## ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ НАУЧНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ «ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР ИНФОРМАЦИОННЫХ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»

На правах рукописи

## ЛАПИН Василий Николаевич

# Моделирование распространения трещин, нагруженных давлением вязкой жидкости

### 1.2.2 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

## ДИССЕРТАЦИЯ

### НА СОИСКАНИЕ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ ДОКТОРА ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

Научный консультант д.ф.-м.н., профессор Черный Сергей Григорьевич

Новосибирск $-\ 2022$ 

# Оглавление

| Введе | 1 Залача о распространении трешины и полхо-                 | 6  |
|-------|---|----|
| лы к  | ее решению  | 18 |
| 1.1.  | Описание физических процессов в различных моделях распро-   |    |
|       | странения трещин  | 18 |
|       | 1.1.1. Основные физические процессы в трещинах ГРП          | 18 |
|       | 1.1.2. Обзор моделей распространения трещин ГРП             | 21 |
| 1.2.  | Концепция трехмерной модели начального этапа распростране-  |    |
|       | ния трещины гидроразрыва пласта                             | 32 |
| 1.3.  | Модель деформации среды в задаче распространения трещин     | 35 |
|       | 1.3.1. Постановка задачи упругого равновесия                | 36 |
|       | 1.3.2. Классический МГЭ                                     | 38 |
|       | 1.3.3. Вычисление коэффициентов интенсивности напряжений .  | 41 |
| 1.4.  | Алгоритм одновременного решения уравнений трехмерной модели | 44 |
| 1.5.  | Программный комплекс «CADFRAC/2019»                         | 49 |
| 1.6.  | Заключение к Главе 1  | 51 |
|       |   |    |
| Глава | 2. Неявный критерий распространения трещины.                | 53 |

|      | 0000p   | inputepriez paenpoerparienni rpendin z inpytem ma     |    |
|------|---|---|----|
|      | териал  | те  | 53 |
|      | 2.1.1.  | Подходы к построению траектории трещины               | 53 |
|      | 2.1.2.  | Явные критерии распространения трещины                | 56 |
|      | 2.1.3.  | Современные направления развития классических крите-  |    |
|      |   | риев распространения трещин                           | 62 |
|      | 2.1.4.  | Неявные критерии распространения трещины              | 65 |
| 2.2. | Неявн   | ый глобальный критерий распространения трещины        | 69 |
|      | 2.2.1.  | Основные предположения и допущения                    | 69 |
|      | 2.2.2.  | Формулировка неявного критерия выбора величины при-   |    |
|      |   | ращения трещины                                       | 71 |
|      | 2.2.3.  | Формулировка неявного критерия выбора направления ро- |    |
|      |   | ста трещины   | 73 |
|      | 2.2.4.  | Алгоритм выполнения неявных критериев распространения | 74 |
| 2.3. | Валидация и верификация неявного глобального критерия и вы- |   |    |
|      | бор ве  | сового параметра                                      | 75 |
|      | 2.3.1.  | Задача о наклонной трещине в брусе                    | 76 |
|      | 2.3.2.  | Задача о наклонной трещине в диске                    | 82 |

| 2.4. | Описание квазистатического распространения трещины с помо- |    |
|------|--|----|
|      | щью неявного глобального критерия                          | 85 |
| 2.5. | Заключение по Главе 2                                      | 90 |

| Глава | 3. Модели течения жидкости в трещине                         |            |  |  |  |
|-------|--|------------|--|--|--|
| 3.1.  | 3.1. Объединение моделей слабосжимаемой и неньютоновской жи, |            |  |  |  |
|       | стей   |            |  |  |  |
|       | 3.1.1. Уравнения течения жидкости в трехмерном пространс     | гве. 92    |  |  |  |
|       | 3.1.2. Двумерные уравнения течения неньютоновской жидко      | СТИ        |  |  |  |
|       | в трещине  | 94         |  |  |  |
|       | 3.1.3. Граничные условия для задачи течения жидкости в тре   | ещине100   |  |  |  |
| 3.2.  | Численный метод решения задачи о течении жидкости в треп     | цине . 101 |  |  |  |
|       | 3.2.1. Задача о течении несжимаемой ньютоновской жидкост     | ч. 101     |  |  |  |
|       | 3.2.2. Задача о течении неньютоновской или слабосжимаем      | лой        |  |  |  |
|       | жидкостей жидкости   | 103        |  |  |  |
| 3.3.  | Верификация численного метода решения задачи о течении ж     | ид-        |  |  |  |
|       | кости в трещине  |            |  |  |  |
|       | 3.3.1. Задача о движении ньютоновской жидкости в канале      | ПО-        |  |  |  |
|       | стоянного сечения  | 105        |  |  |  |
|       | 3.3.2. Задача о плоскорадиальном течении неньютоновской ж    | ид-        |  |  |  |
|       | кости при заданном расходе                                   | 106        |  |  |  |
|       | 3.3.3. Задача о плоскорадиальном течении неньютоновской ж    | ид-        |  |  |  |
|       | кости при заданном перепаде давления                         | 107        |  |  |  |
| 3.4.  | Безразмерный анализ задачи о распространении трещин ГРП      |            |  |  |  |
|       | 3.4.1. Режимы распространения трещин                         | 109        |  |  |  |
|       | 3.4.2. Влияние предельного напряжения сдвига                 | 112        |  |  |  |
|       | 3.4.3. Влияние показателя степени                            | 114        |  |  |  |
| 3.5.  | Заключение по Главе 3  | 116        |  |  |  |

## Глава 4. Примеры трехмерного моделирования распространения трещин при закачке вязкой жидкости......118

| 4.1. | Верификация и выбор параметров моделирования распростране-            |   |       |  |
|------|---|---|-------|--|
|      | ния трещины   |   |       |  |
|      | 4.1.1.  | Верификация трехмерной модели на задаче о распростра- |       |  |
|      |   | нении плоской радиальной трещины                      | 118   |  |
|      | 4.1.2.  | Необходимость описания движения жидкости в трещине .  | 123   |  |
|      | 4.1.3.  | Необходимость учета скважины при моделировании на-    |       |  |
|      |   | чального этапа распространения                        | 125   |  |
| 4.2. | . Влияние физических параметров на распространение поперечной трещины |   |       |  |
|      |   |   | . 127 |  |
|      | 4.2.1.  | Влияние угла наклона скважины                         | 127   |  |

|      | 4.2.2. | Влияние реологических параметров жидкости             | 128 |
|------|--------|---|-----|
|      | 4.2.3. | Применимость модели ньютоновской жидкости для описа-  |     |
|      |        | ния движения в трещине жидкости сложной реологии      | 135 |
|      | 4.2.4. | Распространение трещины при закачке слабосжимаемой    |     |
|      |        | жидкости  | 141 |
| 4.3. | Модел  | ирование распространения двух параллельных трещин     | 144 |
|      | 4.3.1. | Постановка задачи о распространение поперечных трещин | 144 |
|      | 4.3.2. | Влияние расстояния между трещинами                    | 145 |
|      | 4.3.3. | Влияние глубины и ширины пропилов                     | 146 |
|      | 4.3.4. | Влияние угла наклона                                  | 148 |
| 4.4. | Модел  | ирование распространения продольной трещины           | 150 |
|      | 4.4.1. | Моделирование распространения трещины в трехмерной    |     |
|      |        | постановке  | 151 |
|      | 4.4.2. | Описание эффекта пережатия трещины в двумерной по-    |     |
|      |        | становке  | 155 |
| 4.5. | Заклю  | очение по Главе 4                                     | 162 |

## Глава 5. Иерархия моделей распространения трещины при закачке в нее вязкой жидкости......164

| 5.1.   | Модель трещины, распространяющейся вдоль заданной поверх-      |   |     |  |
|--|--|---|-----|--|
|  | ности  |   |     |  |
|  | 5.1.1.   | Актуальность задачи                                   | 166 |  |
|  | 5.1.2.   | Постановка задачи                                     | 168 |  |
|  | 5.1.3.   | Валидация   | 173 |  |
|  | 5.1.4.   | Оценка стойкости гидроизоляции скважины               | 175 |  |
|  | 5.1.5.   | Заключение по результатам применения модели трещины,  |     |  |
|  |  | распространяющейся вдоль заданной поверхности         | 182 |  |
| 5.2.   | Модел  | ь плоской трехмерной трещины                          | 183 |  |
|  | 5.2.1.   | Математическая модель                                 | 184 |  |
|  | 5.2.2.   | Численный метод                                       | 187 |  |
|  | 5.2.3.   | Результаты расчетов                                   | 193 |  |
|  | 5.2.4.   | Заключение по плоской модели трещины                  | 195 |  |
| 5.3. Плоскорадиальная модель трещины, распространяющейся и |  | орадиальная модель трещины, распространяющейся под    |     |  |
|  | действием закачки смеси жидкости Гершеля–Балкли с проппантом19 |   |     |  |
|  | 5.3.1.   | Модель радиальной трещины с учетом переноса проппанта | 198 |  |
|  | 5.3.2.   | Численный метод с выделением сингулярности на фронте  |     |  |
|  |  | трещины   | 203 |  |
|  | 5.3.3.   | Верификация разработанного алгоритма                  | 210 |  |
|  | 5.3.4.   | Результаты расчетов                                   | 211 |  |
|  | 5.3.5.   | Заключение по модели круговой трещины                 | 218 |  |
| 5.4.   | Опред  | еление параметров трещиновато-пористой среды по утеч- |     |  |
|  | кам бу   | урового раствора                                      | 219 |  |
|  |  |   |     |  |

|             | 5.4.1. | Постановка задачи и основные допущения                  | 220   |
|-------------|--------|---|-------|
|             | 5.4.2. | Модель потерь бурового раствора в систему естественных  |       |
|             |        | трещин  | 221   |
|             | 5.4.3. | Решение прямой задачи о потерях бурового раствора в си- |       |
|             |        | стему трещин  | 223   |
|             | 5.4.4. | Расчет раскрытия трещины по данным об утечках бурово-   |       |
|             |        | го раствора   | 231   |
|             | 5.4.5. | Аналогия между моделью системы естественных трещин      |       |
|             |        | и моделью трещиновато-пористой среды                    | 237   |
|             | 5.4.6. | Заключение по модели потерь бурового раствора           | 239   |
| 5.5.        | Модел  | ь длинной трещины, включающая механизм оседания про-    |       |
|             | панта  |   | . 240 |
|             | 5.5.1. | Постановка задачи                                       | 240   |
|             | 5.5.2. | Основные уравнения и граничные условия                  | 242   |
|             | 5.5.3. | Численный метод   | 246   |
|             | 5.5.4. | Верификация алгоритма и результаты численного модели-   |       |
|             |        | рования   | 251   |
|             | 5.5.5. | Заключение по модели длинной трещины                    | 255   |
| 5.6.        | Одном  | лерная модель длинной трещины, включающая механизм      |       |
|             | закуп  | оривания трещины пропантом                              | . 258 |
|             | 5.6.1. | Основные уравнения                                      | 259   |
|             | 5.6.2. | Приложение модели к процессу гидроразрыва               | 260   |
|             |        |   |       |
| D           |        |   | DGE   |
| <b>Закл</b> | очень  | 4e  | 200   |
|             |        |   |       |
|             |        |   |       |

# Введение

## Общая характеристика работы

Актуальность работы. Построение и обоснование наиболее полных трехмерных моделей и численных методов их реализации для описания вызванного закачиванием вязкой жидкости распространения трещины от полости в упругой среде, является актуальной научной и прикладной задачей. Актуальность задачи построения модели для механики трещин, обуславливающая научную значимость работы, заключается в необходимости выявления механизмов и параметров, влияющих на траекторию и раскрытие трещины на ранней стадии ее распространения: реологии жидкости, закачиваемой в полость и трещину, параметров напряженного состояния среды, ее упругих свойств и т.д. С точки зрения математического моделирования актуальными являются построение, обоснование и валидация новых математических моделей, более полно описывающих распространение трехмерных трещин, и создание экономичных, надежных численных методов для реализации этих моделей, позволяющих повысить точность решения задачах механики разрушения и снизить требования к вычислительным ресурсам.

Одним из очевидных приложений моделей, позволяющих рассчитывать распространение трещины одновременно с движением жидкости в ней, является описание распространения трещины гидроразрыва пласта (ГРП). Популярность ГРП как метода повышения отдачи нефте- и газоносных пластов в XXI веке значительно возросла в связи с повышением доли нетрадиционных месторождений с низкой проницаемостью породы и малыми размерами нефте- газонасыщеных пропластков. Метод основывается на закачке в скважину вязкой жидкости с давлением, достаточным для инициации и распространения трещины в пласте, которая в дальнейшем заполняется проппантом (твердыми частицами), предотвращающим закрытие трещины и обеспечивающим ее высокую проводимость. В виду сложности физики и недоступности прямому наблюдению процесса развития трещины гидроразрыва пласта оценка технологических параметров при проведении ГРП и геометрических размеров созданной трещины возможна только на основе математического моделирования. В то же время имеющиеся модели ГРП в случае нетрадиционных месторождений не позволяют адекватно описывать особенности протекающих при распространении трещины процессов, и требуются новые более совершенные подходы.

Для повышения эффективности ГРП в нетрадиционных коллекторах производится разработка новых жидкостей, использование которых снижает воздействие на фильтрационные свойства пласта, повышает эффективность переноса проппанта, уменьшает потери давления при закачке и т.д. [1] При этом реологические свойства таких жидкостей уже не могут описываться ньютоновской моделью классической жидкости и требуют более сложных реологических законов. Одним из наиболее общих является реологический закон Гершеля– Балкли [2] В диссертационной работе для исследования влияния реологии жидкости на распространение трещины ГРП разработанные ранее автором модели [3–5] совершенствуются путем замены в них ньютоновской модели жидкости моделью Гершеля–Балкли [6–8].

Современные подходы к разработке нетрадиционных пластовых резервуаров предполагают создание скважин с криволинейной траекторией, которая не позволяет гарантированно ориентировать зародышевую трещину ГРП в плоскости, ортогональной направлению действия минимальных напряжений в пласте. Это приводит к искривлению трещины при ее распространении и переориентации, что в свою очередь вызывает уменьшение раскрытия трещины на искривленном участке — пережатие. Искривление поверхности трещины так же может быть вызвано неоднородностью поля напряжений, обусловленной, например, неоднородностью поля порового давления, или влиянием других близко расположенных трещин ГРП. Современные авторы при разработке моделей трехмерных, неплоских трещин ограничиваются рассмотрением последнего случая, который характеризуется относительно слабым отклонением трещины от плоскости и гладкостью ее поверхности [9–12] Это приводит к использованию в таких

7

моделях классических критериев выбора направления распространения трещины без экспериментального обоснования их применимости для общего случая развития криволинейной трещины в сложном анизотропном поле напряжений, которым характеризуется задача ее переориентации на начальном этапе развития. Таким образом, задача построения критерия распространения трещины ГРП в анизотропном поле напряжений, способном описывать негладкую или сильно искривленную поверхность трещины, а так же его обоснования на основе экспериментальных данных, осается актуальной и до настоящего момента нерешенной.

Актуальность и значимость задач моделирования гидроразрыва пласта кроме того подчеркивается их включением в «Приоритетные направления развития науки, технологий и техники в Российской Федерации» (Энергоэффективность, энергосбережение, ядерная энергетика) и перечень критических технологий Российской Федерации (Технологии поиска, разведки, разработки месторождений полезных ископаемых и их добычи)<sup>1</sup>.

Целью диссертации является разработка иерархии трехмерных и одномерных численных моделей распространения трещин в упругой хрупкой среде под действием закачиваемой жидкости сложной реологии и исследование на основе построенных моделей особенностей распространения.

**Объектом исследования** являются задачи распространения в хрупкой упругой среде трещин под действием закачиваемой в них вязкой жидкости сложной реологии, включающие в себя описание течения жидкости в трещинах, деформации и разрушения материала, а так же численные математические модели этих процессов.

**Предметом исследования** является процесс распространения трещины под действием закачиваемой жидкости, его закономерности, особенности и зависимости от реологии жидкости, характеристик материала, в котором происходит распространение, и его напряженного состояния.

В ходе достижения поставленной цели решены следующие задачи

1. Предложена и обоснована новая постановка задачи распространения тре-

8

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Об утверждении приоритетных направлений развития науки, технологий и техники в Российской Федерации и перечня критических технологий Российской Федерации: Указ Президента Рос. Федерации от 7 июля 2011 г. № 899 // Собр. законодательства Рос. Федерации. — 2011. — № 28. — Ст. 4168. (В редакции Указа Президента Российской Федерации от 16.12.2015 г. № 623)

щины под действием закачиваемой жидкости в упругом изотропном однородном материале, в которой впервые одновременно описываются 1) деформация материала в трехмерной области сложной формы, 2) изменение направления распространения трещины и ее формы под действием анизотропного нагружения материала, 3) движение в трещине жидкости сложной реологии.

- 2. Предложена иерархия моделей трещин, распространяющихся под действием закачиваемой жидкости, каждая из которых получена внесением в постановку задачи из п.1 дополнительных предположений о форме трещины: например, задание поверхности, вдоль которой распространяется трещина; рассмотрение плоских трещин с круговым фронтом; описание трещин, размер которых в одном из направлений является доминирующим. Такие предположения позволяют упростить описание движения жидкости, напряженно-деформированного состояния упругого материала и условий его разрушения, что повышает эффективность моделей при сужении области их применимости.
- 3. Для решения задачи п.1. предложен новый полностью трехмерный неявный глобальный критерий скорости роста трещины и выбора направления ее распространения, в котором вместо предсказания направления распространения в каждой отдельной точке фронта анализируются возможные конфигурации фронта в целом, получающиеся после продвижения трещины. Это позволяет адекватно описывать распространение трещины при сложном нагружении всех трех мод.
- Для решения задачи п.1. предложены численные модели описания движения жидкости Гершеля–Балкли и слабосжимаемой жидкости внутри трещины, необходимые для адекватного расчета давления жидкости на стенки трещины.
- 5. Предложен и реализован метод решения системы интегральных и дифференциальных уравнений в области со свободными границами и нелинейной связью между искомыми функциями, формирующейся в на каждом шаге распространения трещины в задаче п. 1. Метод основан на разделении задач для определения положения границ области и распределений давления и раскрытия трещины, которые решаются с помощью модификаций мето-

дов Пикара и релаксации.

- 6. Проведена верификация и валидация предложенной полностью трехмерной модели распространения трещин и ее компонент: глобального неявного критерия распространения (п. 3) и моделей движения жидкостей разных реологий в трещине (п. 4).
- Разработано программное обеспечение для численного моделирования нестационарного распространения трещин в упругой среде под действием закачиваемой жидкости.
- Созданное на основе предложенной иерархии численных моделей (п. 2) программное обеспечение применено для моделирования процесса гидроразрыва пласта в трехмерной постановке: исследован эффект пережатия трещины при искривлении ее траектории;
- 9. Это же программное обеспечение применено для моделирования процесса распространения трещины вдоль гидроизоляции скважины. Исследованы условия инициации и распространения трещины, выявлена зависимость прочности гидроизоляции от условий ее создания и напряженного состояния породы.

Метод исследования. Основные результаты диссертации получены с применением современных методов математического моделирования, вычислительной математики, теории дифференциальных и интегральных уравнений. Напряженно-деформированное состояние (НДС) упругой среды в области, содержащей полости и трещины, рассчитывается на основе уравнений упругого равновесия, решаемых методом граничных элементов. Описание движения жидкости внутри трещины производится с помощью метода конечных элементов решения уравнений Навье-Стокса, осредненных по ширине канала (раскрытию трещины). Методы решения систем нелинейных уравнений использовались для нахождения совместного решения уравнений движения жидкости и уравнений упругого равновесия, а так же для решения нелинейных уравнений движения жидкости в случае ее неньютоновской реологии. Модель распространения трещины базируется на критериях выбора направления и величины продвижения ее фронта использующих анализ НДС материала в его окрестности. Вычислительный эксперимент как метод исследования использовался для установления закономерностей процессов, сопровождающих распространение трещины, и областей применимости математических моделей.

На защиту выносятся следующие результаты, которые относятся к четырём пунктам (1, 3, 4, 5) паспорта специальности 1.2.2 — «математическое моделирование, численные методы и комплексы программ», физико-математические науки.

Пункт 1: Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений.

Трехмерная математическая модель распространения существенно трехмерной, криволинейной трещины при закачке в нее жидкости сложной реологии, описывающая одновременно движение жидкости в трещине, деформацию и разрушение породы. Модель состоит из новой подмодели движения жидкости сложной реологии в канале малой ширины, учитывающей как наличие критического напряжения сдвига, так и нелинейную связь тензоров скоростей деформаций и напряжений и нового неявного глобального критерия выбора направления распространения трещины, учитывающего все три моды коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) и описывающего распространение трещины при сложном нагружении.

Пункт 3: Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий. Метод решения связанной системы системы интегральных и дифференциальных уравнений в области со свободными границами и нелинейной связью между искомыми функциями, формирующейся в на каждом шаге в модели распространения трещины. В нём уравнения упругого равновесия и движения жидкости в трещине после аппроксимации решаются методом релаксации с коррекцией релаксационного параметра. На каждой итерации решаются только системы линейных уравнений. Модифицированный метод Ньютона с выделением диагонали матрицы производных применяется для реализации неявного глобального критерия распространения трещины с целью определения направления и скорости распространения фронта.

Пункт 4: Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычис-

#### лительного эксперимента.

Программный комплекс для решения задач распространения трещины от полости в упругой среде и по границе между материалами при закачке в них вязкой жидкости, зарегистрированный в Федеральной службе по интеллектуальной собственности и использованный в Новосибирском технологическом центре компании «Шлюмберже».

Пункт 5: Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента.

Решена задача криволинейного распространения трещины от скважины в породу под действием давления закачиваемой в нее вязкой жидкости гидроразрыва. Результатом решения задачи являются зависимости давления в скважине от времени, распределения раскрытия трещины и давления вдоль поверхности трещины, форма самой поверхности трещины. Исследован процесс распространения трещины при ее инициации в направлении, не совпадающим с направлением предпочтительного распространения, обнаружено и описано пережатие трещины в окрестности скважины. Показано, что в случае продольной к скважине трещины пережатие, вызванное искривлением ее траектории, существенно (может составлять до 80% от ее раскрытия), тогда как для поперечной трещины этот эффект выражен слабее (не превышает 30%).

На основе безразмерного анализа и анализа чувствительности, проведенного путем вычислительного эксперимента, показано, что для моделирования распространения трещины, вызванного закачкой в нее жидкости сложной реологии, на начальном этапе формирования ее траектории может использоваться модель ньютоновской жидкости. При этом коэффициент вязкости, используемый в модели ньютоновской жидкости, должен рассчитываться с учетом только показателя степени жидкости и параметров породы, тогда как критическим напряжением сдвига можно пренебречь.

Установлены зависимости стойкости гидроизоляции скважин от параметров используемого цемента и условий его застывания, размеров возможных дефектов, порового давления. Проведены оценки времени, в течение которого гидроизоляция скважины может противостоять повышению порового давления в породе. Таким образом, в соответствии с формулой специальности 1.2.2 в диссертации представлены оригинальные результаты одновременно из четырех областей исследований.

**Научная новизна** выносимых на защиту результатов заключается в следующем.

Отличительными особенностями разработанной модели являются ее полная трехмерность и одновременное рассмотрение в ней скважины с трещиной, нагруженных непостоянным давлением от течения жидкости в них. Существующие в настоящее время модели распространения трещин способны учитывать либо переменность нагрузки в трещине, либо влияние полости.

Впервые лично автором разработана модель и реализован численный метод для описания движения жидкости сложной реологии в криволинейной трещине гидроразрыва пласта. Предложен единый подход для описания движения несжимаемой неньютоновской жидкости с реологией Гершеля-Балкли и слабосжимаемой ньютоновской жидкости, заключающийся в сведении уравнений движения к одному нелинейному дифференциальному уравнению для давления.

На основе предложенного неявного критерия выбора направления и величины приращения трещины сложной геометрии впервые строится положение всего фронта трещины с учетом всех трех мод КИН. Это позволяет описывать распространение трещины при сложном нагружении, даже если траектория распространения не является гладкой кривой.

Впервые в рамках двумерной и трехмерной постановок численно описан эффект "пережатия" трещины вызванный искривлением ее поверхности, количественно описано влияние на него внешних факторов и определены области применимости моделей, которые используются для использующихся для его описания.

Достоверность и обоснованность полученных результатов обеспечивается использованием в качестве основы моделирования фундаментальных законов механики разрушения, механики жидкости, механики твердого тела, выбором теоретически обоснованных численных методов. Достоверность результатов вычислительных экспериментов также подтверждается хорошим их согласованием с известными аналитическими решениями, экспериментальными данными и расчетами других исследователей.

Практическая ценность диссертационной работы заключается в возможности применения ее результатов (методик, алгоритмов, их программной реализации и результатов расчетов) в ряде прикладных областей нефтегазовой промышленности и горного дела, для моделирования распространения трещин в технических конструкциях. Часть результатов, полученных в процессе диссертационного исследования, применялась в научной деятельности филиала ООО «Технологическая Компания Шлюмберже» в г. Новосибирске.

Практическая значимость диссертационной работы обусловлена возможностью использования ее результатов при усовершенствовании и создании новых технологий гидроразрыва пласта, направленных на интенсификацию добычи из все более трудно извлекаемых коллекторов. Это обосновывает необходимость построения трехмерной модели распространения трещин, позволяющей учитывать особенности как самого коллектора (анизотропность его напряженного состояния), так и сложную геометрию трещины в окрестности скважины и сложную реологию жидкости, используемой для операции гидроразрыва. Выявлены области применимости модели ньютоновской жидкости для описания движения в трещине неньютоновской жидкости со сложной реологией Гершеля-Балкли. Показано, что для расчета траектории трещины на начальном этапе ее развития может использоваться простая модель ньютоновской жидкости при надлежащем расчете коэффициента вязкости, что позволяет существенно сократить время расчета при моделировании распространения трещины ГРП. В то же время при описании дальнейшего распространения трещины использование модели ньютоновской жидкости приводит к появлению существенной погрешности в представлении ее характеристик (формы, раскрытия, давления и т.д.).

Важным фактором, влияющим на характеристики ГРП, является искривление траектории или поверхности трещины, которая формируется в начальный период ее эволюции, но воздействует на весь процесс ГРП. Выявленный эффект пережатия трещины, результаты анализа условий его образования позволяют при проектировании гидроразрыва создавать условия, препятствующие его появлению, что повышает вероятность успешного проведения всего ГРП.

#### Теоретическая значимость результатов

Разработанный трехмерный критерий распространения трещины, учитываю-

щий все три моды напряжений, решает задачу нахождения величины приращения и направления распространения фронта трещины на каждом шаге ее распространения при смешанном нагружении. Неявный алгоритм его реализации обеспечивает устойчивость траектории трещины к величине ее приращения, что позволяет уменьшить количество шагов распространения трещины и снизить объем необходимых вычислительных ресурсов. Область применимости предложенного критерия не ограничена трещинами, распространение которых поддерживается закачкой жидкости, но и включает в себя и распространение усталостных трещин.

Предложенная модель движения жидкости Гершеля-Балкли в трещине может применяться для описания движения жидкости в произвольном тонком канале переменного сечения, высота которого мала по сравнению с его размерами в других направлениях. Преимущество реологического закона Гершеля– Балкли заключается в возможности его использования для описания поведения более простых жидкостей: ньютоновской, степенной, вязкопластической, часто используемых в моделях трещин ГРП, при моделировании переноса проппанта и его осаждения, при описании движения бурового раствора в скважине, смазки в различных устройствах сложной геометрии.

С позиций вычислительной механики значимым является созданный эффективный метод совместного решения трех основных связанных задач модели распространения для описания течения жидкости гидроразрыва со сложной реологией, напряженно-деформированного состояния материала, его разрушения и распространения в нем трещины. Модель распространения трещины представляет собой систему нелинейных дифференциальных уравнений параболического типа в области, положение границы которой определяется решением системы. Метод совместного решения позволяет свести такую систему к решению последовательности систем линейных алгебраических уравнений.

### Представление работы и апробация результатов

Основные положения и результаты диссертации докладывались и обсуждались на семинарах «Математическое моделирование гидроразрыва пласта», ИГиЛ СО РАН (руководитель — проф. С.В. Головин); «Вычислительноинформационные технологии» ИВМиМГ СО РАН, НГУ (руководитель проф. В.П. Ильин); «Информационно-вычислительные технологии», ФИЦ ИВТ

(руководители — академик Ю.И. Шокин и проф. В.М. Ковеня); «Научный семинар по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям», РУДН (руководитель — проф. А.Л. Скубачевский); «Геофизический семинар», ИДГ РАН (руководитель — д.ф.-м.н. С.Б. Турунтаев); «Механика прочности и разрушения материалов и конструкций», ИПМех РАН (руководитель — д.ф.-м.н. Е.И. Шифрин); «Механика: эксперимент, моделирование, приложения» (руководитель — д.ф.-м.н. А.В. Хохлов); «Научный семинар Газпромнефть-Политех», СПбПУ (руководитель — член корр. д.ф.-м.н. А.М. Кривцов). «Научно-исследовательском семинаре кафедры газовой и волновой динамики» ММФ МГУ (руководитель проф. Н.Н. Смирнов); Семинаре лаборатории физических методов воздействия на массив горных пород, ИГД СО РАН, (руководитель проф. С.В. Сердюков) и на ведущих международных и российских конференциях, среди которых "Цифровые технологии в добыче и переработке углеводородов: от моделей к практике", 6-9 октября 2020, г. Уфа (дистанционно); Моделирование геологического строения и процессов разработки – основа успешного освоения нефтегазовых месторождений, 4-5 сентября 2018, г. Казань; 22nd European Conference on Fracture (ECF22), 26-31 August 2018, Belgrade, Serbia; 14th U.S. National Congress on Computational Mechanics: July 17-20, 2017, Montreal, Quebec, Canada; 21st European Conference on Fracture (ECF21), 20-24 June 2016, Catania, Italy; 2016 International Conference Mathematical and Information Technologies, Vrnjacka Banja; Serbia; 28 August 2016 – 5 September 2016; XVII Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям. Новосибирск, 30 октября - 3 ноября 2016 г; International Conference "Computational and Informational Technologies in Science, Ingenering and Education September 24-27, 2015, Almaty: Al-Farabi KazNU, Kazakhstan; 8th International Conference on Mathematical Modeling of Technological Processes; Almaty; Kazakhstan; 24–27 September 2015; VIII Казахстанско-Российская Международная научно-практическая конференция «Математическое моделирование в научно-технологических и экологических проблемах нефтегазовой отрасли». 20-21 июня 2014 - 2014. - Атырау; International conference «Advanced mathematics, computations and applications-2014»: Novosibirsk, June 8-11, 2014; Междунар. конф. «Современные проблемы вычислительной математики и математической физики» памяти и к 90-летию А.А. Самарского, 16–18 июня 2009 г.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 18 печатных работах [3–8, 13–24], на программное обеспечение, разработанное на их основе, получено свидетельство о государственной регистрации [25]. Из публикаций в периодических изданиях 11 работ [4–6, 14–18, 21–23] опубликованы в изданиях, рекомендованных ВАК для представления основных научных результатов диссертаций на соискание ученой степени доктора наук (общий объем 23.3 печ. л., автору принадлежит 8.8 печ.л.), 7 работ [6], [18], [4], [5], [23], [19], [7] индексируются в базе данных Web of Science ([5, 23] — в Q1) и 13 работ [14], [16], [6], [18], [4], [5], [23], [13], [19], [20], [7], [3], [24] — в базе данных Scopus. Опубликована одна монография [8] общим объемом 39.6 печ. л., из которых автору принадлежит 9.1 печ. л.

**Личный вклад автора.** Результаты, составляющие основное содержание диссертации, получены автором самостоятельно. Во всех работах, написанных совместно, автором выполнена основная часть постановок задач, ему принадлежит разработка и реализация математических моделей и критериев. В работах [14], [20] автору принадлежат предложенные варианты модели радиальной трещины и их численная реализация, в работах [16], [4], [19], [3] — трехмерный критерий распространения, в [6], [7] — численная модель течения неньютоновской жидкости в трещине, в [18], [22] — постановки задач, модели трещин и критерии образования проппантных пробок, в [5], [3] — численная модель течения жидкости в трещине, алгоритм совместного решения уравнений модели, в [21] анализ постановок задач моделей и объединение их в иерархическую структуру, в [23], [24] — алгоритм совместного решения уравнений модели, исследование эффекта пережатия трещины.

# Задача моделирования распространения трещины и подходы к ее решению

## 1.1. Описание физических процессов в различных моделях распространения трещин

### 1.1.1. Основные физические процессы в трещинах ГРП

Для повышения отдачи нефтеносного пласта применяется технология формирования в нем трещины гидроразрыва (ГРП), подробно описанная в [26]. Технология заключается в подаче в перфорированную скважину под высоким давлением жидкости гидроразрыва. Под действием давления жидкости в области перфораций около скважины инициируется зародышевая трещина. Затем жидкость, надавливая на берега зародышевой трещины, заставляет ее распространяться в нетронутый массив породы, как показано на рисунке 1.1. Для закрепления раскрытия трещины через определенное время от начала подачи жидкости гидроразрыва в нее добавляются твердые частицы — проппант ("proppant"). После прекращения закачки смеси жидкости с твердыми частицами и фильтрационной утечки жидкости в породу раскрытие трещины определяется распределением проппанта вдоль нее. Пропускная способность закрепленной трещины существенно зависит от ее формы и распределения по ней проппанта. Но в любом случае, проницаемость проппантной упаковки внутри трещины много больше проницаемости исходного пласта, что обуславливает увеличение притока в нефти/газа скважину после проведения гидроразрыва.



Рисунок 1.1 – Схема трехмерной трещины

Моделирование процесса гидроразрыва пласта — роста трещины с учетом потерь жидкости гидроразрыва на фильтрацию в пористую среду и, наконец, определение влияния примеси твердых частиц в жидкости на динамику раскрытия трещины и ее конечную форму позволяют прогнозировать геометрию трещины и оптимизировать всю технологию этого процесса. Однако сформулированная в наиболее общей постановке модель трещины ГРП получилась бы чрезвычайно сложной, так как объединяла бы множество сопровождающих распространение трещины процессов. Наиболее значимыми из них являются следующие.

Деформация породы, обусловленная давлением жидкости в трещине, приложенным к берегам трещины. В общем случае при описании этого процесса необходимо учитывать неоднородность и анизотропность материала пласта и его напряженно-деформированного состояния (НДС) в естественном залегании, распределение давления поровой жидкости в пласте и его изменение в процессе распространения трещины. Последнее, согласно хорошо разработанной в настоящее время теории пороупругости [27–29], определяется и деформацией породы и фильтрацией в ней жидкости, и должно рассчитываться в результате одновременного решения описывающих эти процессы уравнений.

- Разрушение породы, определяемое сильными напряжениями в окрестности фронта трещины. Такое разрушение определяет направление и скорость распространения трещины в различных точках ее фронта, а следовательно и форму получившейся в результате ГРП трещины [11, 30]. НДС в окрестности фронта может быть существенно анизотропным, так как зародышевая трещина может инициироваться не в плоскости, ортогональной главным напряжениям в породе [31–33]. Поэтому для определения условий и направления распространения трещины необходимо привлекать критерии разрушения, учитывающие все виды такой анизотропности. Кроме того, критерии разрушения в общем случае должны иметь возможность учитывать образование зон пластичности [34–36].
- Движение жидкости в трещине, вызванное закачкой жидкости в скважину и зависящее от распределения раскрытия вдоль поверхности трещины. В общем случае жидкость представляет собой смесь несущей жидкости (или нескольких жидкостей) сложной реологии [37] и проппанта, который еще более усложняет реологию смеси, ее течение и распределение проппанта по трещине [38–42].
- Перенос проппанта и его распределение по трещине, которое определяет время остановки процесса ГРП и ширину канала, образующегося после остановки закачки и закрытия трещины [43–46].
- Фильтрация жидкости в породе, обуславливающая утечку жидкости из трещины. Несмотря на популярность аналитических решений [47, 48], позволяющих приближенно рассчитывать утечку жидкости из трещины, скорость утечки определяется процессом фильтрации в породе и в общем случае должна рассчитываться совместно с НДС породы [49, 50].
- Температурные эффекты, воздействующие на НДС породы за счет ее температурного расширения, реологические свойства поровой жидкости и жидкости гидроразрыва [51, 52].
- Химические эффекты, при проведении кислотных гидроразрывов, вызывающие растворение породы [53, 54]

Совместное решение в двумерных, а особенно в трехмерных задачах остается актуальной проблемой из-за сложности каждой из подзадач и необходимости итерационного решения объединяющей их системы нелинейных уравнений. Поэтому при создании модели приходится искать компромисс между вычислительной сложностью алгоритмов и детальностью описания каждого из процессов. Развитие вычислительной техники смещает точку компромисса в сторону совершенствования моделей, но оно все еще недостаточно для отказа от приближенного описания процессов или пренебрежения какими-либо из них. Наиболее существенно снижают вычислительную сложность упрощения при описании процессов деформации породы и ее разрушения, что связано существенно с трехмерностью этого процесса в общем случае.

### 1.1.2. Обзор моделей распространения трещин ГРП

Модели, рассмотренные в диссертационной работе построены на основе положений механики сплошной среды в предположении о гладкости используемых функций (за исключением трещины, как разрыва в модели деформации породы) и малости деформаций, поэтому далее не рассматриваются модели, основанные на представлении упругого тела в виде решетки [55], независимых элементов [56], материала с большим количеством естественных трещин [57] или допускающего сопоставимые с размером области деформации [58]. Вместо этого предполагается, что деформация породы описывается в рамках задачи упругого или пороупругого равновесия.

Несмотря на периодическое появление обзоров моделей трещин ГРП [21, 59– 62] к настоящему времени не сформировалось единого подхода к их классификации. Такая классификация возможна, например, по описываемым в моделях процессам и типе учета их взаимодействия [61], или по применимости моделей к различным практическим задачам [62]. В рамках диссертационной работы удобнее провести классификацию на основе размерностей задачи деформации материала и уравнений, которые используются для получения основных распределений: давления жидкости (или смеси) в трещине p и ее раскрытия w. Большинство современных моделей используют для определения этих распределений двумерные уравнения, однако первые шаги в описании трещин ГРП были сделаны на основе одномерных моделей.

### Одномерные модели

Этот класс моделей характеризуются рассмотрением только плоских трещин и, как следует из названия, одномерными распределениями основных величин и одномерными же уравнениями для их вычисления. Во всех моделях основой для получения соотношений между раскрытием трещины w и давлением в ней p являются описание процессов движения жидкости в трещине и деформации материала. Однако исходные предположения и геометрическая концепция, используемые для получения уравнений, в основных одномерных моделях — KGD, PKN и радиальной — отличаются. Так в модели Христиановича—



Рисунок 1.2 – Одно крыло трещины гидроразрыва в представлении KGD-модели (слева) и PKNмодели (справа) с прямолинейным распространением из линейного источника: 1 — вертикальная ось скважины, 2 — линейный источник жидкости, 3 — плоское крыло трещины, 4 — кончик трещины

Гиртсма–де Клерка (KGD-модели) [63, 64] основным является предположение о том, что высота трещины много больше ее длины, как можно увидеть на рисунке 1.2, слева. Такое предположение позволяет решать задачу о плоской трещине нагруженной заданным давлением и рассчитывать плоское деформированное состояние породы. В квазистатическом приближении и предположении отсутствия сдвиговых напряжений на берегах прямолинейной трещины соотношение между ее раскрытием и избыточным давлением жидкости в трещине записывается в виде интегрального соотношения [65]). Положение фронта трещины в одномерном приближении характеризуется одним числом – полудлиной трещи-



Рисунок 1.3 – Модель с радиально симметричным распространением из точечного источника: <br/> 1-ось скважины, 2-точечный источник жидкости,<br/> 3-плоскость распространения трещины,<br/> 4-кончик трещины

ны, которое рассчитывается, например, из критерия хрупкого распространения трещины [66], условия плавного смыкания [67, 68] или (реже) на основе пластических критериев [34]. Движение жидкости в трещине описывается из решения задачи Пуазейля о течении между двумя параллельными пластинами [69], что дает связь между градиентом давления и раскрытием трещины. В качестве одного из граничных условий обычно задается давление и расход на скважине. Граничное условие на кончике трещины может быть поставлено разными способами. Поскольку раскрытие трещины при приближении к ее кончику стремится к нулю, то давление в его окрестности стремится к бесконечности [70]. Часть исследователей [63, 64, 71–73] полагают, что жидкость полностью заполняет объем трещины, задают нулевое значение расхода жидкости на кончике и аналитически описывают особенность давления. В других моделях [74, 75] используется предположение о наличии отставания фронта жидкости от фронта трещины, которое обнаруживается в некоторых экспериментах [76]. В современной литературе модель плоской трещины используется для анализа закономерностей и механизмов распространения трещин, оценки влияния основных параметров с помощью аналитических и асимптотических решений [77-80].

В РКN-модели, предложенной Перкинсом и Керном [81] и развитой Нордгреном [82], предполагается, что трещина гидроразрыва имеет постоянную высоту, которая значительно меньше ее длины, как показано на рисунке 1.2, справа. Это, обратное к используемому в модели KGD, соотношение геометрических размеров также позволяет рассматривать плоское деформированное состояние породы вместо трехмерного для получения соотношения между раскрытием и давлением. Однако, в этом случае такое соотношение будет локальным, а не интегральным, поскольку позволяет рассматривать поперечные сечения трещины независимо и для каждого из них использовать решение задачи о раскрытии нагруженной постоянным давлением трещины [83]. Движение жидкости описывается, как и в KGD-модели, на основе решения задачи о течении Пуазейля, но в этом случае в эллиптической трубе, а не между параллельными пластинами [69]. Локальная связь между давлением и раскрытием не требует задания положения фронта трещины. Вместо этого трещина рассматривается как область возмущения начального нулевого решения уравнений, вызванного граничным условием на скважине, а положение фронта трещины — как граница области, где эти возмущения затухают. Несмотря на то, что уравнения, описывающие распространение трещины в РКN модели, являются параболическими, скорость распространения возмущений в которых бесконечна, в силу нелинейности эти возмущения быстро затухают по пространственной координате и скорость распространения «заметных» возмущений конечна. Трещина, описываемая PKN моделью может реализоваться при проведении ГРП в пласте, ограниченном пропластками с сильными сжимающими напряжениями или высокой прочностью, которые препятствуют распространению трещины по высоте, однако в современных условиях такие пласты встречаются достаточно редко, и PKN модель чаще используется для анализа закономерностей развития трещин, или тестирования более сложных моделей, чем непосредственно для описания реальных трещин.

Рассмотренные две модели основываются на предположении о значительном превосходстве одного геометрического размера трещины над другим. В плоской радиальной модели [64, 66, 81, 84–87] описывается третий предельный случай, в котором геометрические размеры предполагаются равными, что следует из предположения об однородности и изотропности породы и ее напряженного состояния. В этом случае задача предполагает осевую симметрию, как показано на рисунке 1.3, и все распределения, характеризующие трещину, являются функциями только времени и радиуса — расстояния от точки закачки жидкости (скважины или перфорации). Раскрытие трещины, как и в KGD модели, выражается через давление в ней из решения задачи об осесимметрично нагруженной круговой трещине [88]. Для описания движения жидкости используется решение задачи о ее растекании из точечного источника между двумя параллельными пластинами. Положение кончика крыла трещины определяется из известного критерия хрупкого распространения трещины [66]. Так же как и предыдущие, модель радиальной трещины чаще используется для анализа закономерностей процесса ГРП, получения аналитических решений и выявления основных факторов и режима в распространения трещины ГРП, чем для непосредственного применения в практических задачах.

Следует отметить, что в зарубежной литературе для обозначения моделей KGD и PKN иногда используется также термин "двумерные" [89], который отражает размерность задачи деформации породы, используемой для определения раскрытия трещины. Однако, решение задачи о прямолинейной трещине в плоскости приводит к связыванию лишь одномерных распределений давления и раскрытия, а при прямолинейном распространении трещины меняется только одна координата точки фронта, поэтому такой термин кажется неудачным. Более того, в литературе приведены модели, позволяющие описывать распространение криволинейных трещин в плоскости под действием закачиваемой жидкости, для которых термин "двумерные" кажется более подходящим.

### Двумерные модели

Геометрическая концепция этих моделей развивает геометрическую концепцию, предложенную в KGD-модели, за счет отказа от предположения о прямолинейности трещины. Таким образом допускается криволинейность горизонтального сечения трещины, распространяющейся от скважины в направлении поперек действия минимальных напряжений залегания, как показано на рисунке 1.4. Аналогично KGD подходу, считается, что геометрия горизонтальных сечений и процессы в них не зависят от высоты, что позволяет рассматривать плоское деформированное состояние породы. Однако ввиду произвола формы трещины невозможно получить явных интегральных зависимостей раскрытия трещины от давления, поэтому в таких моделях задача упругого равновесия обычно решается численно. Главное преимущество двумерных моделей над одномерными состоит в возможности описания эффектов гидроразрыва, связанных с



Рисунок 1.4 – Геометрическая концепция двумерных моделей

искривлением траектории трещины в прискважинной области и учета влияния полости скважины на этот эффект. Для распространения трещины обычно [75, 90–92] используется критерий распространения трещины нормального отрыва [93]), который позволяет определить скорость и направление распространения трещины. При отсутствии аналитического решения задачи о раскрытии трещины, нагруженной заданным давлением, невозможно получить и аналитическое решение задачи определения распределений давления и раскрытия, как это удается сделать в одномерных моделях. Поэтому ряд исследователей использовали фиксированное распределение давления вместо его расчета из уравнений движения жидкости [90–92], что позволило лишь качественно описать искривление траектории трещины в окрестности скважины. В работах [23, 24] на основе двумерной модели трещины с различными наперед заданными траекториями удалось описать эффект "пережатия" (уменьшения раскрытия) трещины в окрестности скважины и оценить вызванное им повышение давления в скважине. В работе [75] этот эффект был описан уже на основе двумерной модели, в которой траектория определяется в процессе распространения трещины.

#### Псевдотрехмерные модели

Промежуточным этапом между PKN моделью и более сложными плоскими трехмерными моделями являются псевдо-трехмерные модели [89, 94], позволяющие расширить область применимости по сравнению с РКN моделью на трещины переменной высоты. Трещина в псевдо-трехмерных моделях, как и в более сложных плоских трехмерных моделях, представляется частью плоскости ограниченной фронтом, как показано на рисунке 1.5, заимствованном из [95], слева. Однако, конфигурация фронта не рассчитывается на основе критериев расропстранеия в каждой точке, а определяется на основе упрощающих предположений. В одном из подходов ("lumped") фронт, ограничивающий од-



Рисунок 1.5 – Геометрические концепции псевдотрехмерных моделей: "lumped" — фронт представляется в виде эллиптических кривых, слева; "cell based" — трещина разбивается на независимые ячейки, справа. Рисунок заимствован из [95]

но крыло трещины, представляется в виде двух эллиптических кривых, одна из полуосей которых является полудлиной трещины, а вторая — расстоянием, на которое распространился фронт по вертикальной оси вверх и вниз от точки закачки жидкости, соответственно. Таким образом, для получения кривой фронта достаточно определить положение трех его точек ( $L, H_+, H_-$ ). При этом критерии распространения трещины в продольном вертикальном направлении могут быть различны [96, 97] Для движения жидкости могут использоваться как аналогичные используемым в РКN модели одномерные уравнения, так и двумерное [98, 99], в которых учитывается изменение давление по высоте, вызванное течение жидкости.

В XXI веке в связи с увеличением доступных полевым инженерам вычислительных мощностей, большую популярность завоевал другой, более сложный подход ("cell based"). В нем на каждом из участков, на которые разбивается длина трещины, независимо определяется ее высота  $H_k, k = 1, 2, 3...$ , как показано на рисунке 1.5. Для расчета распространения трещины в вертикальном направлении в каждой из ячеек используются асимптотические решения, полученные на основе KGD подхода, в которых учитывается один [100] или несколько возможных режимов распростраения трещины [101, 102]. Такой же KGD подход для поперечного сечения трещины позволяет легко учитывать слоистость НДС пласта [103] или свойств материала [104] при описании распространения в вертикальном направлении. В отличие от плоских трехмерных моделей, в большинстве случаев процесс разрушения породы учитывается только при описании распространения трещины в вертикальном направлении, тогда как в продольном направлении, критерий распространения, как и в PKN модели, не используется [100]. Хотя как показано в работе [105] учет трещиностойкости в рамках псевдо-трехмерных моделей возможен и важен в случае высоких ее значений. Описание движения жидкости может быть одномерным [97, 106] или двумерным [43, 59, 107], в том числе и с учетом переноса проппанта и его оседания [100, 108, 109].

Удобными за счет своей вычислительной эффективности псевдо-трехмерные модели оказались для использования в промышленных симуляторах (MFrac [110], FRACPRO [111]) и при описании распространения трещины ГРП с учетом пересечения с сетью естественных трещин [112, 113], однако, последние выходят за рамки диссертационного исследования, ограниченного подробным описанием одной, максимум двух трещин, и далее не рассматриваются.

### Плоские трехмерные модели

Следующим шагом в описании распространения трещин являются плоские трехмерные модели, в которых конфигурация фронта описывается без предположений о его форме, на основе критериев распространения. Это позволяет адекватно применять такие модели в пластах с сильными неоднородностями свойств НДС, в которых трещина может принимать сложную форму, в том числе невыпуклую [114–117]. В моделях такого типа трещина на каждом шаге описывается двумерными распределениями раскрытия и давления в области ограниченной кривой фронта трещины. Для аппроксимации уравнений и хранения распределений может использоваться как подвижная сетка, явно задающая фронт трещины [118], так и фиксированная, в которой фронт трещины описывается отдельной кривой [119–121]. Последний вариант в современных реализациях плоских трехмерных моделях становится более популярным [59, 122, 123] за счет простоты построения сетки и аппроксимации уравнений. Кроме того, разработка асимптотических решений, описывающих раскрытие трещины в окрестности фронта [70, 124, 125], позволяет приближено описывать прифронтовую область трещины и определять скорость продвижения фронта [13, 126–128], рассчитывая раскрытие и давление лишь в прифронтовых ячейках сетки. Движение жидкости в трещине описывается двумерными уравнениями, а "трехмерность" моделей заключается в размерности задачи о раскрытии плоской трещины произвольной формы в пространстве. Решение такой задачи возможно лишь численно, методом разрывных смещений, на основе потенциала двойного слоя [122], вариации метода конечных элементов (FEM, XFEM [129–131] или других [132].

Плоские трехмерные модели в настоящее время широко развиваются как в научных работах, так и в промышленных симуляторах, как зарубежных (GOHFER [133], FracCade [134], StimPlan [135]), так и отечественных (Кибер-ГРП [114] и РН-ГРИД [115]). Это обусловлено их способностью описывать основные процессы, происходящие в развитых трещинах, с учетом неоднородностей пласта, сложной реологии жидкости, и переноса проппанта, и в то же время высокими, но приемлемыми при современном уровне развития вычислительной техники, требованиями к вычислительным мощностям.

### Полностью трехмерные модели

Полностью трехмерные модели, как и следует из названия, описывают распространение трешин, на форму котрых не налагается сщственных ограничений — трещина в них представляется частью некоторой поверхности в терхмерном пространстве, которая ограничена фронтом. Попытки построения таких моделей предпринимались еще в XX веке [107, 136, 137], но даже настоящее время в промышленных симуляторах используются уже упомянутые псевдо- и плоские трехмерные модели, тогда как полностью трехмерные используются в основном в научных исслдованиях. Это обусловлено трудностью решения полностью трехмерной задачи деформации породы и сложностью выбора критериев распространения трещины.

В общем случае постановка полностью трехмерной задачи определения де-

формации породы с расположенной в ней криволинейной трещиной, предполагает задание на берегах трещины вектора усилий, смещений или какой-либо их комбинации. В результате решения задачи на берегах трещины могут быть определены вектора смещений и усилий, тогда как при решении задачи о плоской трещине давление может быть записано как интегральная функция раскрытия. Таким образом, сама постановка задачи предполагает увеличиение размерности каждой переменной в три раза, что обуславливает и существенно повышение вычислительной сложности. Решение такой задачи возможно только численно, для чего в современной литературе используются метод граничных элементов, как, например, в диссертационной работе, метод разрывных смещений [12], классический метод конечных элементов [10, 138, 139] или обобщенный / расширенный метод конечных элементов [9, 11, 36, 140]. Предпринимаются также попытки описать деформацию породы при распространении заполненной жидкостью трещины с использованием методов частиц и решеток [141–143].

Несмотря на множество исследований, посвященных задаче распространения трещин, в настоящее время отсутствует общее мнение по поводу критерия, наиболее адекватно предсказывающего направление распространения трещины в общем случае сложного трехмерного нагружения [61, 144], хотя в литературе описано множество подходов к его формулировке [145–147]. Задача выбора и реализации критерия распространения трещины, нагруженной давлением вязкой жидкости, несколько проще общего случая, поскольку в трещине всегда присутствует давление, обеспечивающее ненулевую компоненту растягивающих напряжений в окрестности точек фронта трещины. Размер развитых трещин значительно превышает диаметр скважины, изменяющей НДС породы в своей окрестности, а их фронт лежит в плоскости предпочтительного распространения — плоскости, ортогональной направлению действия минимальных напряжений в породе в естественном залегании. Поэтому растягивающие напряжения в окрестности фронта таких трещин значительно превосходят сдвиговые, а при распространении развитой трещины в однородном изотропном упругом материале, последние, вообще, пренебрежимо малы. НДС однородного изотропного упругого материала в общем случае предполагает распространение развитой трещины в плоскости. Изменение направления распространения таких трещин обуславливается, например, наличием других трещин, вызывающих возмущение НДС породы, или влиянием порового давления, дающем его неоднородность. В этом случае распространение может описываться на основе классических критериев разрушения, так как основной модой коэффициентов интенсивности напряжений, характеризующих НДС породы в окрестности фронта, является растягивающая, и направление распространения слабо чувствительно к имеющимся неоднородностям и анизотропии НДС. Поэтому в большинстве полных трехмерных моделей, направленных на рассмотрение развитых трещин, используются классические критерии. При этом авторы либо изначально ограничиваются рассмотрением развитых трещин, описывая взаимное их влияние [10, 12, 36, 143, 148, 149], либо демонстрируют возможность модели описывать искривление трещины без сопоставления с экспериментальными данными [11, 150, 151], либо при проведении такого сопоставления ограничиваются анализом размера трещины и давления в ней [140, 152], оставляя траекторию, а следовательно, и валидацию используемого критерия распространения за кадром.

Подобные подходы следует с осторожностью применять для описания распространения трещины на начальном этапе, когда ее траектория (серединная поверхность) сильно искривляется из-за анизотропии и неоднородности НДС породы, вызванных параметрами естественного залегания, наличием скважины и ориентацией зародышевой трещины вне плоскости предпочтительного распространения. При этом траектория трещины может терпеть излом [75], а фронт ее испытывать кручение [4, 19], поэтому способность используемого в модели критерия распространения трещины не очевидна и требуется его валидация.

Указанные вычислительные и методические сложности не позволяют в настоящее время разработать общую полную трехмерную модель, применимую на всех этапах эволюции трещины ГРП, и автор далек от постановки такой задачи. Предложенная в диссертации полная трехмерная модель распространения трещины, нагруженной давлением закачиваемой жидкости предназначена для описания начального этапа распространения, во время которого происходит выход трещины в плоскость предпочтительного распространения. Задача деформации породы решается в рамках модели однородного изотропного, хрупкого, линейного упругого тела. Важные и влияющие на распространение развитых трещин пороупругоие [10, 36, 149, 151] или температурные эффекты [12] могут являться дальнейшими шагами развития моделеи, но на данном этапе не рассматриваются. Предполагается, что существенные изменения распределений порового давления или температуры в пласте силу параболичности задач требуют времени, большего чем время, необходимое трещине для выхода в плоскость предпочтительного распространения, поэтому распределения жидкости и температуры в пласте могут считаться фиксированными и НДС породы может определяться в рамках указанной модлеи.

## 1.2. Концепция трехмерной модели начального этапа распространения трещины гидроразрыва пласта

При разработке предлагаемой трехмерной модели предполагалось, что серединная поверхность распространяющейся трещины может быть произвольной кусочно гладкой кривой, и направление распространения трещины в каждой точке фронта может быть произвольным, в том числе может резко меняться, создавая изломы траектории. Трехмерная модель объединяет 1) описание двумерного движения жидкости внутри полости скважины и трещине с 2) расчетом трехмерного напряженно-деформированного состояния породы, вызванного внешними напряжениями в ней и давлением в скважине и трещине, и 3) критериями распространения трещины, определяющими направление и величину приращения во всех точках фронта. Одна из особенностей модели заключается в учете отставания фронта жидкости от фронта трещины ("Лаг"), которое хорошо заметно на начальном этапе развития трещины и оказывает влияние на формирование ее траектории.

Согласно концепции модели, распространение трещины описывается последовательностью шагов, на каждом из которых отыскиваются положение точек фронта жидкости  $\mathbf{x}_f$  и фронта трещины  $\mathbf{x}_r$ , показанных на рисунке 1.1, и двумерные распределения раскрытия w трещины и давления p на ее поверхности. Для описания деформации материала используются уравнения упругого равновесия, которые решаются методом граничных элементов, описанном в следующем параграфе<sup>2</sup>. На основе найденного напряженно-деформированного состояния по заданным положению фронта трещины  $\mathbf{x}_r$  и распределению давления *p* рассчитывается раскрытие трещины

$$w = w(p, \mathbf{x}_r) \tag{1.1}$$

и распределения коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) в точках фронта трещины  $K_{I,II,III} = K_{I,II,III}((p, \mathbf{x}_r)).$ 

Движение жидкости описывается двумерными уравнениями смазки, полученными осреднением по раскрытия трещины уравнений движения вязкой жидкости с неньютоновской реологией, описываемой моделью Гершеля-Балкли. Для аппроксимации уравнений смазки используется метод конечных элементов, а для решения полученной нелинейной по давлению системы уравнений метод релаксации с коррекцией релаксационного параметра. Подмодель движения жидкости позволяет на основе заданных положения фронта жидкости  $\mathbf{x}_f$ и раскрытия трещины w рассчитать распределение давления, по поверхности трещины и скорость точек фронта жидкости

$$p = p(w, \mathbf{x}_f), \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(w, \mathbf{x}_f)),$$
 (1.2)

которые используются для определения положения фронта жидкости на следующем шаге распространения. Описанию модели жидкости и численного метода решения ее уравнений посвящена третья глава диссертации.

Для определения положения фронта трещины  $\mathbf{x}_r$  на каждом шаге используется неявный критерий приращения, который по заданным распределениям КИН в точках фронта  $K_{I,II,III}$  позволяет определить величину и направление приращения фронта трещины. Описанию критерия распространения трещины, согласно которому определяются направление и величина приращения трещины за один шаг расчета, приведено в Главе 2, сейчас же формулировку криерия удобно записать в общем виде

$$\mathbf{K}(w, \mathbf{x}_r) = 0, \tag{1.3}$$

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Используемая в модели модификация метода граничных элементов не является личным результатом автора и ее описание приводится в третьем параграфе настоящей главы для полноты изложения.

где  $\mathbf{K}(w, \mathbf{x}_r)$  — функция, зависящая от значений трех коэффициентов интенсивности напряжений (КИН)  $K_{\mathbf{I},\mathbf{II},\mathbf{III}}(w, \mathbf{x}_r)$  в точках фронта трещины, которые рассчитываются по положению фронта трещины  $\mathbf{x}_r$  и ее раскрытию w.

Расчет положения фронта жидкости  $\mathbf{x}_f$  происходит на основе условия Стефана, согласно котрому скорость продвижения фронта равна скорости жидкости в точках фронта

$$\frac{d\mathbf{x}_f}{dt} = v_{fluid}(\mathbf{x}_f). \tag{1.4}$$

Фронт жидкости находится в уже образованной трещине, и направление его распространения определяется поверхностью трещины, заданной положением фронта трещины, и нормалью к самому фронту жидкости  $\mathbf{n}_p$ , касательной к этой поверхности. Поэтому для задания положения точек фронта жидкости из (5.17) достаточно опредеделить проекцию скорости жидкости на направление этой нормали  $v_{fluid} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_p$ .

Таким образом, в предлагаемой модели решаются задачи

- деформации породы как изотропного, однородного, линейно упругого тела для получения зависимости раскрытия трещины w как функции давления p и положения фронта трещины x<sub>r</sub> (1.1) (подробнее см. параграф 1.3);
- движения жидкости в трещине на основе уравнений движения жидкости сложной реологии в канале заданного сечения, в результате чего давление в трещине p выражается через раскрытие w и положение фронта трещины  $\mathbf{x}_f$  (1.2) (подробнее см. Главу 3);
- разрушения породы на фронте трещины для выбора направления распространения и величины приращения трещины на основе неявного глобального критерия (1.3) (подробнее см. Главу 2);
- продвижения фронта жидкости для на основе условия Стефана (5.17) для определения его положения на каждом шаге распространения.

