяющие соотношения модели и влияет

на фильтрационно-емкостные, термодинамические и механические параметры пласта.

Геомеханические модели с учетом разрушения, применяемые для анализа напряженно-деформированного состояния нефтегазового месторождения, условно можно разделить на два больших класса. К первому классу относятся термодинамически корректные в указанном выше смысле модели, которые, тем не менее, используют определяющие соотношения сравнительно простого вида. Последние обычно имеют качественный характер и в них отсутствует преемственность с распространенными моделями континуального разрушения чисто упругих сред. К моделям второго класса относятся модели, широко применяемые на практике, которые являются формальными обобщениями классических термодинамических моделей и получаются добавлением в последние эмпирических зависимостей, учитывающих процесс разрушения. При этом анализ таких моделей с точки зрения их термодинамической корректности не производится.

Использование новых математических моделей требует разработки соответствующих численных алгоритмов, которые обеспечивают корректность расчета в рамках выбранной модели и применимы в актуальных практических постановках. Для решения рассматриваемых задач наиболее широко распространены методы конечных объемов и конечных элементов. В настоящей работе использован последний класс методов.

В связи с этим построение полного комплекса средств математического моделирования (математические модели, вычислительные алгоритмы и их программная реализация), основанного на термодинамически корректных моделях, пригодных для анализа реалистичных сценариев разработки, является актуальной задачей.

**Целью** настоящей работы является разработка средств и методов математического моделирования — термодинамически согласованной физико-математической модели, вычислительных алгоритмов и их программной реализации — для анализа содержательных задач, связанных с разработкой нефтяных месторождений с использованием термических методов воздействия на пласт.

Для достижения поставленной цели в работе решены следующие **конкретные задачи**:

1. Разработка термодинамически согласованного (в смысле выполнения вто-

рого закона термодинамики и соответствующих законов сохранения) обобщения пороупругой модели Био для случая неизотермической постановки с учетом разрушения среды и его влияния на упругие и фильтрационно-емкостные свойства.

2. Разработка вычислительного алгоритма для численного решения уравнений построенной модели в рамках пространственно трехмерной постановки.
3. Реализация, на основе разработанных алгоритмов, программного комплекса, его валидация и проведение расчетов в постановках прикладного уровня сложности.

**Научной новизной** данной работы является:

1. Термодинамически согласованная математическая модель термoporоупругой среды с учетом эффектов разрушения породы и связанным с ним изменением геомеханических и фильтрационных свойств пласта.
2. Вычислительные алгоритмы для решения системы уравнений модели на основе метода конечных элементов.
3. Программный комплекс, пригодный для анализа задач в реалистичных постановках.

**Теоретическая ценность** настоящей работы заключается в разработанной физико-математической модели эволюции пороупругой среды с учетом разрушения и вычислительных методов для её решения.

**Практически значимым** результатом работы является разработанный программный комплекс для анализа процесса термического воздействия на пласт с учетом геомеханических эффектов и разрушения в реалистичных постановках.

**Методология и методы исследования**, использованные в данной работе, включают в себя методы математического анализа и теории дифференциальных уравнений в частных производных, численные методы решения систем нелинейных уравнений в частных производных, а также методологию построения численного эксперимента. Вывод моделей произведен в рамках современных методов рациональной термомеханики сплошной среды.

**Достоверность и обоснованность** полученных результатов обеспечены применением при выводе уравнений и определяющих соотношений математической модели обоснованной процедуры Колмана-Нолла, строгостью используемого для разработки вычислительного алгоритма математического аппарата, сопоставлением результатов моделирования с известными решениями.

**На защиту выносятся следующие положения:**

1. Разработана термодинамически согласованная физико-математическая модель разрушения термopорoупругой среды, учитывающая деформационные, фильтрационные и неизотермические эффекты, пригодная для анализа эффективности современных и перспективных тепловых методов увеличения нефтеотдачи.
2. Разработан неявный численный алгоритм расчета эволюции термopорoупругой среды с учетом разрушения на основе метода конечных элементов с применением неструктурированных тетраэдральных сеток.
3. Реализован программный комплекс для моделирования термического воздействия на порoупругую среду с учетом разрушения. Проведены валидационные расчеты, подтверждающие корректность разработанных алгоритмов.
4. Выполнены расчеты по оценке влияния разрушения среды при применении термических методов воздействия на пласт, демонстрирующие применимость разработанных моделей и алгоритмов для решения задач в реалистичных постановках.

**Апробация работы.** Результаты работы были представлены на 4-й Международной научной школе молодых ученых «Физическое и математическое моделирование процессов в геосредах» (г. Москва, 2018 г.), научных слушаниях, посвященных 110-летию со дня рождения С.А. Христиановича «Современные проблемы механики и математики» (г. Москва, 2018 г.), 61-й Всероссийской научной конференции МФТИ (г. Долгопрудный, 2018 г.), Научной конференции молодых ученых и аспирантов ИФЗ РАН (г. Москва, 2019 г.), семинаре ИПМ РАН «Вычислительные методы и математическое моделирование» им.Ю.П. Попова (г. Москва, 2020 г.), семинаре ИПМ РАН «Математическое моделирование» (г. Москва, 2020 г.).

**Публикации.** Основные результаты работы опубликованы в 6 печатных работах из перечня ВАК, из них 2 — в изданиях, индексируемых Scopus, 1 — Web of Science.