## 1.3. Модель деформации среды в задаче распространения трещин

Процесс деформации породы определяет раскрытие трещины — величину, на которую смещаются берега трещины под действием давления заполняющей трещину жидкости. Для расчета деформации породы и соответствующего раскрытия трещины решается задача упругого равновесия в бесконечной области, внутри которой находятся полость (скважина) и трещина, как изображено на рисунке 1.6, слева. При этом в модели деформации породы предполагается, что известны форма серединой поверхности трещины, распределение давления в трещине и напряжения породы в естественном залегании.



Рисунок 1.6 – Приближение реальной трещины (слева) виртуальным пропилом конечной ширины (справа)

Для решения задач упругого и проупругого равновесия часто используются методы конечных разностей, конечных элементов и граничных элементов (МГЭ). Хотя метод конечных элементов позволяет с большей легкостью учитывать эффекты неоднородности, анизотропности материала и влияние порового давления, в случае внешних задач упругого равновесия он, так же как и метод конечных разностей, требует аппроксимации расчетной области большим количеством ячеек вдали от полостей и трещин. МГЭ свободен от этого недостатка, так как требует аппроксимации только границы области.

Суть классического МГЭ заключается в переходе от дифференциальных

уравнений упругости к приведенному ниже граничному интегральному уравнению смещений. При решении этого уравнения отыскиваются все неизвестные функции на границе области. Для нахождения неизвестных функций внутри области применяется фундаментальное интегральное соотношение для внутренней точки. Так как элементы, расположенные на противоположных берегах трещины, находятся в одной геометрической точке пространства, а граничное уравнение содержит множители, обратные расстоянию между точками элементов, оно не может использоваться в неизменном виде для решения задач с трещинами. Поэтому в работе [4] классический МГЭ был модифицирован для описания расчета НДС материала при наличии в нем трещины. Идея модификации заключается замене трещины, представляющей собой бесконечно тонкий разрез в дифференциальной постановке задачи, пропилом конечной ширины в численной постановке задачи. Эта модификация МГЭ не является личным результатом автора и не выносится на защиту, и приводится здесь лишь для сохранения целостности и полноты изложения.

### 1.3.1. Постановка задачи упругого равновесия

Уравнения упругого равновесия, описывающие НДС линейно упругой изотропной однородной среды, записываются следующим образом

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0. \tag{1.5}$$

Введенные в них компоненты тензора напряжений  $\sigma_{ij}$  связаны линейным законом Гука с компонентами тензора деформаций  $\varepsilon_{ij}$ 

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \tag{1.6}$$

и компонентами  $u_j$  вектора смещений **u** через определение тензора деформаций

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \tag{1.7}$$

Используемые в формуле (1.6) величины  $\lambda$  и  $\mu$  есть параметры Ламэ, применяемые в теории упругости наряду с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона
ν

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$
(1.8)

Далее будет использоваться также модуль плоского сдвига E', связанный с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона  $\nu$  как

$$E' = \frac{E}{1 - \nu^2}.$$
 (1.9)

Внутренняя граница задачи  $S = S^* + S^+ + S^-$  (см. рисунок 1.6) состоит из поверхности полости  $S^*$ , и двух берегов трещины: верхнего  $S^+$  и нижнего  $S^-$ . На полости  $S^*$  ставится граничное условие в терминах усилий

$$t_i \equiv \sigma_{ij} n_j = -p_{\text{well}} n_i - \sigma_{ij}^{\infty} n_j, \qquad (1.10)$$

в котором вектор внешней единичной нормали к поверхности имеет координаты  $n_i$ , тензор напряжений с компонентами  $\sigma_{ij}^{\infty}$  характеризует сжатие породы на бесконечном удалении и задается в терминах главных напряжений  $\sigma_x^{\infty}$ ,  $\sigma_y^{\infty}$  и  $\sigma_z^{\infty}$ , совпадающих с направлением координатных осей,  $p_{well}$  — давление в скважине,

На берегах трещины  $S^\pm$  ставится граничное условие

$$t_i = -p_{\text{crack}} n_i - \sigma_{ij}^{\infty} n_j. \tag{1.11}$$

И замыкается задача нулевым условием для смещений на бесконечном удалении

$$u_i(\infty) = 0, \tag{1.12}$$

которое автоматически выполняется при использовании МКЭ [8].

Слагаемое, содержащее тензор  $\sigma_{ij}^{\infty}$  в граничных условиях (1.10) и (1.11) используется для учета внешних напряжений в породе при вычислении изменения НДС при образовании и нагружении трещины и скважины по отношению к исходному, сжатому напряжениями  $\sigma_{ij}^{\infty}$  НДС породы.

#### 1.3.2. Классический МГЭ

Из уравнений упругого равновесия (1.5) в работах [153–155] выводится фундаментальное интегральное соотношение:

$$u_i(\mathbf{x}^*) = \int_S U_{ij}(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}) t_j(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) - \int_S T_{ij}(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}), \qquad (1.13)$$

где  $\mathbf{x}^* \in V, \mathbf{x} \in S, V$  – область, в которой применимы уравнения, а S – ее граница. Соотношение (1.13) связывает значение смещений внутри тела со значениями смещений и напряжений на его границах. Здесь ядра  $U_{ij}(\mathbf{x}^*, \mathbf{x})$  и  $T_{ij}(\mathbf{x}^*, \mathbf{x})$  – известное решение задачи Кельвина о действии точечной силы (см., например, [156, 157]). В задаче Кельвина определяются поля смещений  $u_j^*(\mathbf{x})$  и напряжений  $t_j^*(\mathbf{x})$  в упругом теле при действии единичной сосредоточенной в точке  $\mathbf{x}^*$  силы  $f_i^*(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)e_i$ :

$$u_j^*(\mathbf{x}) = U_{ij}(\mathbf{x}^*, \mathbf{x})e_i,$$
  
$$t_j^*(\mathbf{x}) = T_{ij}(\mathbf{x}^*, \mathbf{x})e_i.$$
 (1.14)

При устремлении  $\mathbf{x}^* \to \mathbf{x}' \in S$  в (1.13), получается граничное интегральное уравнение смещений

$$c_{ij}(\mathbf{x}')u_i(\mathbf{x}') = \int_S U_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x})t_j(\mathbf{x})dS(\mathbf{x}) - \oint_S T_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x})u_j(\mathbf{x})dS(\mathbf{x}).$$
(1.15)

Здесь  $c_{ij}(\mathbf{x}') = \frac{1}{2}\delta_{ij}$  — свободный член, определяемый геометрией границы в точке  $\mathbf{x}'$ . Символ f в (1.15) — главное значение сингулярного интеграла в смысле Коши.

Поскольку задача упругого равновесия при моделировании трещины гидроразрыва ставится в напряжениях, то из решения интегрального уравнение (1.15) определяются компоненты смещений на границе области S. Для этого вся граница S аппроксимируется N граничными элементами, схематично показанными на рисунке 1.7. Тогда интегралы в граничном интегральном уравнении смещений (1.15) заменяются на суммы интегралов по элементам  $S_n$  и преобразуются



Рисунок 1.7 – Схема разбиения границы тела на элементы

следующим образом:

$$c_{ij}(\mathbf{x}')u_i(\mathbf{x}') = \sum_{n=1}^N \int_{S_n} U_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x})t_j(\mathbf{x})dS(\mathbf{x}) - \sum_{n=1}^N \int_{S_n} T_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x})u_j(\mathbf{x})dS(\mathbf{x}).$$
(1.16)

Декартовы координаты  $x_i$ , компоненты смещений  $u_i$  и компоненты напряжений  $t_i$  на элементе  $S_n$  аппроксимируются с помощью интерполяционных формфункций  $\phi_m(\xi_1, \xi_2)$  следующим образом:

$$x_i(\xi_1, \xi_2) = \sum_{m=1}^M x_i^m \phi_m(\xi_1, \xi_2),$$
$$u_i(\xi_1, \xi_2) = \sum_{m=1}^M u_i^m \phi_m(\xi_1, \xi_2),$$

$$t_i(\xi_1, \xi_2) = \sum_{m=1}^M t_i^m \phi_m(\xi_1, \xi_2).$$
(1.17)

Здесь  $x_i^m$  – координаты угловых точек элемента,  $u_i^m$  и  $t_i^m$  – компоненты смещений и усилий в этих M угловых точках.

С учетом (1.17) соотношение (1.16) принимает вид

$$c_{ij}(\mathbf{x}')u_{i}(\mathbf{x}') = \sum_{n=1}^{N} \int_{S_{n}} \sum_{m=1}^{M} U_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}(\xi_{1}, \xi_{2}))t_{j}^{m}\phi_{m}(\xi_{1}, \xi_{2})dS_{n} - \sum_{n=1}^{N} \int_{S_{n}} \sum_{m=1}^{M} T_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}(\xi_{1}, \xi_{2}))u_{j}^{m}\phi_{m}(\xi_{1}, \xi_{2})dS_{n},$$
(1.18)

где

$$dS_n = |J^n(\xi_1, \xi_2)| d\xi_1 d\xi_2, \tag{1.19}$$

а  $|J^n(\xi_1,\xi_2)|$  – якобиан перехода в локальную систему координат элемента  $S_n$ . Уравнение (1.18) переписывается как

$$c_{ij}(\mathbf{x}')u_i(\mathbf{x}') = \sum_{n=1}^N U_{ij}^{nm} t_j^{nm} - \sum_{n=1}^N T_{ij}^{nm} u_j^{nm}, \qquad (1.20)$$

где введены коэффициенты, определяемые геометрией границы

$$U_{ij}^{nm} = \iint_{S_n} U_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}(\xi_1, \xi_2)) \phi_m(\xi_1, \xi_2) |J^n(\xi_1, \xi_2)| d\xi_1 d\xi_2,$$
  
$$T_{ij}^{nm} = \iint_{S_n} T_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}(\xi_1, \xi_2)) \phi_m(\xi_1, \xi_2) |J^n(\xi_1, \xi_2)| d\xi_1 d\xi_2.$$
(1.21)

Уравнения (1.20), записанные в угловых точках каждого из элементов, дают систему линейных уравнений (СЛАУ) для всех неизвестных компонент смещений в этих точках. Для решения СЛАУ, полученных при использовании относительно небольших сеток (до 2000 элементов) хорошо показал себя прямой метод Гаусса, тогда как сетки большей размерности требуют использования итерационных методов, таких как, например, обобщенный метод минимальных невязок GMRES [158]. Полученные компоненты векторов смещений  $\mathbf{u}^{\pm}$  на границе трещины  $S^{\pm}$  используются вместе с компонентами вектора нормали к ее берегу  $\mathbf{n}^{\pm}$  для расчета раскрытия трещины w

$$w = \mathbf{u}^+ \cdot \mathbf{n}^+ + \mathbf{u}^- \cdot \mathbf{n}^-. \tag{1.22}$$

#### Модификация расчетной области для описания трещин

В работе [4] классический МГЭ был модифицирован для описания расчета НДС материала при наличии в нем трещины. В используемом подходе исходная трещина, представляющая собой бесконечно тонкий разрез, заменяется пропилом конечной ширины  $d_{art}$ , как показано на рисунке 1.6. Модификация области, в которой решаются уравнения упругого равновесия, вносит погрешность в решение, поэтому ширина искусственного пропила  $d_{art}$  должна быть достаточно малой. С другой стороны расстояние между точками коллокации (угловыми точками элементов) на разных берегах трещины  $\S^{\pm}$  должно быть достаточно большие численные ошибки при расчете раскрытия трещины и коэффициентов интенсивности напряжений. Вопрос выбора оптимального значения искусственного параметра  $d_{art}$  был рассмотрен в [8] и не является предметом диссертационного исследования.

Классический МГЭ с модификацией области позволяет использовать непрерывные элементы для аппроксимации граничного интегрального уравнения смещений (1.15), тогда как применение различных версий дуального МГЭ, основанных на вычислении разрыва смещений предполагает использование разрывных элементов. Непрерывные элементы с линейными функциями (1.17) в составе модели трещины ГРП могут быть использованы как для решения задачи деформации породы, так и для решения задачи движения жидкости в трещине, описанной в Главе 3. При этом передача значений раскрытия или давления из одной задачи в другую не требует использования процедур интерполяции, поскольку функции представляются в виде сумм одних и тех же форм-функций. Это позволяет не только снизить количество арифметических операций, но и избежать погрешности интерполяции.

## 1.3.3. Вычисление коэффициентов интенсивности напряжений

Описание разрушения материала и распространения трещины основывается на параметрах НДС в окрестности точек фронта трещины. Это НДС может быть описано с использованием коэффициентов интенсивности напряжений (КИН)  $K_{\rm I}, K_{\rm I\!I}, K_{\rm I\!I}$  [93, 159]. А именно, компоненты вектора смещений в окрестности точек фронта трещины могут быть выражены через КИН и расстояние r от фронта трещины по формуле

$$u_n = \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \left[ K_{\mathrm{I}} \cos\left(\theta/2\right) \left( (1 - 2\nu) + \sin^2\left(\theta/2\right) \right) + K_{\mathrm{II}} \sin\left(\theta/2\right) \left( 2(1 - \nu) + \cos^2\left(\theta/2\right) \right) \right] + \dots,$$

$$u_{b} = \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \left[ K_{\mathrm{I}} \sin(\theta/2) \left( 2(1-\nu) - \cos^{2}(\theta/2) \right) - K_{\mathrm{II}} \cos(\theta/2) \left( (1-2\nu) - \sin^{2}(\theta/2) \right) \right] + \dots,$$
$$u_{t} = \frac{2}{\mu} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} K_{\mathrm{III}} \sin(\theta/2) + \dots,$$
(1.23)

а компоненты тензора напряжений - по формуле [160, 161]

$$\sigma_{n} = \frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\theta/2\right) \left(1 - \sin\left(\theta/2\right) \sin\left(3\theta/2\right)\right) - \frac{K_{\mathrm{II}}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\theta/2\right) \left(2 + \cos\left(\theta/2\right) \cos\left(3\theta/2\right)\right) + \dots,$$

$$\sigma_{nb} = \frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\theta/2\right) \cos\left(\theta/2\right) \cos\left(3\theta/2\right) - \frac{K_{\mathrm{II}}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\theta/2\right) \left(1 - \sin\left(\theta/2\right) \sin\left(3\theta/2\right)\right) + \dots,$$

$$\sigma_{b} = \frac{K_{\mathrm{II}}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\theta/2\right) \left(1 + \sin\left(\theta/2\right) \sin\left(3\theta/2\right)\right) - \frac{K_{\mathrm{II}}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\theta/2\right) \cos\left(\theta/2\right) \cos\left(3\theta/2\right) + \dots,$$

$$\sigma_{nt} = -\frac{K_{\mathrm{II}}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\theta/2\right) + \dots,$$

$$\sigma_{bt} = \frac{K_{\mathrm{II}}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\theta/2\right) + \dots,$$

$$\sigma_{t} = 2\nu \left(\frac{K_{\mathrm{II}}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\theta/2\right) - \frac{K_{\mathrm{II}}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\theta/2\right)\right) + \dots$$
(1.24)

Поскольку НДС материала, определяющее его разрушение, характеризуется КИН, большое количество критериев распространения трещин могут быть записаны в терминах КИН. Поэтому вычисление их значений является важной частью модели распространения трещины.

Значения КИН в точке фронта O могут быть вычислены по компонентам векторов смещений  $\mathbf{u}^{P^+}$  и  $\mathbf{u}^{P^-}$  в точках  $P^+$  и  $P^-$ , лежащих на на расстоянии rот нее на противоположных берегах трещины, с использованием формулы [162]

$$K_{\rm I}^{O} = \frac{E}{8(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} (u_b^{P^+} - u_b^{P^-}),$$
  

$$K_{\rm II}^{O} = \frac{E}{8(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} (u_n^{P^+} - u_n^{P^-}),$$
  

$$K_{\rm III}^{O} = \frac{E}{8(1+\nu)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} (u_t^{P^+} - u_t^{P^-}),$$
(1.25)

в которой  $u_b$ ,  $u_n$  и  $u_t$  есть проекции векторов **u** на координатные оси локальной системы координат, как изображено на рисунке 1.8.



Рисунок 1.8 – Расчет КИН по смещениям в точках на берегах трещины

В диссертационной работе применяется предложенная в [5] модифицированная процедура вычисления КИН, в которой сначала по формуле (1.25) вычисляются их вспомогательные значения  $K^{1,2} = K_{\rm I}^{1,2}, K_{\rm II}^{1,2}, K_{\rm III}^{1,2}$ . Для этого используются две пары точек (1 и 2) в окрестности фронта, изображенные на рисунке 1.9. Затем уточненные значения КИН вычисляются по вспомогательным по формуле

$$K^{O} = K^{2} + \frac{r_{2}(K^{1} - K^{2})}{r_{2} - r_{1}}.$$
(1.26)

Сравнение интерполяционных формул (1.25) и (1.26) и рекомендации по выбору положения точек 1 и 2 для формулы (1.26) приведены в [8].



Рисунок 1.9 – Расположение вспомогательных точек на трещине для двухточечной формулы расчета КИН

# 1.4. Алгоритм одновременного решения уравнений трехмерной модели

Как отмечалось в параграфе 1.2, распространение трещины описывается последовательностью шагов, каждый шаг n соответствует состоянию трещины в некоторый момент времени  $t^n$ . На каждом шаге распространения состояние трещины описывается положением фронтов трещины  $\mathbf{x}_r$ , жидкости  $\mathbf{x}_r$  и двумерными распределениями давления p и раскрытия w вдоль поверхности трещины. Уравнения (1.1), (1.2), (5.17) и критерий распространения (1.3) в объединении дают систему интегральных и дифференциальных уравнений в двумерной области со свободными границами и нелинейной связью между искомыми функциями.

Аналогичная, хотя и более простая система, возникает при разработке плоских трехмерных моделей, поэтому в литературе описано несколько подходов к ее решению и анализу [122, 126, 127, 163, 164]. В частности установлено [126],

что явное решение указанной системы приводит к жесткой зависимости шага по времени  $\Delta t \sim h^3$  от характерного размера сетки h, хотя описаны и попытки ослабить это условие на основе методов Рунге-Кутты [164, 165]. Общей идеей всех подходов является разделение задачи на две: поиск положения фронта (или области, занятой трещиной, если кривая фронта не описывается [122]) на каждом шаге распространения и решение задачи "гидродинамика -упругость", то есть, системы уравнений движения жидкости и деформации породы (1.1), (1.2) для поиска распределений давления и раскрытия при фиксированном положении фронта. Для определения положения фронта обычно используются неявные алгоритмы [77, 122, 126, 166], хотя есть примеры применения и явных алгоритмов для определения положения фронта по уже полученным из решения задачи "гидродинамика-упругость" распределениям [164]. Задача "гидродинамика-упругость" после аппроксимации приводится к системе сильно связанных нелинейных уравнений. Некоторые исследователи переписывают эту систему в виде системы для одного из распределений — давления [6] или раскрытия [126], другие [122, 127] сохраняют оба распределения в системе, чтобы упростить вычисление матрицы производных при использовании метода Ньютона.

В предлагаемой полной трехмерной модели задача поиска решения системы (1.1), (1.2), (5.17), (1.3) существенно сложнее из-за больших требований к вычислительным ресурсам при решении задачи деформации породы и необходимости описывать положение двух свободных границ – фронта жидкости и трещины. Последнее необходимо, так как наличие отставания фронта жидкости на начальном этапе распространения трещины наблюдается в экспериментах [76, 167] и влияние этого отставания на процесс распространения показано аналитически [168, 169]. Поэтому алгоритм решения системы (1.1), (1.2), (5.17), (1.3) в полной трехмерной модели заключается в построении двух итерационных процессов (циклов): внешнего, для определения положения уже двух фронтов – жидкости и трещины  $\mathbf{x}_f$ ,  $\mathbf{x}_r$ , и внутреннего, для решения задачи "гидродинамика-упругость", в которой при фиксированных положениях обоих фронтов определяются распределения давления p и раскрытия w.

Внешний итерационный процесс, схема которого показана на рисунке 1.10, состоит из следующих шагов.

1. Задается положение фронта жидкости из аппроксимации условия (5.17) явным методом Эйлера. Точка фронта, в которой скорость жидкости  $v_{fluid}(\mathbf{x_f^n})$ максимальна, продвигается на фиксированное расстояние  $L_f$ . Изменение положения остальных точек фронта  $\mathbf{x_f^{n+1}}$  считается пропорциональным скорости жидкости на фронте

$$\mathbf{x_f}^{n+1} = \mathbf{x_f}^n + L_f \frac{v_{fluid}(\mathbf{x_f}^n)}{\max_{\mathbf{x_f}^n}(v_{fluid}(\mathbf{x_f}^n))}.$$
 (1.27)

2. Начальное положение точек фронта трещины  $\mathbf{x_r}^k = (\mathbf{x_r}^{n+1})^k, k = 0$  задается в виде суммы некоторого приращения ("лага"  $\vec{\Delta L}$ , на первой итерации произвольного) к положению точек фронта жидкости

$$\mathbf{x_r}^0 = \mathbf{x_f}^{n+1} + \vec{\Delta L}. \tag{1.28}$$

- 3. Для фиксированных положений фронтов жидкости и трещины решается задача "гидродинамика-упругость". Полученное в результате решения раскрытие w используется для расчета КИН  $K_{\mathbf{I},\mathbf{II},\mathbf{III}}(w,\mathbf{x}_r)$  в точках фронта трещины  $\mathbf{x_r}^k$ .
- 4. Если полученные значения КИН не удовлетворяют критерию распространения (1.3), то производится корректировка положения фронта трещины в соответствии с алгоритмом реализации критерия распространения, описанном в Главе 2, после чего шаги 3–4 алгоритма повторяются.

Как видно из описания алгоритма, положение фронта трещины  $\mathbf{x}_{\mathbf{r}}$  определяется неявным образом. Положение фронта жидкости  $\mathbf{x}_{\mathbf{f}}^{n+1}$  шаге по времени n+1 задается пропорциональным значениям скорости  $v_{fluid}(\mathbf{x}_{\mathbf{f}}^n)$ , полученным на предыдущем шаге по времени n, то есть рассчитывается явно. Но следует отметить, что в качестве параметра алгоритма задается не величина шага по времени  $\Delta t$ , а величина максимального приращения фронта  $L_f$ . При этом величина шага по времени  $\Delta t$ , как будет показано ниже, рассчитывается таким образом, чтобы удовлетворить условию Стефана (5.17) на следующем n+1 шаге по времени в точке с наибольшим значением скорости. Этот способ обеспечивает ограниченность величины приращения фронта трещины и неявный расчет его максимального приращения.



Рисунок 1.10 – Блок-схема внешнего цикла алгоритма распространения трещины, использующегося для поиска положений фронтов жидкости и трещины

Для решения задачи "гидродинамика упругость" на каждой итерации *k* внешнего итерационного процесса реализуется внутренний итерационный процесс, схема которого приведена на рисунке 1.11. Этот процесс содержит два вложенных цикла, организованных следующим образом.

- 1. С предыдущего шага по времени задается начальное распределение давления  $p^m = \left( (p^{n+1})^k \right)^m = p^n, m = 0.$
- 2. Для распределения давления  $p^m$  из уравнений упругого равновесия (1.1) рассчитывается раскрытие трещины  $w^m$ .
- 3. Для заданного распределения раскрытия  $w^m$  из задачи движения жидкости (1.2) и условия Стефана (5.17) рассчитываются промежуточное распределение давления  $\tilde{p}$  и величина шага по времени  $\Delta t^{m+1}$ , а именно
  - (a) Начальное значение шага по времени  $\Delta t^s, s = 0$  задается с предыдущего временного слоя  $\Delta t^0 = \Delta t^n$ .
  - (b) Из уравнений движения жидкости (1.2) рассчитывается ее скорость на фронте  $v_{fluid}^s = v_{fluid}(\mathbf{x_f}^{n+1}, w^m, \Delta t^s).$
  - (c) Следующее приближение шага по времени  $\Delta t^{s+1}$  находится методом се-

кущих, примененным к полученному из условия (5.17) уравнению,

$$g(\Delta t) = \Delta t \max_{\mathbf{x}_{\mathbf{f}^{n+1}}} (v_{fluid}(\mathbf{x}_{\mathbf{f}}^{n+1}, w^m, \Delta t)) - L_f = 0.$$
(1.29)

- (d) Шаги (b)–(c) повторяются пока изменение  $|\Delta t^{s+1} \Delta t^s|$  не станет меньше заданной величины. В качестве  $\tilde{p}$  берется давление, полученное на последнем шаге  $p^{s+1}$ .
- 4. Давление на следующей итерации *m* + 1 рассчитывается методом релаксации

$$p^{m+1} = (1 - r_p)p^m + r_p \tilde{p}, \ r_p = r_{max} \min\left(1, \frac{\|p^s\|_C}{\|p^s - \tilde{p}\|_C}\right)$$
(1.30)

- с коррекцией релаксационного параметра, гарантирующей ограниченность изменения давления величиной  $r_{max} \|p^s\|_C$ , где  $r_{max} = 2 \div 5\%$ .
- 5. Шаги (2)–(4) повторяются пока изменение давления не станет меньше заданной величины.



Рисунок 1.11 – Блок-схема внутреннего цикла алгоритма алгоритма распространения трещины для решения задачи "гидродинамика–упругость"

Как уже упоминалось, одной из особенностей алгоритма является задание в качестве параметра величины максимального продвижения фронта жидкости за один шаг  $L_f$  вместо величины шага по времени  $\Delta t$ , что позволяет непосредственно контролировать приращение фронта жидкости и размер прифронтового элемента расчетных сеток. Благодаря (1.29) это исключает появление больших скоростей и градиентов давления в окрестности фронта жидкости на всех итерациях задачи "гидродинамика-упругость", что увеличивает устойчивость итерационного процесса. Кроме того, основные вычислительные затраты в алгоритме приходятся на формирование и решение системы линейных уравнений (1.1). Эта система формируется при каждом перестроении фронта, а следовательно, и расчетной сетки, поэтому минимизация таких перестроений за счет подбора шага по времени для фиксированной формы фронта позволяет уменьшить количество арифметических операций. Итерационный процесс для вычисления шага по времени требует большего количества (5  $\div$  10 в методе секущих) вычислений поля давления из уравнений движения жидкости (1.2), но решение такой задачи требует значительно меньше операций в силу разреженности матрицы системы, получаемой при аппроксимации уравнений движения жидкости МКЭ и ее меньшего (более чем в 3 раза) размера по сравнению с матрицей получаемой из МГЭ для задачи упругости.

## 1.5. Программный комплекс «CADFRAC/2019»

Программный комплекс [25] предназначен для решения задачи распространения трещины от полости в однородном, изотропном, хрупком линейноупругом материале (породе), напряженно-деформированное состояние которого определяется тремя главными напряжениями, приложенными на бесконечном удалении, и давлением, приложенном к берегам трещины. Давление внутри трещины определяется движением закачиваемой в трещину вязкой жидкости сложной реологии.

Исходным языком для программного комплекса является Fortran в стандарте Fortran 2003. Задача деформации породы может решаться последовательно или параллельно. В последнем случае для реализации параллельных вычислений при создании испоняемого файла необходимо подключение библиотека OpenMP.

Программный комплекс предоставляет пользователю возможность решать одну из трех задач: распространение поперечной скважине трещины, распро-

странение продольной трещины, распространение трещины вдоль цилиндрической поверхности.

Комплекс состоит из следующих модулей

- считывания входных параметров и вывода результатов расчета;
- построения расчетной сетки поверхности полости и зародышевой трещины;
- построения расчетной сетки распространяющейся трещины;
- решения задачи деформации породы<sup>3</sup>;
- решения задачи движения жидкости в трещине;
- расчета и корректировки величины приращения трещины;
- итерационного решения задачи "гидродинамика-упругость".

Для запуска вычислений пользователь должен задать параметры задачи во входном файле с расширением . conf и запустить исполняемый файл с ключом, соответствующим названию файла. Параметры задачи в файле \*.conf задаются по одному в строке в виде

problem=radial

fluid=newtonian E = 20.0e+9 # Pa S\_xx = -16.0e+6 # Pa KIc = 3.000e+6 # Pa\*sqrt(m) nsteps = 50

Приведенная часть файла вызывает расчет распространения поперечной трещины (radial), вызванной закачкой в нее ньютоновской жидкости (newtonian) при сжимающих напряжениях  $S_{xx} = 16 \text{ MIa}$ , приложенных на бесконечном удалении по оси x в породе, упругие свойства которой характеризуются модулем Юнга  $E = 20 \Gamma \Pi a$  и трещиностойкостью  $K_{Ic} = 3 \text{ MIa} \sqrt{\text{м}}$ . Порядок задания параметров может быть произвольным, в случае отсутствия параметра выбирается значение по умолчанию.

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Модуль, реализующий метод граничных элементов решения задачи деформации породы, не является личным результатом автора и приводится здесь для полноты описания программного комплекса.

Графическая информация экспортируется в файл с расширением .plt для визуализации численного решения в программном продукте Gnuplot (домашняя страница http://www.gnuplot.info/). Одномерные зависимости основных параметров трещины (давления в скважине, максимального раскрытия, размера по двум направлениям и т.д.) от времени записываются в файл с расширением .plt виде таблицы, пригодной для визуального анализа.

Приведенные в диссертации результаты получены на персональном компьютере (Intel Core i7 CPU 3.4GHz, O3У 16Гб). Возможно выполнение расчетов на кластере НГУ (серверы HP BL2x220c G7, https://nusc.nsu.ru/wiki/doku.php). Характерное время выполнения расчета 20 шагов распространения трещины, достаточных для оценки кривизны ее поверхности, на персональном компьютере составляет 3-4 часа, а 50 — около 20.

Результаты применения комплекса использовались в филиале ООО "Технологической компании Шлюмберже" в г. Новосибирске, что подтверждает акт, приведенный в приложении 1.

# 1.6. Заключение к Главе 1

В настоящей главе

- 1. сформулирована задача описания распространения трещины, вызванной закачкой вязкой жидкости;
- 2. обозначены основные процессы, влияющие на распространение трещины, которые необходимо описывать при моделировании распространения;
- 3. приведен краткий обзор классических моделей трещин гидроразрыва пласта, как наиболее характерного примера рассматриваемых трещин;
- 4. сформулирована концепция трехмерной модели трещины, описывающая движение жидкости в трещине, деформацию и разрушение материала;
- 5. описан метод граничных элементов, используемый для решения уравнений упругого равновесия, предназначенных для расчета деформации материа-

ла<sup>4</sup>;

6. представлен алгоритм совместного решения уравнений упругого равновесия и движения жидкости и уравнений критерия распространения трещины.

Необходимые для замыкания трехмерной модели распространения трещины модель движения жидкости в трещине и неявный критерий распространения трещины будут представлены в Главе 2 и Главе 3.

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>Используемая в модели модификация метода граничных элементов не является личным результатом автора и ее описание приводится для полноты изложения.

# Неявный критерий распространения трещины

# 2.1. Обзор критериев распространения трещин в хрупком упругом материале

#### 2.1.1. Подходы к построению траектории трещины

Критерии, используемые для построения траектории трещины можно разделить на два основных класса: интегральные, которые позволяют построить траекторию целиком, и локальные, в которых построение производится по мере продвижения трещины. Интегральные критерии [170, 171] позволяют найти уравнения траектории трещины на основе предположения, что распространение трещины по этой траектории обеспечивает минимум некоторого функционала, зависящего от НДС материала, как с учетом наличия трещины, так и без него. Эта группа критериев удобна для аналитического исследования задач разрушения, однако в практических приложениях она получила меньшее развитие. Это обусловлено необходимостью вычисления функционалов, содержащих интегралы по большой области материала, содержащей трещину, что увеличивает влияние ошибок округления и квадратурных формул. Кроме того, при распространении трещин, вызванных закачкой вязкой жидкости, нагружение берегов трещины, а следовательно, и НДС материала зависит от процесса распространения и текущей траектории трещины. Таким образом, приращение траектории зависит не только от исходных условий нагружения, но и от формы траектории в рассматриваемый момент.

Поэтому большее распространение получили локальные критерии, в кото-

рых на каждом шаге распространения трещины определяются направление и скорость ее распространения. Первые критерии распространения трещины [159, 172] были сформулированы для плоской прямолинейной трещины, НДС в окрестности кончика которой характеризовалось только растягивающими напряжениями, а направление распространения трещины считалось заданным. В более поздних критериях [173–176] рассматривалась двумерная трещина в приближении плоского деформированного или плоского напряженного состояния, в окрестности кончика которой присутствовали растягивающие и сдвиговые напряжения, показанные на рисунке 2.1., а). От критерия в этом случае требовалось указать не только условие распространения, но и направление роста, задаваемое углом поворота трещины  $\theta$ , как показано на рисунке 2.2. От современных критериев требуется учитывать сдвиговые напряжения, действующие в направлении, касательной к фронту трещины и характеризующиеся третьей модой КИН К<sub>щ</sub> (кручением), как показано на рисунке 2.1, б). В этом случае в каждой точке фронта для задания направления его распространения необходимо задать не только угол поворота  $\theta$ , но и угол кручения  $\psi$ , как показано на рисунке 2.2. Тогда и при численной реализации критерия для задания приращения трещины в каждой точке фронта  $\mathbf{x}_{r\,i}$  нужно задать углы направления  $\theta$ кручения  $\psi$  и величину приращения L, как показано на рисунке 2.2.

Формулировку локальных критериев можно записать в общем виде следующим образом: 1) трещина распространяется тогда, когда некоторая функция  $\Phi$ , зависящая от НДС в окрестности кончика или точки фронта трещины, достигает критического значения, определяемого свойствами материала  $\Phi_c$ 

$$\Phi = \Phi_c; \tag{2.1}$$

2) распространение трещины происходит в направлении, в котором эта величина достигает своего экстремума; 3) приращение трещины в рассматриваемой точке фронта пропорционально величине Ф. Формулировка критерия включает в себя вид функции Ф и вид экстремума (минимум или максимум), который она должна принимать, для того, чтобы трещина распространялась. Ниже будет представлен обзор основных классических критериев распространения и их современные модификации.



Рисунок 2.1 – Распространение трещины в двумерном *a* и трехмерном *б* случаях при сложном нагружении с двумя и тремя модами КИН, соответственно

Прежде чем приступить к обзору следует формализовать данные, которые используются для вычисления функции  $\Phi$ , и параметры, которые необходимо определить для задания направления распространения трещины. В трехмерном случае продвижение фронта в некоторой его точке трещины удобно представлять в сферической системе координат, в которой r – расстояние между точкой фронта  $\mathbf{x}_{ri}$  и точкой материала  $\mathbf{x}$  в ее окрестности. Показанные на рисунке 2.3  $\theta$ ,  $\psi$  – есть углы, задающие поворот и кручение фронта в точке  $\mathbf{x}_{ri}$ . При моделировании распространения трехмерных трещин в пространстве часто [107, 136, 177–180] часто для задания направления распространения фронта трещины используется исключительно угол поворота  $\theta$  без учета моды КИН  $\mathbf{II}$  (см. рисунок 2.1, *a*). НДС в окрестности кончика трещины характеризуется КИН  $K_{\mathbf{I}}, K_{\mathbf{II}}, \mathbf{K}_{\mathbf{II}}$ , поэтому в классических критериях величина  $\Phi$  выражается через эти величины. В классических критериях экстремум функции  $\Phi$  для частных случаев можно найти аналитически, поэтому для таких случаев будут приводится и явный вид углов, задающих направление распространения.



Рисунок 2.2 – Направление распространения фронта трещины, задаваемое углами поворот<br/>а $\theta$ и кручения  $\psi$ 



Рисунок 2.3 – Локальная сферическая система координат у точки фронта трещины

#### 2.1.2. Явные критерии распространения трещины

#### Критерий максимальных растягивающих напряжений

Критерий максимальных растягивающих тангенциальных напряжений (MPH), предложенный в [173] для плоской трещины, распространяющейся под действием смешанных мод  $K_{\rm I}, K_{\rm II}$ , постулирует, что трещина распространяется в направлении максимума тангенциальных напряжений. Компоненты тензора напряжений в окрестности точки фронта трещины в цилиндрической системе координат  $(r, \vartheta)$  выражаются как [181]

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[ \frac{K_{\rm I}}{4} \left( 5\cos\vartheta/2 - \cos3\vartheta/2 \right) \frac{K_{\rm II}}{4} \left( -5\sin\vartheta/2 + 3\cos3\vartheta/2 \right) \right] + T\cos^2\vartheta$$
$$\sigma_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[ \frac{K_{\rm I}}{4} \left( 3\cos\vartheta/2 + \cos3\vartheta/2 \right) \frac{K_{\rm II}}{4} \left( -3\sin\vartheta/2 - 3\sin3\vartheta/2 \right) \right] + T\sin^2\vartheta$$

$$\sigma_{r\vartheta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[ \frac{K_{\rm I}}{4} \left( \sin \vartheta / 2 + \sin \vartheta / 2 \right) \frac{K_{\rm II}}{4} \left( \cos \vartheta / 2 + \cos \vartheta / 2 \right) \right] - T \sin \vartheta \cos \vartheta$$
(2.2)

При асимптотическом разложении напряжений в бесконечно малой окрестности кончика трещины конечное слагаемое T игнорируется. В классической формулировке направление распространения трещины совпадает с направлением, в котором максимальны окружные напряжения  $\sigma_{\vartheta\vartheta}$  (см. рисунок 2.3)

$$\theta : \sigma_{\vartheta\vartheta}(\theta) = \max_{\vartheta} \sigma_{\vartheta\vartheta}(\vartheta).$$
(2.3)

Это позволяет получть следующее соотношение для КИН

$$K_I \sin \theta + K_{II} (3\cos \theta - 1) = 0 \tag{2.4}$$

и явное выразить угол поворота трещины

$$\theta = 2 \arctan\left(\frac{1 - \sqrt{1 + 8\lambda^2}}{4\lambda}\right), \quad \lambda = K_{II}/K_I.$$
(2.5)

Так как окружные компоненты тензрна напряжений  $\sigma_{\vartheta\vartheta}$  расчитываются в точке, бесконечно близкой к точке фронта трещины, значение  $\theta$  (2.5) соответствует максимальному значению коэффициента при  $1/\sqrt{r}$  в разложении их по степеням r (2.2).

#### Обобщение критерия МРН на трехмерный случай – критерий Шольмана

Поскольку критерий максимальных растягивающих напряжений является существенно двумерным, для учета пространственной картины нагружения в работе [182] предложено его обобщение (MPH3D) на случай трехмерной трещины. В работе [183] проведена валидация этого нового, уже трехмерного критерия путем сравнения с результатами экспериментов по разрушению образцов с наклонным пропилом. Растяжение и кручение образцов обеспечивает наличие третьей моды КИН  $K_{III}$  на фронте распространяющейся трещины. Согласно

критерию MPH3D трещина в рассматриваемой точке фронта распространяется в направлении, в котором максимальна не компонента  $\sigma_{\vartheta\vartheta}$ , рассчитанная в цилиндрической системе координат, а специальное главное напряжение  $\sigma I$ . Это напряжение получено как собственное число тензора, полученного из тензора напряжений путем отбрасывания радиальной компоненты, и может быть записано в явном виде [182]

$$\sigma_1'(\theta) = \frac{\sigma_\theta + \sigma_z}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + 4\tau_{\theta z}^2}.$$
(2.6)

где  $\sigma_{\theta}, \sigma_z, \tau_{\theta z}$  выражаются через моды КИН как

$$\sigma_{\theta} = \frac{K_{I}}{4\sqrt{2\pi r}} \left[ 3\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] - \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}} \left[ 3\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right],$$
$$\sigma_{z} = \frac{8\nu}{4\sqrt{2\pi r}} \left[ K_{I}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - K_{II}\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right], \quad \tau_{\theta z} = K_{III}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

В критерии MPH3D в явном виде отсутствует угол кручения  $\psi$ , и кручение фронта может быть описано его помощью за счет того, что в соседних точках фронта критерий может предсказывать различные углы поворота  $\theta$ . При отсутствии сдвиговых напряжений, характеризующейся модой КИН  $K_{III}$ , двумерный MHP 2.1.2 и трехмерный MPH3D критерии совпадают.

#### Упрощение трехмерного критерия МРН – Критерий Ричарда

В работе [144] на основе трехмерного критерия MPH3D 2.1.2 и квадратичной аппроксимации выражения  $\sigma'_1$  были выписаны в явном виде зависимости углов поворота и кручения от КИН

$$\theta_0 = \mp \left[ A \left( \frac{|K_{II}|}{|K_I| + |K_{II}| + |K_{III}|} \right) + B \left( \frac{|K_{II}|}{|K_I| + |K_{II}| + |K_{III}|} \right)^2 \right], \quad (2.7)$$

$$\psi_0 = \mp \left[ C \left( \frac{|K_{III}|}{|K_I| + |K_{II}| + |K_{III}|} \right) + D \left( \frac{|K_{III}|}{|K_I| + |K_{III}| + |K_{III}|} \right)^2 \right].$$
(2.8)

В работе были проведены эксперименты по определению прочности образ-

цов из стали, при сложном нагружении. Наилучшее совпадение прочности было получено при выборе значений параметров, равных  $A = 140^{\circ}$ ,  $B = -70^{\circ}$ ,  $C = 78^{\circ}$ ,  $D = -33^{\circ}$ . Полученные параметры не являются универсальными и могут зависеть как от материала, так и от вида нагружения, что в очередной раз подчеркивает сложность построения критериев разрушения и распространения трещин.

#### Критерий плотности энергии деформации

Предложенный в работе [174] критерий предполагает, что распространение трещины происходит в направлении, обеспечивающем минимальное значение плотности энергии деформации S, и необходимым условием распространения является достижение этой величиной критического значения  $S_{cr}$  для рассматриваемого материала. Для однородного изотропного материала плотность энергии деформации может быть записана через компоненты тензоров напряжений  $\sigma_{ij}$ и деформаций  $\varepsilon_{ij}$  как

$$S = 0.5\sigma_{ij}\varepsilon_{ij},\tag{2.9}$$

что с использованием выражения тензора напряжений через значения КИН в окрестности кончика плоской трещины (2.2), позволяет записать ее значение как явную функцию этих коэффициентов

$$S = a_{11}K_{\mathbf{I}}^2 + 2a_{12}K_{\mathbf{I}}K_{\mathbf{II}} + a_{22}K_{\mathbf{II}}^2 + a_{33}K_{\mathbf{II}}^2.$$
(2.10)

Здесь значения параметров есть

$$a_{11} = \frac{1}{16E'} (3 - 4\nu - \cos\vartheta)(1 + \cos\vartheta)$$
  

$$a_{12} = \frac{1}{16E'} 2\sin\vartheta(\cos\vartheta - (1 - 2\nu))$$
  

$$a_{22} = \frac{1}{16E'} [4(1 - \nu)(1 - \cos\vartheta) + (1 + \cos\vartheta)(3\cos\vartheta - 1)] a_{33} = \frac{1}{4E'}$$
  
(2.11)

В трехмерном случае выражения для коэффициентов  $a_{ij}$  в (2.10) записать в явном виде не удается. Для этого необходимо использовать дополнительные

функции  $\kappa$ ,  $\chi$ , определяемые формой трещины [184]

$$a_{11} = \frac{\kappa + 1}{16E'\chi\kappa^2\cos\theta} \left[ 2(1 - 2\nu) + \frac{\kappa - 1}{\kappa} \right]$$

$$a_{12} = \frac{(\kappa^2 - 1)^{1/2}}{8E'\chi\kappa^2\cos\theta} \left[ \frac{1}{\kappa}(1 - 2\nu) \right]$$

$$a_{22} = \frac{\kappa + 1}{16E'\chi\kappa^2\cos\theta} \left[ 4(1 - \nu)(\kappa - 1) + \frac{1}{\kappa}(\kappa + 1)(1 - \kappa) \right]$$

$$a_{33} = \frac{1}{4E'\chi\kappa\cos\theta}.$$
(2.12)

#### Критерий скорости высвобождения упругой энергии

Критерий скорости высвобождения упругой энергии был предложен Гриффитсом в работе [172]. Согласно ему трещина распространяется тогда, когда интенсивность освобождающейся энергии G при распространении в этом направлении достигает критического значения энергии разрушения для рассматриваемого материала

$$G(\theta, t + \Delta t) = G_c, \qquad (2.13)$$

которое выражается через критическое значение материала  $K_{\mathrm{I}c}$  по формуле

$$G_c = \frac{1 - \nu^2}{E} K_{\mathrm{I}c}^2.$$

Сформулированный для прямолинейной трещины критерий был обобщен на трехмерные трещины, подверженные смешанному нагружению, и используется современными исследователями [30, 175, 176, 185, 186] не только для формулировки условия распространения трещины, но и для выбора направления ее распространения  $\theta^*$ , соответствующего максимальному значению энергии G. В трехмерном случае при наличии всех трех мод КИН скорость высвобождения энергии при продвижении трещины равна

$$G(\theta, t + \Delta t) = \frac{1 - \nu^2}{E} \left( K_{\mathrm{I}}^2(\theta, t + \Delta t) + K_{\mathrm{II}}^2(\theta, t + \Delta t) \right) + \frac{1 + \nu}{E} K_{\mathrm{III}}^2(\theta, t + \Delta t).$$

$$(2.14)$$

Здесь t — момент времени до распространения трещины (и изменения ее тра-

ектории),  $\Delta t$  — интервал времени, за который фронт трещины проходит от текущего положения к следующему,  $\theta^*$  — угол поворота трещины.

Следует отметить, что критерий (2.13) сформулирован в неявном виде, так как выражение (2.14) содержит параметры НДС, которые могут быть получены только после распространения трещины. Это делает величину G сложной для расчета, и затрудняет применение критерия. В работе [187] была предложена модификация критерия, названная критерием скорости высвобождения потенциальной энергии. В этой работе в предположении о малости приращения трещины и неизменности КИН в процессе роста трещины получено явное приближенное выражение для величины G, рассчитываемой по значениям КИН в момент t перед началом распространения трещины

$$\begin{aligned} G(\theta) &= \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\frac{1-\nu^2}{E} \cdot \\ &\cdot \left[K_{\rm I}^2(\theta,t)(1+\cos\theta) - 4K_{\rm I}(\theta,t)K_{\rm II}(\theta,t)\sin\theta + K_{\rm II}^2(\theta,t)(5-3\cos\theta)\right] + \\ &+ \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\frac{1+\nu}{E}K_{\rm III}^2(\theta,t). \end{aligned}$$

Предложенная модификация была верифицирована на задаче о кручении цилиндрического образца с круговым пропилом [187]. Было показано, что предсказанный на основе этого критерия угол распространения трещины хорошо совпадает с наблюдаемым в эксперименте при различных сочетаниях первой и третьей мод КИН, что делает критерий скорости высвобождения упругой энергии более удобным для применения в практических приложениях.

#### Критерий максимальных окружных деформаций

Основными параметрами, характеризующими разрушение, согласно работам Гриффитса и Ирвина являются энергия и напряжения, поэтому в большинстве критериев разрушения, в том числе и описанных выше функция Ф зависит от этих величин. Однако, функцию Ф можно выписать в зависимости и от деформаций. Так, в работе [188] показано, что распространение трещин в бетоне можно описывать с помощью критерия, основанного на компонентах тензора деформации. Предполагается, что разрушение происходит, когда некоторая скалярная функция тензора деформаций достигает предельного значения. В работах [189–191], этот критерий был применен для решения двумерных задач о разрушении образцов с трещиной и эллиптической полостью. Следует отметить, что НДС в первых двух работах было получено на основе аналитического решения, поэтому чувствительность предсказанных траекторий трещин к точности его расчета осталась за рамками исследования. Другой особенностью критерия является, что анализируется тензор деформации, рассчитанный на некотором малом (но конечном) расстоянии от кончика трещины, а не его асимптотическое разложение в окрестности кончика, как в критериях описанных в §§ 2.1.2–2.1.2. Аналогичный подход использовался в уже упомянутом в § 2.1.2 критерии [192, 193].

# 2.1.3. Современные направления развития классических критериев распространения трещин

Классические критерии, приведенные в предыдущих пунктах хорошо описывают условия начала распространения трещины и направление распространения плоских трещин в двумерной постановке. Однако современные задачи механики разрушения требуют устранения ограничений, присущих этим критериям. Среди направлений развития критериев хрупкого разрушения следует выделить следующие.

- Описание механизмов разрушения фронта при превалирующем влиянии сдвиговой моды КИН  $K_{III}$ .
- Учет свойств и особенностей материалов при описании разрушения и распространения трещин.
- Разработка критериев, способных описывать распространение трещин в условиях смешанного нагружения при наличии всех ненулевых мод K<sub>I</sub>, K<sub>II</sub>, K<sub>II</sub>.

Поведение фронта трещины при смешанном нагружении с модами  $K_{\rm I}, K_{\rm III}$  остается, как утверждают авторы [147], одной из последних нерешенных загадок механики разрушения. Несмотря на большое количество экспериментальных и теоретических работ пока не выработано единого мнения по поводу критерия, достоверно описывающего разрушения фронта трещины. Разрушение фронта трещины, то есть переход от непрерывного распространения одной большой трещины к образованию двух семейств разнонаправленных мелких трещин происходит при увеличении отношения первой и третьей мод КИН  $K_{III}/K_{I}$ . Этот эффект наблюдался в экспериментах по разрушению образцов из различных видов полимеров, [147, 194], плексигласа [195], алюминия [196], гипса и сыра [197]. Вопрос изучался и аналитически и с помощью численных методов [195, 198, 198–201].

Развитие критериев распространения трещин при разрушении фронта продолжается в направлении уточнения условий, при которых происходит такое разрушение. Так, в работах [199, 202] численно, путем внесения возмущений в геометрию трещины, а в работе [201] – аналитически показано, что непрерывное распространение одной трещины неустойчиво, при отношении  $K_{\rm II}/K_{\rm I} > 0.5$ . Так как на берега трещины, распространение которой вызвано закачкой в нее вязкой жидкости, всегда действует существенное давление, то можно ожидать, что значения  $K_{\rm II}$  не будут определяющими на большом участке распространения. Поэтому для описания распространения трещины ГРП возможно использование критериев, учитывающих сдвиговые напряжения, соответствующих моде КИН  $K_{\rm II}$ , но не способных описывать разрушение самого фронта. Кроме того, ряд исследователей [147, 203–205] указывают, что после распада фронта происходит его восстановление. Причем длина, необходимая для восстановления разрушенного фронта, не превосходит нескольких сантиметров, после чего наблюдается распространение одной трещины.

Существенным недостатком большинства классических критериев является нечувствительность предсказанного с их помощью направления распространения к параметрам материала. В то же время многочисленные эксперименты показывают, что направление распространения зависит от свойств разрушаемых материалов. В работе [206] на примере плоской двумерной трещины в образце, находящемся под действием только сжимающих или сжимающих и растягивающих напряжений, показано, что траектории трещин, полученные в образцах из стали, алюминия или титана различаются. В то же время, траектории, рассчитанные по критериям максимальных растягивающих напряжений или плотности энергии деформации, одинаковы. Хорошо известна задача о распространении плоской двумерной трещины, напряженное состояние в окрестности кончика которой характеризуется единственной ненулевой модой КИН К<sub>І</sub>. Критерии максимальных растягивающих напряжений, скорости высвобождения упругой энергии и плотности энергии деформации (последний при  $\nu = 0.3$ ) предсказывают значение угла излома трещины равное  $\theta = 70.5^{\circ}, 83^{\circ}, 75^{\circ},$  соответственно, вне зависимости от параметров материала. В то же время это значение в различных материалах различно. В работе [207] аналогичный вывод о недостаточном учете классическими критериями свойств материалов вывод был сделан для двумерной трещины, находящейся под воздействием смешанных мод КИН  $K_{\rm I}, K_{\rm III}$ . Там же показано, что отношения критических значений  $K_{\rm III} c/K_{\rm I} c$ , необходимых для начала распространения трещины в различных видах стали, алюминия и полиметилметакрилате существенно (более чем в 6 раз) отличаются. Те же отношения, рассчитанные по критериям максимальных растягивающих напряжений, плотности энергии деформации и скорости высвобождения упругой энергии, не зависят или слабо зависят от свойств материалов и отличаются между собой. Поэтому критерий, используемый при описании распространения трещины должен формулироваться с использованием дополнительных параметров материала, а не только его прочностных характеристик (трещиностойкости, критического значения энергии и т.д.).

Для, например, критерия максимальных растягивающих напряжений отсутсвие чувствительности к свойствам материала это обусловлено тем, что функция  $\Phi$  рассчитывается по значениям КИН, которые в свою очередь определяются по тензору напряжений в окрестности кончика трещины. Так как при постановке задачи в напряжениях (а также при задании только нулевых граничных условий для смещений) тензор напряжений и КИН не зависят от упругих параметров материала, значит и угол поворота, рассчитанный по формуле (2.5) будет одинаков для всех материалов. Этим свойством обладает большинство использующихся в настоящее время критериев [207]. Исключением из классических критериев является только критерий плотности энергии деформации (ссылка), в котором направление распространения зависит от коэффициента Пуассона  $\nu$ , однако для материалов с одним и тем же значением этого параметра критерий предскажет одно и то же направление распространения.

Учет свойств материала может объяснятся разными прочностями материала

к сдвиговым и растягивающим напряжениям [208] и нелокальностью процесса разрушения. Последнее означает, что процесс хрупкого разрушения происходит в малой, но не бесконечно малой окрестности кончика трещины и только КИН, определяемых лишь асимптотическим поведением НДС недостаточно для его описания.

Учет изменения НДС в окрестности кончика трещины происходит при описании пластического разрушения, но используется и в критериях хрупкого разрушения путем осреднения таких параметров НДС как компоненты тензора напряжений или плотности энергии деформации по некоторому отрезку [192, 193] или объему в окрестности трещины [209, 210]. В настоящее время более популярен метод описания НДС в окрестности кончика трещины, состоящий в учете конечного слагаемого T в разложении компонент тензора напряжений (2.2), которое отбрасывается в классических критериях [211–216]. Построенные на основе учета конечного слагаемого обобщения критериев максимальных растягивающих напряжений и плотности энергии деформации применялись для решения задач о распространении двумерных трещин и показали лучшее согласование момента начала распространения трещины и угла ее поворота с результатами экспериментов, чем исходные критерии [206, 217]. Этот же подход позволяет учесть влияние на траекторию трещины размера исследуемого образца [218]. Следует, однако, отметить, что в настоящее время не проведено обобщения этого подхода на случай распространения трехмерных трещин под действием всех трех мод, что связано как со сложностью описания НДС в окрестности точек фронта, так и увеличением количества параметров, которые должны подбираться из экспериментальных данных.

#### 2.1.4. Неявные критерии распространения трещины

Классический способ определения направления трещины, который используется в описанных в предыдущих пунктах критериях, заключается в анализе напряженного состояния, предшествующего началу распространения трещины. В предположении о гладкости траектории трещины и достаточно малых шагах, используемых для описания этой траектории можно заключить, что использование параметров НДС с предыдущего шага приводит лишь к внесению некоторой погрешности, пропорциональной длине шага (аналогично методу Эйлера для обыкновенных дифференциальных уравнений). Однако, начало распространения трещины в экспериментах происходит с предварительно созданной трещины (пропила или инициатора другого вида), а при проведении гидроразрыва — с зародышевой трещины. Плоскость предварительной трещины в экспериментах и зародышевой трещины при проведении гидроразрыва может сильно отличаться от плоскости предпочтительного распространения развитой трещины, что приводит к излому траектории [75]. В этом случае параметры НДС до и после начала распространения трещины могут существенно различаться. В этом случае необходимо анализировать НДС после распространения трещины. Подобная идея содержится, например, в формулировке критерия высвобождения упругой энергии 2.1.2, где присутствует энергия, которая выделяется при распространении трещины по выбранному направлению. Расчет этой энергии достаточно сложен в явном виде [217] и требует знания направления распространения. В предположении о плоской трещине и малости ее приращения в [176] выписаны значения КИН для фронта трещины, траектория которой терпит излом. Это позволило вычислить плотность энергии деформации в одноименном критерии [176] и скорость высвобождения энергии разрушения в работе [217].

Однако предположение о малости приращения трещины может не выполняться при описании распространения трещины при наличии третьей моды КИН  $K_{III}$ . Распространение трещины при таком нагружении может сопровождаться разрушением фронта трещины и образованием фасок. Схема такого разрушения показана на схеме 2.4, заимствованной из в работы [205]. Хотя на некотором расстоянии от фронта исходной трещины образуется новый непрерывный фронт и поверхность трещины становится гладкой, модель, предполагающая его непрерывность, не применима в окрестности фронта зародышевой трещины. Поэтому при разрушении фронта не следует использовать критерии, которые основаны на представлении параметров НДС, полученных в предположении о малости приращения трещины после излома ее траектории.

Другим недостатком описанных критериев является их локальность. Все критерии сформулированы для одной рассматриваемой точки фронта, и направление распространения в ней рассчитывается без учета соседних. В то же



Рисунок 2.4 – Схема трещины, распространяющейся при смешанной нагрузке с модо<br/>й $K_{\rm III}$ в образце с зародышевой трещиной

время в экспериментах, описывающих распространение трещины при наличии третьей моды [194, 197, 198, 219] видно, что фронт трещины поворачивается целиком, и углы поворота в его соседних точках фронта связаны. Следовательно, в критерии описывающем распространение фронта трещины, углы поворота и кручения должны рассчитываться одновременно для всех точек фронта, то есть критерий должен быть глобальным.

Примером неявных глобальных критериев могут служить критерии MVG (maximal value of G) и MVK (maximal value of K), предложенные в работе [200]. В первом из них MVG, постулируется, что фронт трещины после первого шага ее распространения должен быть таким, чтобы рассчитанное по всем его точкам среднее значение скорости высвобождения энергии разрушения (2.14) было максимальным. Во втором критерии MVK при тех же условиях максимизируется среднее значение первой моды КИН  $K_{\rm I}$  вдоль фронта трещины. Отличительными особенностями предложенных критериев являются неявность, так как анализируется НДС после распространения трещины, и глобальность, так как вместо независимого предсказания положений точек фронта производится его поиск как некоторой кривой, удовлетворяющей заданным условиям.

Следует отметить, что расчет НДС в окрестности фронта трещины после ее распространения рассчитывалось на основе аналитического решения задачи, в которой фронт плоской трещины приращивался с кручением на заданный угол на заданную величину, одинаковую для всех точек фронта. Это аналитическое решение основано на двух предположениях: 1) фронт является прямой линией повернутой относительно фронта зародышевой трещины на угол  $\psi_m$  вокруг оси

67

распространения трещины, и 2) продвижение всех точек фронта одинаково  $\delta_c$ . В работах [205, 220] были аналитически получены зависимости значений КИН  $K_i = K_i(\psi_m, \delta_c), i = I, II, III$  от угла поворота трещины  $\psi_m$  и длины ее приращения  $\delta_c$ . Там же на основе аппроксимации результатов экспериментов было предложено выражение для угла кручения как функции КИН  $\psi = \psi(K_I, K_{II}, K_{III})$ . Третьим условием, замыкающим систему нелинейных уравнений для  $\delta_c, \psi_m, \psi$ , было условие максимизации некоторой функции КИН (скорости высвобождения энергии в МVG и первой моды КИН в МVК) вдоль фронта. Такой подход ограничивает практическую применимость критериев, так как в общем случае фронт трещины может не отличаться от прямой линии, а приращение быть различным в разных точках фронта, тем не менее, он позволяет провести валидацию неявных критериев путем сравнения с экспериментальными данными.

Для валидации авторами [200] был выбран описанный [194] эксперимент, в котором образец из полиметилметакрилата с наклонной зародышевой трещиной подвергается трехточечному изгибу, как показано на рисунке 2.5. Угол наклона зародышевого пропила достигал 45°, что создавало на фронте трещины напряжения, характеризующиеся отношением мод  $K_{III}/K_{I} = 0.5$ , достаточным для демонстрации кручения фронта. Ниже будет проведено сравнение результатов, полученных на основе описанных критериев, предложенного в диссертационной работе неявного глобального критерия и экспериментальных данных.



Рисунок 2.5 – Образец с наклонной зародышевой трещиной, подверженный трехточечному изгибу

Рассмотрение фронта после приращения трещины позволяет моделировать

распространение трещин с негладкой траекторией, использование конечного приращения трещины вместо бесконечно малого — применять критерий для описания распространения после объединения фасок, а рассмотрение осредненных по фронту КИН и энергии — описывать поведение фронта в целом, то есть учитывать взаимное влияние точек фронта друг на друга. Совокупность этих приемов позволяет адекватно описывать распространение трещины при нагружении, включающем наличие третьей моды КИН вызывающей разрушение и кручение фронта.

# 2.2. Неявный глобальный критерий распространения трещины

Несмотря на множество исследований, посвященных задаче распространения трехмерных трещин, научное сообщество пока не пришло к общему мнению относительно того, какой из критериев предсказывает направление распространения трещины при сложном нагружении, вызывающем наличие всех трех мод КИН, наиболее адекватно [144]. Поэтому автор не ставит целью предложить универсальный критерий, ограничиваясь лишь критерием, способным учитывать особенности распространения трещин, вызванных закачкой вязкой жидкости, в горной породе.

#### 2.2.1. Основные предположения и допущения

Основными особенностями НДС материала, вызванного распространением трещины, нагруженной давлением вязкой жидкости являются следующие.

- Нагружение берегов трещины давлением обеспечивает положительное значение первой моды КИН. Это позволяет исключить из рассмотрения трещины, распространяющиеся при нагружении только сдвиговыми модами K<sub>II</sub>, K<sub>III</sub>.
- 2. Распространение трещины в породе, сжатой внешними напряжениями, требует притока энергии не только для разрушения породы, но и для преодоления сжимающих напряжений. Этот приток энергии обеспечивается закач-

кой жидкости и поэтому ограничен. Увеличение скорости распространения трещины приводит к увеличению отставания фронта жидкости от фронта трещины и снижению напряжений в окрестности кончика, что замедляет распространение трещины. Таким образом, распространение трещины всегда устойчиво, что позволяет рассматривать только критическое распространение трещины, при котором, например, условие  $K_{\rm I} = K_{\rm Ic}$  выполняется на протяжении всего процесса и исключить распространение сверхкритическое.

 Распространение трещины происходит при сложном нагружении при наличии всех трех мод КИН. При этом НДС в окрестности различных точек фронта различаются, что требует определения направления и величины приращения трещины в каждой точке фронта.

Кроме допущений, обусловленных особенностями исследуемой задачи распространения трещин в горных породах, ниже приведены допущения, использованные при разработке критерия, которые вызваны ограниченностью вычислительных мощностей, недостаточной изученностью задачи разрушения горных пород, сложностью реализации, либо могут быть устранены без существенного изменения концепции критерия.

Фронт трещины считается непрерывной кривой, и его разрушение с образованием множества трещин, фасок не учитывается. Разрушение фронта трещины наблюдается при ее распространении при больших значениях третьей моды КИН. Этот эффект исследовался как на основе экспериментов по разрушению образцов из различных видов полимеров [147, 194], плексигласа [195], алюминия [196], гипса и сыра [197], так и аналитически [195, 200, 201]. Во всех указанных работах отмечается, что длина, необходимая для восстановления разрушенного фронта, не превосходит нескольких сантиметров, после чего наблюдается распространение одной трещины. Хотя исследование механизмов и условий образования фасок представляет важный научный интерес, в случае распространения трещин в массивах породы описание этого эффекта вряд ли способно повысить точность моделирования трещин, так как характерный размер неоднородности материала – горной породы – сопоставим с размером фасок, а характерная длина трещины при

моделировании начального этапа ее распространения составляет десятки сантиметров, что превосходит размер фасок на два порядка.

- 2. Учет свойств материала, влияющих на направление распространения, может быть приближенно учтен с помощью дополнительного параметра, который должен определяться на основе экспериментального исследования этого материала. В настоящий момент затруднительно сформулировать и обосновать связь такого параметра с другими характеристиками материала (трещиностойкостью, модулем Юнга, прочностью на растяжения, размером неоднородностей и т.д.), поэтому для определения значений такого параметра ра необходимы отдельные эксперименты. Так как предлагаемый неявный критерий предназначен для описания трещин в горных породах, характеристики которых меняются в ограниченных интервалах, можно ожидать, что калибровка критерия на нефте-газосодержащих породах или материалах с близкими к ним свойствами (бетон, мрамор, известняк и т.д.) позволит позволит предсказывать траектории трещин с достаточной точностью.
- 3. Предполагается, что трещина распространяется квазистатически, и влияние скорости распространения на трещиностойкость не учитывается. Эксперименты на хрупком полиэфирном материале [221] показывают, что критическое значение КИН  $K_{\rm I}$ , при котором происходит разрушение, зависит от скорости нагружения и распространения трещины. Этот эффект при наличии экспериментально обоснованных для горных пород зависимостей критической моды  $K_{\rm I}$  от скорости распространения трещины может быть легко учтен в предлагаемом неявном критерии, так как скорость распространения иззвестна на каждом шаге распространения.

## 2.2.2. Формулировка неявного критерия выбора величины приращения трещины

Критерий определения величины приращения в точке фронта базируется на критерии скорости высвобождения энергии разрушения, описанном в § 2.1.2. В каждой точке фронта трещины требуется выполнение условия (2.13). Выполнение этого условия достигается путем выбора расстояния между фронтам трещины и фронтом жидкости  $L_{lag,i} = |\mathbf{x}_{f,i} - \mathbf{x}_{r,i}|$  в каждой точке фронта трещины  $\mathbf{x}_{r,i}$ .

Поиск расстояния  $L_{lag,i}$  осуществляется с помощью итерационного метода, который наглядно может быть продемонстрирован для случая отсутствия смешанных мод  $K_{II}$ ,  $K_{III}$ . В этом случае требование (2.13) переписывается в каждой точке фронта *i* в виде

$$K_{\mathrm{I},i}(L_{lag,i}) = K_{\mathrm{I}c} \tag{2.15}$$

На каждой итерации <br/> s предполагается, что значение КИН $K_{\rm I}$ линейно связано <br/>с длиной отставания

$$\tilde{K}_{\rm I}^{s+1} - K_{\rm I}^s = \frac{1}{\varpi_I} (L_{lag,i}^{s+1} - L_{lag,i}^s), \qquad (2.16)$$

где  $\mathfrak{Z}_I$  – некоторый коэффициент пропорциональности. Условие  $\tilde{K_I}^{s+1} = K_{Ic}$  позволяет получить значение длины отставания фронта

$$L_{lag,i}^{s+1} = L_{lag,i}^s + \mathfrak{E}_I (K_{Ic} - K_I^s).$$
(2.17)

Так как условие (2.16) выполняется приближенно, то достижение точного равенства требует нескольких итераций.

Значение коэффициента пропорциональности может как задаваться постоянным  $\mathfrak{W}_I = \mathfrak{W}_I^0$ , так и уточняться на итерациях по предыдущим рассчитанным значениям  $K_{\mathrm{I}}$ ,  $L_{lag,i}$  с использованием разностной производной и релаксационного параметра  $\gamma$ 

$$\mathbf{w}_{I}^{s} = (1 - \gamma_{I})\mathbf{w}_{I}^{s-1} + \gamma_{I} \frac{L_{lag,i}^{s} - L_{lag,i}^{s-1}}{K_{I}^{s} - K_{I}^{s-1}}.$$
(2.18)

При наличии смешанных мод КИН  $K_{II}$ ,  $K_{III}$  вместо значения первой моды КИН  $K_{I}$  в формулах (2.17), (2.18) используется значение энергии разрушения G (2.13).
# 2.2.3. Формулировка неявного критерия выбора направления роста трещины

Принцип локальной симметрии, сформулированный в работе [204], постулирует, что распространение трещины происходит в том направлении, в котором реализуется трещина нормального отрыва, то есть единственной ненулевой модой КИН остается первая  $K_{\rm I}$ 

$$K_{\mathbb{I}}(\theta(l)) = 0, \quad K_{\mathbb{I}}(\psi(l)) = 0.$$
 (2.19)

Эти соотношения формулируются в виде двух условий на два параметра  $(\theta, \psi)$ . При их аппроксимации в  $N_f$  точках фронта получится  $2N_f$  условий для  $2N_f$ переменных  $\theta_i$  и  $\psi_i$ ,  $i = 1, ..., N_f$ . Это, как можно было бы ожидать, должно позволять определять углы  $\theta, \psi$  в каждой точке фронта.

Однако углы  $\theta$  и  $\psi$  не являются независимыми, как видно из рисунка 2.2. Формула, определяющая эту связь записывается из геометрических соотношений в виде:

$$\tan \psi = \frac{L(\sin(\theta + \Delta\theta) - \sin\theta)}{\Delta l}.$$
(2.20)

Переход к пределу при  $\psi, \theta, \Delta \theta, \Delta l \to 0$  позволяет из (2.20) получить зависимость угла кручения  $\psi$  от производной угла поворота  $\theta$  по координате l вдоль фронта

$$\psi(l) = \frac{L(l)\Delta\theta}{\Delta l} = L(l)\frac{\partial\theta}{\partial l}(\theta(l)).$$
(2.21)

Таким образом, третья мода КИН  $K_{\mathrm{III}}$  является функцией угла поворота  $\theta$ 

$$K_{\mathbb{II}}(\psi(l)) = \overline{K}_{\mathbb{II}}(\theta(l)), \qquad (2.22)$$

что превращает два условия (2.19), записанные для двух параметров, в два условия на один параметр $\theta$ 

$$K_{\mathbb{I}}(\theta(l)) = 0, \quad \overline{K}_{\mathbb{I}}(\theta(l)) = 0.$$
(2.23)

При аппроксимации выражения (2.23) превратятся в  $2N_f$  на  $N_f$  параметров. Так как количество условий больше, чем количество параметров, то одновременное их выполнение в общем случае в каждой точке фронта Г невозможно.

Выполнение условий (2.19) в предлагаемом критерии рассматривается в смысле минимизации функционала, объединяющего моды КИН  $K_{II}$  и  $K_{II}$  с весовым коэффициентом  $\beta$  и определяемого через интеграл по всей длине фронта на новом шаге распространения трещины  $t + \Delta t$ :

$$F(t + \Delta t, \theta(l)) = \int_{\Gamma} (1 - \beta) K_{\mathbb{I}}^2(t + \Delta t, \theta(l)) + \beta \overline{K}_{\mathbb{I}}^2(t + \Delta t, \theta(l)) dl.$$
(2.24)

Угол поворота трещины в критерии распространения при смешанном трехмерном нагружении определяется как угол  $\theta^*(l)$ , при котором функционал F принимает минимальное значение

$$F(t + \Delta t, \theta^*(l)) = \min_{\theta(l)} F(t + \Delta t, \theta(l)).$$
(2.25)

### 2.2.4. Алгоритм выполнения неявных критериев распространения

Оптимизационная задача минимизации функционала (2.25) решается итерационно, для чего на каждой итерации предполагается, что каждый из КИН линейно зависит от соответствующего угла

$$\tilde{K}_{\mathbb{I}}^{\tilde{s}+1} - K_{\mathbb{I}}^{s} = \frac{1}{\mathfrak{B}_{II}} (\theta i^{s+1} - \theta i^{s+1}), \quad \tilde{K}_{\mathbb{II}}^{\tilde{s}+1} - K_{\mathbb{II}}^{s} = \frac{1}{\mathfrak{B}_{III}} (\psi i^{s+1} - \psi i^{s+1}). \quad (2.26)$$

В результате значение функционала на следующей итерации приближенно выражается через его значение на текущей и содержит явные выражения для изменений этих углов

$$F^{s+1} = (1-\beta) \sum_{j\in\Gamma_N} \left( K^s_{\mathrm{I\hspace{-.1em}I}\,j} + \frac{1}{\mathrm{a}_{\mathrm{I\hspace{-.1em}I\hspace{-.1em}I}}} \Delta^s \theta_j \right)^2 + \beta \sum_{j\in\Gamma_N} \left( \overline{K}^s_{\mathrm{I\hspace{-.1em}I\hspace{-.1em}I}\,j} + \frac{L_j}{\mathrm{a}_{\mathrm{I\hspace{-.1em}I\hspace{-.1em}I}}} \frac{\Delta^s \theta_{j+1} - \Delta^s \theta_j}{l_{j+1} - l_j} \right)^2, \qquad (2.27)$$

где  $\Delta^s \theta_j = \theta_j^{s+1} - \theta_j^s$  и s — номер итерации,  $\Gamma_N$  — множество индексов точек, принадлежащих фронту.

На каждой итерации s + 1 углы  $\theta_j^{s+1}$  рассчитываются как точки минимума функционала (2.27) путем решения СЛАУ:

$$\frac{\partial F^{s+1}}{\partial \theta_j^{s+1}} = 0, \quad j \in \Gamma_N.$$
(2.28)

Следует отметить, что предположение о малости приращения трещины, при котором получено соотношение (2.21), требуется только для обоснования невозможности выполнения исходных условий (2.19) и для получения соотношений, по которым рассчитывается распределение угла поворота  $\theta$  на следующей итерации (2.27). Значение функционала и распределение угла поворота вдоль фронта получаются для конечных значений величины приращения трещины без предположения об их малости.

Сформулированный функционал содержит численный параметр  $\beta$ , смысл котрого можно пояснить путем сравнения неявного критерия с явными. Так, значение  $\beta = 0$  приводит к минимизации функционала, зависящего только от  $K_{\rm II}$ , что в случае плоской трещины совпадает с условием критерия максимальных растягивающих напряжений [173]. Значение  $\beta = 0.5$  позволяет получить критерий плотности энергии деформации. Значение  $\beta = 1/(1-\nu)$  соответствует минимизации слагаемых, содержащих сдвиговые моды  $K_{\rm II}$ ,  $K_{\rm III}$  в выражении (2.14) в критерии высвобождения упругой энергии. Однако для решения практических задач параметр  $\beta$  должен выбираться на основе экспериментальной информации. Ниже приведены результаты сравнения предсказания критерия с результатами эксериментов по распространению трещин.

# 2.3. Валидация и верификация неявного глобального критерия и выбор весового параметра

Неявный глобальный критерий выбора направления распространения трещины, описанный в § 2.2.3 содержит весовой параметр  $\beta$ , значение которого необходимо выбирать на основе сопоставления с экспериментальными данными. Для валидации критерия и выбора значения параметра были выбраны две серии экспериментов в которых трещина распространяется под действием нагрузки, обеспечивающей значительное влияние третьей моды КИН: распространение наклонной трещины в брусе, подверженном трехточечному изгибу [194] и распространение трещины в диске с повернутой относительно линий нагружения трещиной [222, 223].

### 2.3.1. Задача о наклонной трещине в брусе

#### Описание эксперимента

Постановка задачи описана в работах [194, 200] и представлена на рисунке 2.5. Размеры, используемые в эксперименте и численном моделировании, имели следующие значения: длина бруса  $L_c = 0.260$  м, расстояние между точками нагружения  $2L_e = 0.24$  м, толщина t = 0.01 м, ширина W = 0.06 м, длина зародышевой трещины  $L_f = 0.02 \,\mathrm{m}$ , угол наклона зародышевой трещины  $\gamma = 45^\circ$ . Модуль Юнга  $E = 2.8 \Gamma \Pi a$  и коэффициент Пуассона  $\nu = 0.38$  были заданы равными параметрам полиметилметакрилата, выбранного при проведении эксперимента для возможности наблюдения за процессом распространения трещины. Отличие численной и экспериментальной постановки заключалось в способе нагружения и условии распространения трещины. Так как при хрупком нагружении, распространение трещины происходит с большой скоростью, что практически исключает возможность наблюдения за процессом ее распространения, при проведении эксперимента использовалось циклическое нагружение с силой, исключающей хрупкое разрушение. Поэтому на кончике трещины поддерживалось значение первой моды КИН меньшей критического значения. При проведении численного моделирования на каждом шаге распространения выполнялось условие хрупкого разрушения, задаваемое критерием высвобождения упругой энергии. При этом нагрузка в точках нагружения на каждом шаге распространения подбиралась такой, чтобы обеспечить выполнение этого условия и не была равна задаваемой в эксперименте. Поскольку целью сравнения была валидация критерия выбора направления, который может быть переписан с использованием лишь отношений КИН  $K_{II}/K_{I}$ ,  $K_{II}/K_{I}$  в инвариантном относительно абсолютного значения мод виде, то абсолютные значения приложенных к образцу нагрузок не влияют на форму трещины, полученную при

численном моделировании.

Расчетная сетка содержала N = 1695 узлов по длине образца  $N_{Lc} = 18$ , по толщине  $N_T = 10$ , вдоль длины трещины  $N_L = 3$  и на остаточной части ширины  $N_R = 4$ . Шаг приращения трещины составлял  $\Delta L = 0.001$  м то есть 1/60 от ширины образца.

### Первый шаг распространения трещины

Так как наиболее заметное изменение направления распространения трещины происходит из-за излома ее на первом шаге, анализ распределений углов отклонения на этом шаге рассматривается отдельно от построения всей траектории. В сравнении принимают участие четыре критерия.

- 1. Классический двумерный критерий максимальных растягивающих напряжений [173], описанный в 2.1.2 (MPH);
- 2. Критерий Шольмана (2.6) [182], являющийся обобщением критерия максимальных растягивающих напряжений на трехмерный случай и описанный выше (MPH3D);
- 3. Неявный критерий минимизирующий значение первой моды КИН, предложенный в [200] (MVK);
- 4. Описанный в § 2.2.3 глобальный неявный критерий.

Для явных критериев направление распространения определяется по КИН, рассчитанным для зародышевой трещины. Неявный критерий использует КИН, рассчитанные после того, как трещина продвинется на один шаг.

Для того, чтобы оценить влияние погрешности расчета КИН и отделить его от влияния погрешности самих критериев на рисунке 2.6, слева показаны распределения нормализованных смешанных мод КИН, то есть отношений  $K_{II}/K_I$ и  $K_{III}/K_I$ , приведенные в [200] и рассчитанные численно в настоящей работе. Основное отличие наблюдается в окрестности свободной поверхности, однако в авторами [200] указано, что в этой области значения КИН были рассчитаны ими с большой погрешностью и должны игнорироваться. Во внутренней области образца распределения КИН, рассчитанные разными методами, показывают хорошее совпадение. На рисунке 2.6, справа приведены распределения



Рисунок 2.6 – Слева: Распределения нормализованных смешанных мод КИН вдоль фронта зародышевой трещины рассчитанные с численно (сплошная линия) и аналитически в [200] (пунктир): 2 –  $K_{II}/K_I$ ; 3 –  $K_{III}/K_I$ .; Справа: Распределения угла поворота трещины на первом шаге распространения полученные с помощью различных критериев: 0 – Эксперимент; 1 – МРН; 2 – МРН3D; 3 – MVG; 4 – глобальный неявный критерий со значением  $\beta = 0.5$ . Сплошной линией обозначены распределения, полученные в настоящей работе, пунктирной – полученные в работе [200]

угла поворота на первом шаге распространения трещины, рассчитанные по различным критериям распространения в настоящей работе и в [200]. Как видно из рисунка, неявный глобальный критерий позволяет получить распределение угла поворота, более близкое к наблюдаемому в эксперименте, чем другие рассмотренные критерии. Это распределение достигнуто при значении весового параметра  $\beta = 0.5$  и длине приращения трещины за шаг  $L_f^0 = 1$  мм. При других значениях весового параметра распределение угла поворота трещины на первом шаге показывает худшее совпадение с результатами эксперимента, как видно из рисунка 2.7, где приведены распределения угла поворота, полученные при различных значениях весового параметра и при том же значении длины приращения.

Рассчитанные численно значения КИН, которые используются в неявном глобальном критерии, отличаются от аналитически полученных в [200] значений КИН, которые используются в остальных критериях, поэтому можно допустить, что отличия в полученных по разным критериям распределениях угла поворота обуславливаются различной точностью расчета КИН. Чтобы исключить это допущение, на рисунке 2.6, справа приведены распределения угла поворота трещины, полученные по критериям МРН и МРН3D с использованием как аналитически так и численно полученных КИН. В первом случае распре-

78



Рисунок 2.7 – Распределения угла поворота трещины на первом шаге распространения, полученные с помощью глобального неявного критерия при  $L_f^0 = 1$  мм: 0 – Эксперимент;  $1 - \beta = 0$ ;  $2 - \beta = 0.25$ ;  $3 - \beta = 0.5$ ;  $4 - \beta = 0.75$ 

деления взяты из работы [200], во втором — реализованы автором. Видно, что погрешность расчета  $K_{III}$  привела к погрешности в расчете угла поворота при расчете его по критерию MHP3D [182]. Угол поворота, рассчитанный по критерию MPH2D [173] с использованием только второй моды КИН  $K_{II}$  одинаков в настоящей работе и в [200] везде за исключением приграничной области, где аналитические методы [200] не работают. Следует отметить, что неявный критерий при значении  $\beta = 0.5$  дает распределение угла поворота, наиболее близкое к эксперименту среди всех рассмотренных критериев.

На примере рассматриваемой задачи можно показать скорость сходимости итерационного алгоритма реализации критерия. На рисунке 2.8 показано распределение отклонения угла поворота от распределения, получившегося после сходимости процесса  $\Delta \theta^s(l) = \theta^{n+1,s}(l) - \theta^{n+1}(l)$ , а на рисунке 2.9 — распределения нормализованных мод КИН  $K_{II}/K_{I}$ ,  $K_{III}/K_{I}$  полученные на первых пяти итерациях для значений  $\beta = 0.5$ . Видно, что распределение угла поворота практически перестает (< 1°) меняться после первых пяти итераций, а изменения КИН составляют менее 5%. Можно заключить, что 5-10 итераций достаточно для получения распределений угла поворота трещины.



Рисунок 2.8 – Отклонение угла поворота на первых итерациях от полученного при сходимости итераций  $\Delta \theta^s(l) = \theta^{n+1,s}(l) - \theta^{n+1}(l)$ . Номер кривой совпадает с номером итерации



Рисунок 2.9 – Распределения нормализованных мод КИН  $K_{II}/K_{I}$  (слева),  $K_{III}/K_{I}$  (справа) полученные на первых пяти итерациях для значений  $\beta = 0.5$ 

#### Траектория трещины

На рисунке 2.10 приведены формы трещины, полученные в эксперименте [194], с помощью расчета методом конечных элементов ADAPCRACK3D [200]. Видно, что формы трещины на всех рисунках похожи, но трехмерные изображения не позволяют провести аккуратное сравнение. Для упрощения анализа чувствительности формы трещины к параметрам модели трещины ниже в качестве "траектории" выбрана линия пересечения трещины с поверхностью образца, показанная на рисунке 2.10 жирной линией.

На рисунке 2.11 приведены траектории трещины, полученные при значении весового параметра  $\beta = 0.5$  при различных значениях величины приращения  $L_f^0$ . Уменьшение величины приращения трещины  $L_f^0$  от 2мм до 0.5мм позволяет оценить величину погрешности, вносимую дискретным описанием траектории. Дальнейшее (до 0.025мм) уменьшение величины приращения не приводит к ви-



Рисунок 2.10 – Вид трещины в эксперименте [194] (слева) в расчете методом конечных элементов [200] (в центре) и в настоящем расчете (справа)

зуально различимому изменению траектории, поэтому на рисунке не приводится. Наблюдается сходимость к некой "идеальной" траектории при уменьшении величины приращения трещины  $L_f^0$ . При других значениях весового параметра  $\beta$  наблюдается сходимость к той же траектории, но более медленная. Для демонстрации этого на рисунке 2.11 приведена траектория (4), полученная при параметрах  $\beta = 0, L_f^0 = 2$  мм, которая отличается от "идеальной" траектории больше чем полученная при том же приращении и при  $\beta = 0.5$  (кривая 1).



Рисунок 2.11 — Траектории трещины, полученные при различных значениях весового параметра<br/>  $\beta=0.5$ и величины приращения трещины  $L_{f}^{0}:$ <br/>1 —  $\beta=0.5, L_{f}^{0}=2$ мм; 2 —  $\beta=0.5, L_{f}^{0}=1$ мм; 3 —<br/>  $\beta=0.5, L_{f}^{0}=0.5$ мм; 4 —  $\beta=0, L_{f}^{0}=2$ мм

### 2.3.2. Задача о наклонной трещине в диске

В работе [223] описан эксперимент по трехточечному изгибу диска с наклоненной диаметральной трещиной. Схема эксперимента и расчетная сетка представлены на рисунке 2.12. Размеры, используемые в эксперименте и численном моделировании, имели следующие значения: радиус диска R = 0.075м, толщина B = 0.03м, расстояние между точками нагружения 2S = 0.138м, длина зародышевой трещины a = 0.015м, угол наклона зародышевой трещины  $\gamma = 30^{\circ}$ . Модуль Юнга E = 281МПа и коэффициент Пуассона  $\nu = 0.302$  были заданы равными параметрам полиуретана соответствующей плотности  $\rho = 300$ кг/м<sup>3</sup>.

#### Первый шаг распространения трещины

На рисунке 2.13 приведены распределения угла поворота на первом шаге распространения трещины, рассчитанные по различным критериям. Критерии максимальных растягивающих напряжений (MPH) (2.4) и его обобщение на трехмерный случай (MPH3D) (2.6) дают близкие к эксперименту значения, однако не отражают линейность распределения угла поворота. Для неявного критерия представлены результаты при значениях весового параметра  $\beta = 0$  и  $\beta = 0.5$  при длине приращения  $L_f^0 = 1$  мм. Распределения, полученные по неявному критерию для обоих параметров, достаточно близки к экспериментальным данным, однако значение  $\beta = 0$  при  $L_f^0 = 1$  мм дает более хороший результат.

На рисунке 2.14 представлено сравнение распределений угла поворота трещины для различных длин приращения при значениях весового параметра



Рисунок 2.12 – Образец с наклонной зародышевой трещиной, подверженный трехточечному изгибу, (слева) и расчетная сетка (справа)



Рисунок 2.13 – Распределения угла поворота трещины на первом шаге распространения, полученные с помощью различных критериев: 0 – Эксперимент, 1 – глобальный неявный критерий со значением  $\beta=0.5,\,2$ – глобальный неявный критерий со значением  $\beta=0,\,3$ – MPH, 4 – MPH3D

 $\beta = 0$  и  $\beta = 0.5$ . Видно, что длина приращения влияет на угол поворота трещины — увеличение этого параметра приводит к уменьшению угла поворота. При  $L_f^0 > 3$ мм изменение распределения угла поворота становится незначительным.



Рисунок 2.14 – Сравнение распределений угла поворота трещины с наблюдаемыми в эксперименте (0 – Эксперимент) и полученных для неявного критерия при различных приращениях: 1 –  $L_f^0 = 0.5$ мм, 2 –  $L_f^0 = 1$ мм, 3 –  $L_f^0 = 3$ мм, 5 –  $L_f^0 = 5$ мм для (a)  $\beta = 0$ и (b)  $\beta = 0.5$ 

### Траектория трещины

На рисунке 2.15 представлены поверхности трещины, полученные в эксперименте (слева) и предсказанные с помощью неявного критерия (справа). Видно, что формы трещины на этих рисунках похожи, но для более аккуратного их сравнения удобно рассмотреть линии пересечения трещины и образующей диска, которые ниже будут называться траекторией.



Рисунок 2.15 – Вид трещины в эксперименте [223] (слева) и настоящем расчете (справа)

На рисунке 2.16 приведены траектории трещины, полученные в эксперименте, и в численном расчете с использованием предложенного неявного критерия при двух значениях весового параметра  $\beta$  и длине приращения  $L_f^0 = 3$ мм. Можно видеть, что на первых двух шагах все три траектории практически совпадают, однако далее траектория при  $\beta = 0.5$  отклоняется от изначального направления. Траектория, полученная при  $\beta = 0$ , располагается достаточно близко к траектории трещины из эксперимента на всем интервале ее распространения, что делает значение  $\beta = 0$  в глобальном неявном критерии наилучшим для рассматриваемого материала.

Отличие в значениях весового параметра, обеспечивающих наилучшее согласование с экспериментальными данными в рассмотренных экспериментах, говорит о том, что весовой параметр не является универсальным и зависит от рассматриваемого материала.



Рисунок 2.16 – Траектории трещин: 0 – Эксперимент, 1 – глобальный неявный критерий со значение<br/>м $\beta=0.5,\,2$ – глобальный неявный критерий со значение<br/>м $\beta=0$ 

# 2.4. Описание квазистатического распространения трещины с помощью неявного глобального критерия

Предложенные выше критерии выбора направления и величины приращения трещины применены для решения задачи о распространении трещины, нагруженной постоянным давлением, в материале, к которому приложены внешние анизотропные напряжения. Выбранная задача с одной стороны геометрически подобна задаче о распространении трещины гидроразрыва, что позволяет продемонстрировать работу критерия в условиях, приближенных к условиям в практических приложениях, и показать важность правильного выбора весового параметра. С другой стороны в задаче не учитывается изменение давления в скважине, вызванное течением жидкости, что уменьшает количество параметров, влияющих на распространение трещины.



Рисунок 2.17 – Схема задачи о распространении поперечной скважине трещины в материале, нагруженном на бесконечности анизотропными напряжениями с тензором  $\sigma^{\infty}$ 

Рассматриваются скважина радиуса  $R_w$ , повернутая вокруг оси Oz на угол

 $\alpha$  от оси Oy, и ортогональная ей плоская зародышевая трещина радиуса R, которые схематично показаны на рисунке 2.17. Скважина и трещина находятся в материале, к которому на бесконечном удалении приложены главные напряжения  $\sigma_x^{\infty}$ ,  $\sigma_y^{\infty}$ ,  $\sigma_z^{\infty}$ , направленные вдоль соответствующих координатных линий. Давление p, приложенное стенкам скважины и берегам трещины, вызывает распространение последней и ее искривление при выходе в плоскость, ортогональную минимальному сжимающему напряжению в материале.

При моделировании это давление на каждом шаге распространения подбирается таким образом, чтобы критерий распространения трещины выполнялся в каждой точке фронта. Это же условие определяет форму фронта трещины на каждом шаге распространения.



Рисунок 2.18 – Изометрические проекции трещины, полученные при квазистатическом распространении:  $1 - \sigma_y^{\infty} = 8 \text{ M}\Pi a$  (слева);  $2 - \sigma_y^{\infty} = 15.9 \text{ M}\Pi a$  (справа); траектории трещины в сечении z = 0 (снизу)

Для проведения вычислительного эксперимента, демонстрирующего применение неявного критерия, были выбраны следующие параметры задачи:  $E = 20 \,\Gamma\Pi a, \, \nu = 0.2, \, K_{Ic} = 3 \,\mathrm{M}\Pi a \,\sqrt{\mathrm{m}}, \, R = 1 \,\mathrm{m}, \, R_{\mathrm{w}} = 0.5 \,\mathrm{m}, \, \alpha = 30^{\circ}, \, \sigma_x^{\infty} = -16 \,\mathrm{M}\Pi a, \, \sigma_z^{\infty} = -16 \,\mathrm{M}\Pi a$ . Напряжение  $\sigma_y^{\infty}$ , действующее вдоль оси Oy, принимало одно из двух значений:  $\sigma_y^{\infty}$ :  $-8 \,\mathrm{M}\Pi a \,\mathrm{u} - 15.9 \,\mathrm{M}\Pi a$ . Каждое из выбранных значений вызывает переориентацию трещины в плоскость xz, так как является минимальным сжимающим напряжением, однако расстояния, требуемые для переориентации, различаются, что можно видеть на рисунке 2.18, на котором изображены формы трещин и их траектории в сечении z = 0. Рисунок 2.18 демонстрирует зависимость формы трещины от анизотропности внешних напряжений и способность используемого критерия эту зависимость описывать.

Другой вычислительный эксперимент был проведен для демонстрации поведения третьей моды КИН  $K_{\rm III}$  во время распространения трещины и ее влияния на его форму. В выше описанной задаче угол наклона зародышевой трещины был увеличен до  $\alpha = 50^{\circ}$ , а анизотропность напряжений  $\sigma_x^{\infty}/\sigma_y^{\infty}$ , заданных на бесконечном удалении — до 1.6, что обеспечивается значениями  $\sigma_x^{\infty} = -16$  МПа,  $\sigma_y^{\infty} = -10$  МПа,  $\sigma_z^{\infty} = -16$  МПа.

На рисунке 2.19 приведена форма трещины, полученная при использовании весового коэффициента  $\beta = 0.5$  в неявном глобальном критерии, а на рисунке 2.20 — траектории трещин, полученные при различных значениях весового параметра. Можно заключить, что значение весового параметра влияет на скорость выхода трещины в плоскость, ортогональную минимальным напряжениям, и его значение не может выбираться произвольно.

Для того, чтобы оценить, насколько выполняется критерий (2.19) на различных шагах распространения трещины, на рисунке 2.21 приведены распределения трех мод КИН вдоль ее фронта, полученные при  $\beta = 0.5$ . Как видно из рисунка, первая и вторая моды  $K_{\rm I}$ ,  $K_{\rm II}$  достаточно быстро принимают требуемые критерием значения — отклонение от  $K_{\rm Ic}$  и нуля, соответственно, уже



Рисунок 2.19 – Форма трещины, полученная при значении весового параметр<br/>а $\beta=0.5$ 



Рисунок 2.20 – Траектории трещин, полученные при различных значениях весового параметра  $\beta$ 

на десятом шаге не превосходят  $0.03K_{Ic}$ . В то же время значение моды КИН  $K_{III}$  уменьшается значительно медленнее: на втором шаге ее значение сравнимо с  $K_{Ic}$ , а на десятом — порядка  $0.4K_{Ic}$ . Это говорит, о том, что форма фронта трещины не может обеспечить одновременное выполнение условий, заложенных в принципе локальной симметрии, на первых шагах распространения, тем не менее, при увеличении размера трещины фронт трещины становится почти плоской кривой (см. рисунок 2.19), и значения мод КИН  $K_{II}$ ,  $K_{III}$  уменьшаются (см. рисунок 2.21).

Наименьшая скорость стремления к нулю наблюдается у моды КИН  $K_{III}$ , что видно из рисунка 2.22, где приведены распределения мод КИН  $K_{III}$  и  $K_{III}$ вдоль ее фронта, полученные при различных значениях весового параметра  $\beta$ на 30-м шаге распространения трещины, на котором радиус трещины примерно в 3.5 раз больше радиуса зародышевой трещины. Видно, что нулевое значение моды  $K_{II}$  достигается при использовании нулевого значения весового параметра  $\beta$ , тогда как значение моды  $K_{III}$  при этом далеко от нулевого, что говорит, о том, что фронт близок, но отличается от плоской кривой. Меньшее значение моды КИН  $K_{III}$  можно получить, учитывая ее значение в функционале (2.24), который минимизируется в неявном глобальном критерии, за счет увеличения весового параметра  $\beta$ , при этом увеличение значений моды КИН  $K_{II}$  в абсолютных величинах незначительно (см. рис. 2.22).

В рамках описанной постановки невозможно получить перьеобразную форму фронта и зигзагообразное распределение мод  $K_{III}$  вдоль фронта трещины. Но, поскольку размер фасок при разрушении фронта много меньше характерных размеров трещины, как указано в § 2.2.1, то это упрощение не влияет на качество предсказания поведения трещины. Как и указано в [198], [224], по-



Рисунок 2.21 – Распределения значений мод КИН  $K_{\rm I}, K_{\rm II}, K_{\rm II}$  вдоль фронта трещины, рассчитанные при значении параметра  $\beta = 0.5$  на различных шагах распространения: шаг 2 (1); шаг 10 (2); шаг 30 (3)

сле разрушения фронта и его нового формирования на некотором расстоянии получается гладкое распределение  $K_{\rm III}$  вдоль линии фронта.



Рисунок 2.22 – Распределения значений мод КИН  $K_{\rm I}$ ,  $K_{\rm II}$ ,  $K_{\rm II}$  вдоль фронта трещины, на 30-м шаге распространения при различных значениях весового параметра:  $\beta = 0$  (1);  $\beta = 0.5$  (2);  $\beta = 0.8$  (3)

### 2.5. Заключение по Главе 2

В настоящей главе предложены неявные глобальные критерии выбора направления и величины приращения фронта трещины, позволяющие описывать распространение трещины при сложном смешанном нагружении со значительным влиянием третьей моды КИН  $K_{III}$ .

Критерий определения величины приращения трещины является неявной формулировкой классического критерия высвобождения упругой энергии. Особенностью предложенной модификации является непосредственный расчет энергии разрушения по параметрам НДС, получаемым после, а не до распространения трещины. Хотя в дифференциальной постановке такие формулировки эквивалентны, предложенный критерий, в отличие от классического, учитывает изменение НДС, вызванное изломом траектории трещины и позволяет более точно предсказывать направление распространения после излома. Критерий выбора направления распространения базируется на принципе локальной симметрии [204], согласно которому трещина распространяется в направлении, обеспечивающем нулевые значения сдвиговых мод КИН  $K_{II}$ ,  $K_{III}$ . Поскольку в общем трехмерном случае одновременное выполнение этих условий невозможно, согласно предложенному критерию выбирается направление, минимизирующее интегральную функцию  $\mathbf{F}(K_{II}, K_{III})$ , рассчитываемую по всему фронту трещины после ее продвижения и зависящую от сдвиговых мод КИН. Ключевыми особенностями критерия являются:

- Неявность минимизируемая функция **F**(K<sup>n+1</sup><sub>II</sub>, K<sup>n+1</sup><sub>III</sub>) рассчитывается по параметрам, характеризующим НДС материала после продвижения трещины;
- 2. Глобальность функция  $\mathbf{F}(K_{\mathbb{I}}, K_{\mathbb{I}})$  включает в себя параметры НДС во всех точках фронта, и положение всех точек фронта рассчитывается одновременно, что позволяет учитывать влияние их друг на друга.
- Конечность приращения трещины при формулировке критерия не используется предположение о бесконечной малости приращения трещины, которое, как можно заключить на основе экспериментальных данных, не выполняется при разрушении фронта, вызванного значительным влиянием третьей моды КИН К<sub>щ</sub>.

На основе многочисленных расчетов показано, что итерационный процесс в неявном алгоритме реализации критериев сходится. При этом количество итераций, необходимых для достижения сошедшегося решения, не превосходит 20, а в большинстве случаев — 10.

Проведена верификация и валидация предложенных критерии выбора направления и величины приращения трещины путем сравнения с результатами экспериментов и расчетами других авторов. Показано, что неявный глобальный критерий позволяет предсказать распределение угла поворота трещины вдоль фронта лучше, чем рассмотренные явные и неявные критерии.

# Модели течения жидкости в трещине

# 3.1. Объединение моделей слабосжимаемой и неньютоновской жидкостей

# 3.1.1. Уравнения течения жидкости в трехмерном пространстве

Движение слабосжимаемой неньютоновской жидкости в приближении Гершеля–Балкли в трехмерном пространстве описывается уравнением неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{q}) = 0 \tag{3.1}$$

и уравнением импульса

$$\rho \frac{D \,\mathbf{u}}{Dt} = \nabla \cdot \mathbb{P},\tag{3.2}$$

в которых  $\mathbf{u} = \{u_i\}$  — вектор скорости жидкости,  $\rho$  — плотность, а  $\mathbb{P} = \{p_{ij}\}$ тензор напряжений, состоящий из двух слагаемых

$$\mathbb{P} = -p\mathbb{E} + \mathbb{T}.$$
(3.3)

В (3.3) *р* — есть давление, связанное в случае слабосжимаемой жидкости с плотностью уравнением состояния

$$\rho = \rho(p), \tag{3.4}$$

 $\mathbb{E} = \text{diag}(1, 1, 1)$  – единичный тензор,  $\mathbb{T} = \{\tau_{ij}\}$  – тензор вязких напряжений. Последний выражается через тензор скоростей деформаций  $\mathbb{D} = \{D_{ij}\}$  по формуле

$$\mathbb{T} = 2\eta \mathbb{D}, \quad \text{при} \quad T \ge \tau_0, \quad \mathbb{D} = 0, \quad \text{при} \quad T < \tau_0, \tag{3.5}$$

в которой

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$
(3.6)

есть компоненты тензора скоростей деформации, за  $\eta$  обозначена вязкость жидкости, зависящая в модели Гершеля–Балкли от тензора скоростей деформаций

$$\eta(D) = KD^{n-1} + \frac{\tau_0}{D},$$
(3.7)

а за T и D обозначены вторые инварианты тензоров:

$$T = \sqrt{\frac{1}{2}\tau_{ij}\tau_{ij}}, \quad D = \sqrt{\frac{1}{2}D_{ij}D_{ij}}.$$
(3.8)

В (3.7) введены параметры, характеризующие реологию жидкости: консистенция жидкости K, показатель степени n и критическое сдвиговое напряжение  $\tau_0$ .

Следует отметить, что поскольку модель движения жидкости разрабатывается для использования в составе модели начального этапа распространения трещины гидроразрыва, то предполагается что давление в скважине достаточно для постоянного, без остановок, распространения трещины и движения в ней жидкости. В терминах используемой модели жидкости это означает выполнение условия  $T \ge \tau_0$  в (3.5).

Уравнения (3.1) и (3.2) можно переписать в координатном виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0, \qquad (3.9)$$

$$\rho\left[\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j}\right] = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\eta(D)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right],\qquad(3.10)$$

который далее будет использоваться.

# 3.1.2. Двумерные уравнения течения неньютоновской жидкости в трещине

#### Связь градиента давления с потоком жидкости

Поскольку раскрытие трещины гидроразрыва w на порядки меньше ее продольных размеров, локально можно рассматривать движение жидкости в ней как течение Пуазейля между двумя параллельными пластинами. Это позволяет пренебречь в (3.10) производными компонент скорости  $\partial u_i/\partial x_1$ ,  $\partial u_i/\partial x_2$  по продольным направлениям  $x_1, x_2$  вдоль трещины по сравнению с производными  $\partial u_i/\partial x_3$  по поперечному направлению  $x_3$ . Также можно пренебречь поперечной компонентой скорости ( $u_3 \approx 0$ ) по сравнению с продольными и изменением давления в поперечном направлении. Следующими упрощающими предположениями являются отбрасывание производных по времени t в уравнении импульса (3.10) и учет нестационарности процесса только за счет уравнения неразрывности (3.1) через соотношение между раскрытием трещины w и поперечной скоростью  $u_3$ 

$$\frac{\partial w}{\partial t} = u_3. \tag{3.11}$$

С учетом сделанных допущений уравнения (3.1), (3.10) упрощаются следующим образом. Отбрасывание малых членов в (3.10) для i = 1, 2 дает выражения

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left[ \eta(D) \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right], \quad \frac{\partial p}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left[ \eta(D) \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right], \quad (3.12)$$

которые после интегрирования по  $x_3$  превращается в соотношения

$$\eta(D)\frac{\partial u_i}{\partial x_3} = \frac{\partial p}{\partial x_i} + A_i, \qquad (3.13)$$

с некоторыми константами  $A_i$ . Уравнение (3.10) для i = 3 просто вырождается.

Для простоты изложения далее рассматривается сначала ньютоновская жидкость, в которой вязкость не зависит от тензора скоростей деформаций  $\eta(D) = \mu = \text{const}$ , предельное напряжение сдвига отсутствует  $\tau_0 = 0$ , что поз-

воляет легко проинтегрировать (3.13)

$$u_i = \frac{x_3^2}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x_i} + A_i \frac{x_3}{2\mu} + B_i.$$
(3.14)

Граничные условия при  $x_3 = 0$  и  $x_3 = w$ 

$$u_i = 0, i = 1, 2, \tag{3.15}$$

позволяют рассчитать константы  $A_i$  в (3.14) и получить связь скорости и про-изводных давления

$$u_i = -x_3 \frac{w - x_3}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x_i}.$$
(3.16)

Вычисление потоков путем интегрирования скорости по ширине трещины

$$q_i = \int_0^w u_i dx_3, \quad i = 1, 2, \tag{3.17}$$

и соотношение (3.16) позволяют связать потоки  $q_i$  с производными давления в виде выражения

$$q_i = -\frac{w^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x_i},\tag{3.18}$$

которое и используется далее в качестве как уравнение импульса.

При рассмотрении жидкости Гершеля–Балкли элементарная для ньютоновской жидкости процедура получения связи потоков и давления становится несколько сложнее. Кажущаяся вязкость  $\eta(D)$  зависит от компонент скорости  $u_i$ , зависящих, в свою очередь, от  $x_3$ . Для упрощения выражения для вязкости (3.7) удобно ввести систему координат, в которой координатное направление  $x_1$ совпадает с вектором скорости **u**, тогда

$$\eta(D) = K \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)^{n-1} + \tau_0 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)^{-1}.$$
(3.19)

При использовании полученного выражения для вязкости (3.19) интегрирование (3.13) с учетом граничных условий (3.15) и виде изображенного на рисунке 3.1 профиля скорости при течении жидкости Гершеля–Балкли дает соотно-



Рисунок 3.1 – Схематичное изображение профиля скорости при течении жидкости Гершеля–Балкли в плоском канале постоянного сечения

шение

$$u_1 = -\frac{nK^{-1/n}}{(n+1)} \left(\frac{\partial p}{\partial x_1}\right)^{1/n} \left( (0.5w - z_\tau)^{1+1/n} - u_d(x_3)^{1+1/n} \right), \tag{3.20}$$

в котором

$$u_d(x_3) = \begin{cases} 0.5w - x_3 - z_{\tau}, & x_3 < 0.5w - z_{\tau}, \\ 0, & 0.5w - z_{\tau} \le x_3 \le 0.5w + z_{\tau}, \\ x_3 - 0.5w - z_{\tau}, & x_3 > 0.5w + z_{\tau}, \end{cases}$$
$$z_{\tau} = \tau_0 \left| \frac{\partial p}{\partial x_1} \right|^{-1}. \tag{3.21}$$

После получения с помощью аналогичных рассуждений выражения для компоненты скорости  $u_2$  можно записать выражение для потоков вида

$$q_i = -\frac{n}{(4n+2)(2K)^{1/n}} w^{2+1/n} \left(\frac{\partial p}{\partial x_i}\right)^{1/n} \times \left(1 - \frac{2z_\tau}{w}\right)^{1+1/n} \left(1 + \frac{2z_\tau}{w} \frac{n}{n+1}\right).$$
(3.22)

Для получения выражения, аналогичного (3.18), удобно вести кажущуюся

вязкость  $\eta_a$  и выделить явным образом производную давления  $\partial p/\partial x_i$  в первой степени

$$q_i = -\frac{w^3}{12\eta_a} \frac{\partial p}{\partial x_i}.$$
(3.23)

Кажущаяся вязкость  $\eta_a$  может быть записана как через производные давления  $\partial p/\partial x_i$ , то есть являться функцией давления  $\eta_a = \eta_p(\partial p/\partial x_i)$ , так и через потоки (3.17)  $\eta_a = \eta_q(q_i)$ .

В первом случае выражение для вязкости выглядит следующим образом

$$\eta_{a} = \eta_{p} = \frac{(2K)^{1/n}(2n+1)}{6n} \left| \frac{\partial p}{\partial x_{1}} \right|^{(n-1)/n} w^{(n-1)/n} + \frac{(4n+2)2^{1/n}\tau_{0}}{3n \left| \frac{\partial p}{\partial x_{1}} \right|^{1/n} w^{1/n}}.$$
(3.24)

В произвольной системе координат в выражении для кажущейся вязкости (3.24) вместо производной  $\partial p/\partial x_i$  используется инвариантный относительно смены системы координат градиент давления  $\eta_a = \eta_p(\nabla p)$ 

$$\eta_a = \eta_p(\nabla p) = \frac{(2K)^{1/n}(2n+1)}{6n} (w|\nabla p|)^{(n-1)/n} + \frac{(4n+2)2^{1/n}\tau_0}{3n(w|\nabla p|)^{1/n}}, \quad (3.25)$$

где

$$|\nabla p| = \left( \left( \frac{\partial p}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial p}{\partial x_2} \right)^2 \right)^{1/2}.$$
 (3.26)

Выражение кажущейся вязкости через потоки  $\eta_q(q)$  можно получить просуммировав по i = 1, 2 квадраты выражений (3.22) и выразив модуль градиента давления  $|\nabla p|$  модуль вектора потока  $|\mathbf{q}| = (q_1^2 + q_2^2)^{1/2}$ 

$$\eta_q = \frac{K}{6} \left(\frac{4n+2}{n}\right)^n \left(\frac{w^2}{|\mathbf{q}|}\right)^{1-n} + \frac{2n+1}{3(n+1)} \frac{\tau_0 w^2}{|\mathbf{q}|}.$$
(3.27)

Полученная формула (3.23) удобна для использования в практических расчетах при описании движения неньютоновской жидкости в приближении Гершеля–Балкли в канале постоянного сечения. Например, для жидкости со степенным законом ( $\tau_0 \equiv 0$ ) зависимость (3.23) с кажущейся вязкостью (3.27) использовалась в [136, 225], а с вязкостью (3.25) – в [43, 180].

### Уравнение движения несжимаемой неньютоновской жидкости

При рассмотрении несжимаемой жидкости уравнения (3.1) и (3.9) записываются в виде

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$
 или  $\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0.$  (3.28)

Интегрирование уравнения (3.28) по координате  $x_3$  с учетом выражений (3.11) и (3.17) дает уравнение для раскрытия трещины w и потоков  $q_i$ 

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial q_2}{\partial x_2} = 0.$$
(3.29)

Исключение потоков из уравнения неразрывности (3.29) на основе их представления (3.23) позволяет получить уравнение, содержащее только давление и раскрытие трещины

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{w^3}{12\eta_a} \frac{\partial p}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{w^3}{12\eta_a} \frac{\partial p}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial w}{\partial t}, \tag{3.30}$$

которое коротко записывается в виде

$$\nabla(a\nabla p) = f, \tag{3.31}$$

где

$$a = \frac{w^3}{12\eta_a}, \quad f = \frac{\partial w}{\partial t}.$$
(3.32)

Движение и неньютоновской и ньютоновской жидкостей в трещине, раскрытие которой меняется во времени, описывается уравнениями (5.11), (5.12) с выражением для кажущейся вязкости (3.25) и постоянным ее значением  $\eta_a = \mu$ , соответственно.

### Уравнение движения слабожимаемой ньютоновской жидкости

Для получения аналогичного (3.29) уравнения неразрывности в случае слабосжимаемой жидкости необходимо проинтегрировать (3.9) по ширине канала (раскрытию трещины) с учетом (3.11), (3.17), что даст выражение

$$\frac{\partial \rho w}{\partial t} + \frac{\partial \rho q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho q_2}{\partial x_2} = 0, \qquad (3.33)$$

которое в операторной записи же выглядит как

$$\frac{\partial w\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{q}) = 0. \tag{3.34}$$

Так как в случае сжимаемой жидкости плотность не является заданным параметром, то для замыкания системы уравнений требуется добавить дополнительное уравнение. Условие именно *слабой* сжимаемости позволяет рассматривать жидкость как однопараметрическую среду и задавать линейную связь между давлением и плотностью с некоторым постоянным коэффициентом сжимаемости  $C_0$ 

$$\rho(p) = \rho_0 (1 + C_0 p). \tag{3.35}$$

После подстановки (3.35) в уравнение неразрывности (3.34) последнее переписывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ w(1+C_0 p) \right] + \nabla \cdot \left[ (1+C_0 p) \mathbf{q} \right] = 0.$$
(3.36)

Для получения уравнения (5.11), связывающего давление и раскрытие трещины, нужно подставить в (3.36) выражения для компонент вектора потока (3.18). Результирующее уравнение будет совпадать с полученным для случая несжимаемой неньютоновской жидкости (5.11) за исключением вида коэффициентов

$$a = \frac{(1+C_0P)w^3}{12\mu}, \quad f = \frac{\partial w(1+C_0P)}{\partial t}.$$
 (3.37)

Как и в случае неньютоновской жидкости уравнения течения несжимаемой ньютоновской жидкости есть частный случай уравнений течения слабосжимаемой жидкости, соответствующий нулевому коэффициенту сжимаемости  $C_0$ .



Рисунок 3.2 – Схема поверхности трещины ее разбиение на конечные элементы

### 3.1.3. Граничные условия для задачи течения жидкости в трещине

Полученные в § 3.1.2 двумерные уравнения описывают течение жидкости внутри трещины, которая представляется поверхностью в трехмерном пространстве, показанной на рисунке 3.2. Для корректной постановки задачи необходимо задать граничные условия на двух границах трещины. Входная граница  $\Gamma^q$  в трехмерном пространстве является пересечением поверхности трещины и скважины, а при постановке двумерной задачи движения жидкости представляется окружностью. На этой границе задается значение закачиваемого в трещину из скважины суммарного расхода жидкости  $Q_{\rm in}$ . Чтобы сформулировать граничное условие в каждой точке границе предполагается, что расход жидкости распределен равномерно по всей длине  $L_q$  входной границы  $\Gamma^q$ , и движение жидкости направлено по нормали  $\mathbf{n}_q$  к ней (см. рис. 3.2)

$$\mathbf{q}|_{\mathbf{x}_{\mathbf{q}}} = q_{\mathrm{in}} \,\mathbf{n}_q = Q_{\mathrm{in}}/L_q \,\mathbf{n}_q. \tag{3.38}$$

С учетом уравнения (3.23) это условие (3.38) переписывается для производной давления

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{12\eta_a Q_{\rm in}}{w^3 L_q}.\tag{3.39}$$

На выходной границе  $\Gamma^p(t)$ , которая в трехмерном пространстве соответствует фронту жидкости  $\mathbf{x}_f$ , ставится условие равенства давления поровому  $p_{\text{pore}}$ 

$$p|_{\Gamma^p} = p_{\text{pore.}} \tag{3.40}$$

В результате решения уравнения (5.11) с граничными условиями (3.40), (3.39) получается распределение давления p, которое далее используется в ка-

честве граничного условия при решении уравнений упругого равновесия (см. параграф 1.3). Поток жидкости (3.23), полученные на фронте жидкости, используется в условии Стефана для вычисления скорости фронта жидкости  $\mathbf{v}_f$ 

$$\mathbf{v}_f|_{\Gamma^p} = \left. \frac{\mathbf{q}}{w} \right|_{\Gamma^p}. \tag{3.41}$$

# 3.2. Численный метод решения задачи о течении жидкости в трещине

Численный метод решения уравнений движения в случае неньютоновской жидкости является обобщением численного метода для случая линейной ньютоновской жидкости, поэтому описание удобнее начать с более простого, второго варианта.

### 3.2.1. Задача о течении несжимаемой ньютоновской жидкости

Метод конечных элементов (МКЭ), используемый для решения уравнения (3.30), в полном объеме представлен во множестве литературных источников [226–229] и не нуждается в дополнительном описании. Суть метода при использовании линейной аппроксимации заключается в разбиении расчетной области на элементы, как показано на рисунке 3.2 и представлении давления p внутри каждого элемента в виде суммы базисных форм-функции этого элемента  $\phi_i(\xi_1, \xi_2)$  с пока неизвестными весовыми коэффициентами  $p_i$ 

$$p(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i=1}^{M} p_i \phi_i(\xi_1, \xi_2).$$
(3.42)

Аналогичное представление используется для геометрических координат  $(x_1, x_2)$ , для чего внутри элемента вводится локальная система координат  $\xi_1, \xi_2$ , которая строится по угловым точкам элемента  $x_i$ . Так как форм-функции равны единице в одной угловой точке элемента и нулю во всех остальных, то коэффициенты  $p_i$  совпадают со значениями давления *i*-й (i = 1, ..., M) узловой точке элемента.

Для того чтобы получить систему линейных уравнений для коэффициентов  $p_i$  из дифференциального уравнения (3.30), последнее с использованием произвольной тестовой функции  $\omega$  переписывается в слабой формулировке

$$\int_{S_n} \nabla(a\nabla p)\omega dS = \int_{S_n} f\omega dS, \qquad (3.43)$$

которая после применения теоремы Грина принимает вид

$$\int_{\Gamma^p \cup \Gamma^q} \frac{\partial p}{\partial n} dG - \int_{S_n} \nabla (a \nabla p) \nabla \omega dS = \int_{S_n} f \omega dS.$$
(3.44)

В результате получается система линейных уравнений

$$K_{ij}p_i = Q_j + F_j, (3.45)$$

для чего форм-функции элемента были подставлены в качестве тестовых, давление выражено в виде их суммы (3.42), а участвующие в (3.44) интегралы вычислены аналитически, за счет известного вида форм-функций. В (3.45) используются обозначения

$$K_{ij} = \iint_{S_n} a \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j |J| d\xi_1 d\xi_2, \quad Q_j = \int_{\partial S_n} a \frac{\partial p}{\partial n} \phi_i dG,$$
$$F_j = -\iint_{S_n} f \phi_i |J| d\xi_1 d\xi_2. \tag{3.46}$$

Поскольку уравнения (3.45), (3.46) получены для каждого элемента, то их можно объединить в общую систему линейных уравнений, приведя подобные при каждом из неизвестных значений давления  $\mathbf{p} = (p_1, ..., p_N)$  во всех N точках сетки

$$\mathbf{K}\mathbf{p} = \mathbf{Q} + \mathbf{F}.\tag{3.47}$$

За **К** здесь обозначена глобальная матрица жесткости, за  $\mathbf{Q}, \mathbf{F}$  — векторы размера N, полученные из  $Q_i, F_i$  в (3.46).

Решение системы (3.47) вычисляется с помощью LU разложения или GMRes метода, после чего давление в любой точке поверхности трещины, занятой жид-

костью может быть найдено из (3.42). Давление в части трещины между фронтами жидкости  $\mathbf{x}_f$  и трещины  $\mathbf{x}_r$ , необходимое для задания граничного условия в задаче о деформации породы, задается равным поровому давлению.

Вычисленное давление используется также для определения скорости жидкости на фронте жидкости. Для этого в каждом элементе k, содержащем точку фронта j, по известным коэффициентам  $p_i$  рассчитываются градиент давления

$$\nabla p(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i=1}^{M} p_i \nabla \phi_i(\xi_1, \xi_2).$$
(3.48)

и вектор потока жидкости

$$\mathbf{q}_{jk} = -a(\nabla p_{jk}). \tag{3.49}$$

После этого усреднением по всем элементам, содержащим точку *j*, вычисляется вектор потока в этой точке

$$q_{j} = \sum_{k=1}^{K} \alpha_{ik} q_{ik} / \sum_{k=1}^{K} \alpha_{ik}$$
(3.50)

и вектор скорости

$$v_j = q_i/w_j. \tag{3.51}$$

В качестве весовых коэффициентов в (3.50) используются углы раствора  $\alpha_{ik}$  элементов k в рассматриваемой точке.

### 3.2.2. Задача о течении неньютоновской или слабосжимаемой жидкостей жидкости

При описании движения неньютоновской или слабосжимаемой жидкости уравнения, составляющие систему (3.47), нелинейны так как коэффициенты *a*, *f* в (3.37) и (3.37) зависят от давления. Для решения системы (3.47) привлекается метод релаксации, состоящий из следующих шагов

1. Задается распределение давления на начальной итерации s = 0, равное распределению с предыдущего шага по времени  $p^s = p^n$ .

- 2. Рассчитываются коэффициенты  $a(p^s)$  и  $f(p^s)$  в уравнениях (3.37), (5.12), и элементы матрицы  $\mathbf{K}(p^s)$  и векторов  $\mathbf{Q}(p^s)$ ,  $\mathbf{F}(p^s)$  в системе (3.47).
- 3. Решается система (3.47) так же, как и в случае ньютоновской жидкости, в результате чего получается вспомогательное распределение давления  $\tilde{p}$ .
- 4. Вычисляется распределение давления на следующей и<br/>терации s+1с использованием релаксационного параметр<br/>а $r^s$

$$p^{s+1} = \widetilde{p}(r^s) + p^s(1 - r^s).$$
(3.52)

Происходит переход к следующей итерации s = s + 1. Шаги 2–4 повторяются пока относительное изменение давления не станет меньше заданной величины.

$$\frac{||p^s - \widetilde{p}||}{||p^s||} < \varepsilon_c. \tag{3.53}$$

Релаксационный параметр  $r^s$  на каждой итерации подбирается таким образом, чтобы изменение давления не превосходило наперед заданной величины

$$r(s) = r_{\max} \frac{||p^s||}{||p^s - \tilde{p}||}.$$
(3.54)

На основе проведенных численных расчетов можно сделать вывод, что значения параметров  $r_{\rm max} = 0.1$  и  $\varepsilon_c = 10^{-4}$  во всех рассматривавшихся случаях обеспечивают устойчивость алгоритма и достаточно быструю его сходимость (5 ~ 10 итераций).

# 3.3. Верификация численного метода решения задачи о течении жидкости в трещине

Для верификации алгоритма были рассмотрены задачи о течении жидкости, имеющие точные решения.

### 3.3.1. Задача о движении ньютоновской жидкости в канале постоянного сечения

Рассматривается канал ширины w = 0.05 мм и высоты H = 0.02 м, изогнутый вдоль цилиндрической поверхности радиуса R = 0.025 м, как показано на рисунке 3.3. Через одну из сторон канала с расходом  $Q_{\rm in} = 5$  см<sup>3</sup> / с закачивается жидкость с вязкостью  $\mu = 4 \cdot 10^{-3}$  Па · с. На противоположной стороне задается постоянное давление  $p_{\rm out} = 10^5$  Па.



Рисунок 3.3 – Схема течения жидкости в канале постоянного сечения

Аналитическое решение задачи (см. например [230]) дает зависимость давления как функции расстояния *l* от выходного сечения канала

$$p(l) = 12 \frac{\mu Q_{\rm in}}{w^3} l + p_{\rm out}.$$
 (3.55)

Относительная численная погрешность описанного численного метода, полученная как отношение С-нормы разности численного и аналитического решений к С-норме последнего, уменьшается со вторым порядком при уменьшении величины шага сетки. Так на сетках с размерами  $10 \times 30$ ,  $20 \times 60$  и  $40 \times 120$  относительная погрешность составила 0.0428, 0.0107, 0.0027%, соответственно. Кроме подтверждения совпадения наблюдаемого и теоретического порядков сходимости метода проведенная серия вычислительных экспериментов демонстрирует достаточно малую абсолютную величину относительной погрешности, что поз-

воляет выбирать при моделировании ГРП сетки малого размера.