**Личный вклад соискателя.** Соискатель самостоятельно разработал физико-математическую модель разрушения в пороупругой среде, вычислительные алгоритмы и программный комплекс, выполнил валидацию программного комплекса путем сравнения с аналитическими решениями, а также провел численные эксперименты по оценке разрушения флюидонасыщенного пласта в процессе термического воздействия и проанализировал полученные результаты. Все выносимые на защиту положения получены лично автором.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Работа представлена на 117 страницах, содержит 36 иллюстраций и 9 таблиц. Список литературы содержит 111 наименований.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** диссертации описаны основные эффекты, сопровождающие процесс термического воздействия на пласт, и особенности их моделирования. Показана актуальность задачи комплексного моделирования пласта с учетом деформации породы, фильтрации флюида, учета неизотермических эффектов и разрушения породы. Описаны существующие подходы к моделированию, их преимущества и недостатки. Сформулированы цели и задачи работы, а также полученные результаты. Указаны сведения об апробации работы и публикациях по теме исследования.

**В первой главе** описана физико-математическая модель разрушения в пороупругой среде, являющаяся обобщением пороупругой модели Био. Рассматривается элементарный объем пространства  $\Omega$ , в котором содержатся две фазы — пористый деформируемый скелет и однофазный слабосжимаемый флюид, движущиеся со скоростями  $\mathbf{v}_s$  и  $\mathbf{v}_f$  соответственно, и одновременно занимающие один и тот же объем.

Обозначим величины, отнесенные к твердой и жидкой фазе, индексами « $s$ » и « $f$ » соответственно. Базовая система уравнений модели состоит из фунда-

ментальных законов сохранения массы, импульса и энергии:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial m_f}{\partial t} + \operatorname{div}(m_f \mathbf{v}_s) + \operatorname{div}(\rho_f \mathbf{w}) = 0, \\
& \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) + m_f \left( \mathbf{f} - \frac{d_f \mathbf{v}_f}{dt} \right) + m_s \left( \mathbf{f} - \frac{d_s \mathbf{v}_s}{dt} \right) = 0, \\
& \frac{\partial}{\partial t} \left[ m_s \left( e_s + \frac{\mathbf{v}_s^2}{2} \right) + m_f \left( e_f + \frac{\mathbf{v}_f^2}{2} \right) \right] + \\
& \quad + \operatorname{div} \left[ m_s \left( e_s + \frac{\mathbf{v}_s^2}{2} \right) \mathbf{v}_s \right] + \operatorname{div} \left[ m_f \left( e_f + \frac{\mathbf{v}_f^2}{2} \right) \mathbf{v}_f \right] = \\
& \quad = \operatorname{div} [\boldsymbol{\sigma}_f (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s) + \boldsymbol{\sigma} \mathbf{v}_s] + (m_s \mathbf{v}_s + m_f \mathbf{v}_f) \mathbf{f} - \operatorname{div}(\mathbf{q}_f + \mathbf{q}_s),
\end{aligned} \tag{1}$$

где  $\alpha = f, s$ ,  $m_\alpha$  — масса фазы  $\alpha$  в элементарном объеме среды,  $\rho_f$  — плотность флюида,  $\mathbf{w}$  — скорость фильтрации,  $\boldsymbol{\sigma}$  — тензор полных напряжений,  $\mathbf{f}$  — вектор внешних сил,  $e_\alpha$  — удельная внутренняя энергия фазы  $\alpha$ ,  $\mathbf{q}_\alpha$  — вектор потока тепла фазы  $\alpha$ , оператор  $d_\alpha(\cdot)/dt = \partial(\cdot)/\partial t + \mathbf{v}_\alpha \operatorname{grad}(\cdot)$  — материальная производная для фазы  $\alpha$ .

Для замыкания системы законов сохранения должны быть заданы определяющие соотношения, описывающие ограничения на поведение материала под влиянием внешнего воздействия. Данные определяющие соотношения для полной модели должны обеспечивать выполнение условий термодинамической согласованности, то есть выполнение второго начала термодинамики для любой истории состояний (процесса).

Для получения конкретного вида определяющих соотношений была использована процедура Колмана-Нолла. Основная идея данного подхода заключается в том, что при наличии функциональных связей между параметрами, описывающими термодинамический процесс, вид определяющих соотношений должен быть таким, чтобы второй закон термодинамики выполнялся для любой последовательности состояний.

Считается, что в результате изменения напряженно-деформированного состояния пласта в нем может возникнуть зона диффузного разрушения, под которой понимается образование в твердой фазе зон микротрещиноватости. Существенным является то, что характерный размер трещин существенно меньше, чем размер представительного объема среды. По этой причине разрушение описывается определенной в пространстве величиной (в простейшем случае —

скалярной), значения которой имеют смысл «степени поврежденности» среды.

Для построения определяющих соотношений рассматривается энтропийное неравенство. В соответствии с классическими представлениями о механизмах развития трещин, для образования единицы площади её поверхности необходимо затратить определенную энергию. При этом, в связи с тем, что процесс образования трещин является необратимым, изменение энтропии системы не меньше, чем количество тепла, полученное системой, а также работа сил, отвечающих за разрушение среды.

Таким образом, второе начало термодинамики без учета внешних источников тепла постулируется в виде:

$$m_s \frac{d_s s_s}{dt} + m_f \frac{d_f s_f}{dt} + \operatorname{div} \left( \frac{\mathbf{q}}{T} \right) - \frac{1}{T} \mathbf{Y} : \frac{d_s \mathbf{D}}{dt} \geq 0, \quad (2)$$

где  $s_\alpha$  — удельная энтропия фазы  $\alpha$ ,  $\mathbf{Y}$  — обобщенная сила, связанная с разрушением материала,  $\mathbf{D}$  — тензор повреждаемости, «:» — оператор свертки тензора.