## 3.3.2. Задача о плоскорадиальном течении неньютоновской жидкости при заданном расходе

Рассматривается двумерный плоский канал постоянной ширины w = 0.001 м между двумя параллельными пластинами. В точке  $(x_1, x_2) = (0, 0)$  расположены центры окружностей радиусов  $R_{\rm in} = 0.1$  м и  $R_{\rm out} = 1$  м, являющихся входной и выходной границами, соответственно. Через входную границу с расходом  $Q = 0.5 \cdot 10^{-6}$  м<sup>3</sup> / с закачивается неньютоновская жидкость Гершеля–Балкли с консистенцией K = 100 Па · с<sup>n</sup> показателем степени n = 0.5 и предельным напряжением сдвига  $\tau_0 = 900$  Па. В выходном сечении задается давление  $P_{\rm out} = 0$ .



Рисунок 3.4 – Распределения давления жидкости Гершеля–Балкли вдоль радиуса при плоскорадиальном растекании с заданным расходом: сплошная линия — точное решение (3.56); точки численное решение

Из аналитического решения (см. например [231]) рассчитывается распределение давления вдоль радиальной координаты

$$p(r) = \frac{6\mu Q_{\rm in}}{\pi w^3} \ln\left(\frac{r}{R_{\rm out}}\right) + p_{\rm out}.$$
(3.56)

На рисунке 3.4 приведены распределения давления жидкости Гершеля– Балкли вдоль радиуса при плоскорадиальном растекании в канале постоянной ширины с заданным расходом, полученные аналитически (3.56) и численно с использованием радиальной сетки размера  $N_r \times N_c = 20 \times 12$  в радиальном и окружном направлениях соответственно. Относительная погрешность решения в этом вычислительном эксперименте не превосходит 1.2%. Далее предполагается, что достигнутая точность достаточна при проведении расчетов ГРП, и размер сеток выбирается сопоставимым с указанным.

### 3.3.3. Задача о плоскорадиальном течении неньютоновской жидкости при заданном перепаде давления

Как и в предыдущем пункте 3.3.2 рассматривается двумерный плоский канал постоянной ширины w = 0.001 м, ограниченный круговыми входной и выходной границами радиусов  $R_{\rm in} = 0.1$  м и  $R_{\rm out} = 100$  м с заданным нулевым давлением на последней. Через входную границу с постоянным давлением  $p_{\rm in} = 1$  МПа закачивается неньютоновская жидкость Бингама (n = 1) с консистенцией K = 0.3 Па · с и предельным напряжением сдвига варьирующемся в интервале от  $\tau_0 = 0$  до 100 Па. Предполагается, что канал в области, не занятой закачиваемой жидкостью, пуст, поэтому нулевое давление  $p_{\rm out} = 0$  задается не на внешней границе, а на фронте жидкости, который распространяется со скоростью жидкости на нём согласно условию Стефана (5.17).

Задание на входной границе давления вместо расхода позволяет продемонстрировать эффект остановки жидкости при росте занятой ей области. Остановка обусловлена тем, что Бингамовская жидкость остается неподвижной, если сдвиговые напряжения в ней у стенки не превосходят предельного напряжения сдвига. С ростом радиуса занятой жидкостью области перепада давления между входной границей и фронтом становится недостаточно для преодоления сил трения на стенке, которые определяются интегралом по области от напряжений, ограниченных снизу предельным напряжением сдвига. Другими словами, остановка движения происходит тогда, когда размер  $2z_{\tau}$  недеформируемого ядра жидкости в центре канала, показанный на рисунке 3.1 и вычисляемый по формуле (3.21), достигает ширины канала.

Поскольку способность численного алгоритма рассчитывать распределение давления вдоль радиуса была продемонстрирована на решении аналогичной задачи в § 3.3.2, здесь будет показана лишь его способность учитывать наличие предельного напряжения сдвига. Для этого удобно рассмотреть изменение расхода через входное сечение при росте радиуса области, занятой жидкостью. Такие зависимости для различных значений предельного напряжения сдвига  $\tau_0$  приведены на рисунке 3.5.

Максимальный радиус круговой области, который может быть достигнут с помощью заданного перепада давления для выбранной жидкости, соответствует значению радиуса, при котором соответствующая кривая достигает оси абсцисс на рисунке. Приведенный рисунок также демонстрирует, что увеличение предельного напряжения сдвига приводит к уменьшению области, которая может быть занята растекающейся жидкостью, и что ньютоновская жидкость, характеризующаяся нулевым критическим напряжением сдвига, не будет останавливаться при растекании с постоянным давлением.



Рисунок 3.5 – Зависимости расхода жидкости от радиуса внешней границы области, рассчитанные при различных значениях  $\tau_0$ :  $1 - \tau_0 = 0 \,\Pi a$ ;  $2 - \tau_0 = 50 \,\Pi a$ ;  $3 - \tau_0 = 100 \,\Pi a$ 

# 3.4. Безразмерный анализ задачи о распространении трещин ГРП

Особенностью предложенной в диссертации полной трехмерной модели на момент создания являлось одновременное описание влияния ствола скважины на НДС породы в его окрестности и учет зависимости распределения давления вдоль берегов трещины от сложной реологии движущейся жидкости. Сочетание этих факторов позволяет использовать модель для исследования поведения трещины ГРП на начальном этапе ее распространения и исследования закономерностей при искривлении трещины в окрестности скважины. При этом воз-
никает вопрос о возможности снижения вычислительных затрат при моделировании и упрощении модели за счет пренебрежения влиянием скважины или использовании простой модели ньютоновской жидкости для описания ее течения вместо сложной реологической модели. Ответ этот вопрос, полученный на основе результатов численного моделирования, приведен в главе 4. Однако вопрос о возможности применения модели ньютоновской жидкости при описании распространения трещины на начальном этапе может быть исследован аналитически на основе безразмерного анализа, приведенного ниже.

#### 3.4.1. Режимы распространения трещин

Безразмерный анализ будет проводиться на примере одномерной модели радиальной трещины. Это предположение упрощает рассуждения по сравнению с трехмерной постановкой, но сохраняет основные соотношения между параметрами. В частности такая постановка описывает распространение поперечной трещины из ствола скважины, соосной с направлением действия минимальных напряжений в породе. В то же время даже в одномерной формулировке размерный анализ дает представление о влиянии различных физических процессов на распространение трещин, таких как потери энергии на вязкое трение и вязкость разрушения, отставание жидкости и т. д.

Безразмерный анализ ранней стадии развития радиальной трещины в непроницаемой породе для случая ньютоновской жидкости с учетом отставания жидкости проведен в работе [60, 232]. Ниже уравнения развития радиальной трещины записываются в соответствии с обозначениями, принятыми в этих работах. В отличие от [60, 232], в далее предполагается, что жидкость описывается моделью Гершеля-Балкли, а поровое давление в породе равно нулю. Тогда уравнения и граничные условия выглядят следующим образом

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{{\mu'}^{1/n} r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r w^{(2+1)/n} \left( \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\tau_0}{w} \right)^{1/n} \right], \qquad (3.57)$$

$$w = \frac{8R}{\pi E'} \left[ \int_0^{\gamma_f} G\left(\frac{r}{R}, \zeta\right) p_{net}(\zeta) \zeta d\zeta - \int_{\gamma_f}^1 G\left(\frac{r}{R}, \zeta\right) \sigma_z^{\infty} \zeta d\zeta \right], \qquad (3.58)$$

$$\frac{2^{7/2}}{\pi R^{1/2}} \left[ \int_0^{R_f} \frac{p_{net}}{(R^2 - r^2)} r dr - \sigma_z^\infty \sqrt{R^2 - R_f^2} \right] = K'_{Ic}, \qquad (3.59)$$

$$Q_{in} \cdot t = 2\pi \int_0^{R_f} w(r, t) r dr, \qquad (3.60)$$

$$r = R_f: \ \frac{dR_f}{dt} = -\frac{w^2}{\mu'}\frac{\partial p}{\partial r}.$$
(3.61)

Здесь R и  $R_f$  радиусы фронтов трещины и жидкости, соответственно,  $\gamma_f = R_f/R$  — безразмерный радиус фронта жидкости,  $p_{net} = p - \sigma_z^{\infty}$  избыточное давление жидкости. Кроме того используются следующие обозначения:  $E' = E/(1-\nu^2), K'_{Ic} = 4(2/\pi)^{1/2}K_{Ic}$  [60, 232], и  $\mu' = 2K((4n+2)/n)^n$  [233]. Ядро G в (3.58) записывается в терминах элиптического интеграла первого рода F

$$G(\xi,\xi') = \begin{cases} \frac{1}{\xi}F\left(\arcsin\sqrt{\frac{1-\xi^2}{1-\xi'^2}},\frac{{\xi'}^2}{\xi^2}\right) \\ \frac{1}{\xi'}F\left(\arcsin\sqrt{\frac{1-{\xi'}^2}{1-\xi^2}},\frac{{\xi'}^2}{{\xi'}^2}\right) \end{cases}$$
(3.62)

Отличие системы уравнений (3.57)–(3.62) от системы, приведенной в [60, 232] заключется в использовании более общей модели жидкости Гершеля-Балкли в уравнении (3.57). Остальные уравнения полностью совпадают. Поэтому далее используется классификация режимов распространения, предложенная в [60, 232].

В непроницаемой породе поведение радиальной трещины характеризуется двумя временными параметрами

$$t_o = \frac{{E'}^2 \mu'}{(\sigma_z^\infty)^3}, \quad t_m = \left(\frac{{\mu'}^5 Q_{in}^3 {E'}^{13}}{{K'}^{18}}\right)^{1/2}, \tag{3.63}$$

Эти моменты времени характеризуют переходя между периодами распространения, в каждый из которых определенный физический процесс является доминирующим при распространении трещины. Характерное значение  $t_o$  ограничивает интервал времени, в течение которого давление жидкости в трещине уравновешивает напряжения сжимающих напряжений в породе при значительном запаздывании жидкости. Параметр  $t_m$  показывает сколько времени требуется трещине, для перехода трещины из режима с преобладанием по вязкости, к режиму с преобладающим влиянием прочности породы.

Треугольное параметрическое пространство, предложенное в [60, 232] и показанное на 3.6 дает наглядное представление об эволюции радиальной трещины. Вершина O соответствует начальному режиму распространения, наблюдаемом при  $t \ll t_o < t_m$ . В этом режиме отставание жидкости значительно. Так как жидкость занимает небольшую часть трещины, ее вязкость мало влияет на процесс разлома. Главную роль играет баланс между давлением жидкости и сжимающими напряжениями в области между фронтом жидкости и трещиной. Вершина M соответствует режиму вязкого распространения, который наблюдается при  $t_o \ll t \ll t_m$ . Большая часть энергии в этом режиме расходуется на преодоление вязкого трения в жидкости. Вершине K соответствует "трещиностойкостный" режим распространения, который достигается при  $t \gg t_m > t_o$ . В этом режиме большая часть энергии тратится на разрушение породы, так как ширина трещины достаточно велика, чтобы вязкое трещине в жидкости было незначительным.



Рисунок 3.6 – Параметрическое пространство для модели плоской радиальной трещины, учитывающей отставание жидкости, с тремя предельными режимами распространения O-M-K

Эволюция радиальной трещины, согласно [232] начинается в O-режиме и заканчивается в K-режиме. Переход между ними соответствует траектории в пространстве O - M - K (рисунок 3.6), которая определяется отношением  $t_o/t_m$ . Для  $t_o/t_m \sim 1$  траектория лежит далеко от вершины M, и переход переходит из режима O в режим K непосредственно. При  $t_o/t_m \ll 1$  траектория проходит около вершины M, а трещина распространяется большую часть времени в

вязком режиме.

Рассматриваемая трехмерная модель распространения трещин предназначена для расчета эволюции трещины только в окрестности O и M режимов и перехода O - M между ними. Это не ограничивает применимость модели, поскольку, согласно [234], для типичных параметров гидравлического разрыва режим K не достигается. Кроме того, траектория (форма поверхности) трещины формируется в начальный период времени, когда трещина распространяются в режимах O и M. Для упрощения анализа влияния параметров реологии влияние параметров модели Гершеля-Балкли  $\tau_0$  и n будет оцениваться независимо, что соответствует рассмотрению моделей Бингамовской ( $\tau_0 > 0, n = 1$ ) и степенной ( $\tau_0 = 0, n < 1$ ) жидкостей.

#### 3.4.2. Влияние предельного напряжения сдвига

Для случая Бингамовской жидкости за основу берется безразмерный анализ, выполненный в [234, 235] для *M*-режима. Он дает уравнения для безразмерного радиуса трещины  $\gamma(\mathbf{P}(t))$  и распределения безразмерной ширины  $\Omega(\rho, \mathbf{P}(t))$ и давления  $\Pi(\rho, \mathbf{P}(t))$  вдоль безразмерного радиуса  $\rho = r/R$ . Безразмерные переменные зависят только от набора параметров режима  $\mathbf{P}(t)$  и связаны с физическими переменными соотношениями

$$w(r,t) = \varepsilon(t)L(t)\Omega(\rho, \mathbf{P}(t)), \qquad (3.64)$$

$$p(r,t) = \varepsilon(t) E' \Pi(\rho, \mathbf{P}(t)), \qquad (3.65)$$

$$R(t) = L(t)\gamma(\mathbf{P}) \tag{3.66}$$

с масштабирующими множителями

$$\varepsilon(t) = \left(\frac{\mu'}{E't}\right)^{1/3}, \ L(t) = \left(\frac{E'Q_{in}^3 t^4}{\mu'}\right)^{1/9}.$$
(3.67)

безразмерный аналог уравнения (3.57) записывается как

$$\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\frac{t}{\varepsilon} + \frac{\partial L}{\partial t}\frac{t}{L}\right)\Omega - \frac{\partial L}{\partial t}\frac{t}{L}\rho\frac{\partial\Omega}{\partial\rho} + \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}t\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\mathbf{P}} - \frac{\rho}{\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial\mathbf{P}}\frac{\partial\Omega}{\partial\rho}\right) = \\ = \frac{1}{\mathbf{M}\gamma^{2}}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\Omega^{3}\left(\frac{\partial\Pi}{\partial\rho} - \mathbf{M}_{\tau}\frac{\gamma}{\Omega}\right)\right].$$
(3.68)

Здесь вводятся два безразмерных комплекса, являющиеся параметрами режима ма или как параметры режима  $\mathbf{P}(t)$ . Они представляют собой безразмерную вязкость [234, 235]

$$\mathbf{M} = \mu' \left( \frac{Q_{in}^3 {E'}^{13}}{t^2 {K'}^{18}} \right)^{1/5}$$
(3.69)

и безразмерное напряжение сдвига введенное в работе [6]

$$\mathbf{M}_{\tau} = \tau_0 \left(\frac{t^2}{{\mu'}^2 E'}\right)^{1/3}.$$
 (3.70)

Видно, что  $\mathbf{M}_{\tau}$  (3.70) является монотонно возрастающей функцией t. Поэтому влияние предела текучести в начальный момент будет незначительным, а затем оно будет расти. Следовательно, использование ньютоновской модели жидкости для описания Бингамовской жидкости возможно только для  $\mathbf{M}_{\tau} \ll 1$ , т.е. когда

$$t \ll t_{\tau} = \left(\frac{{\mu'}^2 E'}{\tau_0^3}\right)^{1/2}.$$
 (3.71)

Можно оценить значения  $t_{\tau}$  in (3.71) и  $t_o$ ,  $t_m$  в (3.63) для типичных значений параметров трещины гидроразрыва, приведенных, например, в [234]:  $E = 7 \div 40 \Gamma \Pi a$ ,  $\nu = 0.15 \div 0.4$ ,  $\mu = 0.1 \div 0.5 \Pi a \cdot s$ ,  $Q_{in} = 0.03 \div 0.08 \text{ m}^3 / \text{ c}$ и характерных значений предельного напряжения сдвига  $\tau_0 = 100 \div 500 \Pi a$ . Значения характерных параметров времени при этих значениях варьируются в интервалах  $t_{\tau} = 10 \div 1000 \text{ c}$ ,  $t_o = 0.1 \div 1000 \text{ c}$  и  $t_m \gg 100 \text{ h}$ . Так как  $t_{\tau} \sim t_o$ , для развитой трещины, распространяющейся в режиме  $M t_o \ll t \ll t_m$ , необходимо учитывать влияние предельного напряжения сдвига  $\tau_0$ .

Чтобы оценить влияние предельного напряжения сдвига  $\tau_0$  на этапе формирования траектории трещины, следует вычислить время переориентации трещины в предпочтительную плоскость распространения (ППР)  $t_{path}$ . Согласно [7, 236], трещина становится почти плоской, когда ее длина достигает нескольких (до 10) диаметров ствола скважины. Для режима M выражение (3.67) для L(t) и неравенство  $L(t) < 10 \cdot 2 \cdot R_w = 2.5$  м дают

$$t_{path} < \left(\frac{\mu' L^9}{E' Q_{in}^3}\right)^{1/4} = 0.1 \div 0.6 \,\mathrm{c} \,.$$
 (3.72)

Для *О*-режима для характерной длины можно использовать следующее выражение [232]

$$L(t) = \left(\frac{E'^{16} \ \mu'^2 \ Q_{in}^{12} \ t^{10}}{K'^{18}}\right)^{1/27},\tag{3.73}$$

вместо (3.67). Это дает следующий интервал

$$t_{path} = \left(\frac{L^{27} K'^{18}}{E'^{16} \mu'^2 Q_{in}^{12}}\right)^{1/10} = 0.001 \div 0.5 \,\mathrm{c}\,. \tag{3.74}$$

Вышеприведенные оценки показывают, что в зависимости от параметров жидкости, породы и закачки траектория трещины может формироваться, в *O*-режиме  $(t_{path} \ll t_o)$  или в переходном режиме *O* - *M*  $(t_{path} \sim t_o)$ . Это говорит о том, что, с одной стороны, необходимо учитывать отставание жидкости от фронта трещины, с другой стороны, не всегда можно использовать асимптотическое решение, полученное для режима *O* в [232]. В то же время, во время формирования траектории трещины  $t_{path} \ll t_{\tau}$ . Таким образом, влияние предела текучести является несущественным, и этим параметром можно пренебречь, при вычислении траектории трещин.

#### 3.4.3. Влияние показателя степени

В то время как предельным напряжением сдвига  $\tau_0$  можно пренебречь при моделировании начального этапа распространения трещины, показатель степени жидкости следует учитывать на протяжении всего периода распространения трещины. Такой вывод может быть сделан на основе работы [233], где проведен безразмерный анализ уравнений распространения радиальной трещины для случая степенной жидкости и получено решение для режима M. В этой работе для того, чтобы получить автомодельное решение, в отличие от формулировки (3.57)–(3.61) используется модифицированная формулировка задачи распространения трещины с использованием скорости частиц. Поэтому безразмерные уравнения не идентичны уравнениям, используемым в [232, 234, 235], где давление и ширина трещины являются независимыми переменными. Далее результаты анализа [233] будут приведены в обозначениях [60, 232]. Используя для  $\varepsilon(t)$  модифицированное выражение

$$\varepsilon(t) = \left(\frac{\mu'}{E't^n}\right)^{\frac{1}{n+2}},\tag{3.75}$$

вместо (3.67) можно поучить следующее выражение вместо (3.68)

$$\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\frac{t}{\varepsilon} + \frac{\partial L}{\partial t}\frac{t}{L}\right)\Omega - \frac{\partial L}{\partial t}\frac{t}{L}\rho\frac{\partial\Omega}{\partial\rho} + \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}t\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\mathbf{P}} - \frac{\rho}{\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial\mathbf{P}}\frac{\partial\Omega}{\partial\rho}\right) = \frac{1}{\mathbf{M}\gamma^{2}}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\Omega^{\frac{2n+1}{n}}\left(\frac{\partial\Pi}{\partial\rho}\right)^{1/n}\right].$$
(3.76)

Здесь, в отличие от (3.68), члены с индексом показателя степени n не могут быть выделены отдельную группу с новым параметром режима. Поэтому невозможно сделать вывод о том, что влияние показателя степени менее или более значимо, как это было сделано в предыдущем разделе 3.4.2 для предельного напряжения сдвига.

Следующая формула для кажущейся вязкости  $\mu_a$ , полученная в [233], дает возможность оценить влияние консистенции K и показателя степени n путем замены жидкости сложной реологии эквивалентной ньютоновской жидкостью с вязкостью

$$\mu_a = C_{\xi} \frac{\theta_n^{\frac{3}{n+2}}}{12} \frac{t^{\frac{2-2n}{n+2}}}{E'^{\frac{1-n}{n+2}}} K^{\frac{3}{n+2}}.$$
(3.77)

Здесь  $\theta_n = 2 \left(\frac{4n+2}{n}\right)^n$ ,  $C_{\xi}$  – некоторый коэффициент, вычисленный в [233]. Его значение варьируется от 0.65 до 0.88 при изменении *n* от 0.2 до 0.8. Эквивалентность жидкости в смысле, используемом в [233], означает, что при равном расходе  $Q_{in}$  и равном времени закачки *t* полученные трещины будут иметь один и тот же радиус *R*. Как видно из (3.77), уменьшение показателя степени имеет тот же эффект, что и уменьшение вязкости жидкости или консистенции. Следует отметить, что численные расчеты, проведенные в Главе 4, показывают ту же зависимость.

Так как эквивалентная вязкость ньютоновской жидкости зависит от времени, то в общем случае невозможно заменить модель степенной жидкости моделью Ньютоновской жидкости. Это также подтверждается расчетами, проведенными в Главе 4. Тем не менее, на этапе формирования траектории трещины изменение кажущейся вязкости незначительно в силу его кратковременности и можно провести оценку погрешности, использованием такой замены.

Эквивалентная вязкость ньютоновской жидкости, рассчитанная по характерным параметрам гидроразрыва пласта, приведенным в [234] и характерным параметрам степенной жидкости n = 0.8,  $K = 1 \,\Pi a \cdot c^n$ , увеличивается в два раза в течение времени, изменяющегося в интервале  $0.006 c = 0.01 \cdot t_{path} < t < t_{path} = 0.6 c$ . Замена модели степенной жидкости при описании распространения трещины моделью Ньютоновской жидкости с эквивалентной вязкостью, равной  $\mu_a = 0, 1 \,\Pi a \cdot c$ , приведет к появлению ошибки не превосходящей 40%.

В работе [6] показано, что изменение вязкости в 10 раз значительно изменяет траекторию трещины. Но можно ожидать, что ошибка 40 % при определении вязкости во время моделирования распространения трещины в первой секунде процесса будет слабо влиять на траекторию трещины. Аналогичный вывод сделан в [7], где показано, что траектории трещин, полученные при закачке степенной жидкости и Ньютоновской с эквивалентной вязкостью, практически совпадают. Таким образом, модель ньютоновской жидкости с правильно подобранной эквивалентной вязкостью может быть использована для расчета траектории трещин на начальной стадии распространения вместо модели Гершеля-Балкли. Это упрощение позволит существенно ускорить проведение расчетов внося при этом незначительную ошибку при определении траектории трещины. Погрешность при определении давления в скважине при этом может оказаться заметной.

### 3.5. Заключение по Главе 3

В главе предложена и обоснована модель движения жидкости сложной реологии в трещине, в частности

• Для замыкания уравнений движения жидкости используется соотношение

Гершеля-Балкли [2], устанавливающее нелинейную связь между тензором скоростей деформаций и тензором вязких напряжений. Реология жидкости описывается в используемой модели с помощью параметров: консистенции K, показателя степени n и предельного напряжения сдвига  $\tau_0$ 

- Вывод уравнений движения жидкости в канале, ширина которого существенно меньше его высоты и длины, проведен с помощью осреднения трехмерных уравнений движения по ширине трещины на основе явного выражения для профиля скорости жидкости в сечении.
- Поведена верификация численного алгоритма решения двумерных уравнений движения жидкости сложной реологии в узком канале путем сравнения с аналитическими решениями задач о плоскопараллельном и радиальном течении жидкости. Показан второй порядок сходимости решения к точному при уменьшении размера сетки.
- Проведен безразмерный анализ режимов распространения трещины. На его основе продемонстрирована необходимость использования модель Гершеля-Балкли при описании жидкости сложной реологии и невозможность замены ее моделью Ньютоновской жидкости. Показано, что на этапе формирования траектории трещины 1) можно не учитывать предельное напряжение сдвига *т*<sub>0</sub>, 2) модель степенной жидкости *n* < 1 можно заменить моделью Ньютоновской жидкости *n* < 1 можно заменить моделью Ньютоновской жидкости *n*.

# Трехмерное моделирование распространения трещин, нагруженных давлением вязкой жидкости

4.1. Верификация и выбор параметров моделирования распространения трещины

## 4.1.1. Верификация трехмерной модели на задаче о распространении плоской радиальной трещины

Верификация трехмерной модели трещины гидроразрыва проведена на задаче о круговой трещине, распространяющейся в непроницаемой породе под действием закачиваемой в нее ньютоновской жидкости в плоскости предпочтительного распространения трещины (ППРТ), ортогональной минимальным напряжениям в породе. Рассматривается два режима распространения: режим с доминирующей вязкостью, для которого в предположении о совпадении положений фронта жидкости и фронта трещины существует аналитическое решение [234] и режим начального распространения, для которого проведено сравнение с решением, полученным по одномерной модели радиальной трещины, описанной в § 5.3.



Рисунок 4.1 – Скважина и поверхность трещины на различных шагах распространения (слева – скважина с зародышевой трещиной)

#### Сравнение с численным решением модели круговой трещины

Для проведения сравнения с моделью радиальной трещины рассматривается непроницаемая  $Q_L = 0$  порода, характеризующаяся модулем Юнга  $E = 20 \,\Gamma\Pi$ а, коэффициентом Пуассона  $\nu = 0.2$ , трещиностойкостью  $K_{Ic} = 3 \,\mathrm{M}\Pi \mathrm{a} \sqrt{\mathrm{m}}$ , сжатая на удалении изотропными напряжениями  $\sigma_{\min} = 3 \,\mathrm{M}\Pi \mathrm{a}$ . В скважину радиуса  $R_{\mathrm{w}} = 0.5 \,\mathrm{m}$  с круговой зародышевой трещиной с начальным радиусом  $R_0 = 1 \,\mathrm{m}$  с расходом  $Q_{\mathrm{in}} = 16 \,\mathrm{cm}^3 / \mathrm{c}$  закачивается ньютоновская жидкость с вязкостью  $\mu = 1000 \,\mathrm{\Pia} \cdot \mathrm{c}$ .

Задача решена с помощью одномерной модели радиальной трещины и трехмерной модели распространения, в постановку задачи для которой введена полость скважины и зародышевая трещина с теми же радиусами, как показано на рисунке 4.1.

На рисунке 4.2 приведены рассчитанные по одномерной и трехмерной моделям зависимости от времени радиуса трещины R и давления жидкости в скважине p. Как видно из рисунка, трехмерная модель позволяет получить размер трещины и давление близкие к вычисленным по одномерной модели. Следует отметить, что в одномерной модели использовалась в 10 раз более подробная сетка, что позволяет рассматривать полученное по ней решение как близкое к точному.



Рисунок 4.2 – Зависимости радиуса трещины R (слева) и давления жидкости в скважине p (справа) от времени, рассчитанные по описанной в § 5.3 одномерной модели (сплошная линия) и трехмерной модели (точки)

#### Сравнение с аналитическим решением круговой трещины, полученным для режима распространения с доминирующей вязкостью

Для модели радиальной трещины, распространяющейся в непроницаемой породе, выделено два основных режима распространения [234]: режим с доминирующей вязкостью получен в предположении, что большая часть энергии процесса тратится на преодоление сил вязкого трения при движении жидкости в трещине, тогда как режим с доминирующей трещиностойкостью основан на предположении, что большая часть энергии расходуется на разрушение породы. Для каждого из режимов в предположении о незначительности конкурирующего процесса получены аналитические решения, которые могут быт использованы для верификации численных моделей.

В диссертационной работе верификация проведена только путем сравнения с решением для режима с доминирующей вязкостью. Это обусловлено тем, что оба аналитических решения получены в предположении о совпадении фронта жидкости и фронта трещины, и при распространении трещины в режиме с доминирующей трещиностойкостью в окрестности фронта наблюдается сильный градиент давления. В аналитическом решении на самом фронте раскрытие трещины равно нулю, что делает производную давления по радиусу равной бесконечности, поэтому для ее описания используются специальные процедуры с выделением особенности. Предлагаемая в диссертации трехмерная модель распространения трещины основывается на предположении о наличии конечного

120

интервала между фронтами жидкости и трещины, что, в силу конечности раскрытия трещины во всей области движения жидкости, позволяет рассчитывать градиент давления численно, без привлечения дополнительных процедур. При уменьшении расстояния между фронтами жидкости и трещины раскрытие на фронте жидкости уменьшается и требуется существенное сгущение сетки для описания градиента давления. Предположение об отставании фронта жидкости соответствует начальном этапу распространения трещины, но не позволяет проводить сравнение с аналитическими решениями, полученными для развитых трещин, когда это отставание стремится к нулю. В аналитическом решении, полученном для режима с доминирующей вязкостью, отставание фронта также отсутствует, но градиент давления значителен и вне окрестности фронта, что позволяет описывать распределение давления в трещине в рамках трехмерной численной модели с отставанием фронта жидкости. Следует отметить, что при этом нельзя ожидать точного совпадения результатов расчетов с аналитическим решением.

Для проведения сравнения с аналитическим решением модели радиальной трещины, распространяющейся в режиме с доминирующей вязкостью, рассматривается непроницаемая  $Q_L = 0$  порода, характеризующаяся модулем Юнга  $E = 38.8 \,\Gamma\Pi a$ , коэффициентом Пуассона  $\nu = 0.15$  и трещиностойкостью  $K_{Ic} = 1 \,\mathrm{M}\Pi a \cdot \sqrt{\mathrm{M}}$ , сжатая на удалении изотропными напряжениями  $\sigma_x^{\infty} = \sigma_y^{\infty} = \sigma_z^{\infty} = 41.4 \,\mathrm{M}\Pi a$ . В скважину радиуса  $R_{\mathrm{w}} = 0.02 \,\mathrm{m}$  с круговой зародышевой трещиной с начальным радиусом  $R_0 = 0.079 \,\mathrm{m}$  с расходом  $\mu = 0.08 \,\Pi a \cdot \mathrm{c}$  закачивается ньютоновская жидкость с вязкостью  $\mu = 0.08 \,\Pi a \cdot \mathrm{c}$ .

На рисунке 4.3 показано сравнение зависимостей безразмерного радиуса

$$\gamma_m = R(t)/L(t), \quad L(t) = \left(\frac{E'Q_{\rm in}^3 t^4}{12\mu}\right)^{1/9},$$
(4.1)

полученного на основе трехмерной модели, и радиуса, вычисленного аналитически в [234], от безразмерного времени

$$K_m = 4K_{\mathrm{I}c} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{t^2}{(12\mu)^5 Q_{\mathrm{in}}^3 E'^{13}}\right)^{1/18}.$$
(4.2)

Сравнение параметров, описывающих состояние трещины в некоторый мо-



Рисунок 4.3 – Зависимости размерных (слева) и безразмерных (справа) радиусов трещины от времени: сплошная линия — трехмерная модель; штриховая — аналитическое решение [234]; точки численное решение [234]

мент ее распространение удобно проводить в безразмерном виде. Так вычислены распределения безразмерных раскрытия трещины  $\Omega_m$  и давления  $\Pi_m$  от безразмерного радиуса  $\rho = r/R$  в моменты времени t = 10 с, t = 40, которым, согласно (4.2), соответствуют значения безразмерного времени  $K_m = 0.15$ и 0.45. Безразмерные раскрытия и давление вычислены по следующим аналитическим формулам

$$\Omega_m = \frac{w}{\varepsilon L}, \quad \varepsilon = \left(\frac{12\mu}{E't}\right)^{1/3}, \quad \Pi_m = \frac{p}{E'\varepsilon}.$$
(4.3)

На рисунке 4.4 показаны распределения указанных величин, вычисленные по трехмерной модели, полученные аналитически в [234], и вычисленные с использованием программы Loramec [237, 238], реализующей решение одномерной модели радиальной трещины. Следует отметить, что невозможность вычислить распределения раскрытия и давления с помощью трехмерной модели говорит лишь о ее неприменимости для описания распространения сильно развитых трещин, которые и так находятся вне области ее применения в силу наличия более простых моделей плоских трещин. Так, значению  $K_m = 1.5$ , анализируемому в [234], при указанных реалистичных параметрах соответствует физическое время  $t \approx 300$  лет, которое недостижимо при гидроразрыве, поэтому вместо него был выбран момент безразмерного времени  $K_m = 0.45$ .

На основе проведенного сравнения с аналитическим решением можно за-



Рисунок 4.4 – Зависимости безразмерных раскрытия трещины (слева) и давления (справа) от безразмерного радиуса трещины, полученные по трехмерной модели при  $K_m$ =0.15 (1) и при  $K_m$ =0.45 (2), аналитически [234] при  $K_m$ =0 (3) и по одномерной модели Loramec [237, 238] при  $K_m$ =0.15 (4) и при  $K_m$ =1.5 (5)

ключить, что трехмерная модель начальной стадии гидроразрыва позволяет рассчитать радиус трещины, ее раскрытие и давление в скважине с погрешностью не более 10% (см. рисунок 4.4). При этом погрешность может быть обусловлена учетом наблюдаемого в экспериментах [76, 239] отставания фронта жидкости от фронта трещины, которое не учитывается в рассматриваемой аналитической модели.

# 4.1.2. Необходимость описания движения жидкости в трещине

Для демонстрации необходимости описания движения жидкости в трещине на начальном этапе ее распространения ниже представлено сравнение форм трещин, полученных по трехмерной модели при описании движения жидкости (динамический подход) и при задании постоянного давления во всей трещине (квазистатический подход). В первом случае давление на берегах трещины получается из решения уравнений движения жидкости (см Главу 3), во втором давление, задаваемое в трещине, рассчитывается из условия выполнения критерия распространения трещины (см. Главу 2) во всех точках ее фронта.

Сравнение проведено для следующих параметров задачи Высота и радиус скважины равны H = 5 м и  $R_{w} = 0.5 \text{ м}$ , соответственно, радиус поперечной круговой зародышевой трещины — R = 1 м. Упругая порода характери-

123



Рисунок 4.5 – Траектории трещин и их сечения: 1 — квазистатический подход;<br/> 2 — динамический подход с $\mu=100\,\Pi {\rm a}\cdot {\rm c};\,3$  — динамический подход с<br/>  $\mu=100\,\Pi {\rm a}\cdot {\rm c}$ 

зуется модулем Юнга  $E = 20 \ \Gamma \Pi a$ , коэффициентом Пуассона  $\nu = 0.2$ , трещиностойкостью  $K_{\mathrm{I}c} = 3 \ \mathrm{M}\Pi a \sqrt{\mathrm{m}}$ . НДС породы определено таким образом, что угол между осью скважины и главными напряжениями  $\sigma_y^{\infty} = -12 \ \mathrm{M}\Pi a$  составляет  $\alpha = 45^{\circ}$ , как показано на рисунке 2.17. Два других напряжения равны  $\sigma_x^{\infty} = \sigma_z^{\infty} = -16 \ \mathrm{M}\Pi a$ . Поскольку предпочтительной плоскостью распространения трещины является xz, которая не совпадает с плоскостью зародышевой трещины, трещина при распространении будет искривляться. Формы трещины, полученные в рамках квазистатического и динамического подходов приведены на рисунке 4.5. Там же приведены сечения трещин плоскостью xy, которые позволяют сравнивать их "траектории" на одном рисунке. Распространение трещины с учетом движения жидкости проводилось при задании вязкости жидкости равной  $\mu = 100$  и 1000  $\Pi a \cdot c$ . Легко заметить, что отсутствие учета движения жидкости и задание постоянного давления приводит к сильно искаженному



Рисунок 4.6 – Зависимости давления в скважине от времени: 1 — квазистатический подход; 2 — динамический подход с  $\mu = 100 \, \text{Пa} \cdot \text{c}$ ; 3 — динамический подход с  $\mu = 100 \, \text{Пa} \cdot \text{c}$ 

предсказанию формы трещины. Тот же вывод можно сделать при сравнении полученных с использованием обоих подходов давлений в скважине, которые приведены на рисунке 4.6. Следует отметить, что квазистатический подход применим для описания ГРП при использовании жидкости, вязкость которой мала, или при ее закачке со скоростью достаточно малой, чтобы вязкими эффектами можно было пренебречь.

## 4.1.3. Необходимость учета скважины при моделировании начального этапа распространения

Рассмотренные в §§ 2.4, 4.1.2 задача о распространении трещины от наклонной скважины (см. рис. 2.17) проводилось с учетом последней, что требует добавления расчетной сетки в МГЭ, который используется для решения уравнений упругого равновесия породы и является самой вычислительно сложной частью модели. Существенного снижения требований к вычислительным ресурсам можно добиться путем исключения скважины из расчета, что не позволит описать ее влияние на НДС породы. При рассмотрении развитых трещин, размеры которых превосходят диаметр скважины на порядки, такое приближение оправдано, однако на начальном этапе размер трещин больше диаметра скважины лишь в несколько раз, и влияние последней может оказаться существенным.

Для оценки влияния скважины было проведено квазистатическое моделиро-

вание распространения трещины с и без учета скважины. Рассматривалась порода с параметрами  $E = 20 \ \Gamma \Pi a$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $K_{Ic} = 3 \ M\Pi a \sqrt{m}$  и скважина с трещиной, характеризующиеся параметрами  $R = 1 \ m$ ,  $R_w = 0.5 \ m$ ,  $\alpha = 30^\circ$ . Внешние напряжения выбирались таким образом, чтобы обеспечить одинаковый уровень анизотропности  $\sigma_x^{\infty}/\sigma_y^{\infty} = 4 : 3, \sigma_x^{\infty} = \sigma_z^{\infty}$ , но разную абсолютную величину:  $(\sigma_x^{\infty}; \sigma_y^{\infty}; \sigma_z^{\infty}) = -(4; 3; 4) \ M\Pi a = -(8; 6; 8) \ M\Pi a = -(16; 12; 16) \ M\Pi a$ . Давление в трещине определяется как необходимое для удовлетворения критерия распространения и складывается из двух слагаемых, определяемых внешними напряжений позволяют варьировать только первое слагаемое, сохраняя неизменным как анизотропность напряжений, так и вторую составляющую давления в трещине.

На рисунке 4.7 представлены сечения трещин плоскостью *xy*, полученные при указанных напряжениях при учете и без учета скважины. Очевидно, что скважина влияет на траекторию трещины, и это влияние тем больше, чем больше превышение давления в скважине над сжимающими напряжениями, что можно заметить по большему различию более пологих траекторий трещины. При описании распространения трещины, вызванной закачиванием вязкой жидкости, давление в скважине значительно превышает среднее давление в трещине и, соответственно, сжимающие напряжения в породе, поэтому в этом случае учет влияния скважины необходим.



Рисунок 4.7 – Траектории трещины, полученные при со скважиной (1-3) и без скважины (4-6):  $(\sigma_x^{\infty}; \sigma_y^{\infty}; \sigma_z^{\infty}) = -(4; 3; 4)$  МПа (1, 4), -(8; 6; 8) МПа (2, 5), -(16; 12; 16) МПа (3, 6)

# 4.2. Влияние физических параметров на распространение поперечной трещины

Как показано в § 4.1, при моделировании начального этапа распространения трещины необходимо описывать движение жидкости в трещине и учитывать наличие скважины. Поэтому приведенные ниже исследования влияния физических параметров проведены с учетом скважины в динамической постановке.

#### 4.2.1. Влияние угла наклона скважины

Одним из наиболее важных параметров, влияющих на искривление трещины, является угол наклона скважины, который определяет несовпадение плоскости зародышевой трещины и плоскости предпочтительного распространения трещины. Оценка влияния этого угла проведена при параметрах породы, описанных в § 4.1.3, радиусы скважины и зародышевой трещины были равны  $R_w = 0.12$  м, R = 0.25 м соответственно. Параметры закачиваемой жидкости были выбраны равными K = 0.075 Па $\cdot$ с, n = 1,  $\tau_0 = 11$  Па, а угол наклона скважины варьировался от 0 до 60° градусов с шагом в 15°.Как и было описано в § 4.1.2, при всех углах наклона (кроме 0) трещина, распространяясь, переориентируется в ППРТ, нормальную минимальным сжимающим напряжениям.

Для демонстрации искривления трещин при переориентации, на рисунке 4.9 приведены их сечения плоскостью yz, показанной на рисунке 4.8. Кривизна трещины в выбранном сечении максимальна, что позволяет оценить расстояние, требуемое для переориентации трещины в плоскость предпочтительного распространения. В таблице 4.1 приведены такие расстояния, рассчитанные углу между направлением распространения трещины в плоскости yz и плоскостью x. Увеличение требуемого расстояния при увеличении угла наклона скважины очевидна, однако таблица позволяет установить не только качественное соотношение между ними, но определить характерные размеры области, вне которой трещина может считаться лежащей в плоскости предпочтительного распространения. Так, при угле наклона скважины 60° трещине требуется пройти 7 (10) диаметров скважины для того, чтобы попасть в плоскость предпочтительного распространения с точностью  $10^\circ$  (5°). Эта величина соответствует оценкам,



Рисунок 4.8 – Формы трещины для <br/>  $\alpha=60^\circ$ и анализируемые сечения трещины

сделанным на основе экспериментальных исследований [26, 32].

| Угол наклона | Радиус трещины при              | Радиус трещины при    |
|--------------|---------------------------------|-----------------------|
| скважины,    | отклонении от ППРТ $10^{\circ}$ | отклонении от ППРТ 5° |
| град.        |                                 |                       |
| 15           | 2                               | 3                     |
| 30           | 4                               | 7                     |
| 45           | 6                               | 9                     |
| 60           | 7                               | 10                    |

#### 4.2.2. Влияние реологических параметров жидкости

Влияние реологических параметров жидкости на форму трещины более выражено при угле наклона скважины  $\alpha = 60^{\circ}$ , который обеспечивает наибольшее ее искривление. Для явной демонстрации влияния каждого из параметров, опре-



Рисунок 4.9 – Траектории трещины в плоскости yz для неньютоновской жидкости с  $K = 0.075 \, \text{Па} \cdot \text{с}$ ,  $n = 1, \tau_0 = 11 \, \text{Па}$  для различных углов наклона скважины  $\alpha = 0$  (1), 15 (2), 30 (3), 45 (4), 60° (5)

деляющих реологию жидкости в модели Гершеля–Балкли (K, n,  $\tau_0$ ), вычислительные эксперименты проведены при фиксации двух из них и варьировании оставшегося. В качестве характеристики, влияние на которую будет оцениваться, выбрана форма трещины, которая представлена сечениями ее поверхности тремя плоскостями, показанными на рисунке 4.8. В силу симметричности трещины, эти три сечения ( $\varphi$ : 0° (плоскость yz), 45°, 90° (плоскость xz)) дают полное представление о форме ее трехмерной поверхности.

#### Влияние консистенции (вязкости) жидкости

Влияние консистенции в модели Гершеля–Балкли аналогично влиянию вязкости в модели ньютоновской жидкости, поэтому его удобно продемонстрировать зафиксировав показатель степени n = 1 и предельное напряжение сдвига  $\tau_0 = 0$  Па. На рисунке 4.10 представлены сечения трещин плоскостью ( $\varphi = 0^\circ$ ). Вязкость жидкости при этом менялась от K = 0.03 Па · с до K = 3 Па · с. Легко видеть, что большая вязкость закачиваемой жидкости приводит к формированию трещины с более пологой траекторией.

Более детально влияние вязкости можно оценить, рассмотрев распределения раскрытия и давления вдоль сечений трещины (см. рис. 4.8), которые приведены на рисунках 4.11, 4.12 для трещин, полученных при отличающихся в 100 раз значениях вязкости. По оси x на рисунках отложена координата r, вычисляемая как расстояние до оси скважины от рассматриваемой точки трещины.

Можно видеть, что при закачке маловязкой жидкости имеет место сужение



Рисунок 4.10 – Траектории трещины в плоскост<br/>иyzдля ньютоновской жидкости и угла наклона скважин<br/>ы $\alpha=60^\circ:\,1-K=0.03\,\mathrm{\Pi a}\cdot\mathrm{c};\,2-K=0.3\,\mathrm{\Pi a}\cdot\mathrm{c};\,3-K=3\,\mathrm{\Pi a}\cdot\mathrm{c}$ 



Рисунок 4.11 – Распределения раскрытия трещины по различным сечениям, полученные для ньютоновской жидкости с  $K = 0.03 \,\Pi a \cdot c$  (слева) и  $K = 3 \,\Pi a \cdot c$  (справа):  $1 - \varphi = 0^{\circ}$ ;  $2 - \varphi = 45^{\circ}$ ;  $3 - \varphi = 90^{\circ}$ 



Рисунок 4.12 – Распределения давления жидкости по различным сечениям. Усл. обозн. см. рисунок 4.11

трещины у окрестности скважины в секторе, соответствующем направлению ее наклона ( $\varphi \leq 45^{\circ}$ , см. кривые 1, 2 на рис. 4.11, слева). При этом раскрытие трещины в части трещины, уже находящейся в плоскости предпочтительного распространения (xy), еще меньше ( $\varphi = 90^{\circ}$ , кривая 3). При закачке высоковязкой жидкости эффекты сужения трещины у скважины и неравномерности ее раскрытия по окружному направлению, отсутствуют — раскрытие монотонно уменьшается от максимального значения у скважины к фронту трещины, и это наблюдается во всех рассмотренных направлениях (см. рис. 4.11, справа).

Такое поведение объясняется распределением давления в трещине в каждом из случаев. Давление маловязкой жидкости слабо меняется на большей части трещины и имеет сильный градиент в окрестности фронта (см. рис. 4.12, слева), тогда как изменение давления высоковязкой жидкости более плавное (рис. 4.12, справа), что обусловлено разницей раскрытия трещины, от третьей степени которого зависит градиент давления. Кроме того, давление в окрестности скважины у слабовязкой жидкости значительно меньше, что делает раскрытие более чувствительным к вариации сжимающих напряжений у скважины. При этом само давление жидкости более чувствительно к изменению раскрытия трещины, вызванного искривлением траектории, в случае высоковязкой жидкости. Это видно по отличию между кривыми давления 1 и 3, соответствующих ортогональным направлениям, на рисунке 4.12. Результатом такого отличия является большая неравномерность распространения трещины в различных направлениях при закачке высоковязкой жидкости: размер трещины в направлении x  $(\varphi = 90^{\circ})$  почти на 40 % больше, чем в направлении y ( $\varphi = 0^{\circ}$ ). При закачке маловязкой жидкости различие размеров не превосходит 8 %.

#### Влияние критического напряжения сдвига

Влияние критического напряжения сдвига удобно наблюдать при использовании Бингамовской жидкости, которая характеризуется единичным показателем степени n = 1 и фиксированным значением консистенции  $K = 0.03 \, \Pi a \cdot c$ , достаточно малым, чтобы ожидать наблюдаемого эффекта от вариации исследуемого параметра.

Как видно из рисунка 4.13, где показаны сечения поверхности трещины плоскостью yz (см. рис. 4.8), полученные при значениях критического напряжения сдвига  $\tau_0 = 0 \Pi a$  и  $\tau_0 = 1000 \Pi a$ , формы трещины практически совпадают. Отсутствие влияния критического напряжения сдвига на начальном этапе распространения обусловлено большими скоростями сдвига, вызывающими большие вязкие напряжения, значительно превосходящие значение  $\tau_0$ . Следует отметить, что этот результат был предсказан на основе безразмерного анализа в § 3.4.



Рисунок 4.13 – Сечения плоскостью <br/> yzповерхностей трещин, полученных при разных значениях критического напряжения сдвига:<br/>  $1-\tau_0=0;\,2-\tau_0=1000\,\Pi{\rm a}$ 

#### Влияние показателя степени

Исследование влияние показателя степени, как и при оценке влияния других параметров, удобно проводить при использовании наиболее простой реологической модели жидкости, в данном случае — степенной с параметрами  $K = 0.66 \,\Pi a \cdot c, \tau_0 = 0$ . Было рассмотрено три значения показателя степени в интервале от 0.8 до 1. Существенное влияние этого параметра на форму трещины видно на рисунке 4.14, где показаны сечения плоскостью *yz* поверхностей трещин, полученных при разных его значениях.

Чтобы рассмотреть влияние показателя степени более детально, на рисунках 4.15, 4.16 приведены распределения раскрытия и давления вдоль сечений трещины (см. рис. 4.8), полученные для минимального и максимального из рассмотренных значений. Из сопоставления пар рисунков 4.15–4.16 и 4.14–4.16 можно заключить, что влияние показателя степени n подобно влиянию консистенции K, что обусловлено уменьшением вязких напряжений при уменьшении каждого из этих параметров.

Проведенное в настоящем параграфе моделирование распространения поперечных трещин показывает что "пережатие" трещины ("pinching"), то есть



Рисунок 4.14 – Сечения плоскостью yz поверхностей трещин, полученных при разных значениях показателя степени: 1 - n = 1; 2 - n = 0.9; 3 - n = 0.8



Рисунок 4.15 – Распределения раскрытия трещины по различным сечениям, полученные для степенной жидкости с n = 0.8 (слева) и  $K = 0.66 \, \Pi a \cdot c, n = 1$  (справа):  $1 - \varphi = 0^{\circ}$ ;  $2 - \varphi = 45^{\circ}$ ;  $3 - \varphi = 90^{\circ}$ 



Рисунок 4.16 – Распределение давления жидкости по различным сечениям, полученные для степенной жидкости. Усл. обозн. см. рисунок 4.15

уменьшение ее раскрытия в окрестности скважины, хотя и присутствует при некотором сочетании параметров, выражено значительно слабее, чем, например, в случае продольных трещин, которое описано в § sec:LongitudinalPropag. Тем не менее, искривление формы трещины влияет на степень ее проникания в породу в различных направлениях.

# 4.2.3. Применимость модели ньютоновской жидкости для описания движения в трещине жидкости сложной реологии

# Применимость модели ньютоновской жидкости для описания начального этапа распространения трещины

Как было показано выше, начальный этап распространения трещины при сильном отличии сжимающих напряжений в породе может характеризоваться искривлением поверхности трещины, для описания которого необходимо применять сложные трехмерные модели. В сочетании с использованием сложной модели для реологии жидкости, это приводит к значительному повышению вычислительной сложности задачи. Поэтому применение более простой модели ньютоновской жидкости может повысить эффективность всей модели ГРП, и оправданно в случае, если такое упрощение не приводит к сильному искажению результатов расчетов. Проведенный в § 3.4 безразмерный анализ показывает, что использование модели ньютоновской жидкости для описания неньютоновской реологии возможно, здесь этот тезис будет продемонстрирован на основе результатов вычислительных экспериментов.

Одним из ключевых вопросов при описанном упрощении модели жидкости является выбор значения коэффициента вязкости  $\mu$ . Популярный в инженерных приложениях подход основывается на вычислении кажущейся вязкости по параметрам модели Гершеля–Балкли по формуле [240, 241]

$$\mu_{app} = (K\dot{\gamma}^n + \tau_0)/\dot{\gamma},\tag{4.4}$$

в которой скорость сдвига  $\dot{\gamma}$  выбирается исходя из типичных значений для трещины ГРП [241]  $\dot{\gamma} = 50 \,\mathrm{c}^{-1}$  или из стандартов лабораторного тестирования жидкостей гидроразрыва [242]  $\dot{\gamma} \in [5, 170 \,\mathrm{c}^{-1}].$ 

Для проверки такого инженерного подхода было проведено численное моделирование начального этапа распространения плоской круговой трещины при закачке четырех жидкостей гидроразрыва со следующими параметрами

- 1 ньютоновская жидкость 1:  $K = 0.075 \, \Pi \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}^n, \, n = 1, \, \tau_0 = 0 \, \Pi \mathbf{a};$
- 2 ньютоновская жидкость 2:  $K = 0.3 \, \Pi \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}^n, \, n = 1, \, \tau_0 = 0 \, \Pi \mathbf{a};$



Рисунок 4.17 – Зависимость давления в скважине от времени при закачке различных жидкостей: 1 — ньютоновская 1; 2 — ньютоновская 2; 3 — степенная; 4 — Бингамовская



Рисунок 4.18 – Распределения давления жидкости (слева) и раскрытия трещины (справа) вдоль радиальной координаты в момент достижения радиусом трещины R = 2.7 м. Усл. обозн. см. рисунок 4.17

- 3 степенная жидкость:  $K = 0.66 \,\Pi \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}^n, \, n = 0.8, \, \tau_0 = 0 \,\Pi \mathbf{a};$
- 4 Бингамовская жидкость:  $K = 0.075 \, \Pi a \cdot c^n$ ,  $n = 1, \tau_0 = 11 \, \Pi a$ .

Параметры жидкостей 3–4 выбраны таким образом, чтобы рассчитанные по формуле (4.4) кажущиеся вязкости  $\mu_{app}$  были равны вязкости ньютоновской жидкости 2. Нетрудно видеть, что значение скорости сдвига [241]  $\dot{\gamma} = 50 \,\mathrm{c}^{-1}$ , используемое для этого расчета, соответствует рекомендациям [242]. Значение вязкости ньютоновской жидкости 1 было вычислено по той же формуле (4.4) по параметрам степенной жидкости 3 но с использованием скорости сдвига  $\dot{\gamma} = 50 \cdot 10^3 \,\mathrm{c}^{-1}$  в 1000 раз больше рекомендованного.

На рисунке 4.17 приведены зависимости давления в скважине от времени,

136

полученные для рассмотренных четырех жидкостей. На рисунке 4.18 для них же показаны распределения давления и раскрытия вдоль радиуса трещины в момент времени, когда радиус трещины достиг 10 диаметров скважины. Легко заметить, что давление (раскрытие), рассчитанные при использовании жидкости 2 существенно отличается от давлений (раскрытий), соответствующих неньютоновским жидкостям 3-4, что говорит о неприменимости инженерных рекомендаций по вычислению кажущейся вязкости для начального этапа распространения трещины. Использование модели ньютоновской жидкости с малой вязкостью 1 позволяет получить зависимость давления от времени, совпадающую с зависимостью для Бингамовской жидкости 4 и близкую к зависимости для степенной жидкости 3. То есть, применение модели ньютоновской жидкости для описания начального этапа распространения трещины возможно, но значение скорости сдвига, выбираемое для вычисления кажущейся вязкости, должно быть значительно больше используемого в инженерных расчетах.

Для объяснения наблюдаемого результата достаточно вычислить скорости сдвига в трещине на начальном этапе распространения и сравнить их со скоростями сдвига, характерными для развитой трещины. Для вычисления скоростей сдвига использовалась формула [230]

$$\dot{\gamma} = 6 |\mathbf{u}| / w, \tag{4.5}$$

в которой значения модуля скорости  $|\mathbf{u}|$  и раскрытия трещины w полученными численно. Распределения скоростей сдвига приведены на рисунке 4.19 для нескольких моментов времени. Легко видеть, что скорости сдвига очень быстро убывают с ростом трещины, поэтому их значения на начальном этапе и для развитой трещины отличаются на порядки. Это и является причиной неприменимости инженерных рекомендаций по выбору скорости сдвига для численного моделирования начального этапа распространения трещины.

Оптимальным решением при моделировании начального этапа распространения было бы использовать для вычисления кажущейся вязкости актуальное значение сдвиговых напряжений в каждый момент времени, но оно не может быть определено заранее, так как само является результатом моделирования. Как уже указывалось в § 3.4 эффективная вязкость для модели ньютоновской



Рисунок 4.19 – Распределения кажущихся скоростей сдвига вдоль радиальной координаты в разные моменты времени для случая ньютоновской жидкости 2



Рисунок 4.20 – Сечения плоскостью *yz* поверхностей трещин, полученных при закачке различных жидкостей. Усл. обозн. см. рисунок 4.17

жидкости может быть определена по формуле (3.77) [233]. Параметры степенной жидкости 2 и параметры породы подобраны таким образом, чтобы вязкость ньютоновской жидкости 1 совпадала не только со значением кажущейся вязкости, полученной по формуле (4.4) при скорости сдвига  $\dot{\gamma} = 50 \cdot 10^3 \,\mathrm{c}^{-1}$ , но и со с значением эффективной вязкости, полученной по формуле (3.77).

Вывод о применимости модели ньютоновской жидкости для описания движения жидкости сложной реологии в трещине, распространяющейся на начальном этапе, может быть обобщен на случай искривляющихся трещин. Это демонстрирует рисунок 4.20, на котором приведены сечения плоскостью yz трещин, распространяющихся от наклоненной на  $\alpha = 60^{\circ}$  скважины. Хорошо видно, что форма трещины, полученная при закачке степенной жидкости (кривая 3), близка к форме трещины, предсказанной при закачке ньютоновской жидкости, вязкость которой вычислена по формуле (3.77) (кривая 1). Формы трещин, полученные при использовании Бингамовской жидкости и жидкости ньютоновской, полученной простым отбрасыванием предельного напряжения сдвига полностью совпадают (кривая 1). Как было показано выше, те же рассуждения верны для распределений давления и раскрытия.

Таким образом можно заключить, что при моделировании начального этапа распространения трещины для описания движения в трещине жидкости сложной реологии можно использовать модель ньютоновской жидкости. При этом коэффициент вязкости должен вычисляться с учетом степенного характера зависимости тензора напряжений от тензора скоростей деформаций (показатель степени n), тогда как значением предельного напряжения сдвига  $\tau_0$  при его вычислении можно пренебрегать.

#### Применимость модели ньютоновской жидкости для описания развитой трещины

В предыдущем параграфе было показано, что модель ньютоновской жидкости может использоваться для описания движения жидкости сложной реологии на начальном этапе распространения трещины. Легко показать (как и сделано в § 3.4 на основе безразмерного анализа), что этот вывод нельзя обобщить на развитые трещины, течение жидкости в которых характеризуется малыми скоростями сдвига. Термин "малые" в данном случае показывает сравнимость слагаемым в формуле (4.4) по величине, что наблюдается как раз при значениях скорости сдвига [242]  $\dot{\gamma} \in [5, 170 \, \text{c}^{-1}]$  и характерных для трещин гидроразырыва параметрах.

Демонстрацию зависимости поведения развитой трещины от реологии закачиваемой жидкости удобно провести на основе зависимости давления в скважине от времени. Для этого были выбраны четыре жидкости со следующими параметрами

- 1 ньютоновская:  $n = 1, \tau_0 = 0 \Pi a;$
- 2 Бингамовская:  $n = 1, \tau_0 = 400 \, \Pi a;$



Рисунок 4.21 – Зависимости давления в скважине от времени при закачке жидкостей различных реологий: 1 — ньютоновская; 2 — Бингамовская; 3 — степенная; 4 — Гершеля–Балкли

- 3 степенная: n = 0.5,  $\tau_0 = 0$  Па;
- 4 Гершеля–Балкли:  $n = 0.5, \tau_0 = 400 \, \Pi a.$

Остальные параметры задачи, использовавшиеся в вычислительных экспериментах, описывающих распространения плоской круговой трещины, были выбраны равными  $R_w = 0.5 \text{ м}, R_{\text{in}} = 1 \text{ м}, \sigma_x^{\infty} = \sigma_y^{\infty} = = 4 \text{ МПа}, \sigma_z^{\infty} = 3 \text{ МПа}, E = 20 \Gamma \Pi \text{a}, \nu = 0.2, K_{\text{I}c} = 3 \text{ МПа} \sqrt{\text{м}}.$ 

Зависимость давления в скважине от времени для выбранных жидкостей приведена на рисунке 4.21 в логарифмическом масштабе по обеим осям. Этот масштаб, используемый и в инженерных расчетах, удобен для демонстрации степенных зависимостей давления от времени, так как график давления в этом случае представляет собой прямую линию. Прямые линии графиков на рисунке 4.21, во-первых, показывают, что зависимости давления от времени действительно степенные, что соответствует типу зависимости, наблюдаемому в точных аналитических решениях. Во-вторых, они позволяют оценить влияние на давление и временной интервал процесса заполнения жидкостью изначально пустой зародышевой трещины до начала ее распространения — это выглядит как часть графика при  $t < 10^2$  с, на которой давление возрастает. В третьих, различные углы наклона свидетельствуют о различных показателях степени в функциях давления от времени и их зависимостях от реологии жидкости. Можно заключить, что на большом временном интервале модель ньютоновской жидкости является плохим приближением для любой из выбранных реологических моде-



Рисунок 4.22 – Зависимости давления в скважине от времени при закачке ньютоновских жидкостей с различными вязкостями:  $1-\Pi {\rm a\cdot c}$ 500; 2-1000; 3-2000

лей.

Легко показать, что путем выбора коэффициента вязкости в модели ньютоновской жидкости невозможно улучшить качество описания движения жидкости сложной реологии в случае развитой трещины. Действительно, при его варьировании зависимость давления в скважине от времени в логарифмическом масштабе не меняет угла наклона, как следует из рисунка 4.22, на котором приведены эти зависимости, полученные при закачке ньютоновских жидкостей различной вязкости. В то же время, такие параметры реологии как предельное напряжение сдвига  $\tau_0$  и показатель степени *n* при варьировании влияют именно на угол наклона зависимости давления от времени (см. рис. 4.21).

Исследование влияния реологии жидкости на другие параметры трещины не имеет смысла, так как высокая погрешность при вычислении давления определяет погрешность и в раскрытии трещины и ее траектории, что может вызвать ошибки в планировании расписания закачки, объеме проппанта и т.д.

## 4.2.4. Распространение трещины при закачке слабосжимаемой жидкости

Для исследования влияния сжимаемости жидкости на параметры распространяющейся трещины и возможности использования модели несжимаемой жидкости для описания жидкости сжимаемой удобно варьировать коэффициент сжимаемости при фиксированных остальных параметрах и наблюдать за основными характеристиками трещины: зависимостями давления в скважине от времени, распределениями давления и раскрытия по поверхности трещины в некоторый момент времени и формами серединной поверхности трещины. Интервал изменения коэффициента сжимаемости был выбран равным интервалу изменения сжимаемости для нефти [243]  $C_0 \in [0.3; 20] \cdot 10^{-9} \, \Pi a^{-1}$ . Сжимаемость воды, являющейся основным компонентом при создании жидкостей гидроразрыва  $C_0 = 0.46 \cdot 10^{-9} \, \Pi a^{-1}$ , также находится внутри этого интервала. Остальные параметры задачи совпадали с используемыми в § 4.2.3 при закачке ньютоновской жидкости 1 с вязкостью  $\mu == 0.075 \, \Pi a \cdot c$ .

Для учета влияния сжимаемости жидкости на форму трещины кроме плоской трещины была также рассмотрена трещина, распространяющаяся от скважины, наклоненной на угол 60°. Как видно из рисунка 4.23, где изображены зависимости давления в скважине от времени, полученные при закачке жидкостей различной сжимаемости, повышение сжимаемости жидкости вызывает повышение давления жидкости. При использовании модели несжимаемой жидкости для описания движения жидкости, сжимаемой с коэффициентом  $C_0 = 20 \cdot 10^{-9} \, \Pia^{-1}$ , погрешность определения давления может достигать 20%, которая, однако, падает с ростом трещины.



Рисунок 4.23 – Зависимости давления в скважине от времени, полученные для плоской трещины (слева) и для наклоненной на  $\alpha = 60^\circ$  (справа) для жидкостей различной сжимаемости: 0 – несжимаемая жидкость;  $1 - C_0 = 20 \cdot 10^{-9}; 2 - 10 \cdot 10^{-9}; 3 - 5 \cdot 10^{-9}; 4 - 2.5 \cdot 10^{-9} \, \mathrm{Ta}^{-1}$ 

Аналогичный вывод уже для раскрытия трещин можно сделать из рисунка 4.24, содержащего распределения давлений и раскрытий трещин вдоль радиальной координаты, которые получены в момент достижения трещинами радиуса 0.7 м при закачке жидкостей различной сжимаемости в наклонную скважину ( $\alpha = 60^{\circ}$ ). Погрешность вычисления раскрытия при использовании модели несжимаемой жидкости может достигать 30%.



Рисунок 4.24 – Распределения давления жидкости (слева) и раскрытия трещины (справа) в наклоненной на  $\alpha = 60^{\circ}$  трещине для жидкостей различной сжимаемости. Усл. обозн. см. рисунок 4.23

Следует отметить, что влияние сжимаемости жидкости на форму трещины практически отсутствует. Это видно из рисунка 4.25, на котором представлены сечения описанных выше трещин плоскостью *yz*. Таким образом сжимаемость жидкости необходимо учитывать только для определения давления и раскрытия трещин, тогда как на форму трещины сжимаемость не оказывает заметного влияния, и последняя может рассчитываться с использованием модели несжимаемой жидкости.



Рисунок 4.25 – Траектории трещины в плоскост<br/>иyzдля  $\alpha=60^\circ,$ полученные при закачке жидкости различной сжимае<br/>мости. Усл. обозн. см. рисунок 4.23

# 4.3. Моделирование распространения двух параллельных трещин

# 4.3.1. Постановка задачи о распространение поперечных трещин

При моделировании многстадийного ГРП, происходит одновременное распространение нескольких трещин, оказывающих влияние друг на друга. Это влияние обусловлено как распределением закачиваемой в скважину жидкости между трещинами, так и воздействием каждой трещины на НДС породы, которое определяет раскрытие других трещин. Исследованию взаимного влияния трещин друг на друга посвящено множество работа как экспериментального так и вычислительного характера [10, 12, 76, 140, 244–246].

Демонстрация возможности разработанной полной трехмерной модели описывать распространение нескольких трещин проведена на примере эксперимента [76], посвященного распространению двух трещин от двух пропилов, которые в вычислительном эксперименте рассматривались как круговые зародышевые трещины. Согласно описанию эксперимента в блоке породы с параметрами  $E = 20 \,\Gamma\Pi a, \nu = 0.2$  и трещиностойкостью  $K_{Ic} = 1 \,\mathrm{M}\Pi a \sqrt{\mathrm{m}}$ , сжатом напряжениями  $\sigma_H = 20.7 \,\mathrm{M}\Pi a, \sigma_h = 15.5 \,\mathrm{M}\Pi a, \sigma_v = 24.1 \,\mathrm{M}\Pi a$  в направлении действия  $\sigma_h$  просверлена скважина, в которой сделаны два пропила, как показано на рисунке 4.26. В скважину с расходом  $Q_{\mathrm{in}} = 0.5 \,\mathrm{cm}^3 / \mathrm{c}$  закачивалась жидкость с вязкостью  $\mu = 1000 \,\Pi a \cdot \mathrm{c}$ , давление которой вызывало распространение трещин от пропилов.

Ширина  $W_{\rm N} = 0.48 \,{\rm cm}$ , глубина  $d_{\rm N1} = d_{\rm N2} = d_{\rm N} = 2.54 \,{\rm cm}$  угол наклона  $\alpha = 0^{\circ}$  пропилов и расстояние между ними  $L = 5.08 \,{\rm cm}$ , показанные схематично на рисунке 4.27) в основной конфигурации были заданы такими же, как в эксперименте. Для исследования влияния каждого из них на распространение трещин каждый из параметров варьировался при фиксированных значениях остальных. Оценка такого влияния позволяет определить возможные взаимные расположения пропилов при проведении многостадийного гидроразрыва, при которых трещины не мешают распространению друг друга, и выбрать параметры пропилов, при которых необходимое для распространения трещины


Рисунок 4.26 – Схема задачи о зарождении трещины от цилиндрической полости с пропилами

давление достаточно мало и может обеспечиваться используемым оборудованием.

#### 4.3.2. Влияние расстояния между трещинами

Изменение расстояния между пропилами проводилась в интервале от одного до четырех диаметров скважины, то есть в интервале L = 2.54-10.16 см. Формы трещин, их сечения вертикальной плоскостью и зависимости давления в скважине от времени, полученные при распространении трещин, находящихся на различных расстояниях L, приведены на рисунках 4.28, 4.29.

Хорошо видно, что взаимное влияние трещин уменьшается при увеличении расстояния между ними, и если расстояние между трещинами не превосходит их радиуса, то такое влияние приводит к заметному изменению их форм. Также заметно влияние расстояния между трещинами и на давление в скважине на начальном этапе распространения (до 8% в первые 10 с при изменении расстояния в 4 раза). Однако это различие уменьшается с ростом трещин, и далее не превосходит 2% для всех рассмотренных конфигураций.



Рисунок 4.27 – Варьируемые геометрические параметры пропилов



Рисунок 4.28 – Формы трещин и их сечения вертикальной плоскостью, полученные при различных расстояниях между пропилами: 2.54 см (1), 5.08 см (2), 10.16 см (3)

#### 4.3.3. Влияние глубины и ширины пропилов

Поскольку увеличение размеров искусственно создаваемых пропилов требует более сложного оборудования, проведена оценка необходимой для распространения трещины глубины, для чего она варьировалась в интервале  $d_{\rm N} = 1.27-$ 5.08 см. Формы вертикальных сечений трещин и зависимости давления в скважине от времени, показанные на рисунках 4.30, 4.31, позволяют заключить, что глубина пропилов влияет только на необходимое для распространения трещин давление (до 25 % при увеличении в 4 раза) и не влияет на их форму. Последнее обстоятельство позволяет использовать для оценки давления распространения менее вычислительно требовательное моделирование одиночной трещины.

Изменение ширины пропилов проводилось в интервале  $W_{\rm N} = 0.24$ –0.96 см.



Рисунок 4.29 – Распределения давления в скважине при различных расстояниях между пропилами: 2.54 см (1), 5.08 см (2), 10.16 см (3)



Рисунок 4.30 – Формы трещин и их сечения вертикальной плоскостью, полученные при различных глубинах пропилов: 1.27 см (1), 2.54 см (2), 5.08 см (3)



Рисунок 4.31 – Распределения давления в скважине при различных глубинах пропилов  $d_{\rm N}$ : 1.27 см (1), 2.54 см (2), 5.08 см (3)

На рисунках 4.32, 4.33 показаны формы вертикальных сечений трещин и зависимости давления в скважине от времени, полученные при таком изменении. Видно, что ширина пропилов не влияет ни на давление ни на форму трещины, поэтому этот параметр может выбираться из технологических соображений.



Рисунок 4.32 – Формы трещин и их сечения вертикальной плоскостью, полученные при различных ширинах пропилов  $W_{\rm N}$ : 0.24 см (1), 0.48 см (2), 0.96 см (3)

#### 4.3.4. Влияние угла наклона

Так как скважина ориентирована в направлении действия минимального напряжения  $\sigma_h$ , то ортогональная скважине ориентация пропилов при угле  $\alpha$ 

148



Рисунок 4.33 – Распределения давления в скважине при различных ширинах пропилов: 0.24 см (1), 0.48 см (2), 0.96 см (3)

обеспечивает распространение плоской трещины, так как последняя уже находится в плоскости предпочтительного распространения. Для случая наклонного расположения пропилов угол варьировался в пределах  $\alpha = 0-45^{\circ}$ . На рисунках 4.34, 4.35, как и на рисунках выше, приведены формы вертикальных сечений трещин и зависимости давления в скважине от времени.

Взаимное влияние трещин вызывает их искривление с "отталкиванием" друг от друга, в то же время, из-за наклона пропила одна из его сторон направлена к второму пропилу, а другая от него. Поэтому трещины становятся несимметричны — одна из их сторон искривляется больше, чем другая. Например, правая часть верхнего пропила (см. кривую 4 на рис. 4.34, справа) направлена вверх, от нижнего пропила, тогда как левая часть — вниз к нему. По этой причине правая часть верхней трещины искривляется значительно меньше, чем левая. Кроме несимметричности взаимное влияние наклонных трещин в сочетании с анизотропностью напряжений приводит к увеличению давления в скважине, как видно из рисунка 4.35.



Рисунок 4.34 – Формы трещин и их сечения вертикальной плоскостью, полученные при различных угла наклона пропилов α, град.: 0 (1), 15 (2), 30 (3), 45 (4)



Рисунок 4.35 – Распределения давления в скважине при различных углах наклона пропилов  $\alpha$ , град.: 0 (1), 15 (2), 30 (3), 45 (4)

# 4.4. Моделирование распространения продольной трещины

В предыдущих параграфах приведены результаты моделирования распространения поперечной скважине трещины. Такая конфигурация возникает при проведении современного многостадийного ГРП для горизонтальных скважин. Это вызвано тем, что нефте- и газоносные пласты характеризуются большим значением вертикальных напряжений, чем горизонтальных, и предпочтительное направление распространения трещины (ортогональное действию минимальных

150

напряжений) может быть ортогонально и плоскости поперечной трещины. Более того, множественный ГРП на скважинах, ориентированных в направлении действия минимальных горизонтальных напряжений, более эффективен для повышения добычи в пласте, так как трещины охватывают больший его объем. В случае вертикальной скважины распространение поперечной трещины менее вероятно, так как ортогональная скважине плоскость (горизонтальная) заведомо не ортогональна направлению действия минимальных напряжений (при максимальных вертикальных напряжениях). В этом случае инициируется продольная, вертикальная трещина, которая затем переориентируется в плоскость предпочтительного распространения. Аналогичная ситуация может возникнуть при инициации трещины из горизонтальной скважины, ось которой совпадает с направлением действия средних (максимальных горизонтальных) напряжений.

Задача инициации трещины и влияния на ее ориентацию перфораций, пропилов и НДС пласта рассмотрена, например, в серии работ [239, 247–252] и лежит вне целей диссертационного исследования, поэтому далее будет считаться, что от скважины произошла инициация продольной зародышевой трещины, которая далее вызовет распространение продольной же основной трещины. При этом плоскость зародышевой трещины в общем случае не совпадает с плоскостью предпочтительного распространения, что обуславливает изменение формы серединной поверхности трещины.

## 4.4.1. Моделирование распространения трещины в трехмерной постановке

Моделирование распространения продольной трещины произведено в следующей постановке. Жидкость с вязкостью  $\mu = 0.5 \,\Pi a \cdot c$  закачивается в скважину с зародышевой трещиной с расходом  $Q_{\rm in} = 0.7 \cdot 10^{-3} \,{\rm m}^3 \,/\, c$ . Скважина находится в породе, характеризующейся параметрами  $E = 20 \,\Gamma \Pi a$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $K_{\rm Ic} = 3 \,{\rm M}\Pi a \,\sqrt{\rm m}$  и сжатой на бесконечном удалении напряжениями  $\sigma_{min} =$  $\sigma_h = 12 \,{\rm M}\Pi a$  и  $\sigma_{max} = \sigma_H = 16 \,{\rm M}\Pi a$ , действующими в плоскости, ортогональной к скважине, и напряжением  $\sigma_v = 16 \,{\rm M}\Pi a$ , действующим в направлении оси скважины, как показано рисунке 4.36. Радиус скважины равен  $r = 0.1 \,{\rm m}$ , полуоси зародышевой трещины, имеющей эллиптическую форму, равны  $a = 0.1 \,{\rm m}$  и b = 0.2 м, что дает максимальное расстояние между точками трещины равное 2b = 2a + 2r = 0.4 м в любом направлении. Высота скважины, равная 15a = 6 м, предполагается достаточно большой, чтобы исключить влияние торцов скважины на трещину в первые шаги распространения. Скважина считается не обсаженной, поэтому давление в скважине совпадает с максимальным давлением в трещине, без ослабления обсадной колонной.



Рисунок 4.36 – Схема задачи о распространении продольной трещины

Вместе с тем считается, что жидкость из скважины в трещину поступает только вдоль ограниченного участка кривой пересечения поверхности скважины с трещиной, а не по всей этой кривой. Это позволяет учесть факт наличия перфорации, которая и обеспечивает гидродинамическую связь скважины с трещиной.

Система координат введена таким образом, что оси x, y, z совпадают с направлением действия напряжений  $\sigma_{max}, \sigma_{min}, \sigma_v$ , соответственно, что обеспечивает выход трещины в плоскость xz на достаточном удалении от скважины. Ориентация зародышевой трещины характеризуется углом поворота  $\alpha$  между содержащей ее плоскостью и плоскостью xz.

На рисунке 4.37 приведены смещения берегов продольной трещины при угле поворота  $\alpha = 30^{\circ}$  и распределение ее раскрытия, показанное цветом на одном из берегов. Поскольку смещения берегов, полученные в результате решения задачи, малы, для заметности они были увеличены в 20 раз. Распределение раскрытия показывает, что максимальное значение достигается не у скважины, как в случае плоской трещины, а в области, где трещина выходит в плоскость предпочтительного распространения (ортогональную направлению действия мини-



мальных сжимающих напряжений).

Рисунок 4.37 – Смещения берегов продольной трещины при угле поворота  $\alpha = 30^{\circ}$  и распределение ее раскрытия по серединной поверхности (смещения берегов увеличены в 20 раз)

Для оценки влияния угла поворота зародышевой трещины на ее траекторию на рисунке 4.38 приведены траектории трещины и зависимости давления в скважине от времени для различных углов отклонения  $\alpha$ . В качестве траектории рассматривается кривая пересечения плоскости yz и поверхности трещины, отмеченная пунктиром и символом x на рисунке 4.37, так как в ней наблюдается наибольший изгиб поверхности и раскрытие трещины.



Рисунок 4.38 – Траектории трещины (слева) и зависимости давления в скважине от времени (справа) для различных углов отклонения α: 0 – 0°; 1 – 30°; 2 – 45°; 3 – 60°

Поскольку сравнение двумерных распределений затруднительно, на рисунке 4.39 приведены одномерные распределения раскрытия трещины для различных углов поворота и моментов времени. Распределения показаны вдоль кривой пересечения плоскости yz и поверхности трещины, отмеченной жирной линией и символом x на рисунке 4.37. При больших углах поворота раскрытие в окрестности скважины уменьшается на большую величину (сплошные кривые 0-4). При малых размерах трещины это уменьшение практически не заметно, так как давление в скважине и трещины в начальные моменты времени много выше чем минимальные и максимальные сжимающие напряжения, но с ростом трещины немонотонность раскрытия становится заметнее. Например, для угла поворота  $\alpha = 30^{\circ}$  (сплошная кривая 1 на рисунке 4.39) при t = 0.5 с "пережатие" отсутствует, но при t = 2 с, когда длина трещины увеличивается, а давление падает (см. рисунок 4.38, справа), уменьшение раскрытия в окрестности скважины становится заметным (пунктирная кривая 1).



Рисунок 4.39 – Одномерные распределения раскрытия трещины для различных углов отклонения  $\alpha$  и моментов времени (сплошная – t = 0.5 с, пунктир – t = 2 с): 0 – 0°; 1 – 30°; 2 – 45°; 3 – 60°

Для оценки влияния "пережатия" на весь процесс распространения трещины ГРП необходимо описывать его на протяжении длительного интервала времени, что в виду высоких требований полной трехмерной модели к вычислительным ресурсам неэффективно. Более экономичными для этой цели являются плоские двумерные модели. Последние основываются на предположении о том, что высота трещины (ее размер вдоль скважины) существенно больше, чем длина (глубина распространения от скважины вглубь породы). Подтверждение выполнимости этого предположения, то есть большей скорости распространения трещины вдоль скважины от нее, можно увидеть на рисунке 4.40, где приведены распределения раскрытия трещины вдоль пересечения ее серединой линии с поверхностью скважины (отмечена пунктиром и символом z на рисунке 4.37) и плоскостью yz (отмечена там же жирной линией и символом x).



Рисунок 4.40 – Одномерные распределения раскрытия трещины вдоль скважины (пунктир и символ *z* на рисунке 4.37) и вглубь породы (жирная линия и символ *x* на рисунке 4.37)

### 4.4.2. Описание эффекта пережатия трещины в двумерной постановке

Моделирование распространение трещины в двумерной постановке основывается на используемом в KGD модели предположении, что высота продольной трещины на начальном этапе ее распространения больше ее длины. Это позволяет рассматривать трещину как плоскую двумерную, рассчитывать деформацию породы в рамках плоского деформированного состояния и, пренебрегая учетом силы тяжести, описывать движение жидкости с помощью одномерных уравнений. Поскольку плоские двумерные модели менее требовательны к вычислительным ресурсам, на их основе можно проследить развитие трещины до больших размеров и оценить влияние эффекта пережатия на развитые трещины. Следует отметить, что первоначально эффект пережатия был исследован в рамках двумерных моделей [23, 24, 253], однако без обоснования возможности такого исследования.

#### Моделирование на основе модели трещины с фиксированной траекторией

Модель трещины с фиксированной траекторией была предложена в работе [23]. В основе модели лежит разбиение трещины на две части, как показано на рисунке 4.41: прискважинную, в которой траектория трещины задана некоторой кривой, и внешнюю, в которой трещина считается прямолинейной. Такое разбиение позволяет описывать распространение прямолинейной части трещины на основе аналитического решения KGD модели [253], в результате чего на рассматриваемом шаге распространения трещины известны значение длины трещины  $L_{frac}$  и распределение давления вдоль прямолинейной части трещины  $p^*(l, T)$ . В модели, сфокусированной на описании прискважинных эффектов, эти данные используются для задания граничных условий для подмодели прискважинной части трещины. Для расчета раскрытия трещины в прискважинной области ис-



Рисунок 4.41 — Схематичное представление разбиения трещины и расчетной области для уравнений упругого равновесия

пользуются двумерные уравнения упругого равновесия (1.5), (1.6), (1.7), в которых предполагается при отсутствие массовых сил. На берегах трещины  $\partial F^{\pm}$  и поверхности скважины  $\partial \Sigma$  задается вектор напряжений, равный произведению давления в трещине и скважине на нормаль к поверхности. На внешней границе вектор напряжений рассчитывается ка результат действия вспомогательного тензора напряжений  $\sigma^*$  на вектор нормали к границе. Вспомогательный тензор напряжений  $\sigma^*$  на внешних границах прискважинной области  $\partial \Pi_1$ ,  $\partial \Pi_2$  рассчитывается как результат аналитического решения плоской задачи о трещине длины  $L_{frac}$ , нагруженной давлением. При этом распределение давления получено из решения задачи о распространении KGD трещины ГРП [253], достигшей длины  $L_{frac}$ . Для решения задачи упругого равновесия использовался метод конечных разностей (MKP), который позволяет рассчитывать вектор смещений в узлах сетки внутри области, как показано на рисунке 4.42.



Рисунок 4.42 – Смещения границ скважины и берегов трещины в прискважинной области

Движение жидкости в части трещины, находящийся в прискважинной области, описывается уравнениями (3.30), записанными для одномерного случая. В качестве граничных условий задаются расход жидкости на входе в скважину и давление на правой границе  $l = L_{domain}$ , равное давлению, полученному из аналитического решения для прямолинейной трещины. Распределения давления и раскрытия, удовлетворяющие уравнениям движения жидкости и деформации породы в прискважинной области, рассчитываются методом релаксации.

Разработанная модель применена для описания эффекта пережатия для двух видов траекторий продольной трещины. Траектория первого вида — гладкая с постоянным радиусом кривизны R представляет собой дугу окружности выходящую из окружности скважины под углом  $\alpha$  и распространяющуюся до выхода на направление действия максимальных напряжений  $\sigma_{max}$  в естественном залегании, которому соответствует ось x выбранной системы координат, как показано на рисунке 4.43. Траектории второго вида состоят из отрезка длиной  $l^*$ , выходящего из окружности скважины под углом  $\alpha$ , и прямолинейной части, ортогональной направлению действия минимальных напряжения  $\sigma_{min}$ , которая соединяется с прямым отрезком, как показано на рисунке 4.44.

Вычислительные эксперименты были проведены для породы, характеризующейся модулем Юнга  $E = 38 \Gamma \Pi a$  и коэффициентом Пуассона 0.25, сжатой напряжениями  $\sigma_{min} = 50 \text{ M}\Pi a$  и  $\sigma_{max} = 75 \text{ M}\Pi a$ . Трещина распространялась при закачке ньютоновской жидкости с коэффициентом вязкости  $\mu = 1.2 \Pi a \cdot c$  с расходом  $Q_{in} = 0.00166 \text{ m}^2 / c$  на единицу высоты скважины. Рассматривалось состояние трещины, соответствующее моменту времени, когда ее длина достигает значения  $L_{frac} = 40 \text{ м}$ . Размер прискважинной части  $L_{domain} = 10 \text{ м}$  выбран достаточно большим, чтобы НДС на границах области слабо зависело от формы криволинейной части трещины.

На рисунке 4.42 приведены смещения точек породы в прискважинной области и смещения границ скважины и берегов трещины, которые демонстрируют эффект уменьшения раскрытия трещины у скважины. На рисунке 4.43 приведены распределения раскрытия трещины с гладкой траекторией вдоль длины трещины при фиксированном угле поворота  $\alpha = 60^{\circ}$  и при фиксированном радиусе кривизны. Видно, что большая длина криволинейного участка траектории, определяемая углом поворота и радиусом кривизны, приводит к большему пережатию, которое может уменьшить раскрытие трещины до 15% от раскрытия прямолинейной трещины. На рисунке 4.44 приведены распре-



Рисунок 4.43 – Распределения раскрытия трещины с круговой траекторией вдоль длины трещины при фиксированном угле поворота  $\alpha = 60^{\circ}$  (слева) и при фиксированном радиусе кривизны траектории R = 0.5 м (справа). Слева: точки – R = 0.5 м, пунктир – R = 3 м, точка-пунктир – R = 4 м. Справа: сплошная –  $\alpha = 0^{\circ}$ ; точки –  $\alpha = 30^{\circ}$ , пунктир –  $\alpha = 60^{\circ}$ , точка-пунктир –  $\alpha = 80^{\circ}$ .

деления раскрытия трещины с кусочно прямолинейной траекторией вдоль ее длины при фиксированном угле поворота  $\alpha = 60^{\circ}$  и при фиксированной длине

прямолинейного участка R = 0.5 м. Эта серия вычислительных экспериментов позволяет подтвердить вывод о прямой зависимости величины уменьшения раскрытия трещины от длины участка трещины, неортогонального направлению действия минимальных напряжений. Так же видно, что для обоих семейств траекторий величина пережатия сильно зависит от угла поворота  $\alpha$ , а область пережатия ограничена искривленным участком трещины.



Рисунок 4.44 – Распределения раскрытия трещины с изломом вдоль длины трещины при фиксированном угле поворота  $\alpha = 60^{\circ}$  (слева) и при фиксированной длине прямолинейного участка R = 0.5 м (справа). Слева: точки – R = 0.5 м, пунктир – R = 3 м, точка-пунктир – R = 4 м. Справа: сплошная –  $\alpha = 0^{\circ}$ ; точки –  $\alpha = 30^{\circ}$ , пунктир –  $\alpha = 60^{\circ}$ , точка-пунктир –  $\alpha = 80^{\circ}$ .

В работе [24] предложенная двумерная модель с фиксированной траекторией трещины была обобщена на случай обсаженной скважины. Развитие модели заключалось в рассмотрении деформации материала, состоящего из стальной обсадной колонны, цементной колонны и породы, имеющих различные модули Юнга (200, 8.28 и 20.7 ГПа, соответственно). Между областями ставилось условие равенства нормальных границе компонент векторов смещений и напряжений и задавались нулевые значения их касательных границе компонент. На основе модифицированной модели рассчитаны смещения в каждой из областей, как показано на левой части рисунке 4.45, и продемонстрировано сохранение эффекта пережатия в обсаженных скважинах, как видно из правой части рисунке 4.45. Модель трещины с заданной траекторией позволила обнаружить уменьшение раскрытия искривленной трещины в прискважинной области, показать возможность критического для закачки проппанта пережатия и оценить влияние параметров траектории и параметров НДС породы в естественном за-



Рисунок 4.45 – Смещения границ скважины, стали и цемента и берегов трещины в окрестности обсаженной скважины (слева) Распределения раскрытия прямолинейной трещины и искривленной трещины с гладкой траекторией *α* = 45° (слева)

легании на его величину Однако в рамках этой модели нельзя сделать вывод о неизбежности пережатия, поскольку она не отвечает на вопрос о реализуемости различных видов траекторий при распространении трещины.

#### Моделирование на основе двумерной модели с выбором траектории

В работе [75] предложена модель с выбором направления распространения трещины, являющаяся развитием модели с фиксированной траектории. Развитие заключалось в использовании для решения задачи определения НДС породы, вызванного давлением в трещине, более экономичного МГЭ<sup>5</sup> вместо МКР, рассмотрении всей трещины без выделения прискважинной части и добавлении критерия распространения трещины. Используемый двумерный критерий распространения трещины основывается на принципе локальной симметрии [204] и критерии скорости высвобождения энергии разрушения [172], записанных в неявной постановке, как и предложенный в Главе 3 глобальный критерий.

На основе этой модели был описан эффект пережатия трещины без предварительного задания ее траектории. Предполагалось, что распространение начинается с зародышевой трещины, ориентация которой определяется НДС породы и конфигурацией области перфорирования и не может быть определена на осно-

160

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup> Двумерная версия МГЭ является прообразом описанного в § 2.4 трехмерного МГЭ, не принадлежит автору диссертации и упоминается для полноты описания двумерной модели.

ве модели распространения. Поэтому были рассмотрены различные ориентации зародышевой трещины, описываемые углом поворота  $\alpha$ . На основе серии вы-



Рисунок 4.46 – Траектории распространения трещины гидроразрыва в зависимости от угла перфорирования <br/>  $\alpha$ : 1 –  $\alpha=30^\circ,$ 2 –  $\alpha=60^\circ,$ 3 –  $\alpha=90^\circ$ 



Рисунок 4.47 – Траектории распространения трещины гидроразрыва при угле  $\alpha = 30^{\circ}$  в зависимости от соотношения главных напряжений залегания  $k = \sigma_{\max}/\sigma_{\min}$ : 1 – k = 1.0, 2 – k = 1.1, 3 – k = 1.25, 4 - k = 1.5, 5 – k = 2.0

числительных экспериментов выявлены зависимости траектории трещины от угла наклона зародышевой трещины  $\alpha$  и анизотропности НДС породы, характеризующейся отношением значения максимальных сжимающих напряжений в породе к минимальным  $k = \sigma_{max}/\sigma_{min}$ . На рисунке 4.46 и 4.47 приведены траектории трещин, полученные для различных углов поворота и напряжениях в породе. Значения остальных параметров задачи были заданы следуюцим фиксированным значениям. Диаметр скважины D = 0.1м, длина перфорации  $L_0 = 0.1$ м. Модуль Юнга породы E = 20.7 ГПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0.27$ , трещиностойкость  $K_{Ic} = 1.5$  МПа·м<sup>0.5</sup>. Напряжения залегания равны  $\sigma_{min} = 69$  МПа,  $\sigma_{max} = 103.5$  МПа. Степенная жидкость с коэффициентом консистенции K = 0.6 Па·с<sup>n</sup> и показателем степени n = 0.8 закачивалась с расходом  $Q_{in} = 0.7 \cdot 10^{-3}$  м<sup>2</sup>/с в каждое крыло трещины. Видно, что размер криволинейного участка не превосходит нескольких диаметров скважины, что соответствует представлениям, сформированным на основе экспериментальных исследований [26], и увеличивается при увеличении анизотропности НДС породы. Также показано, что величина пережатия существенно зависит от угла поворота зародышевой трещины  $\alpha$  и может достигать 80% от раскрытия прямолинейной трещины. Это можно наблюдать на рисунке 4.48, где приведены распределения раскрытия трещины вдоль ее длины при различных углах поворота зародышевой трещины.



Рисунок 4.48 – Распределения раскрытия трещины в<br/>доль ее длины при различных углах поворота зародышевой трещин<br/>ы $\alpha$ : 1 –  $\alpha=30^\circ,$ 2 –  $\alpha=60^\circ,$ 3 – <br/>  $\alpha=90^\circ$ 

### 4.5. Заключение по Главе 4

Трехмерная модель распространения трещины, вызванной закачкой вязкой жидкости, применена для исследования распространения трещины гидроразрыва пласта.

- Проведена верификация путем сравнения результатов моделирования распространения радиальной трещины с результатам расчета с использованием одномерной модели и аналитическим решением, полученным для режима течения с доминирующей вязкостью.
- Показано, что при инициации трещины в направлении, не совпадающем с плоскостью действия минимальных напряжений в породе, возникает пережатие трещины в окрестности скважины. Для продольной к скважине

трещины это пережатие выражено значительно сильнее (до 80%), чем для поперечной (до 30%) и оказывает больший эффект на падение давления в прискважинной области. Эффекта пережатия для продольной трещины может описываться на основе моделирования в двумерной постановке, так как скорость распространения трещины вдоль скважины значительно превосходит скорость распространения вглубь породы.

• На основе численного анализа чувствительности траектории трещины и основных ее параметров получено подтверждение выводов, сделанных на основе безразмерного анализа. Показано, что при моделировании распространения трещины, вызванной закачкой в нее жидкости сложной реологии, на этапе формирования траектории можно использовать модель ньютоновской жидкости с правильно подобранным коэффициентом эффективной вязкости. Предельное напряжение сдвига на этом этапе не оказывает влияния на распространение трещины и может не учитываться.

# Иерархия моделей распространения трещины при закачке в нее вязкой жидкости

Последняя глава диссертации посвящена описанию иерархии моделей трещин, которые получаются из представленной выше полностью трехмерной модели путем добавления предположений о форме трещины. Такие предположения позволяют упростить описание движения жидкости, напряженнодеформированного состояния упругого материала и условий его разрушения, что повышает эффективность моделей при сужении области их применимости. В рамках диссертационного исследования разработаны модели, основывающиеся на следующих упрощающих предположениях.

- Поверхность трещины является заданной. Это позволяет находить на каждом шаге только величину приращения трещины в каждой точке ее фронта и отказаться от поиска направления распространения. Такая трещина может реализоваться на границе между материалами, и на основе модели такой трещины решена задача об определении стойкости гидроизоляции скважины к трещинам между цементной пробкой и обсадной колонной, описанная в параграфе 5.1.
- Поверхность трещины является плоскостью. В этом случае решение задачи деформации породы может быть выписано в виде интеграла, связывающего раскрытие трещины и давление в ней, и нет необходимости искать

все три компоненты вектора смещений. На основе такого предположения разрабатываются плоские трехмерные модели трещин ГРП, реализация одной из которых описана в параграфе 5.2.

- Плоская трещина имеет круговую форму. Такое предположение позволяет получить одномерные уравнения движения жидкости и осесимметричное решение задачи деформации породы. В рамках диссертационной работы модели круглой трещины применены для оценки места закупоривания трещины проппантом (параграф 5.3) и определения параметров естественных трещин по данным о потерях бурового раствора (параграф 5.4).
- Длины плоской трещины много больше ее фиксированной высоты. Благодаря этому предположению и гипотезе о независимости поперечных сечений, задача, как и в предыдущем случае, сводится к одномерной с локальной связью между давлением и раскрытием. Это предположение лежит как в основе классической PKN модели, так и двух приведенных в диссертации моделей, которые применялись для описания переноса проппанта в трещине и эволюции трещины до и после его остановки (параграфы 5.5, 5.6).

# 5.1. Модель трещины, распространяющейся вдоль заданной поверхности

В этом параграфе предложена модель трещины, полученная из описанной выше полностью трехмерной модели путем добавления предположения о заданной форме поверхности, вдоль которой распространяется трещина. В рамках такого предположения нет необходимости в использовании критерия, определяющего направление распространения трещины, и для определения формы фронта используется только критерий величины распространения. Полученная модель применяется для описания распространения трещины вдоль границы гидроизоляции скважины (пробки) и обсадной колонны [15].

#### 5.1.1. Актуальность задачи

При эксплуатации нефтяных скважин часто возникает необходимость изолировать нефтеносные слои от водоносных, а также отделить нефтеносные слои друг от друга. Кроме того гидроизоляция необходима при консервации скважины или при использовании истощенных месторождений для консервирования углекислого газа, призванного повлиять на его количество в атмосфере и уменьшить парниковый эффект [254].

Для этого применяется технология цементирования скважин, согласно которой внутрь обсадной колонны скважины помещается цементный раствор, образующий после застывания цементную пробку. Развитие добычи сланцевых газа и нефти, требующей большого количества как бурения скважин, так и их последующей консервации обуславливает необходимость исследования свойств и надежности гидроизоляции. При этом из-за высокой цены специального оборудования и материалов необходимо соблюдать баланс между стоимостью закупоривания скважины и надежностью гидроизоляции [255]. Хотя в настоящее время существуют попытки стандартизировать размеры пробки, параметры цемента и другие параметры цементирования, в них часто не учитываются такие особенности пластов, как температура, пластовое давление и т.д., которые существенно могут влиять на надежность гидроизоляции [256]. Несмотря на то, что пробка предназначена для полного изолирования нижней и верхней частей скважины друг от друга, потенциально возможны несколько путей перетока жидкости или газа между ними. Эти пути схематично показаны на рисунке 5.1, заимствованном из работы [254], и включают в себя следующие: через микроканалы на границах стальной обсадной колонны и цемента внутри или снаружи нее (a, b), на границе цемента с породой (f) или путем фильтрации через материал пробки (с).

Описанная ниже модель направлена на описание образования и распространения трещины на стыке обсадной колонны и пробки, которая приводит к образованию микроканалов, соответствующих случаю (b) на рисунке 5.1. Предполагается, что пробка находится под действием пластового давления, приложенного к нижнему торцу и давления в скважине, приложенного к верхнему. Изменения этих давлений, а также других параметров среды, окружающей пробку, могут привести к нарушению целостности пробки или нарушению ее связи с обсадной колонной и прорыву жидкости из одной части скважины в другую. В работах [ [257–259]] приводится количественный анализ риска утечки жидкости в скважину. Авторы работ утверждают, что трещины образуются только внутри обсадной колонны в канале, образовавшемся в случае неудачной заливки цемента, внутри цемента или, что наиболее распространено, на границе обсадной колонны и цементной пробки либо цементной оболочки и породы. В работе [260] на основе лабораторных и полевых тестов также было получено, что основной причиной утечек жидкости в скважину является отслоение цемента от стальной колонны. Кроме того, модель, разработанная для описания распространения трещины по внутренней границе обсадной колонны, может быть после незначительных модификаций применена для описания трещины, распространяющейся и по ее внешней стороне.

Применение разработанной модели трещины, распространяющейся вдоль заданной поверхности, позволит ответить на следующие вопросы, касающиеся особенностей распространения трещины по границе цементной пробки и стальной обсадной колонны, ответы на которые могут быть использованы при разработке рекомендаций для инженеров, проектирующих гидроизоляцию скважин.

- Если на нижней стороне пробки есть дефекты цементирования, неплотное прилипание цемента к стальной колонне и т.д., то имеет ли значение размер этого дефекта? Необходимы ли дополнительные меры по укреплению нижней части пробки или достаточно избегать крупных дефектов цементирования?
- Если все-таки произошло образование канала по границе цемента и обсадной колонны, то какую форму канала надо использовать при расчете объема протекания жидкости через гидроизоляцию? Происходит ли полный отрыв пробки от обсадной колонны или канал занимает лишь часть сечения?
- Какие параметры среди тех, что могут контролироваться при проведении работ по закупориванию скважины, влияют на надежность гидроизоляции?



Рисунок 5.1 – Схема ствола скважины с гидроизоляцией и возможные причины утечки жидкости (заимствовано из [254]).

#### 5.1.2. Постановка задачи

Рассматривается распространение трещины по границе цементной пробки и стальной обсадной колонны, которое вызвано проникновением жидкости в трещину под действием повышающегося давления в скважине на нижнем торце пробки (см. рисунке 5.2). При моделировании распространения трещины описывается деформация пробки, движение вязкой жидкости внутри нее и разрушение пробки на границе со стальной колонной.

Предполагается, что пробка помещается в скважину путем закачки заданного объема жидкого цемента с помощью давления, которое обеспечивает его продвижение на заданную глубину. Так как поровая жидкость из пласта свободно попадает в ствол скважины ниже пробки, то абсолютное давление на нижней границе пробки в момент ее помещения ( $t = t_0$ ) совпадает с давлением пластовой жидкости  $P_{n,0}^{abc}$ . Распределение абсолютного давления в остальном цементе  $P_{n,0}^{abc}(z)$  в этот момент определяется влиянием силы тяжести и равно

$$P_{\rm n,0}^{\rm abc}(z) = P_{\rm n,0}^{\rm abc}(z) - \rho_c g z \tag{5.1}$$



Рисунок 5.2 – Постановка задачи о распространении трещины, расчетная сетка и деформация пробки (смещения боковой поверхности увеличены в 1000 раз

После застывания цемента  $t = t_1$  в нем возникает дополнительное давление  $P_c$ , и напряженно-деформированное состояние уже твердой пробки характеризуется шаровым тензором напряжений

$$\sigma_0^{\text{abc}} = -P_{\text{II},1}^{\text{abc}}(z)I, \quad P_{\text{II},1}^{\text{abc}}(z) = P_{\text{II},0}^{\text{abc}}(z) + P_c = P_{\text{II},0}^{\text{abc}}(z) - \rho_c g z + P_c$$
(5.2)

При решении задачи о распространении трещины вдоль границы пробки это ее состояние будет считаться исходным, и изменение напряжений, деформаций и смещений материала будет рассчитываться относительно этого состояния. В результате фильтрации пластовой жидкости к скважине давление в ее окрестности повышается на некоторую величину  $P_p$ . Это вызывает отслаивание цемента от обсадной колонны и заполнение образовавшейся трещины пластовой жидкостью. В этот момент ( $t = t_2$ ) на нижний торец пробки  $\Gamma_{\rm H}$  и заполненную жидкостью область  $\Gamma_p$  (см. рисунок 5.2), действуют давления, равные

$$\Gamma_{\rm H}: P_{\rm H,2}^{\rm abc} = P_{\rm H,0}^{\rm abc} + P_p,$$
  

$$\Gamma_p: P_{\rm K,2}^{\rm abc} = P_{\rm H,0}^{\rm abc} - \rho_f g z + p,$$
(5.3)

Здесь давление жидкости в трещине  $P_{x,2}^{abc}$  представлено в виде суммы трех слагаемых: пластового давления на момент помещения цемента  $P_{n,0}^{abc}$ , гидростатической составляющей  $\rho_f gz$  и в общем случае переменного, нелинейного рас-

пределения давления p, вызванного движением жидкости в трещине и удовлетворяющего условию  $p|_{z=0} = P_p$ . Абсолютное поровое давление  $P_{n,2}^{abc}$  намного превышает его вариации  $P_p$ , а влияние силы тяжести может быть добавлено и в уравнения движения жидкости и в уравнения упругого равновесия благодаря их линейности. Поэтому для снижения погрешности вычислений при численном моделировании использовались относительные напряжения  $\sigma_0^{oth} = \sigma^{abc} - \sigma_0^{abc}$ , характеризующие изменение напряженного состояния пробки относительно состояния в момент застывания цемента  $t = t_1$ , и выше введенное давление p. Давления, действующие на нижний торец пробки и в области, где произошло отслоение, в терминах относительных напряжений  $\sigma_0^{oth}$  записываются как

$$\Gamma_{\rm H}: P_{{\rm I},2}^{\rm oth} = P_{{\rm I},1}^{\rm abc} - P_{{\rm I},1}^{\rm abc} \Big|_{z=0} = P_p - P_c,$$
  

$$\Gamma_{\rm H}: P_{{\rm H},2}^{\rm oth} = P_{{\rm H},2}^{\rm abc} - P_{{\rm I},1}^{\rm abc} = p - P_c + (\rho_c - \rho_f)gz.$$
(5.4)

Эти давления используются для постановки задачи упругого равновесия, а задача движения жидкости будет решаться без учета силы тяжести. Символ «отн» будет далее для компактности опускаться.

#### Деформация материала

Как и в трехмерной модели (см. параграф 1.3.1) деформация пробки описывается уравнениями упругого равновесия в предположении однородности, изотропности и линейной упругости материала 1.5–1.7 Отличия постановок заключаются в формулировке граничных условий. Расчетная область представляет собой цилиндр (см. рисунок 5.2), на нижнем  $\Gamma_{\rm H}$  и верхнем  $\Gamma_{\rm B}$  торцах которого задана нормальная к поверхности компонента тензора напряжений, равная поровому давлению жидкости в резервуаре (пластовому давлению) снизу  $P_{\rm p}$  и сверху  $P_0$  от пробки и давлению  $P_f$  движущейся жидкости в области, где произошел отрыв,

$$\Gamma_{\rm \scriptscriptstyle H}: p = P_{\rm p}, \quad \Gamma_{\rm \scriptscriptstyle B}: p = P_0, \quad \Gamma_p: p = P_f. \tag{5.5}$$

Во всех случаях силами трения жидкости и цемента пренебрегается, и нормальная к поверхности компонента тензора напряжений задается равной нулю. В области Г<sub>u</sub>, где цемент остается в контакте с обсадной колонной, заданы нулевые смещения

$$\Gamma_u : \mathbf{u} = 0. \tag{5.6}$$

В результате решения краевой задачи (1.5)-(1.7), (5.5)-(5.6) методом граничных элементов [5] рассчитывается вектор смещений **u**, по которому вычисляется раскрытие трещины w в области  $\Gamma_p$ . Деформация стальной обсадной колонны считается незначительной, так как модуль Юнга стали значительно (до 10 раз) превосходит модуль Юнга цемента, что обуславливает пропорционально меньшие деформации.

Следует отметить, что в момент затвердевания цемента пробка находится в преднапряженном состоянии. Предполагается, что это напряженное состояние обуславливается гидростатическим давлением  $-\rho_c gz$  цемента с плотностью  $\rho_c$  и дополнительным давлением, образующимся в результате гидратации цемента  $P_c$ . Поэтому избыточное давление жидкости в граничном условии (5.5) с учетом преднапряженного состояния рассчитывается как

$$P_f(z) = p - P_c + (\rho_c - \rho_f)gz,$$
(5.7)

где p —давление жидкости, полученное из решения уравнений ее движения без учета влияния силы тяжести,  $\rho_f$  — плотность жидкости, а уровень z = 0соответствует нижнему торцу пробки.

#### Движение жидкости

Для описания движения жидкости в трещине используется модель, описанная в параграфе 3.1.2, записанная для частного случая ньютоновской жидкости с постоянной вязкостью  $\mu$ .

В отличие от полной трехмерной модели, расчетная область для уравнений движения жидкости соответствует области отрыва цемента от стальной колонны (см. рисунок 5.2). На фронте жидкости  $\Gamma_{\phi}$  и входной границе ставятся условия для давления, поскольку расход жидкости в трещину неизвестен

$$\Gamma_{\mathfrak{K}}: p = 0, \quad \Gamma_{\mathfrak{H}}: p = P_p. \tag{5.8}$$

Уравнения (5.11), (5.12) с граничными условиями (5.8), как и в полной трех-

мерной модели, решаются методом конечных элементов, описанном в параграфе 3.2. При этом используется та же сетка и те же базисные функции, что и в методе граничных элементов, применяемом для решения уравнений упругого равновесия, как описано в параграфе 1.3 и работах [3, 4]. Положение фронта жидкости  $\Gamma_{\mathbf{x}}$  в каждый момент времени определяется из условия Стефана (5.17), согласно которому скорость жидкости на фронте равна скорости движения фронта. Как и в полной модели трещины гидроразрыва предполагается наличие отставания фронта жидкости  $\Gamma_{\mathbf{x}}$  от фронта трещины  $\Gamma_{\mathbf{\phi}}$  (см. рисунок 5.2). В этой области жидкость отсутствует, поэтому ее абсолютное давление полагается равным нулю.

#### Критерий разрушения

Так как поверхность, вдоль которой распространяется трещина задана внутренней поверхностью осадной колонны, нет необходимости в выборе направления распространения трещины. Для выбора величины приращения используется классический силовой критерий хрупкого разрушения, предложенный Ирвином [159], согласно которому трещина распространяется, когда коэффициент интенсивности напряжений (КИН) на ее фронте достигает критического значения для рассматриваемого материала. Поэтому на фронте трещины  $\Gamma_{\phi}$  ставится условие

$$K_I = K_{Ic},\tag{5.9}$$

которое и является условием для определения формы фронта трещины на каждом шаге ее распространения. Поскольку модули Юнга стали и цемента отличаются, как минимум, на порядок, предполагается, что обсадная колонна является абсолютно жестким телом. Это исключает наложение берегов трещины друг на друга и позволяет при расчете КИН учитывать только смещения цемента. КИН  $K_I$  вычисляется по раскрытию трещины в окрестности фронта на основе интерполяционных формул, описанных, например, в [5], которые дополнены условием неподвижности одного из берегов трещины. При определении критического значения КИН для трещины, распространяющейся по границе материалов, следует учитывать свойства каждого из материалов и величину сил их сцепления. Однако так как в распоряжении автора нет достаточной информации об этих свойствах, то предполагалось, что  $K_{Ic}$  может принимать любое значение от 0 до критического значения  $K_{Ic}$ , соответствующего цементу. Ниже будет показано, что этот параметр слабо влияет на способность пробки противостоять давлению жидкости, поэтому можно ожидать, что приведенные выше упрощения незначительно сказываются на результатах моделирования.

#### 5.1.3. Валидация

Ввиду сложности получения полной информации о поведении закупоренной скважины, находящейся в реальном пласте, для валидации построенной модели был выбран лабораторный эксперимент, описанный в [261]. Лабораторные образцы были изготовлены путем цементирования алюминиевой ( $E = 69\Gamma\Pi a$ ,  $\nu = 0.33$ ) трубы диаметра  $D_s = 40$ мм, имитирующей обсадную колонну ствола скважины, в скважину в блоке полиметилметакрилата ( $E = 3.3\Gamma\Pi a$ ,  $\nu = 0.35$ ). «Цемент» представлял собой эпоксидную систему ( $E = 2.5\Gamma\Pi a$ ,  $\nu = 0.35$ ). Вязкость закачиваемой жидкости равнялась  $\mu = 11.9\Pi a \cdot c$ , а давление на нижнем торце пробки было зафиксировано равным  $P_p = 10$ МПа. Трещина распространялась вдоль границы цемент-порода от нижнего конца пробки к ее верхнему концу. Формы трещин в различные моменты времени в ходе эксперимента показаны на рисунке 5.3. Видно, что в эксперименте наблюдалось распространение трещины как в продольном, так и в окружном направлениях. Разработанная



Рисунок 5.3 – Формы трещины, наблюдавшиеся в эксперименте [261]

численная модель способна описывать деформацию упругой пробки внутри, а не снаружи обсадной колонны. Поэтому при выполнении вычислительного экс-

перимента материал со свойствами, соответствующими полиметилметакрилату, используемому в эксперименте, был помещен внутрь обсадной колонны и трещина в вычислительном эксперименте распространяется внутри нее, а не снаружи, как в лабораторном. В результате удалось провести лишь качественное сравнение с экспериментом. Как и для реальных пробок, жесткость материала обсадной колонны в эксперименте много больше жесткости пробки, поэтому деформациями обсадной колонны пренебрегалось. Из-за неполного соответствия геометрии удалось провести лишь качественное сравнение с экспериментом.

Для оценки величины ошибки, вносимой численным решением уравнений была проведена серия расчетов на последовательности сгущающихся сеток, содержащих 160, 300 и 600 узлов для покрытия поверхности начальной трещины, с размерами элемента у фронта трещины 2, 1, и 0.5мм, соответственно, что соответствует 1/20 - 1/80 диаметра скважины. Также изменялся другой параметр численного алгоритма — величина приращения трещины за один шаг, который определяет максимальный размер элементов, добавляемых в сетку при приращении трещины. Его величина варьировалась от 1 до 4 мм (1/10 - 1/40 диаметра скважины). В обоих случаях была получена сеточная сходимость зависимости длины трещины от времени.

После выбора параметров численного алгоритма было проведено сравнение с результатами лабораторного эксперимента. На рисунке 5.4 представлены формы фронта трещины, наблюдаемые в лабораторном эксперименте и рассчитанные численно в различные моменты времени. Формы фронта, полученные на первых шагах моделирования, совпадают с формами, полученными в эксперименте. Там же приведены зависимости угла раствора трещины  $\Theta$ , вычисляемого по ее поперечному размеру h и диаметру скважины  $D_s$ , от длины трещины вдоль скважины L. Как видно, рассчитанная зависимость близка к наблюдаемой в лабораторном эксперименте. При дальнейшем распространении трещины асимметричность формы фронта возрастала, что в силу симметричности постановки задачи при проведении вычислительного эксперимента не может быть воссоздано.

Проведенное сравнение показывает, что предложенная модель позволяет описывать распространение трещины по границе обсадной колонны и цементной пробки, вызванной закачкой в нее вязкой жидкости.



Рисунок 5.4 – Формы фронта трещины, полученные в эксперименте (сплошные линии) и в численном моделировании (пунктирные линии), в различные моменты распространения трещины (слева). Зависимость угла раствора  $\Theta$  от длины трещины L вдоль оси скважины (справа)

#### 5.1.4. Оценка стойкости гидроизоляции скважины

Для проведения вычислительных экспериментов были выбраны следующие параметры: модуль Юнга цемента  $E = 9\Gamma\Pi a$ , коэффициент Пуассона  $\nu = 0.15$ , плотность  $\rho_c = 2000 \text{kr/m}^3$ , коэффициент трещиностойкости  $K_{Ic}$  варьировался от 0.025 до 0.2МПа· $\sqrt{m}$ , плотность поровой жидкости  $\rho_c = 800 \text{kr/m}^3$ , вязкость  $\mu = 0.2\Pi a \cdot c$ , внутренний диаметр обсадной колонны  $D_s = 0.3$ м, пластовое давление и давление застывания цемента, если не указано иное, равны  $P_p = 10$ МПа и  $P_c = 0$ .

#### Влияние размера начального дефекта

Одной из целей исследования была оценка чувствительности давления, необходимого для начала распространения трещины, к размеру начального дефекта, обусловленному несовершенством цементирования. Для этого были рассмотрены дефекты различного размера и для каждого найдено давление, необходимое для удовлетворения критерия распространения (5.9). В качестве параметра, определяющего размер дефекта или начальной трещины, выбран угол раствора трещины  $\Theta$  (см. рисунок 5.4). Для упрощения анализа предполагается, что критерий удовлетворяется во всех точках фронта, что позволяет для каждого угла раствора  $\Theta$  определить длину трещины и форму фронта. В самом деле, если в для распространения трещины в каких-либо точках фронта требуется большее давление, чем для распространения в остальной его части, то это давление приведет к распространению всего фронта до тех пор, пока не условие (5.9) не будет выполнено для всего фронта.



Рисунок 5.5 – Форма трещины с постоянным давлением (слева). Зависимости давления, необходимого для распространения трещины, (сплошная линия) и длины трещины (пунктир), от угла раствора трещины  $\Theta$  (справа)

На рисунке 5.5 приведены формы фронта, полученные для различных углов раствора  $\Theta$ , и зависимость давления, необходимого для начала распространения трещин, имеющих такую форму. Видно, что с ростом размера дефекта давление ведет себя не монотонно. Как и в случае круговых трещин в пространстве, давление, необходимое для начала распространения трещины, падает с ростом ее размера. Затем, из-за того, что трещина находится в ограниченном пространстве, зависимость давления от размера становится обратной, в силу того, что трещина охватывает пробку с разных сторон и сжимающие напряжения в пробке увеличиваются. Этот эффект говорит о том что, если произошла инициация трещины, то угол ее раствора достигнет примерно  $\Theta = 90^{\circ}$ , так как для роста трещины требуется меньшее давление, чем для инициации. Таким образом показано, что размер начального дефекта не важен и в практических приложениях следует либо обеспечивать совершенное прилипание цемента к обсадной колонне, либо искать механизмы, предотвращающие распространение трещины, а не ее инициацию. Сходный вывод был сделан в [262], где на основе экспериментального исследования прочности цементных пробок сделан утверждалось о существенном увеличении их стойкости при использовании дополнительного укрепления именно их нижней части (металлические пробки, высоковязкие жидкости и т.д.).

Второе наблюдение из рисунка 5.5, заключается в том, при увеличении размера трещины ее форма становится более вытянутой вдоль скважины. При увеличении угла раствора  $\Theta$  наряду с ростом давления  $P_c$ , необходимого для распространения трещины наблюдается рост и производной  $\partial L/\partial \Theta$ , что видно по углу наклона графика. Это говорит о том, что с ростом размера трещины распространение вдоль скважины становится предпочтительным, то есть требует меньшего давления в трещине, чем распространение в окружном направлении. Последнее исключает возможность распространения трещины по всей окружности скважины и полный отрыв пробки от обсадной колонны. Тот же вывод был сделан в [261] на основе лабораторных экспериментов и анализа напряженного состояния пробки в двумерной постановке.

#### Влияние пластового давления на скорость распространения трещины

Очевидно, что, так как для инициации трещины требуется увеличение давления, то повышение давления приводит к большей вероятности инициации трещины. Однако важным параметром является скорость, с которой будет распространяться трещина после инициации. Для определения этой величины необходимо описывать движение жидкости в трещине вместо задания в ней постоянного давления, как было сделано в предыдущем разделе. На рисунке 5.6, слева приведены зависимости длины трещины от времени, полученные для различных длин начальной трещины и давлений резервуара. Видно, что трещины различной начальной длины распространяются с одинаковой скоростью, которая зависит от пластового давления  $P_p$ . Единственное отличие состоит в том, что трещине, стартующей с меньшего дефекта, требуется некоторое незначительное время для достижения размера большего начального дефекта. Эти зависимости подтверждают вывод, сделанный в предыдущем разделе без учета движения жидкости, об отсутствии влияния размера начального дефекта на распространение трещины. На том же рисунке 5.6, справа в логарифмическом масштабе приведены зависимости скорости распространения трещины  $v_{\rm T}$  от ее

длины, полученные при различных значениях пластового давления. Видно, что эта величина является определяющим параметром для скорости распространения трещины, так, например, ее увеличение в 2-3 раза приводит к увеличению скорости распространения трещины в 10-30 раз.



Рисунок 5.6 – Зависимости длины трещины от времени при различных длинах начальной трещины  $L_0$  и давлениях в резервуаре  $P_p$  (слева: ): 1, 3 –  $P_p = 10$ МПа; 2, 4 –  $P_p = 2$ МПа; 1, 2 –  $L_0 = 0.1$ м; 3, 4 –  $L_0 = 0.4$ м. Зависимости скорости распространения трещины от времени при различных давлениях в резервуаре: 1, 2, 3 –  $P_p = 5, 10, 15$ МПа соответственно (справа)

В отличие от существенного влияния давления  $P_p$ , действующего на нижний торец пробки, влияние давления  $P_0$ , действующего на ее верхний торец со стороны столба жидкости в скважине, незначительно. Этот факт был подтвержден серией расчетов, проведенных при различных значениях этого давления, и подкрепляется следующими теоретическими рассуждениями.

После застывания пробка представляет собой цилиндр, большая часть боковой поверхности которого (за исключением области течения жидкости) неразрывно связана с обсадной колонной и потому неподвижна. Это значит, что действие давления на пробку со стороны верхнего торца компенсируется силами, вызванными условиями прилипания на боковой поверхности в его окрестности. То есть равнодействующая сил, действующих со стороны столба жидкости и обсадной колонны, равна нулю. Так как диаметр пробки не превосходит полуметра, а длина пробки обычно более десяти метров, размер области, где действуют силы, вызванные приложением давления , много меньше, чем расстояние до нижнего торца пробки — области, где происходит начальное развитие трещины. Это позволяет применить принцип Сен-Венана, согласно которому локальным распределением сил, равнодействующая которых равна нулю, можно пренебрегать при описании напряженно-деформированного состояния на достаточном удалении от области, где они приложены.

# Влияние трещиностойкости цемента на скорость распространения трещины

Важным параметром при изучении механики трещин является трещиностойкость или критическое значение коэффициента интенсивности напряжений  $K_{Ic}$ . Значение этого параметра для пары материалов сталь-цемент в общем случае трудно определима, так как зависит от параметров самого цемента и условий его затвердевания. Тем не менее, при проведении работ по закупориванию скважины эта величина поддается влиянию путем выбора параметров цемента, времени его затвердевания до снятия давления с верхнего торца пробки и т.д., поэтому исследование чувствительности стойкости пробки к изменению этой величины представляет интерес для инженеров, проектирующих закупоривание скважины. Достоверно известно, что трещиностойкость соединения ограничена снизу и сверху нулем и трещиностойкостью самого цемента. Поэтому для изучения влияния этого неизвестного параметра его значение варьировалось в интервале  $0.025 \text{M}\Pi a \cdot c \leq K_{Ic} \leq 0.2 \text{M}\Pi a \cdot c$  и оценивалась изменение скорости распространения трещины, как показано на рисунке 5.7. Хотя при малых значениях трещиностойкости из-за численных эффектов скорость распространения в немонотонна, но ее усредненное поведение совпадает наблюдаемым в остальных случаях — скорость распространения уменьшается с ростом длины трещины.

Видно, что трещиностойкость материала (или границы между материалами) влияет на скорость распространения трещины, но это влияние снижается с ростом ее длины. Например, когда длина трещины равна двум диаметрам ствола скважины ( $\approx 0.6$ м), скорость распространения, полученная при  $K_{Ic} = 0.025$ МПа · с в 4 раза больше скорости, полученной при  $K_{Ic} = 0.2$ МПа · с (в 8 раз большей трещиностойкости). Но это соотношение уменьшается примерно до 1.5, когда длина трещины достигает десяти диаметров ствола скважины ( $\approx 3$ м). Таким образом можно сделать вывод, что влияние трещиностойкости на скорость распространения трещины ограничено начальным этапом распространения трещины, когда ее длина не превышает примерно десяти диаметров ствола скважины.