Определим свободную энергию Гельмгольца для фазы  $\alpha$  как  $\psi_\alpha = e_\alpha - T s_\alpha$ . Воспользовавшись выражением для баланса энергии флюида  $d\psi_f = -pd(1/\rho_f) - s_f dT$ , где  $p$  — поровое давление, с учетом определения  $\psi_\alpha$  и неравенства (2) получим неравенство, в левой части которого находится сумма диссипаций скелета  $\delta_s$ , флюида  $\delta_f$  и тепловой диссипации  $\delta_t$ :

$$\delta_s + \delta_f + \delta_t \geq 0, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \delta_s = & - \left( m_s \frac{d_s \psi_s}{dt} + m_s s_s \frac{d_s T}{dt} + m_f \frac{p}{\rho_f^2} \frac{d_f \rho_f}{dt} \right) + \\ & + [\boldsymbol{\sigma}_f : \operatorname{grad}(\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s) + \boldsymbol{\sigma} : \operatorname{grad}(\mathbf{v}_s)] - \mathbf{Y} : \frac{d_s \mathbf{D}}{dt}, \\ \delta_f = & (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s) \left[ m_f \left( \mathbf{f} - \frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} \right) + \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_f) \right], \quad \delta_t = -\frac{\mathbf{q}}{T} \operatorname{grad}(T). \end{aligned}$$

Можно показать, что если течение флюида подчиняется закону Дарси, а поток тепла описывается законом Фурье, то  $\delta_f + \delta_t \geq 0$  и согласно процедуре Колмана-Нолла можно предположить, что для выполнения неравенства (3)

достаточно, чтобы  $\delta_s \geq 0$ .

Введем энергию Гиббса  $g_s$ , зависящую от параметров  $\chi_g = \{\boldsymbol{\varepsilon}, p, T, \mathbf{D}\}$  такую, что  $m_s g_s = m_s \psi_s - p\phi$ . Тогда выражение для диссипации скелета примет вид:

$$\delta_s = \left( \boldsymbol{\sigma} - m_s \frac{\partial g_s}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) \frac{d_s \boldsymbol{\varepsilon}}{dt} - \left( \phi + m_s \frac{\partial g_s}{\partial p} \right) \frac{d_s p}{dt} - \left( s_s + \frac{\partial g_s}{\partial T} \right) \frac{d_s T}{dt} - \left( \mathbf{Y} + m_s \frac{\partial g_s}{\partial \mathbf{D}} \right) \frac{d_s \mathbf{D}}{dt} \geq 0, \quad (4)$$

где  $\phi = m_f / \rho_f$  — пористость,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  — тензор малых деформаций.

Частным решением данного неравенства являются соотношения:

$$\boldsymbol{\sigma} = m_s \frac{\partial g_s}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}; \quad m_f = -\rho_f(p, T) m_s \frac{\partial g_s}{\partial p}; \quad s_s = -\frac{\partial g_s}{\partial T}; \quad \mathbf{Y} = -m_s \frac{\partial g_s}{\partial \mathbf{D}}, \quad (5)$$

обеспечивающие выполнение равенства  $\delta_s = 0$ , что удовлетворяет принципу термодинамической согласованности.

Предположим, что тензор упругих коэффициентов  $\mathbf{C} = m_s \partial^2 g_s / \partial \boldsymbol{\varepsilon}^2$  является линейной функцией от параметра повреждаемости  $\mathbf{D}$ , а  $\boldsymbol{\gamma} = -m_s \partial^2 g_s / \partial \mathbf{D}^2$  — линейной функцией от тензора деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , причем должно выполняться условие  $\partial \mathbf{C} / \partial \mathbf{D} = m_s \partial^3 g_s / \partial \boldsymbol{\varepsilon}^2 \partial \mathbf{D} = -\partial \boldsymbol{\gamma} / \partial \boldsymbol{\varepsilon}$ .

Будем считать, что энергия Гиббса может быть представлена в виде многочлена относительно элементов вектора  $\chi_g$  следующего вида:

$$\Delta g_s = \mathbf{A} \cdot \Delta \boldsymbol{\chi}_g + \frac{1}{2} \Delta \boldsymbol{\chi}_g^T \cdot \mathbf{B} \cdot \Delta \boldsymbol{\chi}_g + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_s}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2 \partial \mathbf{D}} \Big|_{\chi_g^0} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \Delta \mathbf{D}, \quad (6)$$

где  $\Delta f = f - f^0$  для всех  $f$ ,  $\boldsymbol{\chi}_g = [\boldsymbol{\varepsilon}, p, T, \mathbf{D}]$ ,  $\mathbf{A} = \partial g_s / \partial \boldsymbol{\chi}_g$ ,  $\mathbf{B} = \partial^2 g_s / \partial \boldsymbol{\chi}_g^2$ .

Дифференцируя энергию Гиббса (6) в соответствии с выражениями (5) получим определяющие соотношения:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \left( \mathbf{C}(\mathbf{D}^0) + \frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{D}^0)}{\partial \mathbf{D}} : \Delta \mathbf{D} \right) : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{b} \Delta p - \mathbf{C} : \boldsymbol{\alpha}_T \Delta T - \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\varepsilon}^0) : \Delta \mathbf{D}, \quad (7a)$$

$$\Delta m_f = \rho_f \mathbf{b} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + \rho_f \frac{\Delta p}{M} - \alpha_m \rho_f \Delta T + \rho_f \boldsymbol{\omega} : \Delta \mathbf{D}, \quad (7b)$$

$$\Delta S_s = \mathbf{C} : \boldsymbol{\alpha}_T \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \alpha_\phi \Delta p + \frac{C_{ps}}{T^0} \Delta T + \boldsymbol{\theta} : \Delta \mathbf{D}, \quad (7c)$$

$$\Delta \mathbf{Y} = \left( \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\varepsilon}^0) + \frac{1}{2} \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\varepsilon}^0)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \right) : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega} \Delta p + \boldsymbol{\theta} \Delta T + \boldsymbol{\eta} : \Delta \mathbf{D}. \quad (7d)$$

где  $\mathbf{b}$  — коэффициент Био,  $1/N$  — модуль Био,  $\boldsymbol{\alpha}_T$  — тензор термического расширения,  $\alpha_\phi$  — коэффициент объемного термического расширения,  $C_{ps}$  — теплоемкость скелета,  $\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta}$  — тензоры коэффициентов, связанных с разрушением, а также приняты следующие обозначения:

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{N} + \phi \frac{1}{K_f}, \quad \alpha_m = \alpha_\phi + \phi \alpha_f, \quad S_\alpha = m_\alpha s_\alpha,$$

где  $K_f$  — модуль объемного сжатия флюида,  $C_{pf}$  — теплоемкость флюида,  $\alpha_f$  — коэффициент теплового расширения флюида.

Внутренняя энергия скелета выражается через энергию Гиббса по формуле:

$$\Delta E_s = m_s \Delta e_s = m_s \Delta \psi_s + m_s \Delta (T s_s) = m_s \Delta g_s + \Delta (p \phi) + \Delta (T S_s).$$

С учетом соотношений (6) и (7) выражение для внутренней энергии скелета примет вид:

$$\begin{aligned} \Delta E_s = & \left[ \boldsymbol{\sigma}^0 + \frac{1}{2} \mathbf{C}^0 : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + p^0 \mathbf{b} + T^0 \mathbf{C} : \boldsymbol{\alpha}_T \right] \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + \\ & + \left[ \frac{1}{N} \left( p - \frac{1}{2} \Delta p \right) - \alpha_\phi \left( T - \frac{1}{2} \Delta T \right) \right] \Delta p + \\ & + \left[ -\alpha_\phi \left( p - \frac{1}{2} \Delta p \right) + \frac{C_{ps}}{T^0} \left( T - \frac{1}{2} \Delta T \right) \right] \Delta T + \\ & - \left[ \mathbf{Y}^0 + \left( \boldsymbol{\gamma}^0 + \frac{1}{2} \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}^0}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \right) \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\omega} p^0 - \boldsymbol{\theta} T^0 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta} \Delta \mathbf{D} \right] \Delta \mathbf{D}. \quad (8) \end{aligned}$$

Аналогично выражение для удельной внутренней энергии флюида:

$$\begin{aligned} \Delta e_f = & \frac{1}{\rho_f} \left\{ \left[ \frac{1}{K_f} \left( p - \frac{1}{2} \Delta p \right) - \alpha_f \left( T - \frac{1}{2} \Delta T \right) \right] \Delta p - \right. \\ & \left. - \left[ \alpha_f \left( p - \frac{1}{2} \Delta p \right) - \frac{C_{pf}}{\phi T^0} \left( T - \frac{1}{2} \Delta T \right) \right] \Delta T \right\}. \quad (9) \end{aligned}$$

Введем следующие дополнительные предположения:

- плотность материала скелета пренебрежимо слабо зависит от давления;
- внешние и инерционные силы пренебрежимо малы;
- кинетическая энергия флюида пренебрежимо мала по сравнению с величиной внутренней энергии;
- скорость движения скелета пренебрежимо мала по сравнению со скоростью течения флюида;
- параметр повреждаемости является скалярной величиной;
- коэффициенты разрушения  $\boldsymbol{\omega} = 0, \boldsymbol{\theta} = 0, \boldsymbol{\eta} = 0$  (таким образом, явной зависимостью плотности флюида и энтропии системы от разрушения пренебрегаем);
- тензор упругих коэффициентов зависит от повреждаемости по формуле:  $\mathbf{C}(D) = \tilde{\mathbf{C}}(1 - D)$ .

С учетом данных допущений система уравнений (1) примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial m_f}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_f \mathbf{w}) &= 0, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = 0, \\
\frac{\partial (m_s e_s + m_f e_f)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_f e_f \mathbf{w}) &= \operatorname{div}(-p \mathbf{w}) - \operatorname{div}(\mathbf{q}), \\
\mathbf{w} = -\frac{\boldsymbol{\kappa}}{\mu} \operatorname{grad}(p), \quad \mathbf{q} = -\boldsymbol{\kappa} \operatorname{grad}(T), \quad D &= D(\boldsymbol{\chi}_g),
\end{aligned} \tag{10}$$

которая замыкается определяющими соотношениями вида:

$$\begin{aligned}
\Delta \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{C}(1 - D) : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{b} \Delta p - \mathbf{C} : \boldsymbol{\alpha}_T \Delta T - \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^0 : \Delta D, \\
\Delta m_f &= \rho_f \mathbf{b} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + \rho_f \frac{\Delta p}{M} - \alpha_m \rho_f \Delta T, \\
\Delta S_s &= \mathbf{C} : \boldsymbol{\alpha}_T \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \alpha_\phi \Delta p + \frac{C_{ps}}{T^0} \Delta T, \\
\Delta Y &= \mathbf{C} \left( \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \frac{1}{2} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \right) \Delta \boldsymbol{\varepsilon}, \\
\Delta \frac{1}{\rho_f} &= \frac{1}{K_f} \Delta p - \alpha_f \Delta T, \\
\Delta S_f &= -\alpha_f \Delta p + \frac{C_{pf}}{T^0} \Delta T.
\end{aligned} \tag{11}$$