Рисунок 5.7 – Зависимости скорости распространения трещины от ее длины при различных значениях трещиностойкости цемента: 1 –  $K_{Ic} = 0.025$ МПа · c; 2 –  $K_{Ic} = 0.05$ МПа · c; 3 –  $K_{Ic} = 0.1$ МПа · c; 4 –  $K_{Ic} = 0.2$ МПа · c

#### Влияние преднапряженного состояния цемента на скорость распространения трещины

Еще один параметр, который доступен для влияния со стороны инженеров, проектирующих закупоривание скважины, это давление  $P_c$ , которое характеризует преднапряженное состояние цемента, зависящее как от давления, при котором происходит его застывание, так и от добавок, влияющих на степень его сжатия или расширения при застывании. На основе уравнения (5.7), в котором давление в цементе вычитается из давления жидкости, можно ожидать, что его влияние будет по величине эквивалентно влиянию пластового давления, но противоположным по знаку. Для проверки этого предположения были рассчитаны скорости трещины при двух значениях пластового давления  $P_p = 10$  и 9МПа и трех значений давления цемента  $P_c = 0, 0.5$  и 1МПа. Как видно из рисунке 5.8, скорости, полученные для случаев  $P_p = 10$ МПа,  $P_c = 0.5$ МПа и  $P_p = 9$ МПа,  $P_c = 0$ МПа близки, то есть увеличение давления цемента на 0.5МПа оказалось
практически эквивалентным снижению пластового давления на 1МПа. Это объясняется тем, что приведенное выше соображение не учитывает эффект отставания фронта жидкости от фронта трещины, в результате которого образуется область не заполненная жидкостью. В этой области проявляется влияние давления застывания цемента, но отсутствует влияние пластового давления. Таким образом, одним из способов повышения стойкости гидроизоляции скважины может являться повышение давления, характеризующего преднапряженное состояние цемента, причем увеличение этого параметра имеет примерно вдвое больший эффект, чем повышение пластового давления.



Рисунок 5.8 – Зависимости скорости распространения трещины от ее длины при различных пластовых давлениях и давлениях застывания цемента:  $1-P_p=10{\rm MIa}, P_c=0{\rm MIa}; 2-P_p=10{\rm MIa}, P_c=0.5{\rm MIa}; 3-P_p=10{\rm MIa}, P_c=1{\rm MIa}; 4-P_p=9{\rm MIa}, P_c=0{\rm MIa}.$ 

Расстояние между фронтами трещины и жидкости зависит, как и в случае классической трещины гидроразрыва, от сжимающих напряжений в материале, в роли которых в данном случае выступает напряжения в цементе. Они складываются из гидростатических напряжений в жидком цементе перед его застыванием и добавочного давления  $P_c$ , появившегося при его застывании. При рассматриваемых параметрах максимальный по всему фронту размер расстояния между фронтами трещины и жидкости составил 5.5 см при  $P_c = 0$  и 2 см при  $P_c = 1$  МПа. Несмотря на то что размер области, не заполненной жидкостью, мал по сравнению с размерами трещины, эта область расположена в окрестности фронта трещины, поэтому напряжения в ней оказывают влияние на ширину всей трещины. Таким образом, одним из способов повышения стойкости гидроизоляции скважины может являться повышение давления, характеризующего преднапряженное состояние цемента, причем увеличение этого параметра имеет примерно вдвое больший эффект, чем повышение пластового давления.

# 5.1.5. Заключение по результатам применения модели трещины, распространяющейся вдоль заданной поверхности

Разработанная на основе полной трехмерной модели Разработанная модель трещины, распространяющейся вдоль заданной поверхности, применена для описания инициирования и распространения трещины вдоль границы цементной пробки и стальной обсадной колонны. Валидация модели, проведенная путем сравнения с лабораторным экспериментом [261], показала качественное согласование форм фронта трещины в различные моменты времени.

На основе серии вычислительных экспериментов сделаны выводы о чувствительности скорости распространения трещины, а значит и стойкости гидроизоляции скважины к следующим основным параметрам.

- Определяющим параметром, влияющим на скорость распространения трещины, является давление в пласте. Если пластовое давление превышает давление в цементной пробке, то из дефектов цементирования на нижнем торце пробки может развиться трещина.
- Размер дефекта цементирования не имеет значения, так как давление, требуемое для продолжения распространения трещины, растёт с ростом ее размера. Только использование подходов, полностью устраняющих дефекты цементирования на нижней границе пробки, может существенно увеличить стойкость гидроизоляции.
- Трещиностойкость цемента или пары цемент-сталь влияет на скорость распространения трещины только на начальном этапе распространения, когда

ее длина не превосходит десяти диаметров скважины. Увеличение агдезии цемента не приведет к заметному повышению стойкости гидроизоляции.

• Преднапряженное состояние цемента оказывает существенное (вдвое большее, чем пластовое давление) влияние на скорость распространения трещины. Увеличение давления застывания цемента на 1 МПа позволяет гидроизоляции противостоять пластовому давлению, увеличенному на вдвое большую величину.

### 5.2. Модель плоской трехмерной трещины

Дальнейшее упрощение модели трещины проведено путем выбора плоскости в качестве поверхности, по которой распространяется трещина [13]. Это позволяет отказаться от метода граничных элементов, связывающего смещения и усилия на берегах трещины через СЛАУ, и использовать интегральное уравнение, связывающее непосредственно давление p и раскрытие трещины w. Поскольку трещина может считаться плоской только в случае, когда размер искривленного участка много меньше размера трещины, естественным применением плоской модели является описание распространения развитых трещин. Такие трещины характеризуются, в том числе, относительно малым размером "лага" - области в окрестности кончика трещины, не заполненной жидкостью. Это не позволяет использовать описанный в параграфе 1.4 алгоритм, который основан на выделении границ фронта трещины и жидкости, так как это потребовало бы неоправданно сильного сгущения расчетной сетки. Вместо этого в модели используются асимптотические решения для кончика трещины [126], дающие аналитическую зависимость раскрытия трещины от скорости распространения и расстояния до фронта.

Плоские трехмерные модели в настоящее время широко развиваются как в научных работах, так и в промышленных симуляторах (MFrac [110], FracCade [134]), поскольку, в отличие от полностью трехмерных моделей, они достаточно вычислительно эффективны, чтобы их можно было использовать для серийных расчетов, и тем не менее способны учитывать основные особенности развитых трещин. Поэтому иерархия моделей трещин, от простейших до полностью трехмерной, включает в себя и плоскую трехмерную модель.

#### 5.2.1. Математическая модель

Предположения о свойствах породы совпадают с предположениями, сделанными при разработке полностью трехмерной модели (однородность, изотропность хрупкость, линейная упругость материала). Единственное отличие обусловлено плоской формой трещины, в результате чего при описании напряженного состояния породы в естественном залегании учитывается только нормальное к плоскости трещины сжимающее напряжение  $\sigma_c(y)$ , которое может зависеть от глубины залегания y. Жидкость считается ньютоновской несжимаемой с постоянной вязкостью  $\mu$  и постоянной скоростью закачки через перфорацию со скоростью  $Q_{in}$ .

Предполагается, что трещина является развитой, поэтому, в отличие от полной трехмерной модели, фронт трещины совпадает с фронтом жидкости и описывается одной и той же плоской кривой  $\mathbf{x}_f$ . Таким образом, переменными, которые необходимо вычислять на каждом шаге распространения, являются двумерные распределения давления p и раскрытия w и фронт трещины  $\mathbf{x}_f$ , который ограничивает трещину.

Система координат вводится таким образом, что начало координат (0,0) расположено на входе в перфорацию, а плоскость xy совпадает с плоскостью трещины. Крылья трещины считаются симметричными, и рассматривается только одно крыло, как показано на рисунке 5.9. Направления x, y считаются эквивалентными за исключением распределения сжимающих напряжений  $\sigma_c(y)$ , которое зависит только от одной координаты.

#### Деформация породы

В отличие от полностью трехмерной модели при описании распространения плоской трехмерной трещины достаточно находить только раскрытие трещины, а не все три компоненты вектора смещений. Поэтому вместо МГЭ, здесь используется традиционное для плоских трехмерных моделей [123] решение задачи о плоской нагруженной давлением трещине, записанное в виде гиперсингулярного уравнения [263], [264]

$$p(x,y) = -\frac{E'}{\pi} \int_{S} \frac{w(x',y')dx'dy'}{\left((x'-x)^2 + (y'-y)^2\right)^{2/3}} + \sigma_c(y).$$
(5.10)



Рисунок 5.9 – Схема плоской трещины и расчетной сетки

#### Движение жидкости в трещине

Для описания движения жидкости в трещине используется модель, описанная в параграфе 3.1.2, примененная к частному случаю ньютоновской жидкости с постоянной вязкостью  $\mu$ .

$$\nabla \cdot (a\nabla p) = f, \tag{5.11}$$

where

$$a = \frac{W^3}{12\mu}, \quad f = \frac{\partial W}{\partial t} + Q(x, y)\delta(x, y). \tag{5.12}$$

Единственным дополнением в уравнениях (5.11)-(5.12) является источниковое слагаемое  $Q(x, y, t)\delta(x, y)$  которое включает в себя закачку жидкости через перфорацию в точке (x = 0, y = 0) с расходом  $Q_{in}$  и утечку жидкости в породу  $Q_L$ . Последнее рассчитывается по формуле Картера [47]

$$Q_L = -\frac{C_L}{(t - t_{exp})^{0.5}},\tag{5.13}$$

в которой используются коэффициент утечки  $C_L$  и момент  $t_{exp}$  прохождения фронта трещины через точку (x, y).

Уравнения (5.11) дополняются

1. нулевым, в силу симметричности задачи, условием на поток жидкости на

185

границе симметрии, обозначенной  $\Gamma_q$ на рисунке 5.9

$$\Gamma_q : \mathbf{q} = (a\nabla p) = 0, \tag{5.14}$$

2. и условием на давление на фронте трещины  $\mathbf{x}_f$ 

$$\mathbf{x}_f: p(x,y) = p_{out}(x,y). \tag{5.15}$$

Следует отметить, что в литературе описаны и другие варианты постановки граничных условий. Например, в [265] на фронте трещины вместо давления задается поток жидкости. Но при таком условии уравнение течения жидкости не может быть решено независимо от остальных уравнений модели из-за неединственности решения задачи Неймана. Хотя при использовании в составе общей модели уравнения движения жидкости дополняются условием на общий объем трещины, что обеспечивает единственность давления, в диссертационной работе этот подход не используется для сохранения корректности постановки каждой из подзадач.

#### Распространение трещины и асимптотические условия на фронте

Для получения замкнутой модели, необходимо задать условие для давления  $p_{out}$  на фронте трещины и рассчитать скорость распространения фронта  $V_f$ . Для этой цели в работе используется асимптотическое решение [124], полученное для плоской полубесконечной трещины, распространяющейся в упругом хрупком материале с постоянной скоростью. На основе этого асимптотического решения, можно получить соотношения для параметров трещины в точке  $\mathbf{x}_s$ , расположенной в окрестности фронта трещины на некотором расстоянии *s* от него. Поэтому решение уравнений (5.10), (5.12), (5.14), (5.15) в окрестности фронта, показанной на рисунке 5.10, заменяется соотношениями, полученными из асимптотических решений.

Эти соотношения для точки в окрестности фронта  $\mathbf{x}_s$ , согласно работе [125], могут быть выписаны в виде выражения для раскрытия трещины

$$w \approx w_a(s, V_f). \tag{5.16}$$

Их можно дополнить условием Стефана, согласно которому скорость каждой точки фронта равна скорости жидкости в ней, и которое может быть переписано в терминах расстояния s от неподвижной точки  $\mathbf{x}_s$  до движущейся точки фронта  $\mathbf{x}_f$  в виде

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d\mathbf{x}_f}{dt} = V_f. \tag{5.17}$$

Объем части трещины между ее фронтом и точкой  $\mathbf{x}_s$  (см. рисунок 5.10) является функцией раскрытия трещины V = V(w(s), s), и для него выполнен закон сохранения, связывающий изменение объема прифронтовой части и нормальную к фронту составляющую скорости жидкости  $v_s$  в точке  $\mathbf{x}_s$ 

$$\frac{dV}{dt} = v_s. \tag{5.18}$$

Как будет показано ниже, объединение уравнений (5.16)–(5.18) может быть использовано для выражения скорости фронта трещины  $V_f$  и ее раскрытия  $w_a$  на расстоянии *s* от фронта через значение скорости жидкости  $v_s$  в точке  $\mathbf{x}_s$  в окрестности фронта.



Рисунок 5.10 – Схема прифронтового участка трещины на двух шагах распространения

#### 5.2.2. Численный метод

#### Расчетная сетка и типы ячеек

В отличие от полной трехмерной модели, в модели плоской трещины используется стационарная декартова вычислительная сетка с ячейками  $n_x \times n_y$  размером  $h_x \times h_y$ , которая позволяет упростить аппроксимацию уравнений движения жидкости и интегрального уравнения (5.10). Предполагается, что давление и раскрытие трещины аппроксимируются внутри ячеек константами, отнесенными к центрам ячеек. Следуя работам [123], [265] расчетная сетка, покрывающая внутренность трещины представлена ячейками двух типов: "*прифронтовыe*" (n) и "внутренние" (c), как показано на рисунке 5.9.

Каждой ячейке расчетной сетки (независимо от того, содержится она в внутри трещины или нет) сопоставляется пара индексов (двумерный индекс) i, j, которая не меняется в процессе расчета. Для ячеек, которые полностью находятся внутри трещины, наряду с двумерной нумерацией вводится новая одномерная 1 < k < K. Это позволяет рассматривать давление p(x, y) и раскрытие w(x, y)как одномерные векторы  $P = (p_1, ..., p_K), W = (w_1, ..., w_K)$  на каждом шаге распространения. Использование введенной одномерной нумерации позволяет записать аппроксимацию двумерных уравнений модели в удобном векторноматричном виде и упрощает применение операций линейной алгебры.

#### Аппроксимация интегрального решения задачи о раскрытии трещины

Интеграл по переменным (x', y'), используемый в (5.10) для расчета давления в точке (x, y), в силу аддитивности вычисляется стандартным суммированием по ячейкам, находящимся внутри трещины. Для ячеек, не содержащих точку (x, y), используется кубатурная формула Гаусса с 20 узлами. Для гиперсингулярного интеграла по ячейке с центром в точке (x, y) может быть вычислено только главное значение в смысле Адамара. Но в силу использования постоянных элементов подынтегральная функция записывается в явном виде и представляет собой выражение  $1/r^3$ , главное значение интеграла от которого вычисляется аналитически. В результате суммирования интегралов по всем ячейкам получается система линейных уравнений с постоянными коэффициентами для компонент векторов P и W

$$P = TW + \sigma$$
 или  $\sum_{l=1}^{K} T_k^l W_l - P_k = -\sigma_k,$  (5.19)

в которой обозначение  $\sigma$  содержит значения сжимающих напряжений на глубине  $y_k$ .

Так как рассматривается только одно крыло трещины, симметричная часть трещины (x < 0) учитывается в (5.19) путем удвоения интеграла в правой части уравнения (5.10) с заменой x на -x в подынтегральном выражении.

#### Аппроксимация уравнений движения жидкости

Использование прямоугольной декартовой сетки с постоянными значениями давления внутри ячеек позволяет использовать метод конечных объемов для аппроксимации уравнения движения жидкости (5.11) на пятиточечном шаблоне

$$-\frac{\tau}{h_x} \left( a_{i+1/2 \ j} \frac{p_{i+1 \ j} - p_{i \ j}}{h_x} - a_{i-1/2 \ j} \frac{p_{i \ j} - p_{i-1 \ j}}{h_x} \right) - \frac{\tau}{h_z} \left( a_{i \ j+1/2} \frac{p_{i \ j+1} - p_{i \ j}}{h_y} - a_{i \ j-1/2} \frac{p_{i \ j} - p_{i \ j-1}}{h_y} \right) + w_{ij}^{n+1} = w_{ij}^n - \tau Q_{i,j} \delta(i,j),$$
(5.20)

где

$$a_{i\pm 1/2 \ j} = \frac{(w_{i\pm 1j} + w_{ij})^3}{96\mu}, \ a_{i \ j\pm 1/2} = \frac{(w_{ij\pm 1} + w_{ij})^3}{96\mu}.$$
 (5.21)

В уравнении (5.20) все неизвестные переменные перенесены в левую часть, сделано умножение на  $-\tau$ , в результате чего получается СЛАУ для вектора давления с положительно определенной матрицей.

Нулевые условия на поток жидкости (5.14), будучи примененными к первому у оси *y* слою ячеек учитываются путем отбрасывания соответствующего слагаемого  $(a_{i-1/2} j^{\frac{p_i j - p_{i-1} j}{h_x}})$  в (5.20). Для ячеек с заданным из граничного условия (5.15) давлением уравнение (5.20) заменяется условием

$$P_k = p_{out}(x_k, y_k). \tag{5.22}$$

Уравнения (5.20) с условиями (5.22) записываются с использованием одно-

мерной нумерации в матричной форме

$$A(W)P + DW = B_{Pc}$$
 или  $\sum_{l=1}^{K} A(W)_k^l P_l + D_k W_k = (B_{Pc})_k.$  (5.23)

В этой СЛАУ разреженная положительно определенная матрица А зависит от W, потому что коэффициенты a в (5.21) зависят от раскрытия w. Диагональная матрица D почти совпадает с единичной: на строках, соответствующих ячейкам, в которых применяется уравнение (5.20), на диагонали стоит 1, а строки, соответствующие ячейкам с граничным условием (5.22), полностью нулевые. Вектор правой части  $(B_{Pc})_k = D_k W_k^n - \tau Q_k \delta(k)$  содержит источниковые члены (расход в трещину  $Q_{in}$  в ячейке k, находящейся в начале координат, и утечку в породу) и раскрытие  $W^n$  на предыдущем временном шаге n.

#### Аппроксимация условий на фронте трещины

Асимптотическое решение, описанное в п. 5.2.1, используется для определения скорости фронта трещины и граничных условий для задачи о течении жид-кости. Асимптотические решения могут быть использованы различными способами, такими как интерполяция численно вычисленных и табличных значений [265] или в виде их приближенной аппроксимации явной функцией [128]. Здесь асимптотические зависимости записаны в виде нелинейных уравнений, решение которых дает неявное выражение для приращения фронта и раскрытия в заданной "*прифронтовой*" точке. Эта процедура предложена и протестирована для случая одномерной радиальной модели [14] и обобщена в диссертации для плоской трехмерной модели.

Поскольку значения распределений давления и раскрытия отнесены к центрам "*прифронтовых*" ячеек расчетной сетки, далее под  $\mathbf{x}_s$  будет пониматься центр одной из таких ячеек. Выражение (5.16) неявно, но в [128] предлагается короткий и удобный способ интерпретации этой формулы. Для его реализации следуя [125], [128], выполняются следующие шаги

• рассчитывается безразмерное расстояние до фронта

$$\tilde{s} = \left(\frac{s}{l}\right)^{0.5}, \ l = \left(\frac{K'^3}{12\mu E'^2 V_f}\right)^2, \ K' = \left(\frac{32}{\pi}\right)^{0.5} K_{Ic},$$
 (5.24)

 численно решается нелинейное уравнение для безразмерного раскрытия трещины *w̃*, полученное из приближенного решения нулевого порядка [125],
 [128]

$$\tilde{w}^3 - 1 - 1.5b_0(\tilde{w}^2 - 1) + 3b_0(\tilde{w} - 1) - 3b_0^3 \ln\left(\frac{b_0 + \tilde{w}}{b_0 + 1}\right) = \beta_m^3 \tilde{s} \qquad (5.25)$$

• рассчитывается "размерное" раскрытие w из выражения

$$w_a = \frac{s^{0.5} K'}{E'} \tilde{w} \tag{5.26}$$

Здесь

$$b_0 \approx 0.9912 \frac{4C_L E'}{V_f^{0.5} K'}, \ \beta_m = 2^{1/3} 3^{-5/6}.$$
 (5.27)

После получения численного решения уравнения (5.16) его можно использовать для численного решения уравнений (5.18), (5.17), чтобы получить скорость фронта трещины  $V_f$  и раскрытие трещины в "*прифронтовой*" ячейке  $\mathbf{x}_s$ для каждого значения скорости жидкости  $v_s$  в этой ячейке. А именно, аппроксимация условия Стефана (5.17) дает

$$s^{n+1} - s^n = \Delta t V_f. \tag{5.28}$$

и аппроксимация (5.18) записывается как

$$\int_{0}^{s^{n+1}} w_a(s')ds' - \int_{0}^{s^n} w_a(s')ds' - w_a(s)v_s\Delta t = 0.$$
 (5.29)

Интегралы в (5.29) записываются в явной форме, приведенной в работе [128]

$$\int_0^s w_a(s')ds' = \frac{2w_a(s)s}{3 + \frac{1}{6}}.$$
(5.30)

Затем, используя (5.28), можно получить нелинейное уравнение для скорости фронта  $V_f$ 

$$\frac{2w_a(s^n + \Delta tV_f, V_f)(s^n + \Delta t)}{3 + \frac{1}{6}} - \frac{2w_a(s^n, V_f)s^n}{3 + \frac{1}{6}} - w_a(s^n + \Delta tV_f, V_f)v_s\Delta t = 0, \quad (5.31)$$

где  $w_a(s, V_f)$  рассчитано путем численного решения (5.16) описанным выше методом.

В итоге для центра каждой " $npu \phi poнmoso$ й" ячейки  $\mathbf{x}_f$  получено неявное выражение

$$w_a = w_a(s, v_s(s)),$$
 (5.32)

позволяющее вычислить раскрытие трещины  $w(\mathbf{x}_s)$  по известной скорости жидкости в ней  $v_s(\mathbf{x}_s)$ , и нелинейное уравнение (5.31), из которого рассчитывается скорость фронта в ближайшей к ячейке  $\mathbf{x}_s$  точке фронта  $\mathbf{x}_f$ .

Поскольку асимптотическое решение дает уравнение для раскрытия, а не давления, в "*прифронтовых*" ячейках, граничные условия (5.15) должны быть заменены комбинацией линейных уравнений (5.19) и выражением (5.32), что даст искомое условие для давления.

Так как для точек фронта  $\mathbf{x}_{f}^{n}$  на каждом шаге n распространения известна скорость этого распространения  $V_{f}(\mathbf{x}_{f})$  и величина шага по времени  $\Delta t$ , то конфигурация фронта  $\mathbf{x}_{f}^{n+1}$  на следующем шаге может рассчитывается с использованием процедуры решения уравнения эйконала, описанной в [128].

#### Решение задачи "гидродинамика-упругость"

После получения положения фронта и раскрытия трещины в "*прифронтовых*" ячейках можно решить задачу "гидродинамика–упругость" (5.19), (5.20), для получения векторов (распределений по поверхности трещины) давления и раскрытия *P*, *W*. Следует напомнить, что эти уравнения не могут решаться независимо, так как каждое содержит оба вектора.

Решение задачи о раскрытии нагруженной давлением трещины (5.19) для *"внутренних"* ("c") и *"прифронтовых"* ("n") ячеек записывается в матричной форме

$$\begin{pmatrix} T_c^c & T_c^n \\ T_n^c & T_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_c \\ W_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} P_c \\ P_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_c \\ \sigma_n \end{pmatrix} = 0.$$
(5.33)

Аппроксимация уравнений движения жидкости (5.20) используется только для *"внутренних"* ячеек

$$D_c^c W_c + A_c^c(W) P_c + A_c^n(W) P_n - B_{Pc} = 0, (5.34)$$

тогда как условие (5.32) применяется для "прифронтовых" ячеек.

Комбинируя (5.33), (5.34) и (5.32) можно записать итоговую систему нелинейных уравнений в следующей форме

$$F(X) = M(X)X - B = 0,$$
(5.35)

где

$$M = \begin{pmatrix} T_c^c & T_c^n & -I & 0\\ 0 & I & 0 & 0\\ D_c^c & 0 & A_c^c(W) & A_c^n(W)\\ -T_n^c & -T_n^n & 0 & I \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} W_c\\ W_n\\ P_c\\ P_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -\sigma_c\\ w_a\\ B_{Pc}\\ \sigma_n \end{pmatrix}.$$
(5.36)

Полученная система уравнений (5.36) решается методом Ньютона

$$X^{m+1} = X^m - \Delta X$$
, где  $\Delta X$  такое, что  $\left(\frac{\partial F}{\partial X}\right) \Delta X = F(X^n).$  (5.37)

Матрица Якоби ( $\partial F/\partial X$ ) в (5.37), необходимая для расчета следующего приближения, рассчитывается аналитически. Это несложно сделать, так как матрица M зависит от вектора X только через разреженные и явным образом заданные подматрицы  $A_c^c, A_c^n$ .

#### 5.2.3. Результаты расчетов

#### Верификация путем сравнения с решением задачи о распространении плоской круговой трещины

Для верификации предложенного метода реализации модели плоской трещины была выбрана задача о распространении плоской круговой трещины, имеющая аналитическое решение [234]. Параметры задачи были выбраны равными  $E = 20 \,\Gamma\Pi a, \, \nu = 0.25, \, Q_{in} = 0.042 m^3/s, \, \mu = 0.42 Pa \cdot s.$  Для оценки сеточной сходимости использовались три сетки с квадратными ячейками размеров  $h_x = h_y = h = 0, 5, 1$  и 2 м и соответствующие им три величины шага по времени  $\Delta t = 1, 2$  и 4 с. На рисунке 5.11, слева показаны зависимости длины одного крыла трещины L и ее полувысоты H/2 от времени, рассчитанные с использованием каждой из сеток (сплошные цветные линии 1-3), а также радиус круговой трещины, полученный аналитически (черный 0). На том же рисунке, справа приведены зависимости от времени максимального раскрытия трещины. Как видно из рисунка, предложенный алгоритм позволяет получить сеточную сходимость к аналитическому решению. Пунктирными линиями показана эволюция численных ошибок, полученных с использованием описанных сеток

$$Err_{R} = \left|\frac{0.5(L+H/2) - R}{R}\right| \cdot 100\%, \quad Err_{w} = \left|\frac{w - w_{an}}{w_{an}}\right| \cdot 100\%, \quad (5.38)$$

которая, как видно из рисунка, не превышает 5% и уменьшается со временем.



Рисунок 5.11 – Зависимости длины одного крыла трещины L и ее полувысоты H/2 (слева) и максимального раскрытия w (справа) от времени, рассчитанные на различных сетках (сплошная), и погрешности рассчитанных величин (штрих): 0 – аналитическое решение [234]; 1 –  $\Delta t = 1s, h = 0.5m$ ;  $2 - \Delta t = 2s, h = 1m$ ;  $3 - \Delta t = 4s, h = 2m$ 

#### Сравнение с решением трещины постоянной высоты (РКN модель)

В качестве второй задачи для верификации предложенного алгоритма была выбрана задача о распространении трещины постоянной высоты, описываемая PKN-моделью, имеющей аналитическое решение [82]. В плоской трехмерной модели чтобы предотвратить распространение трещины в вертикальном направлении y, было задано непостоянное распределение сжимающих напряжений. На интервале [-H/2 < y < H/2] было задано нулевое значение сжимающих напряжений  $\sigma_c$ , а за его пределами — значение  $\sigma_c = 100$ . Это позволяет получить распространение трещины фиксированной высоты H = 20m. В остальном параметры задачи совпадали с параметрам из предыдущего раздела (5.2.3) за исключением того, что в PKN-модели рассматривается только одно крыло трещины, а не вся трещина, как в модели круговой трещины. Зависимости длины Lи максимального раскрытия w трещины от времени показаны на рисунке 5.12. Зависимость длины трещины в левой части рисунка 5.12 показана в логарифмическом масштабе, чтобы продемонстрировать, что в области применимости решения PKN модели (L >> H = 20m) предлагаемая реализация плоской трехмерной модели отражает степенную зависимость длины от времени  $L \sim t^{4/5}$ . Вне этого интервала предположение о том, что длина трещины L много больше ее высоты H, лежащее в основе PKN модели и аналитического решения, очевидным образом не выполняется.



Рисунок 5.12 – Зависимости длины трещины L (слева) и максимального раскрытия w (справа) от времени, рассчитанные на различных сетках: 0 – аналитическое решение [82]; 1 –  $\Delta t = 2s, h = 1m$ ;  $2 - \Delta t = 4s, h = 2m$ 

На рисунке 5.13 приведены распределения давления в трещине в три момента времени t = 40, 160, 320s. Из рисунка видно, что решение задачи (течение жидкости) действительно одномерно, как и в РКN модели, и распространение трещины в вертикальном y направлении отсутствует в силу неравномерности сжимающих напряжений.

#### 5.2.4. Заключение по плоской модели трещины

Реализована плоская 3D-модель распространения гидроразрыва. Распределения раскрытия и давления связаны через уравнение Рейнольдса для давления жидкости внутри трещины и гиперсингулярное уравнение, полученное из решения задачи о плоской трещине, нагруженной давлением. Распространение фронта трещины и граничные условия в "*прифронтовых*" ячейках получены из



Рисунок 5.13 – Распределение давления в плоской трехмерной трещине, распространяющейся между слоями с большими сжимающими напряжениями

асимптотического решения о плоской полубесконечной трещине. Особенности реализации модели заключаются в том, что

- связанная система нелинейных уравнений для давления и раскрытия решается методом Ньютона с аналитическим вычислением матрицы Якоби;
- скорость фронта вычисляется как решение нелинейных уравнений, полученных из асимптотического решения в окрестности фронта;
- положение фронта трещины рассчитывается явным образом.

Сравнения с аналитическими решениями задач о круговой трещине и трещине постоянной высоты (PKN) показали наличие сеточной сходимости и способность алгоритма учитывать непостоянное распределение сжимающих напряжений.

196

# 5.3. Плоскорадиальная модель трещины, распространяющейся под действием закачки смеси жидкости Гершеля–Балкли с проппантом

Следующий шаг в последовательности упрощающихся моделей основан на предположении об изотропности напряженного состояния породы и малом влиянии силы тяжести [14, 20]. Эти предположения верны, например, для поперечной к вертикальной скважине трещины или в случае проведения гидроразрыва пласта в горизонтальных скважинах приводящего к распространению трещины в вертикальной плоскости от источника закачки близкого к точечному. В силу осесимметричности постановки трещина приобретает круговую форму, и ее распространение может описываться на основе одномерных уравнений. Простота модели позволяет без существенного повышения требований к вычислительным ресурсам использовать ее для описания процесса переноса проппанта в трещине и определения условий остановки его движения. Об актуальности задачи этой свидетельствует заметное количество появившихся в последнее десятилетие работ [18, 38, 42, 266].

Добавление проппанта существенно изменяет вязкость закачиваемой смеси и может вызывать закупоривание трещины с последующей остановкой течения жидкости. Также неочевидным является вопрос о скорости движения проппанта относительно скорости жидкости. При моделировании вязкость смеси определяется функцией от объемной концентрации проппанта — с увеличением объемной концентрации вязкость существенно возрастает. При этом выбор конкретного закона остается на усмотрение исследователя. В диссертационной работе и в [18] используется хорошо известная формула Марона – Пирса [267], в работах [38, 42, 266] — реологический закон, основанный на экспериментальных данных, полученных для сдвиговых течений [39]. Закупоривание определяется следующим критерием: объемная концентрация проппанта в точке трещины достигла заданного предельного значения. Предельное значение выбирается авторами либо исходя из экспериментальных данных, либо из решения геометрической задачи о плотной упаковке частиц проппанта. Большинство авторов придерживаются концепции, что скорость переноса проппанта равна средней скорости течения жидкости в трещине [268].

Приведенный выше критерий закупоривания справедлив и хорошо работает, в том случае если проппант достаточно мелкий относительно раскрытия трещины. Такими свойствами обладают участки трещины около скважины: типичный диаметр проппанта составляет  $a \sim 1$  мм, типичное раскрытие трещины на этих участках  $w \sim 5 - 10$  мм. Однако на участках близких к фронту трещины раскрытие уменьшается до 1 - 3 мм и это условие уже не выполняется и не может адекватно описывать процесс. Однако первый критерий закупоривания можно дополнить вторым [108]: трещина закупоривается, если проппант достиг точки трещины с малым ее раскрытием  $w \leq 3a$ . Иными словами, необходимо удовлетворение двух условий в точке трещины: чтобы раскрытие трещины было меньше заданного значения и объемная концентрация проппанта достигла минимально необходимой для закупорки.

## 5.3.1. Модель радиальной трещины с учетом переноса проппанта

В силу осесимметричности постановки задачи считается, что все величины являются функциями только радиуса *r* — расстояния до центра трещины. Геометрия радиальной трещины и основные распределения показаны на рисунке 5.14.



Рисунок 5.14 – Геометрия радиальной трещины, ее радиальное сечение и основные искомые величины модели гидроразрыва

Движение смеси жидкости и проппанта считается осесимметричным и опи-

сывается в рамках модели ньютоновской жидкости с вязкостью  $\mu = \mu(c)$ , зависящей от концентрации проппанта. Модель течения содержит уравнение движения [69]

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{6\mu(c)Q}{\pi rw^3}, \quad R_w \leqslant r \leqslant R, \tag{5.39}$$

полученное из решения задачи о радиальном течении жидкости между двумя параллельными пластинами (течение Пуазейля), и уравнение неразрывности

$$2\pi r \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial r} + Q_L(r,t) = 0, \quad R_w \leqslant r \leqslant R.$$
(5.40)

Здесь p = p(r,t), w = w(r,t) и q = q(r,t) есть избыточное давление жидкости относительно горного давления, раскрытие трещины и расход жидкости через круговое сечение трещины на расстоянии r от ее центра, соответственно. Расход смеси может быть выражен через среднюю скорость  $v_a$  течения  $q = 2\pi r w v_a$ . Границы области применимости уравнений задаются положение фронта трещины R = R(t) в момент времени t и радиусом скважины  $R_w$ . Часть жидкости гидроразрыва фильтруется (утекает) из трещины в породу и ее скорость  $u_L(t)$ рассчитывается по формуле Картера [47] (5.13) в которой  $C_L$  — коэффициент утечек, t — текущий момент времени,  $t_{exp}$  — момент прохождения фронтом трещины рассматриваемой точки r. В этом случае объем жидкости, утекающий через берега трещины на окружности радиуса r, есть

$$Q_L(r,t) = 2 \int_{0}^{2\pi} u_L(r,t) r d\phi = \frac{4\pi r C_L}{\sqrt{t - t_{exp}(r)}}.$$
(5.41)

Так же как и в моделях с двумерным движением жидкости уравнения (5.39)-(5.41), описывающие течение в трещине смеси жидкости и проппанта, удобно объединять в одно дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{rw^3}{12\mu(c)}\frac{\partial p}{\partial r}\right) = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{2C_L}{\sqrt{t - t_{exp}(r)}}, \quad R_w \leqslant r \leqslant R.$$
(5.42)

Раскрытие трещины рассчитывается из решения задачи о симметрично нагруженной круговой плоской трещине в однородном упругом материале, приведенном, например, в [88]:

$$w(r) = \frac{8}{\pi E'} \int_{r}^{R} \int_{0}^{x} \frac{p(\rho)\rho}{\sqrt{x^2 - \rho^2}\sqrt{x^2 - r^2}} d\rho dx.$$
 (5.43)

В качестве условия распространения используется силовой критерий Ирвина для хрупкого материала [159]: трещина распространяется при условии достижения КИН его критического значения  $K_{Ic}$  для породы. Для круговой трещины КИН вычисляется по следующей формуле [93]

$$K_{I} = \frac{2}{\sqrt{\pi R}} \int_{0}^{R} \frac{p(\rho)\rho}{\sqrt{R^{2} - \rho^{2}}} d\rho = K_{Ic}.$$
 (5.44)

Последнее соотношение может быть записано в виде условия на раскрытие трещины в достаточно малой окрестности фронта

$$w(r) \sim K_{Ic} \sqrt{2\pi (R-r)}$$
 при  $r \to R.$  (5.45)

Уравнения дополняются граничным условием на скважине (постоянный расход)

$$Q\big|_{r=R_w} = Q_{in},\tag{5.46}$$

которое с учетом (5.39) переписывается в виде условия на производную давления

$$\left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r=R_w} = \frac{6\mu Q_{in}}{\pi R_w w(R_w)} \tag{5.47}$$

и условием на фронте трещины

$$Q\big|_{r=R} = 0, (5.48)$$

которое в сочетании с условием  $w|_{r=R} = 0$ , следующим из (5.43), дает соотношение

$$w^{3}(r)\frac{\partial p(r)}{\partial r} \xrightarrow[r \to R]{} 0$$
 (5.49)

Для описания движения проппанта в трещине уравнения (5.42) и (5.43) дополняются уравнением переноса объемной концентрации c(r, t) проппанта, полученной в предположении, что проппант переносится со скоростью смеси

$$\frac{\partial wc}{\partial t} + \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial Qc}{\partial r} = 0, \quad R_w \leqslant r \leqslant R.$$
(5.50)

Используя (5.40), уравнение (5.50) можно переписать в форме уравнения для концентрации со скоростью  $v_a$ 

$$\frac{\partial c}{\partial t} + v_a \frac{\partial c}{\partial r} = \frac{cQ_L}{2\pi rw}.$$
(5.51)

Уравнение (5.51) дополняется граничным условием в источнике закачки

$$c\big|_{r=R_w} = c_{in}(t). \tag{5.52}$$

Обычно проппант закачивают спустя некоторое время после начала закачки жидкости гидроразрыва, поэтому  $c_{in}(t) = 0$  при  $t < t_0$ , где  $t_0$  — время начала закачки проппанта. Таким образом,  $c_{in}(t)$  является разрывной функцией.

Для учета влияния концентрации проппанта на реологические свойства смеси его частицы рассматриваются как одинаковые сферы диаметра *a*. Это позволяет применять закон Марона – Пирса [267] для аппроксимации вязкости смеси

$$\mu(c) = \mu_0 \left(1 - \frac{c}{c^*}\right)^{-2} \tag{5.53}$$

где  $c^* = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \approx 0.74$  — объемная концентрация гексагональной плотной упаковки проппанта, полученная из решения геометрической задачи о максимально плотной упаковке сфер (см. рисунок 5.15, слева),  $\mu_0$  — вязкость чистой жидкости гидроразрыва.

Согласно первому критерию закупоривания (далее "критерий I") движение смеси останавливается при достижении концентрацией проппанта критического значения:

$$c(r) \geqslant c^{**}.\tag{5.54}$$

Здесь  $c^{**} \leq c^*$  концентрация, необходимая для закупоривания, Значение  $c^{**}$  можно выбрать, например, из решения геометрической задачи о хаотичной плотной упаковке сфер  $c^{**} \approx 0.65$  на основе предположения о потере подвижности такой упаковки.

Согласно второму критерию (далее "критерий II"), закупоривание происходит, когда проппант достиг области трещины с малым раскрытием:

$$w(r) \leqslant 3a, \quad c(r) \geqslant c^{***}, \tag{5.55}$$

где  $c^{***} = \pi/6 \approx 0.52$  — объемная концентрация проппанта, при которой возможна потеря ее подвижности. Величина  $c^{***}$  определяется из решения геометрической задачи о наиболее плотной упаковке сфер, еще сохраняющей подвижность, которая изображена справа на рисунке 5.15. Следует уточнить, что  $c^{**}$  — это концентрация проппанта, при которой *определенно* происходит закупоривание, так как при ее достижении любая упаковка сфер теряет подвижность, тогда как  $c^{***}$  — это концентрация, при которой *может* произойти закупоривание, так как это наибольшая концентрация, при которой существует подвижная упаковка. При этом величина объемной концентрации проппанта в модели всегда конечна, так как ограничивается критериями закупоривания  $c^{**}$  или  $c^{***}$ .



Рисунок 5.15 – Плотная неподвижная упаковка проппанта (слева) — сферы расположены в узлах сетки, состоящей из правильных тетраэдров со стороной *a*, и упаковка, сохраняющая подвижность (справа) — сферы расположены в узлах сетки, состоящей из кубов со стороной *a* 

Таким образом, модель состоит из дифференциальных уравнений (5.42), (5.51), интегрального уравнения (5.43), граничных условий (5.47), (5.48) и (5.52), интегрального условия (5.44) и условий закупоривания (5.54) и/или (5.55).

# 5.3.2. Численный метод с выделением сингулярности на фронте трещины

Если рассматривать математическую модель гидроразрыва без отставания жидкости от фронта трещины, то ее решение (давление) в окрестности фронта трещины ведет себя сингулярным образом [234], [66]. Отметим также, что величина утечки жидкости гидроразрыва (5.41) тоже ведет себя сингулярным образом в окрестности фронта трещины.

В диссертационной работе часть расчетной области около фронта трещины исключается из численного расчета и вместо него используются асимптотические формулы, полученные в [124] для плоской, полубесконечной трещины, распространяющейся с постоянной скоростью V.

В зависимости от режима распространения (трещиностойкостный  $w_k$ , утечек  $w_{\tilde{m}}$ , вязкостный  $w_m$ ) в окрестности фронта трещины можно использовать одну из асимптотик решения модели распространения полубесконечной трещины гидроразрыва (либо переходную для переходного режима)

$$w_{k}(r,V) = \frac{\sqrt{32}K_{Ic}}{\sqrt{\pi}E'}(R-r)^{1/2},$$
  

$$w_{\tilde{m}}(r,V) = \beta_{\tilde{m}} \left(\frac{48\mu VC_{L}}{E'^{2}}\right)^{1/8}(R-r)^{5/8},$$
  

$$w_{m}(r,V) = \beta_{m} \left(\frac{12\mu V}{E'}\right)^{1/3}(R-r)^{2/3}.$$
(5.56)

Здесь  $\beta_{\tilde{m}} = 4/(15^{1/4}(2^{1/2}-1)^{1/4}), \beta_m = 2^{1/3}3^{5/6}$ . Характерные расстояния  $r_k$ ,  $r_{\tilde{m}}$  и  $r_m$  от фронта фронта трещины, на которых могут быть применимы эти асимптотики с точностью лучше 1%, задаются условиями :

$$r_{k} \leqslant 6.3 \cdot 10^{-7} \min\{l_{mk}, l_{\tilde{m}k}\},$$

$$0.44 l_{l_{\tilde{m}k}} \leqslant r_{\tilde{m}} \leqslant 2 \cdot 10^{-14} l_{m\tilde{m}},$$

$$\max\{1.34 l_{mk}, 1.6 \cdot 10^{7} l_{m\tilde{m}}\} \leqslant r_{m},$$
(5.57)

где переходные расстояния равны:

$$l_{mk} = \frac{2^{11}}{9\pi^3} \frac{K_{Ic}^6}{E'^4 \mu^2 V^2}, \quad l_{m\tilde{m}} = \frac{4}{9} \frac{C_L^6 E'^2}{\mu^2 V^5}, \quad l_{\tilde{m}k} = \frac{2^{14}}{9\pi^4} \frac{K_{Ic}^8}{E'^6 C_L^2 \mu^2 V}.$$
 (5.58)

Формулы (5.56) используются на участке трещины  $[R_A, R]$  в окрестности ее фронта вместо условий (5.44) и (5.48) на самом фронте трещины.

Выбор асимптотики осуществляется на основании того, условия для какого отступа в (5.58)  $(r_k, r_{\tilde{m}} \text{ или } r_m)$  выполнены для точки  $r \geq R_A$ . Например, если для точки r условия (5.58) выполняются при подстановке  $r_m = r$ , то считается, что раскрытие в точке r рассчитывается из (5.57) как  $w(r) = w_m$ . В [124] приведены формулы, по которым можно определить не только раскрытие в окрестности фронта, но и давление в ней для каждого из режимов:

$$p_{\tilde{m}}(r,V) = 0,$$

$$p_{\tilde{m}}(r,V) = \tilde{\delta}_0 \frac{(24C_L \mu)^{1/4}}{E'^{5/4}} \frac{V^{1/8}}{(R-r)^{3/8}},$$

$$p_m(r,V) = \delta_0 \frac{(12\mu)^{1/3}}{E'^{4/3}} \frac{V^{1/3}}{(R-r)^{1/3}}.$$
(5.59)

Здесь  $\delta_0 = \beta_m f(2/3)$ ,  $\tilde{\delta}_0 = \beta_{\tilde{m}} f(5/8)$ ,  $f(\lambda) = \frac{\lambda \operatorname{ctg} \lambda \pi}{4}$ . При этом асимптотическое поведение раскрытия и давления трещины около фронта будет определяться параметрами модели, скоростью распространения трещины и расстоянием до фронта. Поэтому формулы (5.56) и (5.59) нужно использовать, выбирая режим распространения трещины согласно (5.57).

На участке трещины  $[R_w, R_A]$  расчет распределений давления и раскрытия производится численно. Для этого используется равномерная разностная сетка  $R_w = r_0, \ldots, r_K = R_A$ , состоящая из K интервалов длинной  $\Delta r$ , и фиксированный шаг по времени  $\Delta t$ . Распределение давления жидкости на шаге времени n + 1 рассчитывается по известным на двух шагах значениям раскрытия трещины  $w^n, w^{n+1}$  из уравнений (5.39) и (5.40) с граничным условием (5.46) и некоторым условием для давления на правой границе

$$p_K = p^*. (5.60)$$

Аппроксимация уравнений проводится методом конечных разностей, так из

дифференциального уравнения (5.40) получается выражение

$$\frac{Q_k^{l+1} - Q_{k-1}^{l+1}}{2\Delta r} \frac{Q_k^n - Q_{k-1}^{n+1}}{2\Delta r} + 2\pi r_{k-1/2} \left[ \frac{w_k^l - w_k^n}{\Delta t} + \frac{w_{k-1}^l - w_{k-1}^n}{\Delta t} \right] Q_L(r_{k-1/2}, t^{n+1/2}) = 0$$

$$Q_0^{l+1} = Q_{in}.$$
(5.61)

Здесь и ниже используется обозначение  $f^l = (f^{n+1})^l$  для функций Q, w, p, в котором верхний индекс обозначает номер итерации в итерационном процессе, применяемом для решения нелинейной системы уравнений, которая получится в результате аппроксимации (5.39)–(5.40). Значения расхода жидкости  $w_k^{l+1}$  вычисляются слева направо в предположении об известных значениях  $w_k^l$ с предыдущей итерации.

Затем по вычисленным значениям расхода также явной схемой (бегущий счет, направление счета — справа налево) рассчитываются значения давления вдоль по трещине из уравнения (5.40:

$$\frac{p_{k-1}^{l+1} - p_k^{l+1}}{\Delta r} = \frac{3\mu_{k-1}^n Q_{k-1}^{n+1}}{\pi r_{k-1} (w_{k-1}^l)^3} + \frac{3\mu_k^n Q_k^{n+1}}{\pi r_k (w_k^l)^3}, \quad k = K - 1, \dots, 1,$$

$$p_K^{n+1} = p^*.$$
(5.62)

В общем случае, для определения раскрытия трещины  $w^{l+1}$  по известному распределению давления  $p^{l+1}$  необходимо численно проинтегрировать формулу (5.43). Для этого перепишем ее, заменив пределы интегрирования в соответствии с областями определения подынтегральных функций.

$$w(r) = \frac{8}{\pi E'} \int_{r}^{R} \frac{1}{\sqrt{x^2 - r^2}} J(x, p) dx, \quad J(x, p) = \int_{0}^{x} \frac{p(\rho)\rho}{\sqrt{x^2 - \rho^2}} d\rho.$$
(5.63)

Для расчета значений раскрытия трещины в узлах разностной сетки  $w_k^{n+1}$  формула (5.63) переписывается в следующем виде

$$w_k = \sum_{j=0}^{K} M_{kj} p_j, \quad 0 \leqslant k \leqslant K, \tag{5.64}$$

что позволяет вычислить коэффициенты матрицы только один раз на одном

шаге распространения трещины. Для расчета коэффициентов  $M_{kj}$  предполагается, что давление между узлами сетки распределено линейно

$$p(r) = p_j \frac{r - r_{j-1}}{\Delta r} - p_{j-1} \frac{r - r_j}{\Delta r}, \quad r_{k-1} \leqslant r \leqslant r_k.$$
(5.65)

Это позволяет представить внутренний J(x,p) интеграл в (5.63) в виде суммы вида

$$J(x,p) = \int_{0}^{r_{0}} \frac{p_{0}\rho}{\sqrt{x^{2}-\rho^{2}}} d\rho + \sum_{j=1}^{K} \int_{r_{j-1}}^{r_{j}} \frac{p(\rho)\rho}{\sqrt{x^{2}-\rho^{2}}} d\rho = p_{0}J_{1}(0,r_{0},x) + \sum_{j=1}^{K} \frac{p_{j-1}}{\Delta r} (r_{j}J_{1}(r_{j-1},r_{j},x) - J_{2}(r_{j-1},r_{j},x)) - \sum_{j=0}^{K} \frac{p_{j}}{\Delta r} (r_{j-1}J_{1}(r_{j-1},r_{j},x) - J_{2}(r_{j-1},r_{j},x)),$$
(5.66)

в которой интегралы вида  $J_m(a, b, x) = J_m(0, b, x) - J_m(0, a, x), m = 1, 2$  рассчитываются аналитически по следующим формулам:

$$J_1(0,b,x) = \int_0^b \frac{\rho}{\sqrt{x^2 - \rho^2}} = x - \sqrt{x^2 - b^2},$$
  
$$J_2(0,b,x) = \int_0^b \frac{\rho^2}{\sqrt{x^2 - \rho^2}} = \frac{x^2}{2} \arcsin\frac{b}{x} - \frac{b}{2}\sqrt{x^2 - b^2}.$$
 (5.67)

Таким образом, для расчета коэффициентов  $M_{kj}$  нужно найти значения внешних интегралов в (5.63) по формуле Гаусса достаточной точности и объединить коэффициенты при соответствующих  $p_j$ . Расчеты показали, что достаточную точность обеспечивает уже формула с 6 узлами, гарантирующая обеспечивающая погрешность порядка  $O(h^{12})$ .

Если на временном шаге n известны распределения всех величин, длина трещины R и значение давления  $p^*$ , то задав границу  $R_A$  на основе (5.60), (5.62), (5.64) можно сформулировать и решить методом релаксации подзадачу «гидродинамика – упругость» для нахождения распределений на слое n + 1. В качестве начальных распределений l = 0 берутся распределения с предыдущего временного шага n. Далее по известному распределению  $w_k^l$  рассчитываются последовательно  $Q_k^{l+1}$  из (5.61),  $p_k^{l+1}$  из (5.62) и завершая переход на следующую итерацию  $w_k^{l+1}$  из (5.64). Выбор достаточно малого значения релаксационного параметра позволяет сделать отображение  $w_k^{l+1} = w(w_k^l)$  сжимающим и получить неподвижную точку этого отображения, являющегося решением.

После того как найдено совместное решение уравнений образующих подзадачу "гидродинамика – упругость", должно быть вычислено распределение объемной концентрации проппанта в трещине из уравнения (5.50). Для обеспечения равенства скоростей движения проппанта и смеси это уравнение естественно аппроксимировать консервативной схемой второго порядка аппроксимации. Но такие схемы проявляют сильные дисперсионные свойства и из-за разрывности функции  $c_{in}(t)$  вызывают нежелательные осцилляции.

Несмотря на наличие монотонных схем, устраняющих осцилляции, в диссертационной работе для решения уравнения (5.50) был применен метод частиц в ячейках как более аккуратно предсказывающий положение разрыва решения. В момент начала закачки проппанта на слое  $n_0$ , соответствующем начальному моменту времени  $t_0$  на достаточно длинном участке левее границы  $R_w$  равномерно расставляется  $N_P$  частиц таким образом, чтобы на один шаг разностной сетки приходилось минимум несколько частиц. Каждая частица характеризуются координатой  $r_{(j)}$  и величиной переносимой концентрации пропанта  $c_{(j)}$ , где нижний индекс в скобках обозначает номер частицы. Во все частицы на слое  $n_0$  назначается концентрация равная произведению  $c_{in}$  на шаг расстановки частиц. На следующем слое по времени координаты и значения концентрации в них находятся по следующим формулам:

$$\frac{r_{(j)}^{n+1} - r_{(j)}^{n}}{\Delta t} = \frac{(v_{a})_{k}^{n+1} + (v_{a})_{k}^{n} + (v_{a})_{k+1}^{n+1} + (v_{a})_{k+1}^{n}}{4}$$

$$\frac{c_{(j)}^{n+1} - c_{(j)}^{n}}{\Delta t} = \frac{\left(c_{(j)}^{n+1} + c_{(j)}^{n}\right) Q_{L}(r_{k+1/2}, t^{n+1/2})}{\pi r_{k+1/2} \left(w_{k}^{n+1} + w_{k}^{n} + w_{k+1}^{n+1} + w_{k+1}^{n}\right)}$$
(5.68)

где индекс ячейки сетки k соответствует ячейке, в которой находится частица (j). Аппроксимация уравнения (5.50) методом частиц в ячейках (5.68) обеспечивает совпадение скоростей проппанта и смеси на разностном уровне. Погрешность может возникать при вычислении концентрации проппанта в узлах сетки

 $r_k$ , которое происходит с использованием взвешенной суммы

$$c_k^{n+1} = \sum_{j=0}^{N_P} \phi_k(r_{(j)}^{n+1}) c_{(j)}^{n+1}, \ \phi_k(r) = \max\left(0, 1 - \frac{|r_k - r|}{\Delta r}\right).$$
(5.69)

Чтобы завершить вычисления, на каждом следующем шаге по времени n+1нужно рассчитать положение фронта трещины  $R^{n+1}$  и определить  $p^*$  в граничном условии (5.60). С одной стороны, значение  $p^*$  необходимо для решения задачи на участке трещины  $[R_w, R_A]$ , с другой стороны это значение может быть определено с помощью асимптотических формул (5.59) при известном режиме распространения  $k, m, \tilde{m}$  и положении фронта трещины  $R^{n+1}$ . Для этого используется следующая процедура. Количество смеси на участке  $R_A, R^n$  в окрестности фронта трещины, показанном на рисунке 5.16 равно  $\int_{R_A}^{R^n} 2\pi r w(r, V) dr$ . Величины V и  $R^{n+1} - R_A$  определяют тип используемого асимптотического решения в точке  $R_A$ , так как являются скоростью распространения и расстоянием до фронта. За время  $\Delta t$  через сечение  $r = R_A$  проходит смесь объемом  $Q_N^n \Delta t$ . Новое положение фронта трещины определяется из уравнения сохранения массы смеси

$$\int_{R_A}^{R^{n+1}} 2\pi r w(r, V^{n+1}) dr = \int_{R_A}^{R^n} 2\pi r w(r, V^n) dr + Q_n^n \Delta t$$

$$V^{n+1} = \frac{R^{n+1} - R^n}{\Delta t}$$
(5.70)

Это соотношение дает нелинейное уравнение на величину  $R^{n+1}$ , аналитическое решение которого осложняется тем, что разным значениям  $R^{n+1}$  могут соответствовать разные режимы распространения, а значит и разные зависимости w(r, V). Поэтому значение  $R^{n+1}$  находится численно из решения нелинейного уравнения (5.70) хорошо известными методами релаксации или бисекций.

Таким образом, можно сформулировать явный алгоритм пошагового распространения трещины (в предположении, что все значения на предыдущем слое *n* по времени известны):

1. Из решения (5.70) определяются положение фронта трещины и режим распространения.

- 2. Из (5.59) определяется значение  $p^*$  для граничного условия (5.60)
- 3. Методом релаксации решается задача "гидродинамика–упругость" (5.46), (5.60)–(5.63) на интервале  $[R_w, R_A^n]$  и вычисляются распределения  $w^{n+1}$ ,  $p^{n+1}, Q^{n+1}$ .
- 4. В случае, если изменение положения границы окрестности фронта  $R_A^{n+1} = R_A^n + \Delta r$  не меняет режим распространения трещины и не выходит за пределы самой трещины, то область применения разностных уравнений  $[W_w, R_A^{n+1}]$  расширяется вправо.
- 5. По вычисленным ранее раскрытию  $w^{n+1}$  и расходу  $Q^{n+1}$  из (5.68), (5.69) вычисляется распределение концентрации проппанта  $c_k^{n+1}$ .
- 6. Пересчитывается распределение динамической вязкости  $\mu_k^{n+1}$  по закону Марона-Пирса.
- 7. Если не выполняются условия закупоривания трещины (5.54) и/или (5.55), то происходит переход на следующий шаг по времени (п. 1 алгоритма).



Рисунок 5.16 – Раскрытие трещины около ее фронта на двух последовательных шагах распространения

Дифференциальные уравнения (5.39), (5.40) и (5.50) аппроксимируются схемами (5.61) и (5.62) с порядками  $O(\Delta t^2 + \Delta r^2)$  и  $O(\Delta t + \Delta r^2)$ , соответственно. Указанный порядок аппроксимации верен для гладких функций, тогда как функция концентрации проппанта c(t, x) в силу задания граничного условия не является гладкой, что приводит к негладкости и зависящей от нее функции вязкости  $\mu(t, x)$ . Интегральное соотношение для раскрытия трещины (5.43) вычисляется с порядком  $O(\Delta r^2)$ , так как в основе своей оно содержит формулу трапеций. Метод частиц в ячейках (5.68), (5.69) также позволяет вычислить решение с погрешностью порядка  $O(\Delta t^2 + \Delta r)$ . Учитывая вышесказанное, порядок погрешности всего численного метода не будет превышать первого. С другой стороны точность решения зависит от расстояния, на котором применяются асимптотические формулы (5.56) и (5.59). Уменьшение этого расстояния приводит к уменьшению погрешности, вызванной использованием асимптотических решений вместо точного расчета раскрытия трещины и давления.

В силу использования явно-неявной аппроксимации очевидно, что рассматриваемая комбинация методов является абсолютно устойчивой. Благодаря применению метода релаксации в подзадаче "гидродинамика-упругость", подбором параметра релаксации всегда удается обеспечить сходимость итераций к решению уравнений.

Трещина приращивается пошагово: шаг приращения  $\Delta R$  трещины и шаг по времени  $\Delta t$  связаны. Можно проводить расчеты как с фиксированным шагом по времени, как в плоской трехмерной модели (см. п. 5.2) так и с фиксированным приращением фронта трещины, как в полной трехмерной модели (см. главы 1-3). Также необходимо контролировать расстояние (5.57), чтобы отслеживать режим распространения.

Схема (5.61) и метод частиц в ячейках (5.68) и (5.69) являются консервативными. Следовательно, на разностном уровне объемы смеси и проппанта будут сохраняться. При этом на разностном уровне скорость движения проппанта совпадает со скоростью движения смеси.

#### 5.3.3. Верификация разработанного алгоритма

Для верификации алгоритма было проведено сравнение радиуса трещины R(t) и ее раскрытия w(r) в различные моменты времени со значениями, полученными из аналитического решения модели [269], описывающего поведение радиальной трещины, распространяющейся в вязкостном режиме распространения при отсутствии утечек жидкости в породу.

В этом режиме распространения *всей трещины* основная энергия закачки расходуется на преодоление сил вязкого трения. В него трещина переходит на больших временах распространения [234] (при больших радиусах трещины), которые и рассматриваются в настоящей работе. При этом асимптотический режим распространения  $\phi$ ронта трещины может быть либо трещиностойкостным k, либо вязкостным m. Решение задачи распространения трещины с точностью лучше, чем 0.5% определяется следующими формулами [269]:

$$w(r,t) = 1.1901 \left(\frac{12\mu_0 Q_{in}^3}{E'^2}t\right)^{1/9} \left(1 + \frac{r}{R}\right)^{0.487} \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{2/3},$$
  

$$R(t) = 0.6944 \left(\frac{Q_{in}^3 E'}{12\mu_0}t^4\right)^{1/9}.$$
(5.71)

На рисунке 5.17, слева приведены зависимости радиуса трещины R(t) от времени (t), рассчитанные по настоящей модели и по формуле (5.71). Значения параметров, как и в [269] были выбраны равными E' = 10 ГПа,  $K_{Ic} = 1$  МПа·с<sup>1/2</sup>,  $Q_{in} = 0.01$  м<sup>3</sup>/с,  $\mu_0 = 1$  Па·с,  $C_L = 0$  м/с<sup>1/2</sup>. Варьировался шаг приращения трещины  $\Delta R$  (тем самым варьировался и шаг по времени  $\Delta t$ ). Распределения раскрытия трещины w(r) вдоль радиуса в момент времени t = 300 с показаны на рисунке 5.17, справа. Также наблюдается сходимость численных решений к аналитическому.

Таким образом, приближение численного решения к точному на рисунке 5.17 можно трактовать как сеточную сходимость при одновременном уменьшении шагов и по времени, и пространству. Максимальное отклонение на интервале времени  $t \in [0,900 \text{ c}]$  рассчитанного радиуса трещины от полученного аналитически составляет 5%, 1.4% и 0.4% при значениях приращения трещины  $\Delta R = 0.12R, 0.06Ru0.03R$ , соответственно. Максимальное отклонение раскрытия трещины на том же интервале составляет 1.5%, 0.8% и 0.4% при тех же значениях приращения. Численная оценка порядка сходимости этих величин не выше первого, как и ожидалось на основе априорных рассуждений.

Показано, что при уменьшении шагов по пространству и времени, а также области, в которой решение рассчитывается по асимптотическим формулам, решение стремится к аналитическому решению (5.71).