Выражение для внутренней энергии скелета имеет вид:

$$\Delta E_s = \Delta E_{s\varepsilon} + \Delta E_{sp} + \Delta E_{sT} + \Delta E_{sD},$$

где

$$\begin{aligned} \Delta E_{s\varepsilon} &= \left[ \boldsymbol{\sigma}^0 + \frac{1}{2} \mathbf{C} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + p^0 \mathbf{b} + T^0 \mathbf{C} : \boldsymbol{\alpha}_T \right] \Delta \boldsymbol{\varepsilon}, \\ \Delta E_{sp} &= \left[ \frac{1}{N} \left( p - \frac{1}{2} \Delta p \right) - \alpha_\varphi \left( T - \frac{1}{2} \Delta T \right) \right] \Delta p, \\ \Delta E_{sT} &= \left[ -\alpha_\varphi \left( p - \frac{1}{2} \Delta p \right) + \frac{C_{ps}}{T^0} \left( T - \frac{1}{2} \Delta T \right) \right] \Delta T, \\ \Delta E_{sD} &= - \left[ \mathbf{Y}^0 + \mathbf{C} \left( \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \frac{1}{2} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \right) \right] \Delta \mathbf{D}. \end{aligned} \tag{12}$$

Выражение для внутренней энергии флюида имеет вид:

$$\begin{aligned} \Delta E_f &= \left[ \frac{\phi}{K_f} \left( p - \frac{1}{2} \Delta p \right) - \phi \alpha_f \left( T - \frac{1}{2} \Delta T \right) \right] \Delta p - \\ &\quad - \left[ \phi \alpha_f \left( p - \frac{1}{2} \Delta p \right) - \frac{C_{pf}}{T^0} \left( T - \frac{1}{2} \Delta T \right) \right] \Delta T. \end{aligned} \tag{13}$$

В конце первой главы приведены различные варианты интерпретации параметра повреждаемости, встречающиеся в литературе. В наиболее простом случае, когда разрушение изотропно (то есть происходит одинаково во всех направлениях), параметр повреждаемости является скалярной величиной и имеет смысл средней поверхностной плотности пересечений микротрещин с любой плоскостью внутри тела.

Динамика изменения параметра повреждаемости может быть описана некоторым кинетическим уравнением вида  $d\mathbf{D}/dt = F(\mathbf{D}, \dots)$ , где  $F$  зависит от  $\mathbf{D}$  и таких переменных как тензор напряжений, температура, время и так далее. В случае, если текущая реакция повреждающегося материала зависит от предыстории состояний, то такую кинетику разрушения называют конечной. В ином случае — мгновенной. В литературе описаны результаты различных экспериментов по определению конкретного вида функции  $F$  и значений входящих в неё коэффициентов.

**Во второй главе** приводится описание численного алгоритма для решения системы уравнений (10)-(13). Данная система решалась методом конечных элементов. Введем пробные функции  $\mathbf{v}_\alpha$ ,  $\alpha = \{\boldsymbol{\xi}, p, T\}$  в пространстве  $V_\alpha^0 \subset V$ ,

где  $V_\alpha^0 = \{\mathbf{v} \in V_\alpha : \mathbf{v}|_{\partial\Omega_D} = 0\}$ . После домножения уравнений (10) на пробную функцию данная система уравнений примет вид:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{v}_\xi^T \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} d\Omega = 0, \quad \int_{\Omega} v_p \left[ \frac{\partial m_f}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_f \mathbf{w}) \right] d\Omega = 0, \\ \int_{\Omega} v_T \left[ \frac{\partial E_s}{\partial t} + \frac{\partial E_f}{\partial t} + \operatorname{div} \left( \frac{1}{\phi} E_f \mathbf{w} \right) + \operatorname{div}(p\mathbf{w}) + \operatorname{div}(\mathbf{q}) \right] d\Omega = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Введем дифференциальный оператор  $\mathbf{L}$ , который является матричным представлением оператора деформации так, что  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\boldsymbol{\xi}$ , где  $\boldsymbol{\xi} = [\xi_x, \xi_y, \xi_z]^T$ .

Предположим, что начальный тензор напряжений  $\boldsymbol{\sigma}^0$  постоянен для всего объема, а начальные деформации  $\boldsymbol{\varepsilon}^0$  равны нулю. Тогда, применяя формулу Грина к уравнениям (10) и воспользовавшись определяющими соотношениями для тензора напряжений и массы флюида, можно прийти к слабой постановке задачи.

Для построения конечномерной задачи введем конечномерные пространства  $V_\alpha^n \subset V_\alpha$ ,  $V_\alpha^{0,n} \subset V_\alpha^0$ , причем  $V_\alpha^n = \operatorname{span}(\phi_\alpha^{(i)})$ , где  $\phi_\alpha^{(i)}$  — базисные функции. Тогда

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n_\alpha} \phi_\alpha^{(i)} \alpha_i, \quad \alpha = \boldsymbol{\xi}, p, T,$$

Результирующая система уравнений для конечномерной задачи имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\xi\xi} \boldsymbol{\xi} - \mathbf{A}_{\xi p} p + \mathbf{A}_{\xi T} T &= \mathbf{f}_\xi, \\ \mathbf{A}_{p\xi} \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} + \mathbf{A}_{pp} \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{A}_{pT} \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{B}_{ppp} p &= \mathbf{f}_p, \\ \mathbf{A}_{T\xi} \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} + \mathbf{A}_{Tp} \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{A}_{TT} \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{B}_{T\xi} \boldsymbol{\xi} + \mathbf{B}_{Tp} p + \mathbf{B}_{TT} T &= \mathbf{f}_t, \end{aligned} \quad (15)$$

где используются следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{\xi\xi} &= \int_{\Omega} (\mathbf{L}\phi_{\xi})^T \mathbf{C}(1-D) (\mathbf{L}\phi_{\xi}) d\Omega, & \mathbf{A}_{\xi p} &= \mathbf{A}_{p\xi}^T = \int_{\Omega} (\mathbf{L}\phi_{\xi})^T \mathbf{b}\phi_p d\Omega, \\
\mathbf{A}_{\xi T} &= - \int_{\Omega} (\mathbf{L}\phi_{\xi})^T \mathbf{C}(1-D) : \boldsymbol{\alpha}_T \phi_T d\Omega, & \mathbf{B}_{pp} &= \int_{\Omega} (\nabla\phi_p)^T \mathbf{k}/\mu (\nabla\phi_p) d\Omega, \\
\mathbf{A}_{pp} &= \int_{\Omega} \phi_p^T M^{-1} \phi_p d\Omega, & \mathbf{A}_{pT} &= - \int_{\Omega} \phi_p^T \alpha_m \phi_T d\Omega, \\
\mathbf{A}_{T\xi} &= \int_{\Omega} \phi_T^T (\boldsymbol{\sigma}^0 + \mathbf{C}(1-D) : \boldsymbol{\varepsilon} + p^0 \mathbf{b} + T^0 \mathbf{C} : \boldsymbol{\alpha}_T) (\mathbf{L}\phi_{\xi}) d\Omega, \\
\mathbf{A}_{Tp} &= \int_{\Omega} \phi_T^T (M^{-1}p - \alpha_m T) \phi_p d\Omega, \\
\mathbf{A}_{TT} &= \int_{\Omega} \phi_T^T [-\alpha_m p + (C_{ps} + C_{pf}) T/T^0] \phi_T d\Omega, \\
\mathbf{B}_{T\xi} &= \int_{\Omega} \nabla\phi_T^T [1/2F(\chi)\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}] (\mathbf{L}\phi_{\xi}) d\Omega, \\
\mathbf{B}_{Tp} &= \int_{\Omega} \nabla\phi_T^T \{E_f^0/\phi + [p/K_f - \alpha_f T] \Delta p - [\alpha_f p - C_{pf}/\phi] \Delta T\} \mathbf{k}/\mu \nabla\phi_p d\Omega, \\
\mathbf{B}_{TT} &= \int_{\Omega} \nabla\phi_T^T \boldsymbol{\kappa} \nabla\phi_T d\Omega, & \mathbf{f}_{\xi} &= \int_{\partial\Omega} \phi_{\xi}^T \partial\boldsymbol{\sigma}/\partial\mathbf{n} dS, & \mathbf{f}_p &= - \int_{\partial\Omega} \phi_p^T \partial\mathbf{w}/\partial\mathbf{n} d\Omega, \\
\mathbf{f}_T &= - \int_{\partial\Omega} \mathbf{v}^T \rho_f e_f \partial\mathbf{w}/\partial\mathbf{n} dS - \int_{\partial\Omega} \mathbf{v}^T p \partial\mathbf{w}/\partial\mathbf{n} dS - \int_{\partial\Omega} \mathbf{v}^T \partial\mathbf{q}/\partial\mathbf{n} dS.
\end{aligned}$$

Дискретизация по времени проводилась по неявной схеме для перемещений, давления и температуры и явной для параметра повреждаемости по следующему алгоритму:

1. Зачитывание данных модели, инициализация расчетной сетки.
2. Сборка матрицы системы с текущим значением параметра повреждаемости  $D$ .
3. Решение системы уравнений относительно перемещений  $\boldsymbol{\xi}$ , давлений  $p$ , температуры  $T$ .
4. Явный расчет нового значения параметра повреждаемости  $D$ .

5. Повторение пунктов 2-4 для следующего временного шага.

Решение нелинейной системы уравнений проводилось с использованием метода Ньютона. Для дискретизации уравнения по пространству использовалась тетраэдральная сетка с квадратичными базисными функциями для перемещений и линейными для давления и температуры (элементы Тейлора-Худа). Данный тип элементов обеспечивает выполнение  $\inf - \sup$  условий (условия Ладыженской-Бабушки-Бреззи), которые необходимы для устойчивости решения уравнений пороупругости.

Для обеспечения устойчивости конечномерной задачи применялся ряд подходов, в соответствии с которыми преобразовывалась матрица системы (15), такие как метод диагонализации матриц масс, введение обезразмеривающих коэффициентов и перестановка строк и столбцов по алгоритму Катхилла-Макки.

**В третьей главе** приводится описание разработанного программного комплекса для расчета неизотермического течения в пороупругой среде с учетом разрушения породы в рамках разработанного численного алгоритма. Программный комплекс реализован на языке программирования *C++* и состоит из трех основных компонентов: препроцессор, вычислительное ядро и постпроцессор.

Блок препроцессинга отвечает за построение расчетной сетки, зачитывание и предобработку параметров модели, а также задание начальных и граничных условий. В вычислительном ядре производится вычисление якобиана и правой части, итерационное решение системы нелинейных уравнений, а также решение системы линейных уравнений. В постпроцессоре производится выгрузка основных результатов (давление, температура, деформации, напряжения, параметр повреждаемости, компоненты энергии и так далее) на каждый момент времени для последующей визуализации и анализа.