#### 5.3.4. Результаты расчетов

С помощью разработанной численной модели было исследовано распространение трещины с учетом закачки проппанта и с проверкой условий ее закупо-



Рисунок 5.17 – Зависимости радиуса трещины от времени (слева) и раскрытия трещины в момент t = 300 с (справа): черный пунктир, 0 – значения, полученные по аналитической формуле (5.71); 1-3 – рассчитанные по предложенному алгоритму: красный  $1 - \Delta R = 0.12R$ ; зеленый  $2 - \Delta R = 0.06R$ ; синий  $3 - \Delta R = 0.03R$ 

ривания. Значения параметров модели были выбраны равными E' = 10 ГПа,  $K_{Ic} = 1$  МПа·с<sup>1/2</sup>,  $Q_{in} = 0.01$  м<sup>3</sup>/с,  $\mu_0 = 1$  Па·с,  $C_L = 0.1 \cdot 10^{-3}$  м/с<sup>1/2</sup>. Начиная с  $t_0 = 900$  с в трещину закачивалась смесь жидкости с проппантом с концентрацией последнего  $c_{in} = 0.2$ . Критическая концентрация в критерии закупоривания I была выбрана равной  $c^{**} = 0.65$ . Диаметр проппанта составлял a = 1 мм, следовательно критическая ширина во втором критерии (5.55) была равной w = 3 мм. Выполнение одного из критериев закупоривания приводило к остановке течения в этой точке и остановке расчета. Эти параметры рассматривались как основные и в случае варьирования какого-либо параметра модели остальные оставались неизменными.

На рисунке 5.18 приведены распределения раскрытия трещины и концентрации проппанта в момент выполнения одного из критериев закупоривания и за 180 с до его выполнения. Из-за утечек жидкости гидроразрыва в породу концентрация проппанта в смеси растет при прохождении им трещины. При большом коэффициенте утечек  $C_L = 0.1 \cdot 10^{-3} \text{ м/c}^{1/2}$  пробка из проппанта, то есть область с высокой его концентрацией, успевает сформироваться до того как проппант дойдет до узкой части трещины в окрестности кончика. Это приводит к росту концентрации до критического значения  $c^{**}$  и выполнению критерия I (5.54). В этом случае в трещине формируется участок заполненный проппантом, тогда как ближе к фронту трещины проппант отсутствует. При более низких утечках в породу  $C_L = 0.04 \cdot 10^{-3} \text{ м/c}^{1/2}$  рост концентрации менее выражен и критическая концентрация  $c^{***}$  достигается ближе к фронту трещины в области с малым раскрытием, что приводит к закупориванию согласно второму критерию II (5.55). В этом случае проппант практически достигает фронта трещины. Очевидно, что при отсутствии утечек в породу не будет происходить роста концентрации проппанта и ни один из критериев закупоривания выполнен не будет.

Для создания протяженной трещины, наполненной проппантом желательно, чтобы закупоривание трещины происходило по второму критерию. Тогда радиуса заполненной проппантом трещины близок к полному радиусу, что говорит об эффективности процедуры закачки.



Рисунок 5.18 – Распределения раскрытия трещины w(1) и концентрации проппанта c(2) вдоль радиуса трещины в момент выполнения критерия закупоривания трещины (сплошная) и за 180 с до его выполнения (пунктир) при различных величинах утечки: выполнен критерий (5.54) при  $C_L = 0.1 \cdot 10^{-3} \text{ м/c}^{1/2}$  (слева), выполнен критерий (5.55) при  $C_L = 0.04 \cdot 10^{-3} \text{ м/c}^{1/2}$  (справа)

На основании проведенных расчетов было установлено, что наибольшее влияние на процесс закупоривания оказывают величина утечки жидкости гидроразрыва и ее расход в трещину, поэтому далее они будут варьироваться в широких пределах. Следует отметить, что если коэффициент утечки в большей степени определяется параметрами породы, то расход смеси в трещину может варьироваться инженерами для воздействия на тип закупоривания трещины и, следовательно, размер заполненного проппантом участка. На процесс закупоривания хоть и в меньшей степени влияют и другие параметры модели: вязкость чистой жидкости  $\mu_0$  и плоский модуль напряжений E'. При этом параметры времени начала закачки  $t_0$  и закачиваемой концентрации  $c_{in}$  не могут меняться в широких пределах из-за технологических ограничений.

На рисунке 5.19 приведены зависимости радиуса трещины и ее раскрытия около скважины  $w_w = w(R_w)$  от времени, полученные при различных значениях коэффициента утечек ( $C_L$  варьировался от 0 до  $0.2 \cdot 10^{-3}$  м/с<sup>1/2</sup>) и фиксированном расходе  $Q_{in} = 0.01$  м<sup>3</sup>/с. Видно, что увеличение утечек в породу существенно уменьшает радиус трещины, но слабо влияет на ее раскрытие. В момент начала закачки проппанта  $t_0$  из-за скачкообразного изменения вязкости закачиваемой смеси резко меняется поведение раскрытия трещины в окрестности скважины, как показано на рисунке 5.19 справа.



Рисунок 5.19 – Зависимости радиуса R трещины и ее раскрытия  $w_w$  на скважине от времени, полученные при различных значениях коэффициента утечек: 1 –  $C_L = 0$  м/с<sup>1/2</sup>; 2 –  $C_L = 0.05 \cdot 10^{-3}$  м/с<sup>1/2</sup>; 3 –  $C_L = 0.1 \cdot 10^{-3}$  м/с<sup>1/2</sup>; 4 –  $C_L = 0.2 \cdot 10^{-3}$  м/с<sup>1/2</sup>

На рисунке 5.20 приведены зависимости радиуса R трещины и ее раскрытия  $w_w$  на скважине от времени, полученные при различных значениях расхода жидкости ( $Q_{in}$  варьировался от 0.005 до 0.04 м<sup>3</sup>/с) при одинаковом значении коэффициента утечек  $C_L = 0.1 \cdot 10^{-3}$  м/с<sup>1/2</sup>. Видно, что увеличение расхода жидкости существенно увеличивает и радиус трещины и ее раскрытие.



Рисунок 5.20 – Зависимости радиуса Rтрещины и ее раскрытия  $w_w$  на скважине от времени, полученные при различных значениях расхода жидкости: 1 –  $Q_{in}=0.0025~{\rm m}^3/{\rm c};$ 2 –  $Q_{in}=0.005~{\rm m}^3/{\rm c};$ 3 –  $Q_{in}=0.01~{\rm m}^3/{\rm c};$ 4 –  $Q_{in}=0.02~{\rm m}^3/{\rm c}$ 

В таблице 1 приведены значения радиуса трещины *R*, при котором произошло выполнение одного из критериев, расстояния от точки, где произошло закупоривание, до центра трещины  $R_p$  и время закупоривания  $t_{stop}$ . Как видно из таблицы, при одновременном увеличении коэффициента утечек и расхода жидкости радиус трещины практически не меняется. С одной стороны, инвариантность длины трещины к изменению коэффициента утечек и расхода при сохранении их некоторого отношения позволяет при проведении гидроразрыва в породах с большой проницаемостью обеспечить получение трещины желаемого радиуса путем повышения расхода. С другой стороны, расстояние от скважины до пробки проппанта зависит от каждого из параметров  $C_L$  и  $Q_{in}$ , и радиус заполненной проппантом трещины при увеличении их обоих будет уменьшаться.

| $Q_{in}$ | $C_L \cdot 10^{-3}$ | $R_p$ | R    | $t_{stop}$ | критерий |
|----------|---------------------|-------|------|------------|----------|
| 0.003    | 0.02                | 30.2  | 34.6 | 5700       | II       |
| 0.005    | 0.1                 | 17.3  | 18.9 | 1260       | Ι        |
| 0.01     | 0.05                | 30.5  | 35.1 | 2350       | II       |
| 0.01     | 0.1                 | 17.1  | 24.9 | 1470       | Ι        |
| 0.01     | 0.2                 | 10.0  | 18.4 | 1070       | Ι        |
| 0.02     | 0.1                 | 34.5  | 37.7 | 1730       | Ι        |
| 0.03     | 0.13                | 29.7  | 39.6 | 1810       | Ι        |
| 0.04     | 0.1                 | 33.6  | 46.6 | 1610       | Ι        |

Таблица 5.1 – Параметры трещины после ее закупоривания

Следует отметить, что большее практическое значение имеет не радиус получившейся трещины, а радиус ее части, заполненной проппантом  $R_p$ . Для оценки чувствительности этой величины к изменению основных параметров на рисунке 5.21 приведены ее зависимости от коэффициента утечек при различных расходах жидкости.

На рисунке 5.22 приведены линии постоянных значений радиуса заполненной проппантом части трещины  $R_p$  при различных значениях коэффициента утечек  $C_L$  и расходах жидкости  $Q_{in}$ . Для наглядности по осям графика отложены величины  $\log Q_{in}$  и  $\log C_L$ , поэтому степенные зависимости представляются прямыми линиями. Благодаря этому легко видеть, что линии постоянных значений радиуса заполненной проппантом части трещины хорошо аппроксимируются следующим семейством зависимостей

$$\frac{C_L}{Q^{\alpha}} = \theta(R_p) = \text{const},$$
 где  $\alpha \approx 0.7,$  (5.72)



Рисунок 5.21 – Зависимости радиуса заполненной проппантом части трещины  $R_p$  от коэффициента утечек  $C_L$  при различных расходах жидкости  $Q_{in}$ : 1 –  $Q_{in} = 0.005 \text{ м}^3/\text{c}$ ; 2 –  $Q_{in} = 0.01 \text{ м}^3/\text{c}$ ; 3 –  $Q_{in} = 0.02 \text{ M}^3/\text{c}$ ; 4 –  $Q_{in} = 0.04 \text{ M}^3/\text{c}$ 

которые показаны на рисунке 5.22 пунктиром.



Рисунок 5.22 – Линии постоянных значений радиуса заполненной проппантом части трещины  $R_p$  при различных значениях коэффициента утечек  $C_L$  и расходах жидкости  $Q_{in}$ . Символами отмечены параметры для рисунке 5.23

Например, следующие пары значений расхода и утечек согласно формуле (5.72) дают одинаковое значение радиуса закупоренной части, равное  $R_p \approx$ 30 м и одинаковое значение  $\theta(R_p) \approx (1.3 \pm 0.5) \cdot 10^{-4}$ :  $Q_{in} = 0.003 \text{ m}^3/\text{c}$ ,  $C_L =$  $0.0237 \cdot 10^{-3} \text{ m/c}^{1/2}$ ;  $Q_{in} = 0.01 \text{ m}^3/\text{c}$ ,  $C_L = 0.053 \cdot 10^{-3} \text{ m/c}^{1/2}$ ;  $Q_{in} = 0.03 \text{ m}^3/\text{c}$ ,  $C_L = 0.133 \cdot 10^{-3} \text{ m/c}^{1/2}$ . Для этих параметров на рисунке 5.23 приведены, распределения концентрации проппанта вдоль радиуса трещины в момент закупоривания трещины. Для первой и второй групп параметров выполняется критерий II, концентрация достигла значения  $c^{***}$  на участке трещины с рас-
крытием меньше предельного. Для третьей группы параметров выполняется критерий I, концентрация достигла значения  $c^{**}$ . Предельная концентрация достигнута примерно при указанном значении  $R_p \approx 45$  м. Следует отметить, что радиус трещины, при котором произошло закупоривание, и ее раскрытие различны для рассматриваемых пар параметров. То есть эти величины, в отличии от  $R_p$ , являются функциями обоих параметров  $Q_{in}$ ,  $C_L$ , а не их соотношения. Следует отметить легкий перегиб графиков раскрытия на 5.23, справа в окрестности точки закупоривания (r = 30 м).



Рисунок 5.23 – Распределения концентрации проппанта (слева) и раскрытия трещины (справа) вдоль радиуса, полученные при различных соотношениях коэффициента утечек и расхода жидкости:  $Q_{in} = 0.003 \text{ м}^3/\text{c}$ ,  $C_L = 0.0237 \cdot 10^{-3} \text{ м/c}^{1/2}$ ;  $Q_{in} = 0.01 \text{ м}^3/\text{c}$ ,  $C_L = 0.053 \cdot 10^{-3} \text{ м/c}^{1/2}$ ;  $Q_{in} = 0.03 \text{ м}^3/\text{c}$ ,  $C_L = 0.133 \cdot 10^{-3} \text{ м/c}^{1/2}$ ;  $Q_{in} = 0.03 \text{ m}^3/\text{c}$ ,  $C_L = 0.133 \cdot 10^{-3} \text{ M/c}^{1/2}$ ;  $Q_{in} = 0.03 \text{ m}^3/\text{c}$ ,  $C_L = 0.133 \cdot 10^{-3} \text{ M/c}^{1/2}$ ;  $Q_{in} = 0.03 \text{ m}^3/\text{c}$ ,  $C_L = 0.133 \cdot 10^{-3} \text{ M/c}^{1/2}$ ;  $Q_{in} = 0.03 \text{ m}^3/\text{c}$ ,  $C_L = 0.133 \cdot 10^{-3} \text{ M/c}^{1/2}$ ;  $Q_{in} = 0.03 \text{ m}^3/\text{c}$ ,  $C_L = 0.133 \cdot 10^{-3} \text{ M/c}^{1/2}$ 

Другим важным вопросом является определение области параметров, в которой происходит закупоривание трещины согласно каждому из описанных критериев I или II. Так выполнение критерия I говорит о том, что часть трещины около фронта не заполнена проппантом. На рисунке 5.24 в пространстве параметров  $Q_L$ ,  $C_L$  приближенно показаны границы между областями, в которых выполняется каждый из критериев. Так же как и на рисунке 5.23 по осям откладывались величины  $\log Q_{in}$  и  $\log C_L$ . Граница раздела между выполнением того или иного критерия получилась нечеткой ввиду того, что при этих параметрах радиус заполненной проппантом трещины  $R_p$  для каждого из критериев отдельно очень близок и переключения в этой области имеют характер близкий к случайному.

Граница перехода между критериями может быть приближенно определена



Рисунок 5.24 – Граница областей выполнения различных критериев закупоривания (сплошная) и аппроксимация этой границы соотношением (5.73) (пунктир)

по значению параметра вида

$$a = C_L Q_{in}^{3/2}.$$
 (5.73)

На рисунке 5.24 значениям  $\mathfrak{x} = 0.5, 1$  соответствуют пунктирные линии. Таким образом, при  $\mathfrak{x} \ge 2$  выполняется критерий I, при  $\mathfrak{x} \le 0.5$  выполняется критерий II, при  $0.5 \le \mathfrak{x} \le 1$  модель не позволяет определить достоверно тип закупоривания критерия, так как радиус закупоренной части трещины  $R_p$  для них примерно одинаков. Также сплошной линией на рисунке 5.24 показана граница области параметров, соответствующих большому расходу и малому коэффициенту утечек. В этой области трещина достигает радиуса 50 м без образования пробки из проппанта. Граница области хорошо аппроксимируется формулой (5.72) при  $R_p = 50$  м. Следует отметить, что трещина столь большого радиуса будет выходить за пределы типичного продуктового пласта и не будет полезной.

### 5.3.5. Заключение по модели круговой трещины

Путем добавления в плоскую трехмерную модель предположения о круговой форме фронта трещины, получена радиальная модель гидроразрыва, в которая адаптирована для описания переноса проппанта и остановки его движения. Разработан эффективный численный алгоритм решения уравнений модели, основанный на аппроксимации уравнений конечными разностями и выделением сингулярности в окрестности фронта трещины. Верификация алгоритма проведена на задаче о круговой трещине, распространяющейся в вязкостном режиме. На основе серии вычислительных экспериментов с использованием двух критериев закупоривания определены условия образования пробки проппанта в окрестности фронта трещины и вдали от него. Установлено, что основными параметрами, которые влияют на закупоривание, являются скорость закачки (расход жидкости в скважину) и утечка жидкости гидроразрыва в породу. На основе выполненных расчетов определен вычисляемый по ихъ значениям параметр, который определяет тип закупоривания. При большом значении параметра то закупоривание трещины происходит из-за достижения предельной концентрации проппанта вне окрестности фронта трещины, а при малом — в этой окрестности. Сформулирован способ приближенного определения радиуса части трещины, заполненной проппантом, как функции расхода жидкости трещину и ее утечки в породу.

### 5.4. Определение параметров трещиноватопористой среды по утечкам бурового раствора

Одна из модификаций модели круговой трещины была использована для решения задачи об оценке параметров трещин по потерям бурового раствора [17]. Модификация заключается в учете наличия естественной трещины в которой возможно течение бурового раствора даже при наличии нулевой деформации породы, что требует описания положения фронта бурового раствора и границы области, в которой происходит деформация породы. В отличие от полностью трехмерной модели, в этой задаче фронт бурового раствора (жидкости) находится дальше от центра трещины, чем граница области деформации (фронт трещины), что требует формулировки новых условий для определения их положения.

### 5.4.1. Постановка задачи и основные допущения

Процесс бурения скважин часто сопровождается потерей бурового раствора. Одной из причин этих потерь может стать его утечка в естественные трещины в породе. Эффективной мерой борьбы с утечкой бурового раствора является установка обсадной колонны, однако это ограниивает возможности бурения и каротажных исследований скважины [270] Другим способом уменьшение таких потерь является использование различные добавки к буровому раствору. Эффективное использование этой технологии требует учета параметров трещиноватой среды, поскольку, как правило, существуют некоторые ограничения на использование таких добавок. В этом параграфе предложена разработка процедуры определения параметров трещиноватых пород (количество трещин, их ширина<sup>6</sup>, проницаемость, пористость множества трещин и т. д.). Процедура основана на анализе временных зависимостей между давлением в стволе скважины и объемом потерь бурового раствора во время бурения. Она состоит в проведении серии расчетов потерь бурового раствора при заданном давлении в стволе скважины (прямая задача), а затем в корректировке параметров набора трещин для достижения наилучшего соответствия между рассчитанными и измеренными потерями (обратная задача). Для расчета потерь для заданного давления в стволе скважины используется модель потерь бурового раствора в семейство трещин. Предлагаемая модель описывает поток бурового раствора в набор трещин, сопровождаемый деформацией берегов трещин под действием давления накачки. Для учета фильтрации бурового раствора из трещины в пористую среду используется закон Картера. Входными параметрами в прямой задаче являются ширина и количество трещин, параметры реологии бурового раствора, зависимость давления в скважине от времени. В результате решения прямой задачи получается суммарный по всем трещинам объем утечек в породу.

220

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup>Поскольку в случае естественных трещин ширина канала, в котором движется жидкость, не равна нулю при отсутствии деформации породы и смещения берегов трещин, в данном параграфе используется термин "ширина" вместо "раскрытие", как более корректный.

### 5.4.2. Модель потерь бурового раствора в систему естественных трещин

### Допущения и концепция модели

В модели предполагается, что буровой раствор утекает в семейство поперечных осесимметричных трещин, ортогональных стволу скважины, как схематично показано на рисунке 5.25. Предполагается, что все трещины расположены достаточно далеко друг от друга, так что их влиянием на взаимное напряжение можно пренебречь. Время начала утечки раствора и зависимость давления на входе в трещину от времени указаны для каждой трещины. Перед началом бурения все трещины считаются открытыми на на некоторую заданную ширину  $w_0$ . Порода сжата напряжениям  $\sigma_{min}$  в направлении, поперечном плоскости трещин. Упругие свойства породы характеризуются модулем Юнга Е и коэффициентом Пуассона  $\nu$ . Буровой раствор описывается в приближении модели жидкости Гершеля-Балкли и считается несжимаемой. Его реология характеризуется коэффициентом консистенции K, показателем степени n и предельным напряжением сдвига  $\tau_0$ . Вязкими свойствами поровой жидкости и ее сопротивлением проникновению бурового раствора в трещины пренебрегается в силу значительно меньшей вязкости поровой жидкости по сравнению с вязкостью бурового раствора. Деформации породы модели потерь в систему трещин опи-



Рисунок 5.25 – Схема утечек бурового раствора в систему трещин

сывается той же моделью, что и в классической модели плоской радиальной трещины (описанной в параграфе 5.3). При этом учитывается исходная ширина трещин и отсутствие кончика трещины. Поэтому области применимости уравнений и граничных условий отличаются от используемых в радиальной модели гидроразрыва пласта. Схема модели одной естественной трещины при движении по ней бурового раствора представлена на рисунке 5.26. Можно выделить три интервала: область, занятая буровых раствором, давление которого достаточно, для смещения берегов трещины (I); область, занятая буровым раствором, в которой ширина трещины остается равной исходной (II); область, занятая поровой жидкостью (III).



Рисунок 5.26 – Схема одиночной трещины при течении в ней бурового раствора: І - область деформации берегов трещины; ІІ - область, занятая буровым раствором; ІІІ - область, занятая поровой жидкостью

### Описание движение жидкости в трещине

Движение жидкости в трещине считается осесимметричным и описывается в рамках приближения модели Гершеля-Балкли. Трещина считается радиальным каналом переменного сечения с источником в центре. Подмодель течения жидкости совпадает с моделью течения радиальной трещины (§. 5.3) и включает в себя те же уравнение для давления (5.39) и уравнение неразрывности (5.39), но отличающиеся граничные условия на скважине и границе распространения бурового раствора

$$p(R_w, t) = p_{in}, \quad p(R_{\text{front}}, t) = p_{pore}.$$
(5.74)

Для определения положения границы бурового раствора, которое разделяет области (II) и (III), используется условие Стефана, говорящее о том, что фронт жидкости движется со скоростью жидкости

$$\frac{dR_{front}}{dt} = \frac{Q_{front}}{2\pi R_{front} w(R_{front})}.$$
(5.75)

с начальным условием

$$R_{front}\Big|_{t=0} = R_w \tag{5.76}$$

Величина утечки  $Q_L$  описывается, как и в радиальной модели трещины гидроразрыва законом Картера [47] (5.13).

### Расчет раскрытия естественной трещины

В случае, когда давление бурового раствора p(r) не превосходит сжимающих напряжений  $\sigma_{min}$ , ширина трещины задается равной ширине в естественном залегании

$$w(r,t) = w_0. (5.77)$$

В ином случае добавочная ширина трещины  $w_{add}$  рассчитывается по формуле (5.43), используемой в модели радиальной трещины, при подстановке  $p_{\text{net}} = p - \sigma_{min}$ . Полная ширина получается суммированием ширины в естественном залегании и добавочной

$$w(r,t) = w_0 + w_{add}.$$
 (5.78)

Положение границы между областями, где ширина трещины равна начальной ширине (I) и областью (II), где берега трещины деформированы, рассчитывается так же как положение кончика в радиальной трещине из условия (5.44). Так как трещина уже существует, то не требуется притока энергии для разрушения породы, поэтому в условии (5.44) КИН  $K_{Ic}$  выбирается равным нулю, что соответствует условию плавного смыкания.

### 5.4.3. Решение прямой задачи о потерях бурового раствора в систему трещин

### Верификация модели

Модель и метод решения ее уравнений были верифицированы на задачах о течении ньютоновской и неньютоновской жидкости в радиальной трещине без утечки в породу путем сравнения с аналитическим решением и расчетами других авторов. В случае ньютоновской жидкости уравнения модели могут быть переписаны в виде задачи Коши для обыкновенного дифференциального урав-

224

<u>م</u>

нения

$$\frac{dR_{front}}{dt} = \frac{w_0^2(p_{in} - p_{pore})}{12KR_{front}\ln(R_{front}/R_w)},$$

$$q = \frac{\pi w_0^3(p_{in} - p_{pore})}{6KR_{front}\ln(R_{front}/R_w)}$$
(5.79)

с граничным условием (5.77), которую можно решить численно с высокой точностью.

Решение задачи (5.79), (5.77) использовалось в качестве точного решения для сравнения с решениями, полученными по рассматриваемой модели потерь, бурового раствора в систему трещин и по модели радиального потока жидкости в канале постоянной ширины, представленном в [271]. На рисунке 5.27 (слева) показано сравнение зависимостей от времени расхода бурового раствора, полученных по модели [271] и по настоящей модели с точным решением для фиксированного давления и постоянной ширины трещины. Вязкость жидкости задавалась равной  $K = 0.0383 \, \Pi a \cdot c$ , коэффициент утечек –  $C_L = 0$ , разница давлений  $p_{in} - p_{pore} = 4.83 \, \Pi a$ , ширина трещины  $w_0 = 0.85 \, \text{мм}$ . Очевидно, что решение, полученное по настоящей модели, совпадает с точным решением, а решение, полученное по модели [271], имеет погрешность порядка 10%.

Для случая неньютоновской жидкости, описываемой моделью Гершеля-Балкли, проведено аналогичное сравнение настоящей модели с моделью [271], предоставленной ее автором. Реология жидкости в этом расчете описывалась моделью Гершеля-Балкли с параметрами  $K = 0.0383 \, \Pi a \cdot c^n$ , n = 0.94,  $\tau_0 = 4 \, \Pi a$ , остальные параметры оставались неизменными. На рисунке 5.27 (справа) показано зависимостей от времени расхода бурового раствора, полученных по модели [271] и по настоящей модели. Как и в случае Ньютоновской жидкости численный метод [271] дает завышенный по сравнению с настоящей моделью расход бурового раствора. Из-за погрешности метода [271], показанной на рисунке 5.27 невозможно получить абсолютное совпадение результатов, но качественное поведение кривых, полученных на основе обеих моделей, одинаково, а различия между ними не превышают 30%. Следует отметить, что, во-первых, погрешность метода [271] возрастает при увеличении предельного напряжения сдвига, во-вторых, эта погрешность присутствует в расчете не только расхода бурового раствора, но и в определении фронта его проникновения.



Рисунок 5.27 – Зависимости расхода бурового раствора от времени, рассчитанные по различным моделям для раствора с Ньютоновской реологией (слева) и реологией Гершеля-Балкли (справа) : 0-модель [271]; 1 - настоящая модель, пунктир – решение задачи Коши (5.79), (5.77)

## Чувствительность потерь бурового раствора к изменению основных параметров

В настоящем разделе будет проведена оценка влияния реологических свойств бурового раствора на скорость потерь. Также на примере двух основных наборов реологических параметров будет показана чувствительность скорости потерь к изменению других параметров модели. Эти базовые наборы имеют одинаковый коэффициент консистенции и показатель степени  $K = 0.0383 Pa \cdot s^n$ , n = 1 и отличаются отличаются значениями предельного напряжения сдвига:  $\tau_0 = 0Pa$  и  $\tau_0 = 4Pa$ . Вычислительные эксперименты проводились с использованием "полевых" данных, содержащих зависимость давления в скважине и расхода бурового раствора от времени, как показано на рисунке 5.28. Эти данные использовались в работе [272] для определения параметров трещиноватопористой среды в рамках модели с двойной пористостью. Поскольку "полевые" данные существенно немонотонны, так как содержат выбросы, обусловленные качеством измерения, для удобства проведения вычислительных экспериментов было проведено их сглаживание, сохраняющее основные особенности зависимостей, как показано на рисунке 5.28.

Для оценки влияния вязкости бурового раствора на рисунке 5.29 показаны временные зависимости его расхода с коэффициентом консистенции, равным исходному значению и отличающимся на ±10%. На рисунке 5.30также представлены те же зависимости для показателя степени и предельного напряжения



Рисунок 5.28 – Зависимости давления в скважине (слева) и расхода бурового раствора (справа) от времени, используемые при проведении вычислительного эксперимента: тонкая линия – исходные данные, толстая – сглаженные

сдвига, изменяющийся на  $\pm 10\%$  и на  $\pm 100\%$  по отношению к их основным значениям, соответственно. Поскольку предельное напряжение сдвига может меняться в более широком диапазоне, чем показатель степени, варьирование его значения в вычислительном эксперименте так же проводилось более интенсивно. Ширина трещины для всех расчетов, представленных на рисунке 5.29–5.30, была постоянной и равна  $w_0 = 0.67$  мм. Это значение соответствует наилучшему совпадению между измеренными и рассчитанными коэффициентами потерь для реологии, характеризующейся параметрами  $K = 0.0383 \, \Pi a \cdot s^n$ , n = 1,  $\tau_0 = 4 \, \Pi a$ . Как видно из рисунке 5.29, 5.30, расход бурового раствора в трещину



Рисунок 5.29 – Зависимости расхода бурового раствора от времени при варьировании коэффициента консистенции на 10%: 0 – полевые данные;  $1-K = 0.034 \,\Pi a \cdot c^n$ ;  $2-K = 0.0383 \,\Pi a \cdot c^n$ ;  $3-K = 0.042 \,\Pi a \cdot c^n$ 

226



Рисунок 5.30 – Зависимости расхода бурового раствора от времени при варьировании показателя степени на 10% (слева) и предельного напряжения сдвига (справа) на 100%: 0 – полевые данные; Слева: 1–*n* = 0.91; 2–*n* = 0.94; 1–*n* = 1. Справа: 1–*τ*<sub>0</sub> = 0*Pa*; 2–*τ*<sub>0</sub> = 4*Pa*; 3–*τ*<sub>0</sub> = 8*Pa* 

наиболее чувствителен к изменению показателя степени: изменение этого параметра на 10% вызвало изменение расхода на 16%, тогда как такое же изменение показателя консистенции и предельного напряжения сдвига вызвало изменение расхода на 6% и 11%, соответственно. Следует, однако, отметить, что предельное напряжение сдвига в практически применяемых жидкостях может варьироваться в больших пределах, чем остальные два параметра. Поэтому меньшая чувствительность расхода бурового раствора к вариации этого параметра по сравнению с чувствительностью к вариации показателя степени компенсируется большим интервалом его изменения, что делает учет таких изменений необходимым.

Для оценки влияния порового давления на расход бурового раствора использовались два набора параметров реологии, отличающиеся значениями предельного напряжения сдвига:  $\tau_0 = 0 \,\Pi a$  и  $\tau_0 = 4 \,\Pi a$ . Для каждого из наборов ширина трещины  $w_0$  была выбрана так, чтобы обеспечивать наилучшее совпадение между рассчитанными и измеренными расходами бурового раствора и равнялась  $w_0 = 0.59 \,\text{мм}$  для  $\tau_0 = 0 \,\Pi a$  и  $w_0 = 0.67 \,\text{мм}$  для  $\tau_0 = 4 \,\Pi a$ . Очевидно, что на величину потерь скорость потерь влияет разница давлений  $p_w - p_{pore}$ , а не поровое давление  $p_{pore}$ , непосредственно, поэтому варьировалось значение именно этой величины. На рисунке 5.31 показаны зависимости расхода бурового раствора от времени, которые соответствуют базовому поровому давлению  $p_{pore} = 37 \,\text{M}\Pi a$  и значениям порового давления, которые обеспечивают  $\pm 10\%$ 



Рисунок 5.31 – Зависимости расхода бурового раствора от времени при варьировании порового давления для  $\tau_0 = 0 \Pi a$  (слева) и  $\tau_0 = 4 \Pi a$  (справа): 0 – полевые данные;  $1-p_{pore} = 36.75 \text{ MIa}$ ;  $2-p_{pore} = 37 \text{ MIa}$ ;  $3-p_{pore} = 37.25 \text{ MIa}$ 

отклонение перепада давления  $p_w - p_{pore}$ . Видно, что расход бурового раствора пропорционален перепаду давления и 10% -ое изменение перепада давления приводит к примерно такому же (11%) изменению расхода. Следует также отметить, что изменение абсолютного значения порового давления в этом расчете составляет всего 0,67%, что означает, что поровое давление является ключевым параметром для определения ширины трещины и должно измеряться с высокой точностью.



Рисунок 5.32 – Зависимости расхода бурового раствора от времени при варьировании коэффициента утечек для  $\tau_0 = 0 \Pi a$  (слева) и  $\tau_0 = 4 \Pi a$  (справа): 0 – полевые данные;  $1-C_L = 0$ ;  $2-C_L = 50 \cdot 10^{-6} \text{ м } \sqrt{\text{c}}$ ;  $3-C_L = 100 \cdot 10^{-6} \text{ м } \sqrt{\text{c}}$ ;  $4 - C_L = 150 \cdot 10^{-6} \text{ м } \sqrt{\text{c}}$ 

На рисунке 5.32 показаны зависимости расхода бурового раствора для различных коэффициентов утечки. Коэффициент утечки изменялся в диапазоне от нуля (непроницаемой породы) до значения  $C_L = 150 \cdot 10^{-6}$  м  $\sqrt{c}$ , которое было рассчитано в [271] для случая трещиноватых сланцев на основе полевых экспертных оценок. Хорошо видно, что наличие утечки значительно увеличивает расход бурового раствора. Можно видеть также, что разница между непроницаемой и проницаемой породой выше, чем разница между разными коэффициентами утечек в проницаемой породе. Это означает, что наличие утечки в породу имеет большее значение, чем абсолютная величина коэффициента утечек, а, значит, допустима некоторая погрешность при определении значения коэффициента утечки для использования в настоящей модели.



Рисунок 5.33 – Зависимости расхода бурового раствора от времени (слева) и ширины трещины на скважине (справа) при варьировании сжимающих напряжений в породе  $\sigma_{min}$  для  $\tau_0 = 0Pa : 0$  – полевые данные;  $1-\sigma_{min} = 40MPa$ ;  $2-\sigma_{min} = 38.8MPa$ ;  $3-\sigma_{min} = 38.7MPa$ ;  $4-\sigma_{min} = 38.6MPa$ ;  $5-\sigma_{min} = 38.2MPa$ 

Одним из важных отличий предложенной модели потерь в систему трещин является возможность учета деформации берегов трещины, которая определяется разницей между давлением в скважине  $p_w(t)$  и сжимающими напряжениями  $\sigma_{min}$ . Для исследования влияния сжимающих напряжений на рисунке 5.33-5.34 представлены зависимости расхода бурового раствора, полученные при различных значениях этого параметра. Они также показывают соответствующее изменение ширины трещины в стволе скважины. Хорошо видно, что существует некоторый предел разницы между давлением в стволе скважины и сжимающим напряжением в естественном залегании. Если давление в скважине превышает этот предел, то трещина начинает развиваться по сценарию трещины гидроразрыва. Характерным для этого сценария является экспоненциальный рост расхода при поддержании постоянного давления в скважине.

230



Рисунок 5.34 – Зависимости расхода бурового раствора от времени (слева) и ширины трещины на скважине (справа) при варьировании сжимающих напряжений в породе  $\sigma_{min}$  для  $\tau_0 = 4Pa : 0$  – полевые данные;  $1-\sigma_{min} = 40MPa$ ;  $2-\sigma_{min} = 38.8MPa$ ;  $3-\sigma_{min} = 38.7MPa$ ;  $4-\sigma_{min} = 38.6MPa$ ;  $5-\sigma_{min} = 38.2MPa$ 

В рассматриваемом примере это предельное значение находилось в интервале  $p_{in} - \sigma_{min} \in [0.5; 1]$  МПа и соответствовало сжимающему напряжению, находящемуся в интервале 38.6 МПа  $\leq \sigma_{min} \leq 38.7$  МПа. Когда сжимающее напряжение немного превышает это значение  $\sigma_{min} \geq 38.7$  МПа, расход бурового раствора становится нечувствительным к точному значению  $\sigma_{min}$  и близок расходу, к полученному при  $\sigma_{min} = 40$  МПа, когда берега трещины не деформируются. Когда сжимающее напряжение ниже предельного значения, то точное значение  $\sigma_{min}$  влияет только на момент начала лавинообразного роста расхода бурового раствора. Изменение значения предельного напряжения сдвига несколько повышает чувствительность расхода и ширины трещины к "всплескам" давления, то есть к кратковременным локальным максимумам давления в скважине, однако незначительно влияет на предельное значение, при превышении которого наблюдается рост потерь бурового раствора.

С одной стороны, учет деформации горных пород позволяет модели предсказать возможный быстрый рост потерь бурового раствора по сценарию трещины гидроразрыва. С другой стороны, если давление в стволе скважины поддерживается меньшим, чем сжимающие напряжения сжимающие напряжения в породе, то можно вычислять расход бурового раствора без учета деформации берегов трещины. Это позволяет исключить такой параметр, как значение сжимающих напряжений  $\sigma_{min}$  из методики по определению параметров породы по данным о потерях бурового раствора.

### 5.4.4. Расчет раскрытия трещины по данным об утечках бурового раствора

Обратная задача определения параметров трещиноватости породы заключается в определении ширины трещин и их количества на основе анализа зависимостей давления в скважине и расхода бурового раствора в трещины от времени. Эта задача формулируется так же как и в работе [272] в виде оптимизационной задачи. Требуется найти значения параметров **x**, обеспечивающие минимум функционалу

$$F(\mathbf{x}) = \left[\int_{0}^{T} \left(Q_{well}^{exp}(t) - Q_{well}^{num}(t, \mathbf{x})\right)^{2} dt\right]^{1/2}.$$
 (5.80)

Здесь  $Q_{well}^{exp}$  – потери бурового раствора, наблюдаемые при бурении, T – период времени, в течение которого наблюдались потери,  $Q_{well}^{num}$  – суммарный расход во все трещины, полученный в вычислительном эксперименте. В предположении об одинаковости всех трещин его можно рассчитать как  $Q_{well}^{num} = Q_{in}N$ , где  $Q_{in}$  – расход бурового раствора в одну трещину. Естественными компонентами вектора параметров являются количество N и ширина трещин  $w_0$  на участке, где происходят потери бурового раствора. Однако, как будет показано ниже, из условия минимизации функционала (5.80) можно получить только некоторую связь между этими параметрами, а не значения каждого из них. Поэтому в при проведении исследования один из параметров — количество трещин — фиксировался равным N = 1 и использовался метод решения оптимизационной задачи с одним параметром, а именно, метод золотого сечения, описанный, например, в [273] и использованный в [272] для решения аналогичной задачи.

### Связь между шириной и количеством трещин

Для анализа влияния основных ширины и количество трещин на расход бурового раствора будет проведен безразмерный анализ уравнений модели. С этой целью уравнения движения жидкости (5.39), (5.40), переписываются для случая непроницаемой породы, степенной жидкости без учета деформации породы

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -2K \left(\frac{2n+1}{\pi n}\right)^n \frac{(Q/N)^n}{w^{2n+1}R^n}, 
\frac{\partial Rw}{\partial T} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial (Q/N)}{\partial R} 
\frac{\partial R_{front}}{\partial T} = \frac{Q_{front}}{2\pi R_{front} w_{front}}$$
(5.81)

Новые безразмерные переменные вводятся по следующим формулам

$$R = R_*r, \ T = T_*t, \ P = P_*p, \ Q = Q_*q, \ w = w_*w$$
(5.82)

где  $R_*$  – максимальный радиус проникновения бурового раствора,  $T_*$  – период наблюдения за процессом,  $P_*$  – усредненная по времени разность давлений между давлением в стволе скважины и поровым давлением,  $Q_*$  – средний времени расход раствора,  $w_*$  – средняя ширина трещины. Уравнения в терминах безразмерных переменных можно записать следующим образом:

$$\tilde{C}_{1}\frac{\partial rw}{\partial t} + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial(q)}{\partial r}$$

$$\tilde{C}_{2}\frac{\partial p}{\partial r} = -2k\left(\frac{2n+1}{\pi n}\right)^{n}\frac{(q)^{n}}{w^{2n+1}r^{n}},$$

$$\tilde{C}_{1}\frac{\partial r_{front}}{\partial t} = \frac{q_{front}}{2\pi r_{front}w_{front}}$$
(5.83)

Здесь  $\tilde{C}_1$  и  $\tilde{C}_2$  — безразмерные комбинации, определяемые формулами

$$\tilde{C}_1 = \frac{P_* w_*^{2n+1} R_*^{n-1}}{K(Q_*/N)^n}, \quad \tilde{C}_2 = \frac{R_*^2 w_*}{T_* Q_*/N}$$
(5.84)

В соответствии с постановкой задачи известны характерные значения перепадов давления  $(P_*)$ , времени  $(T_*)$  и скорости потери бурового раствора  $(P_*)$ , а необходимо определить среднюю ширину трещин  $(w_*)$ , их количество (N)и радиус внешней границы бурового раствора  $(R_*)$ . Можно исключить  $R_*$  из рассмотрения, переписав

$$C_1 = \tilde{C}_1 \tilde{C}_2^{2/(n-1)} = \frac{P_* T_*^{(n-1)/2}}{K} \left(\frac{Nw_*^3}{Q_*}\right)^{(n+1)/2}, \quad C_2 \tilde{C}_2^{1/2} = \left(\frac{R_*^2 w_*}{T_* Q_*/N}\right)^{1/2}$$
(5.85)

Тогда уравнения (5.83) можно переписать следующим образом:

$$C_{2}^{2} \frac{\partial rw}{\partial t} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial (q)}{\partial r},$$

$$C_{1}C_{2}^{n-1} \frac{\partial p}{\partial r} = -2k \left(\frac{2n+1}{\pi n}\right)^{n} \frac{(q)^{n}}{w^{2n+1}r^{n}},$$

$$C_{2}^{2} \frac{\partial r_{front}}{\partial t} = \frac{q_{front}}{2\pi r_{front} w_{front}}.$$
(5.86)

Таким образом, решение прямой задачи определяется двумя параметрами. Значит, решая серию безразмерных задач (5.86) для различных значений  $C_1$  и  $C_2$ , а затем сравнивая полученные кривые зависимости давления и расхода бурового раствора с данными "полевых измерений", можно выбрасть наиболее подходящие значения комбинаций  $C_1$  и  $C_2$ . Однако знание этих значений порождает только два соотношения (5.85) для трех неизвестных  $w_*, R_*$  и N. Отсюда следует, что каждой паре параметров  $C_1^*$  и  $C_2^*$  соответствует множество троек параметров  $w_*$ ,  $R_*$  и N, связанных двумя соотношениями  $C_1(w_*, R_*, N) = C_1^*$ ,  $C_2(w_*, R_*, N) = C_2^*$ . Значит, одновременное определение всех трех неизвестных из данных анализа полевых записей давления ствола скважины и расхода бурового раствора невозможно. В частности, невозможно определить одновременно как среднюю ширину, так и количество трещин, если радиус зоны проникновения неизвестен. Анализ результатов расчетов показал, что этот вывод справедлив и для бурового раствора с ненулевым предельным напряжением сдвига  $au_0$ . Из (5.85) следует, что в случае жидкости степенной реологии неизвестные связаны следующими соотношениями:

$$w_* \sim N^{-1/3}, \ R_* \sim (w_* N)^{-1/2} \sim N^{-1/3}.$$
 (5.87)

Поэтому в качестве решении задачи об определении параметров трещиноватой среды по потерям бурового раствора достаточно указывать, например, значение коэффициента

$$C_{WN} = w_0 \cdot N^{1/3}, \tag{5.88}$$

при котором обеспечивается отклонение рассчитанного расхода бурового раствора менее всего отклоняется полученного при бурении распределения. Это значение  $C_{WN}$  будет равно ширине единственной трещины, обеспечивающей

минимум функционала (5.80). Ширину трещин  $w_0(N)$  при их известном (например, при анализе керна) количестве N можно получить из очевидной формулы  $w_0 = C_{WN} \cdot N^{-1/3}$ .

## Чувствительность ширины трещин, определяемой по потерям бурового раствора, к основным параметрам задачи

В предыдущем пункте 5.4.3 было показано влияние основных параметров на распределение расхода бурового раствора, здесь будет показано влияние тех же параметров на решение обратной задачи, то есть на ширину трещины, при которых распределение расхода наиболее близко наблюдаемому в эксперименте.

Как показано 5.4.3, малые (<10%) изменения коэффициента консистенции слабо влияют на расход бурового раствора, следовательно, влияние этого параметра на ширину также будет незначительным. Поэтому будет исследовано только влияние показателя степени n и предела текучести  $\tau_0$ . На рисунке 5.35 показаны зависимости расхода бурового раствора от времени в одной трещине, полученные для различных показателей степени. В отличие от рисунка 5.30, где расчеты скорости потери бурового раствора вычисляются для одной и той же ширины, здесь ширина в каждом расчете выбирается так, чтобы находить наилучшее соответствие для измеренного расхода (ширина отличается для разных значений показателя степени). На том же рисунке показано значение коэффициента  $C_{WN}$  (5.88), рассчитанного из решения обратной задачи при различных количествах трещин. Слабая (<3%) вариация коэффициента  $C_WN$  при изменении количества трещин подтверждает полученную на основе безразмерного анализа зависимость (5.87) между шириной и количеством трещин.

На рисунке 5.36 показаны зависимости расхода бурового раствора от времени в одной трещине, и зависимости ширины трещины от числа трещин, полученные для различных значений предельного напряжения сдвига

Видно, что показатель степени и предельное напряжение сдвига влияют на определяемую из решения оптимизационной задачи ширину трещины слабее, чем на расход бурового раствора. Вариация ширины трещины при вариации показателя степени на 10% составила 9% (против 16% изменения расхода, см рис 5.30), а изменение предельного напряжения сдвига на 100% привело к изменению оцениваемой ширины трещины на 13%, тогда как 10% вариация пре-



Рисунок 5.35 – Зависимости расхода бурового раствора от времени в одной трещине (слева) и зависимость коэффициента  $C_{WN}$  от числа трещин (справа), полученные для различных показателей степени: 0 – полевые данные; 1 - n = 0.91, w = 0.63 мм; 2 - n = 0.94, w = 0.67 мм; 3 - n = 1, w = 0.75 мм

дельного напряжения сдвига приводит к 11% изменению расхода.

Можно также видеть, что значение предельное напряжение сдвига влияет на форму зависимости расхода бурового раствора от времени — наклон кривой значительно изменяется, тогда как при разных показателях степени кривая расхода раствора практически одинакова. Этот же вывод можно сделать из рисунка 5.31, на котором видно, что углы наклона кривых расхода бурового раствора отличаются для разных значений предельного напряжения сдвига. Отсюда следует, что существует возможность определить значение предельного напряжения сдвига бурового раствора одновременно с шириной трещины при анализе кривой потерь. Однако методика такой оценки требует дополнительного исследования и выходит за рамки целей диссертационной работы.

На рисунке 5.37 показаны зависимости ширины трещины или коэффициента  $C_{WN}$  от разницы между сжимающим напряжением и поровым давлением для двух значений предела текучести  $\tau_0$  Па и  $\tau_4$  Па. В модели потерь бурового раствора при отсутствии деформаций берегов трещины расход раствора определяется избыточным давлением в стволе скважины  $p_{well}(t)$  по отношению к поровому давлению  $p_{pore}$ . Поэтому естественным было бы исследовать чувствительность к ширины трещины к величине  $p_{well}(t) - p_{pore}$ . Однако давление в стволе скважины  $p_{well}(t)$  изменяется во времени и не подходит для использования в качестве параметра. Сжимающие напряжения  $\sigma_{min}$  можно приближенно рассматривать в качестве верхней границы для давления в скважине, так как



Рисунок 5.36 – Зависимости расхода бурового раствора от времени в одной трещине, (слева) и зависимость коэффициента  $C_{WN}$  от числа трещин (справа), полученные при различных значениях предельного напряжения сдвига: 0 – полевые данные;  $1 - \tau_0 = 0, w = 0.58$  мм;  $2 - \tau_0 = 4$  МПа, w = 0.67 мм;  $3 - \tau_0 = 8$  МПа, w = 0.75 мм

при превышении этого значения потери бурового раствора неограниченно растут, в качестве параметра используется именно разница  $\sigma_{min} - p_{pore}$ .

Изменение перепада давления  $\Delta p = \sigma_{min} - p_{pore}$  в широком диапазоне (1,5-8 МПа) приводит к изменению ширины трещины в пределах 50%. Зависимость ширины трещины w от этого параметра близка к степенной, и может быть приближенно записана в виде

$$w(\Delta p) \approx w \Big|_{\Delta p=1 \,\mathrm{MIIa}} \cdot \Delta p^{\alpha}, \ \alpha \approx 2.2 \div 2.5.$$
 (5.89)

На рисунке 5.37 также показаны зависимости ширины трещины или коэффициента  $C_{WN}$  от коэффициента утечки  $C_L$  в законе Картера. Можно видеть, что для оценки ширины трещины информация о наличии или отсутствии утечки в матрицу трещиновато-пористой среды более важна, чем знание точного значения коэффициента утечки. При изменении коэффициента утечек от значения  $C_L = 100 \cdot 10^{-6} \text{ M} \sqrt{\text{c}}$ , характеризующего трещиновато-пористую среду со слабопроницаемой матрицей, до  $C_L = 0$ , соответствующего трещиноватой среде с абсолютно непроницаемой матрицей, ширина трещины, определяемая из условия наилучшей аппроксимации рассчитанных потерей расхода бурового раствора, увеличивается на 20% ÷ 30% в зависимости от предельного напряжения сдвига. При этом увеличение коэффициента в 10 раз от  $C_L = 100 \cdot 10^{-6} \text{ M} \sqrt{\text{c}}$ до  $C_L = 10^{-3} \text{ M} \sqrt{\text{c}}$  уменьшает ширину трещины на 10% ÷ 15%.



Рисунок 5.37 – Зависимости коэффициента  $C_{WN}$  от перепада давления  $\Delta p = \sigma_{min} - p_{pore}$  (справа) и коэффициента утечки  $C_L$  (справа) полученные при различных значениях предельного напряжения сдвига:  $1 - \tau_0 = 0$ ;  $2 - \tau_0 = 4$  МПа

# 5.4.5. Аналогия между моделью системы естественных трещин и моделью трещиновато-пористой среды

В работе [272] была разработана методика определения фильтрационных параметров породы по данным о потерях бурового раствора. В основу предлагаемой методики положена модель плоскорадиальной фильтрации бурового раствора в трещиновато-пористую среду с вытеснением поровой жидкости. Предполагается, что среда имеет трещиновато-пористую структуру и представляет собой совокупность пористых блоков, отделенных друг от друга трещинами. Количество трещин считается достаточно большим, чтобы рассматривать их совокупность в качестве трещиноватой фазы трещиновато-пористой среды, характеризующейся высокой проницаемостью  $k_f$  и низкой пористостью  $m_f$ . Пористая фаза, состоящая из блоков среды характеризуется высокой пористостью  $m_r$  и низкой проницаемостью  $k_r$ . Обмен жидкостью между фазами среды характеризуется параметром перетока  $\alpha_0$ .

Предложенная в [272] модель описывает тот же процесс движения бурового раствора в трещиновато-пористую среду, что и рассматриваемая в настоящем параграфе модель. Ключевым отличием модели потерь в систему трещин является описание движения в каждой из трещин, что делает ее пригодной для случая, когда весь раствор утекает в одну трещину. Модель фильтрации описывает движение в трещинах на основе уравнений фильтрации, применимых для большого количества трещин. Тем не менее, ниже приведены результаты сравнения моделей для случая среднего  $10 \div 100$  количества трещин. Следует отметить, что кроме различий в предположениях о количестве трещин, модели содержат и другие отличия в базовых предположениях, которые приведены в таблице, поэтому возможны отличия и в полученных результатах.

Таблица 5.2 – Различающиеся предположения в моделях потерь бурового раствора

| Материал         | Модель                  |                        |
|------------------|-------------------------|------------------------|
|                  | Потерь в систему трещин | Фильтрации             |
| Буровой раствор  | Несжимаемый             | Слабосжимаемый         |
| Поровая жидкость | Невязкая                | Вязкая, слабосжимаемая |
| Порода           | Линейно упругая         | Слабосжимаемая         |

Так как модели бурового раствора в систему трещин и в среду с двойной пористостью описывают один и тот же процесс, можно установить взаимосвязи между их ключевыми параметрами, которые определяют процесс движения раствора. Для этого уравнения, описывающие поток жидкости внутри трещины, следует переписать в форме уравнений фильтрации и выделить соответствующие коэффициенты при скорости жидкости и производной давления. После алгебраических вычислений можно получить следующие для ширины трещини w и их количества N, с одной стороны и пористости  $m_f$  и проницаемости  $k_f$  трещиноватой фазы — с другой.

$$k_{f} = \frac{n}{4n+2} \frac{w^{2+1/n}N}{2^{1/n}K^{1-1/n}H}, \quad m_{f} = \frac{Nw}{H},$$

$$w = K^{\frac{1-n}{1+n}} 2^{\frac{1}{1+n}} \left(\frac{4n+2}{n}\frac{k_{f}}{m_{f}}\right)^{\frac{n}{1+n}}, \quad N = \frac{m_{f}H}{w}.$$
(5.90)

Далее обе модели были применены для определения параметров трещиновато-пористой среды по потерям бурового раствора при следующих параметрах: n = 0.94,  $\tau = 0$ ,  $K = 0.0383 \,\Pi a \cdot c^n$ ,  $p_{pore} = 37 \,\mathrm{M}\Pi a$ ,  $\sigma_{min} = 40 \,\mathrm{M}\Pi a$ . Для модели фильтрации в среде с двойной пористостью использовались дополнительно параметры, приведенные в [272], а именно сжимаемость бурового раствора была выбрана равной сжимаемости воды  $\beta_m = 4.58 \cdot 10^{-10} \,\Pi a^{-1}$ , пористость и проницаемость пористой фазы породы были выбраны характерными для песчаника  $m_r = 0.3$ ,  $k_r = 10 m D = 10^{-14} \,\mathrm{m}^2$ .



Рисунок 5.38 – Зависимости проницаемости трещиноватой среды  $k_f$  от пористости  $m_f$  (слева) и ширины трещин W от их количества N (справа), рассчитанные из решения обратной задачи по различным моделям: 1 — модель потерь в систему трещин; 2 — модель фильтрации в систему с двойной пористостью

Как было показано выше и в [272], решение обратной задачи позволяет получить только зависимость одного из определяемых параметров от другого, например, ширины трещин от их количества или проницаемости от пористости. На рисунке 5.38 приведены указанные зависимости w = w(N) и  $k_f = k_f(m_f)$ , являющиеся решением обратной задачи определения параметров трещиноватой среды по потерям бурового раствора. Хорошо видно, что проницаемости трещиноватой фазы, рассчитанные по разным моделям, различаются почти в два раза, тогда как зависимости ширины трещин от их количества практически совпадают. Большая чувствительность проницаемости объясняется степенной зависимостью ее от ширины трещины (5.90) с большим ( $\approx 3$ ) показателем степени. Поскольку ширина трещин является ключевым параметром при разработке закупоривающих добавок, можно сделать вывод, что при среднем количестве трещин ( $10 \le N \le 100$ ) обе модели дают согласующиеся результаты, несмотря на значительные различия между их подходами и основными предположениями.

### 5.4.6. Заключение по модели потерь бурового раствора

На основе радиальной трещины предложена модель потерь бурового раствора в систему естественных трещин. Модель описывает радиальное движение бурово-

239

го раствора из скважины в трещину, его утечку в породу и деформацию стенок трещины под действием давления раствора. Модель позволяет по известным параметрам пласта, реологии раствора и давлению в затрубном пространстве скважины получить зависимость величины потерь раствора от времени.

Сформулирована задача определения параметров трещиновато-пористой среды по данным о потерях бурового раствора. Разработан метод решения обратной задачи на основе предложенной модели. Показано, что только из зависимостей давления и величины потерь раствора от времени можно оценить только один из параметров, характеризующих трещиноватую среду. Приведены результаты решения обратной задачи, в которых определена ширина естественных трещин по зависимостям давления и величины потерь раствора от времени. Выполнен анализ чувствительности оцениваемой ширины трещины к величине погрешности при задании параметров раствора и пласта.

Установлена аналогия с ранее разработанной моделью потерь в трещиновато-пористую среду на основе уравнений фильтрации с двойной пористостью. Приведены формулы пересчета параметров. Показано, что обе модели, несмотря на значительные различия между их подходами и основными предположениями, дают согласующиеся результаты при среднем количестве трещин и могут быть использованы в этом интервале с одинаковой эффективностью.

# 5.5. Модель длинной трещины, включающая механизм оседания пропанта

### 5.5.1. Постановка задачи

В предыдущих параграфах 5.3, 5.4 были описаны плоские модели радиальных трещин, полученные из плоской трехмерной модели, описанной в параграфе 5.2, на основе предположений об изотропности и однородности напряженного состояния породы и малом влиянии силы тяжести. В настоящем параграфе описывается модель [18], полученная из плоской трехмерной модели на основе предположения о большой длине трещины, которая соответствует трещине, распространяющиеся в вертикальной плоскости в пласте, ограниченном по высоте пропластками с более сильными сжимающими напряжениями, что чаще встречается на практике. Модели для описания таких, ограниченных по высоте, трещин (модели PKN-типа) были предложены более 50 лет назад [81, 82], и в настоящее время заменены псевдо-трехмерными моделями, допускающими распространение трещины и в вертикальном направлении [94, 100, 104]. Тем не менее, модели PKN-типа используются для исследований, сфокусированных на движении жидкости или ее смеси с проппантом внутри трещины. Актуальность описания переноса проппанта подтверждается большим количеством современных работ по построению усовершенствованных теоретических моделей переноса [40, 274] и моделей, основанных на экспериментальных данных [38, 42]. Важными составляющими всех предлагаемых моделей [275] является различие осредненных скоростей жидкости и проппанта и существенное повышение вязкости смеси от концентрации частиц, определяемое различными функциональными зависимостями. Получаемые при этом модели гидроразрыва являются достаточно сложными для аналитического исследования и требуют применения численных методов. Однако адекватное исследование механики протекающих процессов не всегда возможно из-за относительно высокой вычислительной сложности моделей, связанной с одновременным решением связанных разнородных уравнений, описывающих распространение трещины ГРП. Исследование же движения смеси в трещине в составе PKN-модели позволяет учитывать влияние давления на ширину канала (раскрытие трещины) и не требует существенных вычислительных ресурсов, как при использовании, например, плоских трехмерных моделей По этой причине в работе [18] была предложена описанная настоящем параграфе плоская модель длинной трещины, в которой связь между давлением смеси и раскрытием трещины в поперечных сечениях локальна, но движение смеси рассчитывается в двумерной постановке, что позволяет учитывать влияние силы тяжести и описывать оседание проппанта.

Перенос проппанта обычно связан с разнообразными эффектами, такими как конвекция, оседание [45, 268] и формирование областей плотно упакованного проппанта [46]. Несомненно, множество подобных исследований может быть найдено в литературе [41, 44, 45, 59, 108, 276]. Новизна предлагаемой модели состоит в следующих улучшениях. Во-первых, рассмотрена фильтрация жидкости через проппантную упаковку с использованием модели переключения течения на фильтрацию в отличие от современных моделей [38, 42], основанных на обобщении экспериментальных данных из работы [39]. Учет фильтрации расширяет область применимости модели, позволяя рассматривать распространение трещины с более высокой концентрацией проппанта. Иначе [44, 59, 276], формирование проппантной упаковки вызовет полную остановку течения. Исследование распределения проппанта высокой концентрации помогает проектировать более эффективные трещины гидроразрыва [277]. Во-вторых, применяется упрощенный механизм раскрытия трещины. Это позволяет более адекватно описывать раскрытие трещины, чем в моделях с предписанным поведением [44, 45], но требует меньших вычислительных затрат, чем решение полной задачи упругости [3, 41, 59, 108, 276]. Наконец, метод частиц в ячейках применен для решения уравнения переноса концентрации проппанта с целью уменьшения численной диффузии по сравнению с конечно-разностными схемами [40] и другими популярными методами [41]. Также предложен надежный метод совместного решения нелинейной системы уравнений модели.

Таким образом, построенная модель включает в себя различные механизмы для учета следующих явлений: влияния проппанта на вязкость смеси, оседания проппанта, фильтрации жидкости через упаковку проппанта, утечки жидкости в формацию и раскрытие трещины под действием давления смеси.

### 5.5.2. Основные уравнения и граничные условия

### Уравнения баланса жидкости и проппанта с учетом утечек

Предполагается, что трещина имеет постоянную высоту H и переменное раскрытие w(x, y, t). Смесь жидкости гидроразрыва и проппанта течет внутри трещины. Течение считается гомогенным, т.е. свойства течения усреднены по поперечной координате z. Движение суспензии, содержащей взвешенные частицы проппанта, в трещине гидроразрыва описывается моделью двухфазной жидкости в двухскоростном приближении. Считается, что каждая фаза несжимаема. Течение смеси двумерное, и уравнения сохранения жидкости и проппанта

$$\frac{\partial}{\partial t}((1-c)w) + \operatorname{div}((1-c)w\mathbf{u}_f) = -Q_L, \tag{5.91}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(cw) + \operatorname{div}(cw\mathbf{u}_p) = 0 \tag{5.92}$$

являются естественными обобщениями известного уравнения неразрывности [60]

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div}(w \,\mathbf{u}) = Q(t)\delta(\mathbf{x}),\tag{5.93}$$

полученного осреднением трехмерного закона сохранения массы по поперечной координате z. В приведенных уравнениях x есть координата вдоль трещины, y — вертикальная координата, c(x, y, t) — средняя поперечной координате z концентрация проппанта (объемная доля),  $\mathbf{u}_f(x, y, t)$  — средняя скорость жидкости и  $\mathbf{u}_p(x, y, t)$  — средняя скорость проппанта.