**В четвертой главе** приведены результаты моделирования с использованием разработанного программного комплекса. Валидация алгоритма проводилась на ряде тестов (задача Терцаги, тест Манделя и тест на одномерное неизотермическое расширение) для которых известно аналитическое решение. Кроме того, был проведен ряд расчетов, моделирующих воздействие на пласт добывающих и нагнетательных скважин при различных условиях, с целью оценки влияния геомеханических эффектов. В данных расчетах учитывались различные эффекты, характерные для процесса термического воздействия, такие как

изменение проницаемости при деформации породы, изменение вязкости флюида, а также разрушение пласта. Для описания эволюции параметра повреждаемости была выбрана следующая зависимость, описанная в литературе, которая основана на результатах лабораторных экспериментов по разрушению горных пород:

$$D = \begin{cases} 0, & \text{если } \tilde{\varepsilon} < \tilde{\varepsilon}_c, \\ \frac{D_{\text{off}}}{\tilde{\varepsilon}_{\text{off}} - \tilde{\varepsilon}_c} \tilde{\varepsilon} - D_{\text{off}} \frac{\varepsilon_c}{\tilde{\varepsilon}_{\text{off}} - \tilde{\varepsilon}_c}, & \text{если } \tilde{\varepsilon}_c \leq \tilde{\varepsilon} \leq \tilde{\varepsilon}_{\text{off}}, \\ D_{\text{lim}} - (D_{\text{lim}} - D_{\text{off}}) \frac{\tilde{\varepsilon}_{\text{off}}}{\tilde{\varepsilon}} & \text{если } \tilde{\varepsilon} > \tilde{\varepsilon}_{\text{off}}, \end{cases} \quad \tilde{\varepsilon} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \langle \varepsilon_i \rangle^2}, \quad (16)$$

где  $\langle \varepsilon_i \rangle = (\varepsilon_i + |\varepsilon_i|) / 2$ ,  $\varepsilon_i$  — главные деформации.

В одном из проведенных расчетов моделируется реакция пласта при использовании системы поддержания пластового давления, при котором нагнетательная скважина закачивает флюид при температуре 400 °С с постоянной приемистостью, а добывающая скважина работает с постоянным забойным давлением. Пласт имеет размеры 100 × 100 × 1 м, скважины расположены на противоположных концах диагонали пласта. Полученные по результатам моделирования распределения давления, температуры, параметра повреждаемости и проницаемости через 6, 12 и 60 месяцев приведены на рисунке 1.

Также был проведен расчет данной модели без учета разрушения пласта. Сравнение распределений компоненты  $\varepsilon_{xx}$  тензора деформаций на момент времени 5 лет для случаев учета и в отсутствие учета повреждаемости приведено на рисунке 2. Из данного рисунка видно, что учет разрушения породы существенно влияет на расчет напряженно-деформированного состояния (для данного теста различие в значениях тензора деформаций достигает 20%).

Дополнительно был проведен ряд расчетов по оценке зоне трещиноватости в трехмерном пласте при закачке теплоносителя (рисунок 3) в условиях анизотропии внешних напряжений.

**В заключении** сформулированы основные результаты работы.

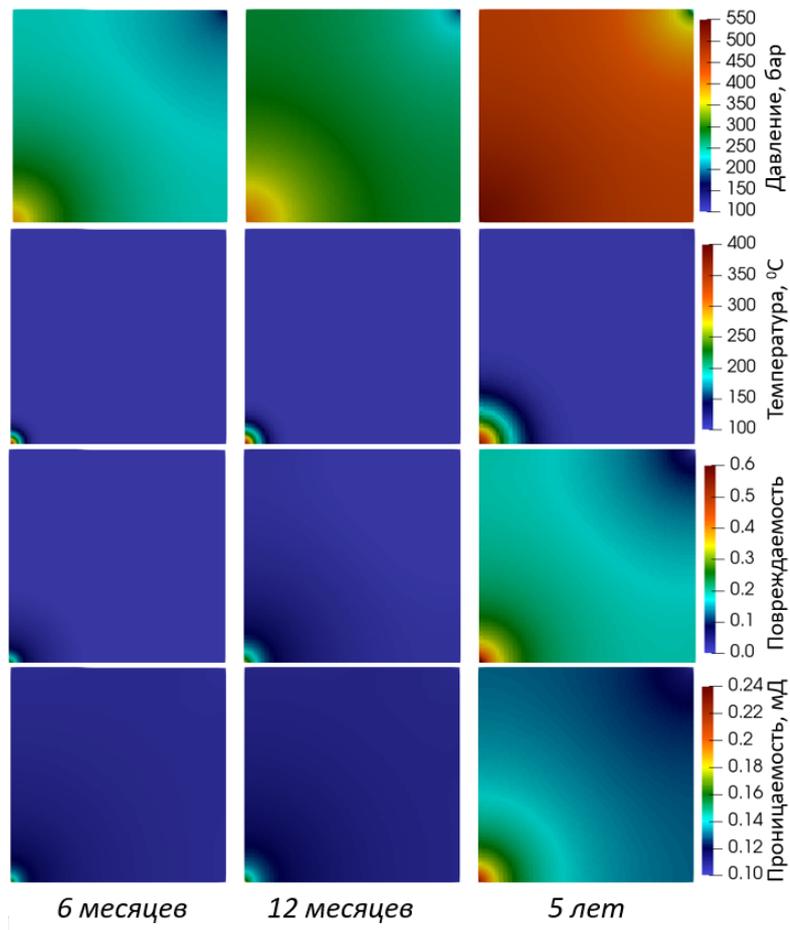


Рис. 1. Распределение давления  $p$  (1 ряд), температуры  $T$  (2 ряд), параметра повреждаемости  $D$  (3 ряд), проницаемости  $k$  (4 ряд) через 6 месяцев (слева), 12 месяцев (по центру) и 5 лет (справа).

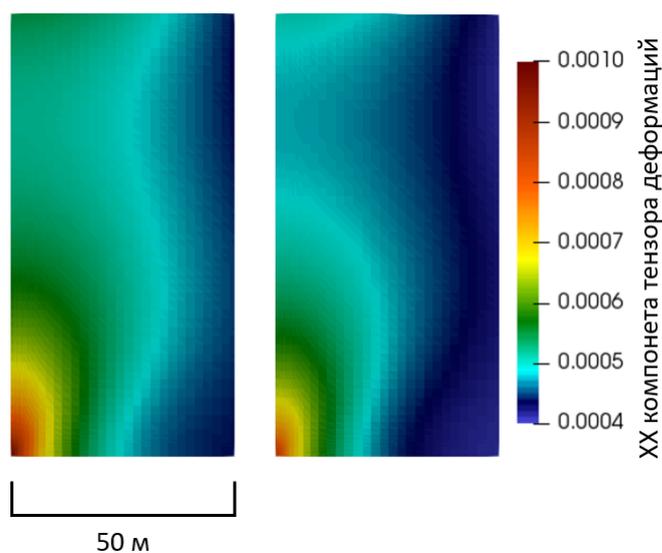


Рис. 2. Компонента  $\epsilon_{xx}$  тензора деформаций на момент времени 5 лет при учете (слева) и в отсутствие учета (справа) повреждаемости.

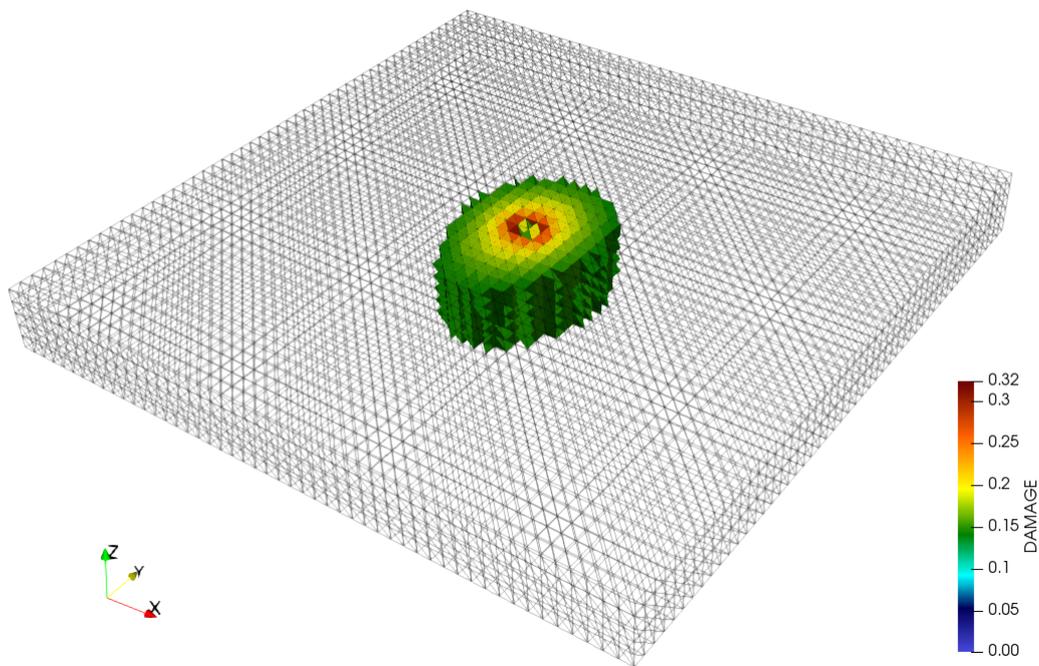


Рис. 3. Развитие зоны трещиноватости в трехмерном пласте с анизотропией напряжений.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

Основными результатами выполненной работы являются:

1. Термодинамически согласованная физико-математическая модель разрушения пороупругой среды, учитывающая деформационные, фильтрационные и неизотермические эффекты, пригодная для анализа эффективности современных и перспективных тепловых методов увеличения нефтеотдачи.
2. Неявный численный алгоритм расчета эволюции термoporоупругой среды с учетом разрушения на основе метода конечных элементов с применением неструктурированных тетраэдральных сеток.
3. Программный комплекс для моделирования термического воздействия на пороупругую среду с учетом разрушения, а также результаты проведенных валидационных и тестовых расчетов, подтверждающих корректность разработанных алгоритмов.

## ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

### В изданиях из перечня ВАК:

1. Meretin A., Savenkov E. B. Simulation of Coupled Flow and Damage in Porous Medium // Physical and Mathematical Modeling of Earth and Environment Processes (2018). – Springer, Cham, 2019. – С. 132-141. [WoS, ВАК, РИНЦ]
2. Меретин А.С., Савенков Е.Б. Математическая модель фильтрационных процессов в термopoppyyryy среде с учетом континуального разрушения. — Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша, 2019, № 58, 38 с. [ВАК, РИНЦ]
3. Меретин А.С., Савенков Е.Б. Вычислительный алгоритм для описания эволюции термopoppyyryy среды с учетом разрушения — Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 82. [ВАК, РИНЦ]
4. Меретин А. С., Савенков Е. Б. Моделирование термopoppyyryy среды с учетом разрушения //Математическое моделирование. – 2020. – Т. 32. – №. 7. – С. 59-76. [Scopus, ВАК, РИНЦ]
5. Меретин А. С. Программный комплекс для математического моделирования разрушения термopoppyyryy среды //Вычислительные методы и программирование. – 2020. – Т. 21. – С. 138-151. [RSCI, ВАК, РИНЦ]
6. Меретин А. С., Савенков Е. Б. Математическая модель разрушения термoppyyryy среды // Инженерно-физический журнал. – 2021. – №. 2. – С. 380-392. [Scopus, ВАК, РИНЦ]