Утечка жидкости, как и в плоской трехмерной модели определяется законом Картера (5.13) [47], в который добавлено условие отсутствия утечки при достижении концентрацией проппанта критического значения  $c^*$ .

### Раскрытие трещины

Раскрытие трещины рассчитывается, как и в классической PKN модели [82] на основе предположения о независимости поперечных сечений, дающего локальную линейную связь между средним по сечению x избыточным давлением  $\bar{p}(x,t)$  и распределением раскрытия w(x, y, t) по высоте сечения y [278]

$$w(x, y, t) = \bar{p}(x, t)w_0(y), \quad w_0(y) = \frac{1 - \nu^2}{E}\sqrt{\frac{H^2}{4} - y^2},$$
 (5.94)

$$\bar{p}(x,t) = \frac{1}{H} \int_{0}^{H} p(x,y,t) dy, \qquad (5.95)$$

Это упрощенное уравнение упругости описывает поведение трещины, зависящее от давления смеси. В то же время, его применение не вызывает трудностей с вычислительной точки зрения. В работах других авторов трещина может предполагаться постоянной формы [45] с целью исследования течения смеси без возможности изучения эффекта распространения трещины. Другим решением может быть рассмотрение однопараметрического семейства форм трещины, позволяющее описывать рост трещины без какого-либо влияния изменения давления [44]. Полная модель упругости [3, 4, 8, 59, 276], хотя и дает наиболее детальное описание процесса, требует больше вычислительных затрат.

### Поля скоростей

Движение жидкости и проппанта вызвано перепадом давления за счет закачки жидкости в трещину либо гравитационных сил. Скорости жидкости и проппанта в общем случае не совпадают. Например, проппант останавливается при высокой концентрации, тогда как жидкость фильтруется через упаковку проппанта. И наоборот, при оседании проппант может двигаться в покоящейся жидкости.

Скорости жидкости  $\mathbf{u}_f$  и проппанта  $\mathbf{u}_p$  определяются двумя различными способами в зависимости от концентрации проппанта. Если концентрация больше критического значения  $c^*$ , поля скоростей определяются следующим образом

$$\mathbf{u}_p = 0, \tag{5.96}$$

$$\mathbf{u}_f = \mathbf{u}_{\text{filtration}},\tag{5.97}$$

что означает, что жидкость фильтруется через неподвижный проппант. Скорость фильтрации **u**<sub>filtration</sub> вычисляется с использованием уравнения [279]

$$-\nabla p + \rho_m \mathbf{g} = \left(\frac{72\lambda_m c^{*2} \mu_f}{(1-c^*)^3 d_p^2} |\mathbf{u}_{\text{filtration}}| + \frac{3}{2} f_0 \frac{c^*}{(1-c^*)^3} \frac{\rho_f}{2d_p} |\mathbf{u}_{\text{filtration}}|^2 \right) \frac{\mathbf{u}_{\text{filtration}}}{|\mathbf{u}_{\text{filtration}}|},$$
(5.98)

где  $\mu_f$  и  $\rho_f$  есть соответственно вязкость и плотность жидкости гидроразрыва,  $d_p$  есть диаметр частиц проппанта, а значения эмпирических параметров равны  $\lambda_m = 25/12, f_0 = 7/3$ . Уравнение (5.98) является известным уравнением Эргуна, которое описывает нелинейную фильтрацию жидкости через плотную упаковку сферических частиц проппанта. Согласно ему повышение перепада давления ведет к практически квадратичному росту сопротивления фильтрации. Другой режим течения смеси осуществляется, если концентрация проппанта меньше критического значения. В этом случае определение скоростей происходит с помощью соотношений, полученных *Хаммондом* [268],

$$\mathbf{u}_p = \mathbf{u}_{\text{flow}} + \mathbf{u}_{\text{settling}},\tag{5.99}$$

$$\mathbf{u}_f = \mathbf{u}_{\text{flow}} - \frac{c}{1-c} \mathbf{u}_{\text{settling}},\tag{5.100}$$

$$\mathbf{u}_{\text{flow}} = \frac{-w^2}{12\mu(c)} (\nabla p - \rho_m \mathbf{g}), \qquad (5.101)$$

$$\mathbf{u}_{\text{settling}} = \frac{(\rho_p - \rho_m) d_p^2}{18\mu(c)} \mathbf{g},\tag{5.102}$$

где  $\mu(c)$  есть вязкость смеси,  $\rho_p$  — плотность проппанта и  $\rho_m = (1-c)\rho_f + c\rho_p$ ,  $\mathbf{u}_{\text{flow}}$  — скорость ньютоновской смеси в узком канале,  $\mathbf{u}_{\text{settling}}$  — скорость гравитационного оседания проппанта. Считается, что смесь проппанта и жидкости является однородной (распределение частиц по поперечной координате постоянно), скорость оседания сферических частиц проппанта относительно жидкости определяется согласно формуле Стокса. Также уравнение (5.101) не учитывает рассогласование средних скоростей фаз при приложенном фиксированном перепаде давления. Влиянием движения проппанта на течение жидкости пренебрегается. Поэтому в уравнениях закона сохранения импульса отсутствуют слагаемые, отвечающие за приток импульса от движения проппанта.

Вязкость смеси определяется из концентрации проппанта с помощью соотношения Марона-Пирса (5.53) [267] Согласно экспериментальному исследованию, выполненному *Мюллером* [280], это соотношение может быть использовано для вычисления вязкости суспензии твердых частиц. Формула (5.53) имеет сингулярность при достижении плотной упаковки  $c = c^*$ . Для того, чтобы избежать в алгоритме реализации предлагаемой модели сингулярности, переход к режиму фильтрации проводится по закону

$$\mathbf{u}_{f} = \max \left\{ \mathbf{u}_{\text{flow}} - \frac{c}{1-c} \mathbf{u}_{\text{settling}}, \ \mathbf{u}_{\text{filtration}} - \frac{c}{1-c} \mathbf{u}_{\text{settling}} \right\},$$
(5.103)

где функция maxmod $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$  дает вектор, максимальный по модулю, а  $\mathbf{u}_{\text{filtration}}$  определяется из уравнения (5.98), при подстановке в него текущего значения концентрации *c* вместо критического  $c^*$ .

Скорость ньютоновской смеси  $\mathbf{u}_{\text{flow}}$  не успевает достичь нулевого значения, соответствующего критическому значению концентрации  $c = c^*$  (дающему сингулярность в формуле (5.53)) в силу выполнения всегда условия |  $\mathbf{u}_{\text{filtration}}$  | > 0. Если концентрация превысила критическое значение, то считается, что произошла остановка движения проппанта. В отличие от модели радиальной трещины, в которой только фиксировалось закупоривание трещины, в рамках модели длинной трещины сделана попытка продолжить описание эволюции трещины путем учета фильтрации проппанта через пробку. Таким образом, алгоритм реализации модели исключает возникновение сингулярности, т.к. переключение на фильтрацию происходит с меньшими концентрациями  $c < c^*$  при конечных значениях  $\mu(c)$  [22].

### Граничные и начальные условия

Задача ставится в области  $x \in [0, L], y \in [0, H]$ . Смесь закачивается через входное сечение x = 0, на котором задаются нормальная компонента скорости смеси и концентрация проппанта. Нормальная компонента скорости смеси равна нулю на нижней и верхней границах трещины, а на границе x = L скорость имеет нулевую нормальную производную. Во всех рассмотренных задачах входная скорость постоянна вдоль сечения и вычисляется таким образом, чтобы обеспечить заданную объемную скорость закачки. В начальный момент времени раскрытие трещины равно нулю везде, кроме маленькой области возле входного сечения.

### 5.5.3. Численный метод

### Уравнение сохранения массы смеси

Уравнение сохранения смеси получается путем суммирования уравнений сохранения жидкости (5.91) и сохранения проппанта (5.92)

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div}(w\mathbf{u}_m) = -Q_L, \qquad (5.104)$$

где  $\mathbf{u}_m = (1-c)\mathbf{u}_f + c\mathbf{u}_p$ . Последнее уравнение с учетом уравнения раскрытия трещины (5.94) можно переписать в виде

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div}(k\nabla p) = f, \qquad (5.105)$$

$$w(x, y, t) = w_0(y)\bar{p}(x, t).$$
(5.106)

Функция  $k(p, \nabla p, w, c)$  вычисляется по закону

$$k(p, \nabla p, w, c) = -w \max\left\{\frac{w^2}{12\mu(c)}, \frac{(1-c)|\mathbf{u}_{\text{filtration}}|}{|\nabla p|}\right\},$$
(5.107)

который обеспечивает бессингулярный переход от режима течения смеси к режиму фильтрации жидкости через упаковку проппанта. Скорость **u**<sub>filtration</sub> определяется из решения уравнения (5.98). Правая часть уравнения (5.105) принимает значения

$$f = \frac{g}{12} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\rho_m w^3}{\mu(c)} \right) - Q_L \tag{5.108}$$

в режиме течения смеси и

$$f = -Q_L$$

в режиме фильтрации. Тип течения определяется по переключению k.

Дискретизация (5.105) по неявной схеме первого порядка по времени дает

$$\frac{w^{n+1} - w^n}{\Delta t} + \operatorname{div}(k^{n+1}\nabla p^{n+1}) = f^{n+1}, \qquad (5.109)$$

$$w^{n+1}(x, y, t) = w_0^{n+1}(y)\bar{p}(x, t).$$
(5.110)

Затем вводится итерационный процесс для линеаризации системы

$$\frac{w^{s+1} - w^n}{\Delta t} + \operatorname{div}(k^s \nabla p^{s+1}) = f^s,$$
 (5.111)

$$w^{s+1}(x, y, t) = w_0^{s+1}(y)\bar{p}(x, t), \qquad (5.112)$$

где *s* есть номер итерации. Решение с предыдущего шага по времени используется в качестве начального итерационного приближения для решения на текущем шаге.

Пространственная дискретизация выполнена с использованием метода ко-

нечных объемов на равномерной декартовой сетке, имеющей  $N_x$  и  $N_y$  ячеек в направлениях x и y соответственно. Центр ячейки обозначен как  $\mathbf{x}_{\alpha}$ , греческие нижние индексы  $\alpha$  и  $\beta$  означают номера ячеек. В итоге, дискретные уравнения могут быть представлены в форме

$$\frac{w_{\alpha}^{s+1} - w_{\alpha}^n}{\Delta t} + \sum_{\beta} a_{\alpha\beta}^s p_{\beta}^{s+1} = b_{\alpha}^s, \qquad (5.113)$$

$$w_{\alpha}^{s+1} = \sum_{\beta} d_{\alpha\beta} p_{\beta}^{s+1}, \qquad (5.114)$$

где коэффициенты  $a^s_{\alpha\beta}$  и  $b^s_{\alpha}$  вычисляются с помощью значений, известных с предыдущей итерации.

### Сопряжение моделей жидкости и упругости

Уравнения (5.113)-(5.114) составляют линейную систему для нахождения  $w^{s+1}$  и  $p^{s+1}$  на каждой итерации. Однако, так как формула для раскрытия трещины содержит давление, осредненное по каждому сечению x, шаблон схемы включает по крайней мере  $N_y + 2$  точек для *"енутренних"* ячеек.

Для уменьшения шаблона используется другой метод линеаризации, согласно которому, уравнение (5.113) переписывается в виде

$$\frac{w_{\alpha}^{s+1} - w_{\alpha}^s}{\Delta t} + \frac{w_{\alpha}^s - w_{\alpha}^n}{\Delta t} + \sum_{\beta} a_{\alpha\beta}^s p_{\beta}^{s+1} = b_{\alpha}^s \tag{5.115}$$

и вместо (5.114) используется упрощенное соотношение для  $w^{s+1} - w^s$ , учитывающее влияние давления только одной ячейки на раскрытие

$$w_{\alpha}^{s+1} - w_{\alpha}^{s} = \kappa_{\alpha} (p_{\alpha}^{s+1} - p_{\alpha}^{s}).$$
 (5.116)

После подстановки (5.116) в (5.115) получаем окончательный вид уравнения для давления

$$\frac{\kappa_{\alpha}}{\Delta t}p_{\alpha}^{s+1} + \frac{w_{\alpha}^{s} - w_{\alpha}^{n}}{\Delta t} + \sum_{\beta} a_{\alpha\beta}^{s} p_{\beta}^{s+1} = b_{\alpha}^{s} + \frac{\kappa_{\alpha}}{\Delta t} p_{\alpha}^{s}.$$
(5.117)

Коэффициенты  $\kappa_{\alpha} = \sum_{\beta} d_{\alpha\beta}$  выбираются таким образом, чтобы соотношение (5.116) при выполнении (5.114) точно выполнялось для любого постоянного приращения давления  $p_{\alpha}^{s+1} - p_{\alpha}^{s} = \Delta p_{0}$ . В [18] приведено обоснование сходимости предложенного итерационного процесса, которое для краткости опускается, так как не является предметом диссертационного исследования.

### Уравнение переноса проппанта

Уравнение переноса проппанта получено из (5.92) и (5.104) и преобразовано с использованием индивидуальной производной

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{u}_p \cdot \nabla c = \frac{c}{w} \left[ \operatorname{div}(w(1-c)(\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_p)) + Q_L \right]$$
(5.118)

для решения с помощью метода частиц в ячейках. Изначально предложенный *Харлоу* [281], этот метод использует набор двигающихся частиц, расположенных в области моделирования. Частицы характеризуются их месторасположением  $\mathbf{x}_i$  и значением концентрации проппанта  $c_i$ , где *i* есть номер частицы. Эти данные используются для вычисления концентрации проппанта в каждой ячейке сетки  $\mathbf{x}_{\alpha}$  с использованием взвешенного осреднения

$$c_{\alpha} = \frac{\sum_{i} w_{\alpha}(\mathbf{x}_{i})c_{i}}{\sum_{i} w_{\alpha}(\mathbf{x}_{i})},$$
(5.119)

$$w_{\alpha}(\mathbf{x}_i) = \max(0, 1 - r_{\alpha}(\mathbf{x}_i)/r_o), \qquad (5.120)$$

$$r_{\alpha}(\mathbf{x}_{i}) = \sqrt{\left(\frac{x_{i} - x_{\alpha}}{\Delta x_{\alpha}/2}\right)^{2} + \left(\frac{y_{i} - y_{\alpha}}{\Delta y_{\alpha}/2}\right)^{2}},$$
(5.121)

где  $r_0 = \sqrt{2}$  означает значение величины r, при котором вес равен нулю.

В соответствии с методом частиц в ячейках уравнения для траектории движения *i*-ой частицы проппанта и изменения вдоль нее концентрации проппанта записываются в виде

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{u}_p(\mathbf{x}_i, t), \tag{5.122}$$

$$\dot{c}_i = \text{RHS}(\mathbf{x}_i, t), \tag{5.123}$$

где точкой сверху обозначена полная производная вдоль траектории, а через RHS обозначена пространтственная дискретизация правой части уравнения (5.118).

Дискретизация по времени в свою очередь обеспечивается методом Рунге-Кутты второго порядка

$$\mathbf{x}_i^{n+1/2} = \mathbf{x}_i^n + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{u}_p^n(\mathbf{x}_i^n)$$
(5.124)

$$\mathbf{x}_i^{n+1} = \mathbf{x}_i^n + \Delta t \ \mathbf{u}_p^n(\mathbf{x}_i^{n+1/2})$$
(5.125)

$$c_i^{n+1} = c_i^n + \Delta t \operatorname{RHS}_i.$$
(5.126)

Значения  $\text{RHS}_i$  вычисляются с использованием правила ближайшего соседа, т.е. копируются из ближайшего центра ячейки. Билинейная интерполяция из узлов сетки используется для определения  $\mathbf{u}_p(\mathbf{x}_i)$ .

Для того, чтобы поддерживать разумную плотность частиц, частицы могут удаляться либо добавляться в область. Частица добавляется в центр ячейки, если полное количество частиц в ячейке меньше заданного значения и расстояние от центра ячейки до ближайшей частицы достаточно велико.

### Краткое описание алгоритма

Вычисления выполняются по временным шагам. На каждом *n*-м шаге по времени решаются уравнения с использованием итераций по *s*. Итерация начинается с решения уравнения (5.117) для нахождения  $p^{s+1}$ . Затем вычисляется раскрытие трещины  $w^{s+1}$  с помощью явной формулы (5.114). Поля как давления, так и раскрытие трещины используются для нахождения полей скоростей проппанта и жидкости из уравнений (5.99) и (5.100). Наконец, уравнение переноса проппанта (5.118) разрешается на основе известных значений скорости. Итерационная процедура повторяется до тех пор, пока не выполнится критерий сходимости

$$R = \frac{\max_{\alpha} |p_{\alpha}^{s+1} - p_{\alpha}^{s}|}{\operatorname{average}(|p^{s}|)} < \epsilon = 10^{-2}.$$
(5.127)

После этого алгоритм переходит на следующий шаг по времени.

# 5.5.4. Верификация алгоритма и результаты численного моделирования

### Верификация модели переноса и оседания проппанта

Для того, чтобы продемонстрировать характер поведения получаемого по модели решения, рассмотрим тестовую задачу. Эксперименты проведены со следующими параметрами.  $L = 200 \text{ м}, H = 50 \text{ м}, E = 10^{10} \text{ Па}, \nu = 0.2, \mathbf{g} = (0, -10) \text{ м}/\text{c}^2, N_x = 200, N_y = 50, \Delta t = 20 \text{ c}, Q_{\text{in}} = 0.01 \text{ м}^3 / \text{c}, C_L = 3 \cdot 10^{-5} \text{ м} / \text{c}^{\frac{1}{2}}, \mu_f = 1 \text{ Па} \cdot \text{c}, \rho_f = 1000 \text{ кг} / \text{ м}^3, \rho_p = 2700 \text{ кг} / \text{ м}^3, d_p = 2 \text{ мм}, c^* = 0.64, c_{\text{in}} = 0.3, которые соответствуют реалистичной операции гидроразрыва. Трещина рас$ пространяется постепенно от линии закачки жидкости. Процесс начинается с закачки подушки в течение начального периода 2500 с, за которым следует гид $росмесь с проппантом с концентрацией <math>c_{\text{in}}$ . В течение процесса концентрация проппанта возрастает возле кончика трещины из-за утечки жидкости в породу. Также концентрация проппанта увеличивается в нижней части трещины, а в верхней части формируется область с чистой жидкостью.

На рисунке 5.39 показана форма трещины, полученная путем визуализации раскрытия, увеличенной в 700 раз. Трещина имеет эллиптический профиль в каждом сечении *x*. Цвет каждой точки обозначает значение концентрации проппанта. Горизонтальная жирная линия выделяет сечение срединной плоскости на рисунке 5.39 также содержит контурные графики концентрации проппанта в различные моменты времени.

Результаты, полученные по настоящей модели, сравниваются с результатами [45], полученными для трещин, имеющих фиксированную форму. В этом случае течение полностью определяется в данный момент времени в терминах



Рисунок 5.39 – Тестовая задача: форма трещины при  $t = 4500 \,\mathrm{c}$ ; распределения концентрации проппанта в различные моменты времени:  $t = 2500, 4500, 7500 \,\mathrm{c}$ 

безразмерных переменных скорости закачки Q<sub>in</sub> и числа плавучести [45]

$$N_{\rm Bu} = \frac{c^*(\rho_p - \rho_f)w^3 H|\mathbf{g}|}{\mu_f Q_{\rm in}}.$$
 (5.128)

На рисунке 5.40 показаны графики фронта проппанта для двух случаев. Первый случай это течение смеси в эллиптической трещине с максимальным раскрытием 6 мм; число плавучести равно  $N_{\rm Bu} = 26.1$  и  $Q_{\rm in} = 0.0065 \,{\rm m}^3 \,/\,{\rm c}$ . Во втором случае рассмотрено течение в канале равномерной ширины w =12.7 мм с  $N_{\rm Bu} = 46$  и  $Q_{\rm in} = 0.075 \,{\rm m}^3 \,/\,{\rm c}$ . Расчеты по настоящей модели проведены при тех же условиях. В обоих случаях наблюдается общее соответствие между двумя решениями.


Рисунок 5.40 – Сравнения результатов [45] (()) с данными, полученными по настоящей модели, ( $\Delta$ ): слева результаты для эллиптической трещины; справа — для канала постоянной ширины;  $x^* = x/H$  и  $y^* = y/H$ 

### Влияние проппанта

Для оценки влияния закачки проппанта, проведены расчеты с различной концентрацией закачиваемого проппанта. Утечкой жидкости и силами гравитации пренебрегается На рисунке 5.41 показаны распределения раскрытия трещины и концентрации проппанта в срединном сечении. Все графики приведены для одного и того же момента времени. Длина трещины различается в зависимости от концентрации закачиваемого проппанта: чем выше концентрация, тем медленнее трещина распространяется. Этот эффект вызван зависимостью (5.53) вязкости смеси от концентрации проппанта.



Рисунок 5.41 – Распределения раскрытия трещины и концентрации проппанта в срединном сечении трещины для различных значений концентрации закачиваемого проппанта

#### Влияние утечки жидкости

На рисунке 5.42 показаны распределения концентрации проппанта для различных значений коэффициента утечки  $C_L$ . Так как рост концентрации проппанта обусловлен утечкой жидкости, а, согласно формуле (5.13), то области высокой концентрации проппанта распределены вдоль его фронта, то есть для частиц проппанта наиболее долго находящихся в трещине. Повышение концентрации проппанта и формирование области его закупоривания в нижней и верхней частях трещины обусловлено тем, что скорость утечки одинакова по высоте трещины, а раскрытие трещины и объем смеси максимальны в середине сечения. Рост концентрации проппанта ведет к торможению распространения трещины и возрастанию давления в скважине.



Рисунок 5.42 – Распределения концентрации проппанта для различных значений Картеровского коэффициента утечки<br/>  $C_L$ 

254

### Влияние фильтрации жидкости

На рисунке 5.43 показаны распределения концентрации проппанта для различных размеров частиц проппанта с  $c_{in} = 0.5$ . Размер частиц учитывается в уравнении, описывающем фильтрацию жидкости через проппантную упаковку (5.98), согласно которому большие частицы дают более интенсивную фильтрацию. Фильтрующаяся жидкость, проходя через упаковку проппанта в область кончика трещины вызывает дальнейшее распространение трещины и увеличение раскрытия в области, занятой упаковкой проппанта, что приводит к ее разжижению. Как видно из рисунка 5.44 и рисунка 5.45, трещина распространяется дальше и упаковка проппанта и упаковка проппанта формируется позже в случае проппанта с большим размером частиц. Так как уравнения течения смеси не учитывают размер проппанта, упаковка проппанта формируется во всех случаях в один и тот же момент времени t = 4000 с. Затем она либо остается и приводит к закрытию трещины ( $d_p = 0.5, 1$  мм), либо разжижается под действием фильтрующейся жидкости ( $d_p = 2, 4$  мм).

### Влияние оседания проппанта и конвекции

Расчеты в этом параграфе проведены с учетом гравитационных сил ( $g_y = -10 \text{ м}/\text{c}^2$ ). Гравитация в этой модели имеет два эффекта: конвекция проппанта и оседание проппанта [45]. Конвекция проппанта связана с перераспределением больших кусков проппанта из-за разности плотности смеси. С другой стороны, оседание проппанта вызвано медленным движением частиц проппанта, взвешенных в жидкости. Как показано на рисунке 5.46, первый эффект вызывает изменение формы фронта проппанта; второй эффект увеличивает концентрацию проппанта в нижней части трещины. Интенсивность оседания выше для частиц большего размера. Использование больших частиц приводит к формированию плотной упаковки проппанта в нижней части трещины ( $d_p = 4 \text{ мм}$ ).

## 5.5.5. Заключение по модели длинной трещины

На основе предположения о большой длине трещины (PKN-модель) разработана и численно реализована модель трещины ГРП, учитывающая деформацию породы, двумерное движение смеси жидкости с проппантом и утечку жидкости



Рисунок 5.43 – Распределения концентрации проппанта для различных значений диаметра частиц<br/> проппанта с $c_{\rm in}=0.5$ 

в пласт. Упрощенное рассмотрение в ней деформированного состояния породы обуславливает невысокую вычислительную сложность реализации модели. Течение жидкости, содержащей взвешенные частицы проппанта, описывается двухфазной моделью жидкости в двухскоростном приближении с учетом гравитационного оседания проппанта. Образование плотной упаковки проппанта из-за утечки жидкости в породу не приводит к остановке описания эволюции трещины, вместо этого движение жидкости через упаковку описывается на основе уравнений фильтрации. Предложен алгоритм переключения режимов течения жидкости, исключающий возникновение сингулярности у выражения для вязкости смеси.

Метод частиц в ячейках, примененный для решения уравнений переноса, обеспечивает резкие границы между областями с различной концентрацией проппанта и сохраняет равномерное распределение концентрации. Для решения

256



Рисунок 5.44 – Распределения раскрытия трещины и концентрации проппанта в срединном сечении трещины для различных значений диаметра частиц проппанта с $c_{\rm in}=0.5$ 



Рисунок 5.45 – История изменения длины трещин<br/>ы $L_{\rm f}$ для различных значений диаметра частиц проппанта <br/>с $c_{\rm in}=0.5$ 

возникающей системы уравнений предложен метод их совместного решения. Он не расширяет шаблон метода и сходится в рассмотренных задачах. Двумерная модель гидроразрыва верифицирована путем сравнения с результатами расчетов других авторов.

Проведенные численные эксперименты показали, что фильтрация может иметь большое влияние на процесс распространения трещины. Фильтрация позволяет жидкости гидроразрыва разжижать упаковку проппанта, увеличивая длину трещины и уменьшая давление смеси.



Рисунок 5.46 – Распределения концентрации проппанта для различных значений диаметра частиц<br/> проппанта с $g_y=-10\,{\rm m\,/\,c^2}$ 

# 5.6. Одномерная модель длинной трещины, включающая механизм закупоривания трещины пропантом

Описанная в настоящем параграфе модель [22] получена как дальнейшее упрощение модели длинной трещины [18] путем замены двумерных уравнений движения жидкости на одномерные. Хотя исторически развитие моделей гидроразрыва происходит путем их усложнения и расширения функционала, выбранный в диссертационной работе путь описания моделей от общих к частным и от сложных к простым требует помещения настоящего параграфа на последнее место. На основе описываемой модели сделана попытка уже в одномерном приближении оценить возможность увеличения длины закупоренной части трещи-

258

ны путем закачки смеси с переменной концентрацией проппанта, в предположении, что образовавшаяся в трещине проппантная пробка может быть размыта поступающей чистой жидкостью.

# 5.6.1. Основные уравнения

Так же как и в модели длиной трещины (п. 5.5) для получения локальной связи раскрытия трещины w и давления p используются предположение о независимости поперечных сечений и решение о задачи о раскрытии плоской трещины, нагруженной давлением (5.94). Поскольку используются одномерные уравнения движения жидкости, давление считается постоянным по всему сечению  $p = \bar{p}$ .

Смесь жидкости гидроразрыва и частиц пропанта описывается двухфазной жидкостью в односкоростном приближении. Считается, что течение смеси квазиодномерно, т.е. параметры течения постоянны в каждом поперечном сечении x = const. Уравнения неразрывности смеси и пропанта тогда принимают вид

$$\frac{\pi}{4}\frac{\partial Hw\rho}{\partial t} + \frac{\pi}{4}\frac{\partial Hw\rho u}{\partial x} = -\rho_f Q_L, \qquad (5.129)$$

$$\frac{\partial Hwc}{\partial t} + \frac{Hwcu}{\partial x} = 0, \qquad (5.130)$$

где  $\rho = \alpha \rho_f + c \rho_p$  – плотность смеси;  $\rho_f$ ,  $\rho_p$  – плотности жидкости и пропанта; c – объемная концентрация пропанта. Утечка жидкости в породу определяется по эмпирическому закону Картера (5.13) [47]. Поскольку используется односкоростная модель движения смеси, для связи давления и скорости ее движения используется уравнение (5.101) при  $u = u_{\text{flow}}$ . К уравнениям добавлены начально-краевые условия. На скважине задаются расход смеси и концентрация пропанта

$$Q(0,t) = Q_{in}(t), \quad c(0,t) = c_{in}(t), \quad (5.131)$$

а в начальный момент и на правой границе области – условие отсутствия возмущений

$$w = 0, c = 0, u = 0, p = 0$$
 при  $t = 0$  или  $x = L,$  (5.132)

где L – длина области моделирования.

Для учета возможности фильтрации жидкости через проппантную пробку, образующуюся при достижении концентрацией критического значения, в модель добавлен специальный механизм фильтрации. Механизм реализуется введением в уравнение неразрывности смеси (5.129) дополнительного диффузионного члена  $Q_{\Phi}$ 

$$\frac{\pi}{4}\frac{\partial Hw\rho}{\partial t} + \frac{\pi}{4}\frac{\partial Hw\rho u}{\partial x} = -\rho_f(-Q_L + Q_\Phi),$$

который определяется следующим образом

$$Q_{\Phi} = (D\alpha_x)_x, \tag{5.133}$$

$$D = \begin{cases} -K \cdot \alpha w \cdot p_x & \text{при } c_x > 0\\ 0 & \text{при } c_x \le 0, \end{cases}$$
(5.134)

где *К* характеризует интенсивность фильтрации. Такое определение позволяет добавить в модель поток жидкости, пропорциональный пропорциональной объему жидкости, перепадам давления и концентрации и возникающий при возрастании концентрации проппанта. Хотя введение такого механизма дает дополнительный приток жидкости с расходом  $-K\alpha w p_x \alpha_x|_{x=0}$ , что приводит к нарушению баланса жидкости, на практике величина дополнительного притока жидкости невелика, и отклонение баланса не превышает 1% от общего объема закачки.

Модель состоит из уравнений (5.94), (5.129), (5.130) и (5.101) относительно неизвестных w(x,t), c(x,t), u(x,t), p(x,t) с дополнительными условиями (5.131),(5.132) и зависимостью вязкости смеси от концентрации проппанта, которая как и в предыдущих моделях описывается законом Марона-Пирса (5.53) [267]. Численный метод решения приведенных в модели уравнений и его верификация описаны в работе [22] и опускаются здесь, так как не являются предметом диссертационного исследования.

## 5.6.2. Приложение модели к процессу гидроразрыва

Вычислительные эксперименты проводились при следующих физических параметрах  $Q_{in} = 0.05 \frac{\text{M}^3}{\text{c}}, E = 2.46 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \nu = 0.25, H = 20 \text{м}, \mu_f = 3 \cdot 10^{-3} \text{Па} \cdot \text{c},$   $C_L = 1.3 \cdot 10^{-4} \frac{M}{\sqrt{c}}, K = 18 \cdot 10^{-6} \frac{\Pi a \cdot c}{M^4}, c^* = 0.64$ , на сетке с M = 3840 ячеек, покрывающей область L = 50 м с шагом по времени  $\Delta t = 0.005$  с.

Для того, чтобы продемонстрировать важность выбора закона зависимости вязкости смеси от концентрации проппанта слева на рисунке 5.47 показаны зависимости длин трещин от времени, полученные при использовании входящего в модель закона (5.53) и простейшей линейной формулы

$$\mu(c) = (1 - c)\mu_f + c\tilde{\mu_p}, \quad \tilde{\mu_p} = 3.16, \tag{5.135}$$

в которой где  $\mu_p$  – параметр, отвечающий значению вязкости смеси при c = 1. На правой части рисунка 5.47 приведены такие же зависимости длин трещин от времени, полученные с учетом и без учета фильтрации после образования проппантной пробки. Как видно из рисунка 5.47, линейная зависимость не может



Рисунок 5.47 – Зависимость длины трещины от времени при разных способах вычисления вязкости смеси (слева) и с учетом и без учета фильтрации (справа)

применяться при моделировании распространения трещины, т.к. не позволяет даже качественно передать поведение трещины при повышении концентрации пропанта — трещина продолжает распространяться практически с той же скоростью. При использовании зависимости (5.53) происходит остановка развития трещины и повышение давления на скважине, что соответствует реальным наблюдениям. Хотя фильтрация жидкости присутствует лишь в окрестности кончика трещины, влияние этого механизма распространяется на всю трещину вплоть до скважины и его учет позволяет описать продолжение распространения трещины за счет описания снижения концентрации проппанта в кончике трещины. Это можно заключить из рисунка 5.48, где приведены распределения раскрытия трещины и концентрации после образования проппантной пробки, полученные с учетом и без учета фильтрации жидкости.



Рисунок 5.48 – Распределения раскрытия трещины *w*(сплошная линия) и концентрации *c* (штриховая линия) после образования проппантной пробки, полученные с учетом и без учета фильтрации



Рисунок 5.49 – Зависимости концентрации закачиваемого проппанта от времени (слева) и соответствующие зависимости длины трещины от времени (справа)

Автору известно о ряде экспериментальных данных, согласно которым пульсовая закачка проппанта позволяет получить заполненную проппантом трещину большей длины, чем при закачке проппанта того же объема с постоянной концентрацией. Для проверки принципиальной возможности описания этого эффекта в рамках одномерной модели было проведено сравнение трещин, полученных при закачке проппанта с постоянной концентрацией, одним и двумя импульсами. Зависимости концентрации закачиваемого проппанта от времени приведены на рисунке 5.49, слева. На правой части того же рисунка приведены зависимости длины трещины от времени. Видно, что пульсовая закачка может привести к продвижению проппантной пробки на большее расстояние и увеличению дины трещины, но увеличение количества пульсов может и обязательно усиливает этот эффект. Этот же вывод можно сделать на основе рисунка 5.50– 5.52, где приведены распределения раскрытия трещины и концентрации пропанта полученные при различных закачках проппанта: постоянной, с одним и двумя импульсами.



Рисунок 5.50 – Распределения раскрытия трещины *w* (сплошная линия) и концентрации пропанта *c* (штриховая линия), полученные при закачке проппанта с постоянной концентрацией



Рисунок 5.51 – Распределения раскрытия трещины *w* (сплошная линия) и концентрации пропанта *c* (штриховая линия), полученные при различных закачке проппанта с одним импульсом

Эффект увеличения длины трещины основан на том, что чистая жидкость, следующая за первым импульсом пропанта, снижает концентрацию пропанта в пробке, что приводит к снижению вязкости смеси и увеличению её подвижности. Другой причиной увеличения длины трещины может быть проникновение жидкости в область за пробкой и повышение давления в окрестности кончика, в результате чего трещина распространяется за пробкой. Однако в рамках используемой односкоростной модели описание этого эффекта невозможно. Тем



Рисунок 5.52 – Распределения раскрытия трещин<br/>ыw (сплошная линия) и концентрации пропант<br/>аc (штриховая линия) полученные при различных закачке с<br/> двумя импульсами

не менее, даже предлагаемая модель показывает, что при некоторых сочетаниях параметров можно добиться увеличения длины трещины за счет чередования закачки чистой жидкости и смеси.

# Заключение

Основными **результатами выполненного диссертационного исследования** являются следующие.

- 1. Новая постановка задачи распространения трещины в упругой среде под действием закачиваемой жидкости жидкости, впервые позволяющая одновременно описывать
  - деформацию материала в трехмерной области сложной формы;
  - изменение направления распространения трещины и ее формы под действием анизотропного нагружения материала;
  - движение в трещине жидкости сложной реологии.
- Полная трехмерная модель распространения неплоской трещины от полости под действием закачки в нее жидкости сложной реологии в материале, нагруженном на бесконечном удалении сложными анизотропными напряжениями.
- 3. Новый полностью трехмерный неявный глобальный критерий скорости роста трещины и выбора направления ее распространения для полной трехмерной модели (п. 2), в котором вместо предсказания направления распространения в каждой отдельной точке фронта анализируются возможные конфигурации фронта в целом, получающиеся после продвижения трещины трещины.
- Численные модели описания движения жидкости Гершеля–Балкли и слабосжимаемой жидкости внутри трещины, необходимые для адекватного расчета давления жидкости на берега трещины в полной трехмерной модели (п. 2).
- 5. Метод решения системы интегральных и дифференциальных уравнений в области со свободными границами и нелинейной связью между искомыми

функциями, формирующейся в полной трехмерной подели (п. 2) на каждом шаге распространения.

- Иерархия моделей трещин, распространяющихся под действием закачиваемой жидкости, в которой каждая из моделей получена внесением в полную трехмерную постановку задачи дополнительных предположений о форме трещины.
- 7. Обоснование путем верификации и валидации предложенной полностью трехмерной модели распространения трещины (п. 2) и ее компонент: глобального неявного критерия распространения (п. 3) и моделей движения жидкостей сложной реологии в (п. 4), а также элементов иерархии моделей трещин (п. 5).
- Программное обеспечение для численного моделирования нестационарного распространения трещин в упругой среде под действием закачиваемой жидкости, реализующее полную трехмерную модель (п. 2) и входящие в иерархию (п. 6) модели.
- 9. Результаты моделирования процесса распространения трещины гидроразрыва пласта на основе полной трехмерной модели (п. 2):
  - исследован эффект "пережатия" трещины при искривлении ее траектории и описаны особенности выхода трещины на магистральное направление;
  - изучено влияние реологии закачиваемой жидкости на форму трещины;
  - определены модели жидкости, пригодные для описания ее движения в трещине на начальном этапе распространения.
- 10. Результаты применения входящих в иерархию (п. 5) моделей для решения практических задач:
  - исследованы условия инициации и распространения трещины в гидроизоляции скважины, выявлена зависимость прочности гидроизоляции от условий ее создания и напряженного состояния породы;
  - разработан метод определения ширины естественных трещин по известным зависимостям давления и величины потерь бурового раствора в них. Показано, что невозможно одновременное определение количества и ширины трещин с использованием только этих зависимостей.

На основе результатов диссертационного исследования сформулированы следующие **рекомендации** в области математического моделирования.

- Описание начального этапа распространения трещины гидроразрыва пласта в материале, нагруженном анизотропным полем напряжений, на основе полной трехмерной модели позволяет определить форму серединной поверхности трещины. Форма серединной поверхности оказывает влияние на раскрытие трещины в окрестности скважины, вызывая его уменьшение на искривленном, не ортогональном направлению действия минимальных напряжений, участке.
- 2. Для описания направления распространения трещины при сложном анизотропном нагружении следует использовать критерий, учитывающий все три моды напряжений в окрестности фронта. Разработанный неявный глобальный критерий удовлетворяет этому свойству и позволяет описывать распространение таких трещин.
- 3. В модели эволюции трещины, распространяющейся под действием давления закачиваемой в нее жидкости сложной реологии, на начальном этапе формирования серединной поверхности (траектории) может использоваться модель ньютоновской жидкости с соответствующим выбором коэффициента вязкости, тогда как для описания развитой трещины должны применяться адекватные поведению жидкости реологические законы.

Результаты решения прикладных задач позволяют сформулировать практические **рекомендации** 

- Определяющее влияние на гидроизоляцию скважины, выполненную путем помещения цементной пробки внутрь стальной колонны, определяющее влияние играет давление застывания и цемента и его напряженное состояние после застывания, тогда как качество нижнего торца пробки и наличие / отсутствие дефектов на нем не влияет на стойкость пробки к распространению трещин.
- 2. Параметры системы естественных трещин, вызывающих потери бурового раствора из затрубного пространства, не могут быть вычислены на основе только данных о давлении раствора и величине его потерь, но эти данные позволяют определить среднюю ширину трещин и известном их количестве.

Перспективы дальнейшей разработки темы диссертационного исследования заключаются расширении области применимости предложенной полной трехмерной модели и повышении ее вычислительной эффективности, а так же в дополнении описанной иерархии моделей новыми элементами, которые могут быть разработаны при решении практических задач. Развитие полной трехмерной модели наиболее перспективно в следующих направлениях.

- 1. Адаптация и применение модели для широкого спектра задач описания трещин, распространяющихся под действием давления жидкости в них, таких как трещины в тающих ледниках, магматические дайки и т.д.
- 2. Обобщение модели деформации материала на случай пористых и неоднородных материалов, что позволит описывать распространение трещины в слоистых породах и учитывать влияние распределения порового давления в окрестности скважины.
- 3. Повышение удобства применения глобального неявного критерия распространения трещины путем разработки методики вычисления входящего в него весового параметра по другим характеристикам материала (модулю упругости, прочности, характерному размеру неоднородностей и т.д.), которые могут быть определены из экспериментов, не связанных с анализом траектории трещины.
- 4. Повышение вычислительной эффективности алгоритмов за счет применения итерационных методов решения систем нелинейных уравнений, с порядком сходимости, более высоким, чем первый. Таким алгоритмом может быть метод Ньютона с явным аналитическим вычислением матрицы производных, использованный в рамках описанной в диссертационной работе плоской трехмерной модели, хотя его реализация в составе полной трехмерной модели является существенно более трудоемкой задачей.

# Литература

- Barati R., Liang J.-T. A review of fracturing fluid systems used for hydraulic fracturing of oil and gas wells // Journal of Applied Polymer Science. — 2014. — Vol. 131, No. 16. — P. 1–11.
- 2. Herschel W.H., Bulkley R. Konsistenzmessungen von gummi-benzollösungen // Kolloid-Zeitschrift. 1926. Vol. 39, No. 4. P. 291–300.
- Shokin Yu., Cherny S., Esipov D., Lapin V., Lyutov A., Kuranakov D. Threedimensional model of fracture propagation from the cavity caused by quasistatic load or viscous fluid pumping // Communications in Computer and Information Science. — Springer Science + Business Media, 2015. — P. 143– 157. — DOI:10.1007/978-3-319-25058-8\_15.
- 4. Cherny S., Lapin V., Esipov D., Kuranakov D., Avdyushenko A., Lyutov A., Karnakov P. Simulating fully 3D non-planar evolution of hydraulic fractures // Int. J. Fracture. — 2016. — Vol. 201, No. 2. — P. 181–211. — DOI:10.1007/s10704-016-0122-x.
- Kuranakov D.S., Esipov D.V., Lapin V.N., Cherny S.G. Modification of the boundary element method for computation of three-dimensional fields of strain-stress state of cavities with cracks // Engineering Fracture Mechanics. — 2016. — Vol. 153. — P. 302–318.
- Cherny Sergey, Lapin Vasily, Kuranakov Dmitriy, Alekseenko Olga. 3d model of transversal fracture propagation from a cavity caused by herschel-bulkley fluid injection // International Journal of Fracture. — 2018. — Vol. 212, No. 1. — P. 15–40.
- Cherny S.G., Lapin V.N. 3D model of hydraulic fracture with Herschel-Bulkley compressible fluid pumping // Procedia Structural Integrity. — 2016. — Vol. 2. — P. 2479–2486.
- 8. Черный С.Г., Лапин В.Н., Есипов Д.В., Куранаков Д.С. Методы моделиро-

вания зарождения и распространения трещин. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2016. — 312с.

- Gupta P., Duarte C. A. Coupled formulation and algorithms for the simulation of non-planar three-dimensional hydraulic fractures using the generalized finite element method // International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. — 2016. — Vol. 40, No. 10. — P. 1402–1437.
- Kumar Dharmendra, Ghassemi Ahmad. Three-dimensional poroelastic modeling of multiple hydraulic fracture propagation from horizontal wells // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. 2018. Vol. 105. P. 192–209.
- Paul B., Faivre M., Massin P., Giot R., Colombo D., Golfier F., Martin A. 3d coupled HM–XFEM modeling with cohesive zone model and applications to non planar hydraulic fracture propagation and multiple hydraulic fractures interference // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2018. — Vol. 342. — P. 321–353.
- Sun Tianwei, Zeng Qingdong, Xing Huilin. A model for multiple hydraulic fracture propagation with thermo-hydro-mechanical coupling effects // Energies. — 2021. — Vol. 14, No. 4.
- Lapin V. Implementation of planar 3d hydraulic fracture model in rock with layered compressive stress // Journal of Physics: Conference Series. — 2021. — Vol. 2099, No. 1. — P. 012011.
- 14. Lapin Vasily N., Esipov Denis V. Simulation of proppant transport and fracture plugging in the framework of a radial hydraulic fracturing model // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. — 2020. — Vol. 35, No. 6. — P. 325–339.
- Лапин В.Н. Модель распространения трещины вдоль гидроизоляции скважины // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Информационные технологии. — 2020. — Т. 18, № 1. — С. 36–49.
- 16. Lapin V. N., Fomina A. A. On the global implicit criterion of a fracture propagation under mixed load // Journal of Applied and Industrial Mathematics. — 2019. — Vol. 13, No. 4. — P. 653–662.
- 17. Lapin V.N. Model for drilling mud losses into a system of natural fractures applied to the problem of estimation for parameters of fractured porous

medium // Vychisl. Tekhnol. — 2019. — Vol. 24, No. 4. — P. 38–55.

- Карнаков П.В., Куранаков Д.С., Лапин В.Н., Черный С.Г., Есипов Д.В. Особенности распространения трещины гидроразрыва породы при закачке в нее смеси проппанта и жидкости // Теплофизика и аэромеханика. — 2018. — Т. 25, № 3. — С. 611–628. — ISSN 1818-7900.
- Lapin V.N., Cherny S.G. An implicit criterion of fracture growth direction for 3d simulation of hydraulic fracture propagation // Procedia Structural Integrity. — 2018. — Vol. 11. — P. 1–6.
- 20. Shokin Yurii, Cherny Sergey, Lapin Vasily, Esipov Denis, Kuranakov Dmitriy, Astrakova Anna. Methods for optimal control of hydraulic fracturing process // CEUR Workshop Proceedings. — 2017. — P. 423–444. — Scopus 12%.
- 21. Есипов Д.В., Куранаков Д.С., Лапин В.Н., Черный С.Г. Математические модели гидроразрыва пласта // Вычислительные технологии. 2014. Т. 19, № 2. С. 33–61.
- Карнаков П.В., Лапин В.Н., Черный С.Г. Модель гидроразрыва пласта, включающая механизм закупоривания трещины пропантом // Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. — 2014. — Т. 12, № 1. — С. 19–33. — ISSN 1818-7900.
- 23. Cherny S., Chirkov D., Lapin V., Muranov A., Bannikov D., Miller M., Willberg D., Medvedev O., Alekseenko O. Two-dimensional modeling of the near-wellbore fracture tortuosity effect // Int. J. Rock Mechanics and Mining Sciences. — 2009. — Vol. 46, No. 6. — P. 992–1000.
- 24. Cherny S.G., Lapin V.N., Chirkov D.V., Alekseenko O.P., Medvedev O.O. 2D modeling of hydraulic fracture initiating at a wellbore with or without microannulus // SPE Hydraulic Fracturing Technology Conference. — The Woodlands, Texas, 2009. — SPE-119352-MS.
- 25. Черный С.Г., Лапин В.Н., Есипов Д.В., Куранаков Д.С. Программа трехмерного моделирования распространения трещины в хрупком материале под действием давления вязкой жидкости "cadfrac/2019". — 2019. — Свидетельство об официальной регистрации программ для ЭВМ №2019614059.
- 26. Economides M.J., Nolte K.G. Reservoir stimulation. Third edition. John Wiley & Sons, 2000. 856 p.
- 27. Biot Maurice A. General theory of three-dimensional consolidation // Journal

of Applied Physics. — 1941. — Vol. 12, No. 2. — P. 155–164.

- 28. Coussy O. Poromechanics,. Wiley, 2004. 312 p.
- Wang H.F. Theory of Linear Poroelasticity. Princeton University Press, 2000. — 304 p.
- 30. Gupta P., Duarte C.A. Simulation of non-planar three-dimensional hydraulic fracture propagation // Int. J. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. — 2014. — Vol. 38, No. 13. — P. 1397–1430.
- Hossain M.M., Rahman M.K., Rahman S.S. Hydraulic fracture initiation and propagation: roles of wellbore trajectory, perforation and stress regimes // J. Petroleum Science and Engineering. — 2000. — Vol. 27, No. 3–4. — P. 129– 149.
- Behrmann L.A., Elbel J.L. Effect of perforations on fracture initiation // J. Petroleum Technology. — 1991. — Vol. 43, No. 05. — P. 608–615. — SPE-20661-PA.
- 33. Yuan Y., Abousleiman Y., Weng X., Roegiers J.-C. Three-dimensional elastic analysis on fracture initiation from a perforated borehole // Paper SPE. — 1995. — Vol. 27, No. 29601.
- 34. Papanastasiou P. The influence of plasticity in hydraulic fracturing // Int. J. Fracture. — 1997. — Vol. 84. — P. 61–97.
- 35. van Dam D. B., Papanastasiou P., de Pater C. J. Impact of Rock Plasticity on Hydraulic Fracture Propagation and Closure // SPE Production and Facilities. — 2002. — Vol. 17, No. 03. — P. 149–159.
- 36. Liu Wenzheng, Zeng Qingdong, Yao Jun, Liu Ziyou, Li Tianliang, Yan Xia. Numerical study of elasto-plastic hydraulic fracture propagation in deep reservoirs using a hybrid edfm-xfem method // Energies. — 2021. — Vol. 14, No. 9.
- 37. Barbati Alexander C., Desroches Jean, Robisson Agathe, McKinley Gareth H. Complex fluids and hydraulic fracturing // Annual Review of Chemical and Biomolecular Engineering. — 2016. — Vol. 7, No. 1. — P. 415– 453.
- 38. Dontsov E. V., Peirce A. P. Slurry flow, gravitational settling and a proppant transport model for hydraulic fractures // Journal of Fluid Mechanics. — 2014. — Vol. 760. — P. 567–590.

- Boyer Franifmmode, Guazzelli Elisabeth, Pouliquen Olivier. Unifying suspension and granular rheology // Phys. Rev. Lett. 2011. Vol. 107. P. 188301.
- 40. Boronin S.A., Osiptsov A.A. Effects of particle migration on suspension flow in a hydraulic fracture // Fluid Dynamics. — 2014. — Vol. 49, No. 2. — P. 208–221.
- 41. Shiozawa S., McClure M. Simulation of proppant transport with gravitational settling and fracture closure in a three-dimensional hydraulic fracturing simulator // Journal of Petroleum Science and Engineering. — 2016. — Vol. 138. — P. 298–314.
- 42. Lecampion Brice, Garagash Dmitry I. Confined flow of suspensions modelled by a frictional rheology // Journal of Fluid Mechanics. — 2014. — Vol. 759. — P. 197–235.
- 43. Ouyang S., Carey G.F., Yew C.H. An adaptive finite element scheme for hydraulic fracturing with proppant transport // Int. J. Numerical Methods in Fluids. — 1997. — Vol. 24. — P. 645–670.
- 44. Lakhtychkin A., Eskin D., Vinogradov O. Modelling of transport of two proppant-laden immiscible power-law fluids through an expanding fracture // The Canadian Journal of Chemical Engineering. 2012. Vol. 90, No. 3. P. 528–543.
- 45. Mobbs A.T., Hammond P.S. Computer simulations of proppant transport in a hydraulic fracture // SPE Production and Facilities. — 2001. — Vol. 16, No. 02. — P. 112–121.
- 46. Barree R.D., Conway M.W. Proppant holdup, bridging, and screenout behavior in naturally fractured reservoirs // SPE Production and Operations Symposium.—Society of Petroleum Engineers, 2001.
- 47. Carter R.D. Appendix I. Derivation of the general equation for estimating the extent of the fractured area // Drilling and Production Practice / Ed. by G.C. Howard, C.R. Fast. — N. Y.: American Petrol. Institute, 1957. — P. 261–270.
- 48. Settari A. A new general model of fluid loss in hydraulic fracturing // Society of Petroleum Engineers Journal. 2013. Vol. 25.
- 49. Boone Thomas J., Ingraffea Anthony R. A numerical procedure for simu-

lation of hydraulically-driven fracture propagation in poroelastic media // International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. -1990. -Vol. 14, No. 1. -P. 27–47.

- 50. Carrier B, Granet S. Numerical modeling of hydraulic fracture problem in permeable medium using cohesive zone model // Engineering Fracture Mechanics. — 2012. — Vol. 79. — P. 312–328.
- Whitsitt N.F., Dysart G.R. The Effect of Temperature On Stimulation Design // Journal of Petroleum Technology. — 1970. — Vol. 22, No. 04. — P. 493–502.
- Meyer Bruce Roman. Heat transfer in hydraulic fracturing // Spe Production Engineering. — 1989. — Vol. 4. — P. 423–429.
- 53. Improved Acid Fracturing Treatment Designs Based on In-Situ Temperature Calculations. — Vol. All Days of SPE Unconventional Resources Conference / Gas Technology Symposium, 1993. — SPE-26185-MS. https://onepetro.org/SPEGTS/proceedings-pdf/93GTS/All-93GTS/SPE-26185-MS/1983162/spe-26185-ms.pdf.
- 54. Ashena Rahman, Aminzadeh Fred, Khoramchehr Amir. Production improvement via optimization of hydraulic acid fracturing design parameters in a tight carbonate reservoir // Energies. — 2022. — Vol. 15, No. 5. — P. 1947.
- 55. Damjanac Branko, Detournay Christine, Cundall Peter. Numerical Simulation of Hydraulically Driven Fractures // Modelling Rock Fracturing Processes: Theories, Methods, and Applications / Ed. by Baotang Shen, Ove Stephansson, Mikael Rinne. Cham: Springer International Publishing, 2020. P. 531–561. ISBN: 978-3-030-35525-8. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-030-35525-8\_20.
- 56. Yin Zirui, Huang Hongwei, Zhang Fengshou, Zhang Lianyang, Maxwell Shawn. Three-dimensional distinct element modeling of fault reactivation and induced seismicity due to hydraulic fracturing injection and backflow // Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering. — 2020. — Vol. 12, No. 4. — P. 752–767.
- 57. Lei Qinghua, Latham John-Paul, Tsang Chin-Fu. The use of discrete fracture networks for modelling coupled geomechanical and hydrological behaviour of fractured rocks // Computers and Geotechnics. — 2017. — Vol. 85. — P. 151–

176.

- 58. Osorno Maria, Steeb Holger. Coupled sph and phase field method for hydraulic fracturing // PAMM. 2017. Vol. 17, No. 1. P. 533–534.
- 59. Adachi J., Siebrits E., Peirce A., Desroches J. Computer simulation of hydraulic fractures // Int. J. Rock Mechanics and Mining Sciences. — 2007. — Vol. 44, No. 5. — P. 739–757.
- Detournay E. Mechanics of hydraulic fractures // Annual Review of Fluid Mechanics. — 2016. — Vol. 48, No. 1. — P. 311–339.
- 61. Lecampion Brice, Bunger Andrew, Zhang Xi. Numerical methods for hydraulic fracture propagation: A review of recent trends // Journal of Natural Gas Science and Engineering. — 2018. — Vol. 49. — P. 66–83.
- Yadali Jamaloei Benyamin. A critical review of common models in hydraulicfracturing simulation: A practical guide for practitioners // Theor. Appl. Fract. Mech. — 2021. — Vol. 113, No. 102937. — P. 102937.
- 63. Желтов Ю.П., Христианович С.А. О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта // Изв. АН СССР. Отдел технических наук. 1955. № 5. С. 3–41.
- 64. Geertsma J., de Klerk F. A rapid method of predicting width and extent of hydraulically induced fractures // J. Petroleum Technology. — 1969. — Vol. 21, No. 12. — P. 1571–1581. — SPE-2458-PA.
- 65. Sneddon I., Lowengrub M. Crack Problems in the Classical Theory of Elasticity. — John Wiley & Sons, 1969. — 221 p.
- 66. Spence D.A., Sharp P. Self-similar solutions for elastohydrodynamic cavity flow // Proc. Royal Soc. A. — 1985. — Vol. 400. — P. 289–313.
- 67. Баренблатт Г.И. О некоторых задачах теории упругости, возникающих при исследовании механизма гидравлического разрыва нефтеносного пласта // ПММ. — 1956. — Т. 20, № 4. — С. 475–486.
- Barenblatt G.I. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture // Advances in Applied Mechanics. — Elsevier, 1962. — Vol. 7. — P. 55–129.
- 69. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970. 904 с.
- 70. Desroches J., Detournay E., Lenoach B., Papanastasiou P., Pearson J.R.A., Thiercelin M., Cheng A.H.-D. The crack tip region in hydraulic fracturing //

Proc. Royal Soc. A. — 1994. — No. 447. — P. 39–48.

- Daneshy A.A. On the design of vertical hydraulic fractures // J. Petroleum Technology. — 1973. — Vol. 1. — P. 83–97.
- 72. Adachi J.I., Detournay E. Self-similar solution of a plane-strain fracture driven by a power-law fluid // Int. J. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. — 2002. — Vol. 26. — P. 579–604.
- 73. Алексеенко О.П., Вайсман А.М. Некоторые особенности плоской задачи гидроразрыва упругой среды // ФТПРПИ. 1999. № 3. С. 64–70.
- 74. Акулич А.В., Звягин А.В. Численное моделирование распространения трещины гидроразрыва // Вестник МГУ. Серия 1: Математика. Механика. — 2008. — № 1. — С. 43–49.
- 75. Алексеенко О.П., Есипов Д.В., Куранаков Д.С., Лапин В.Н., Черный С.Г. Двумерная пошаговая модель распространения трещины гидроразрыва // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. — 2011. — Т. 11, № 3. — С. 36–59.
- 76. Chang F.F., Bartko K., Dyer S., Aidagulov G., Suarez-Rivera R., Lund J. Multiple fracture initiation in openhole without mechanical isolation: First step to fulfill an ambition // SPE Hydraulic Fracturing Technology Conference. — 2014. — SPE-168638-MS, p. 1–18.
- 77. Lecampion B., Detournay E. An implicit algorithm for the propagation of a hydraulic fracture with a fluid lag // Computer Meth. Appl. Mech. Eng. 2007. Vol. 196, No. 49–52. P. 4863–4880.
- 78. Garagash D.I. Propagation of a plane-strain hydraulic fracture with a fluid lag: Early-time solution // International Journal of Solids and Structures. — 2006. — Vol. 43, No. 18. — P. 5811 – 5835.
- 79. Алексеенко О.П., Вайсман А.М. Прямолинейный гидроразрыв в упругой плоскости // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 6. С. 145–149.
- 80. Зазовский А.Ф., Одишария М.Г., Песляк Ю.А. Автомодельные решения задачи о распространении трещины гидроразрыва в непроницаемой горной породе // Изв. АН СССР. МТТ. — 1986. — № 5. — С. 92–10.
- Perkins T.K., Kern L.R. Widths of hydraulic fractures // J. Petroleum Technology. 1961. Vol. 13, No. 9. P. 937–949.
- 82. Nordgren R.P. Propagation of a vertical hydraulic fracture // SPE Journal. —

1972. — Vol. 12, No. 4. — P. 306–314. — SPE-3009-PA.

- 83. Sheddon I.N., Elliott A.A. The opening of a griffith crack under internal pressure // Quarterly of Applied Mathematics. — 1946. — Vol. 4, No. 3. — P. 262–267.
- 84. Abe H., Mura T., Keer L.M. Growth rate of a penny-shaped crack in hydraulic fracturing of rocks // J. Geophysical Research. — 1976. — Vol. 81, No. 29. — P. 5335–5340.
- 85. Abe H., Keer L.M., Mura T. Theoretical study of hydraulically fractured penny-shaped cracks in hot, dry rocks // Int. J. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. — 1979. — Vol. 3. — P. 79–96.
- 86. Алексеенко О.П., Вайсман А.М. Рост почти заполненной осесимметричной трещины гидроразрыва при малых и больших утечках // ФТПРПИ. 2004. № 3. С. 1–11.
- 87. Зазовский А.Ф. Распространение плоской круговой трещины гидроразрыва в непроницаемой горной породе // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 2. С. 103–109.
- 88. Слепян Л.И. Механика трещин. Л.: Судостроение, 1990. 296 с.
- Nguyen Hai T., Lee Jang Hyun, Elraies Khaled A. Review of pseudothree-dimensional modeling approaches in hydraulic fracturing // Journal of Petroleum Exploration and Production Technology. — 2021. — Vol. 12, No. 4. — P. 1095–1107.
- 90. Atkinson C., Eftaxiopoulos D.A. Numerical and analytical solution for the problem of hydraulic fracturing from cased and cemented wellbore // Int. J. Solids and Structures. — 2002. — Vol. 39, No. 6. — P. 1621–1650.
- 91. Зубков В.В., Кошелев В.Ф., Линьков А.М. Численное моделирование инициирования и роста трещин гидроразрыва // ФТПРПИ. — 2007. — № 1. — С. 45–63.
- 92. Мартынюк П.А. Особенности развития трещин гидроразрыва в поле сжатия // ФТПРПИ. 2008. № 6. С. 19–29.
- 93. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
- 94. Rahman M.M., Rahman M.K. A review of hydraulic fracture models and development of an improved pseudo-3D model for stimulating tight oil/gas sand // Energy Sources, Part A. — 2010. — Vol. 32. — P. 1416–1436.

- 95. Guo B, Liu X.L., Tan X. Chapter 14 Hydraulic Fracturing // Petroleum Production Engineering. — 2 edition. — Boston: Gulf Professional Publishing, 2017. — P. 389–501.
- 96. A Lumped Numerical Model for the Design of Hydraulic Fractures. Vol. All Days of SPE Unconventional Resources Conference / Gas Technology Symposium, 1984. — SPE-12884-MS. https://onepetro.org/SPEGTS/proceedingspdf/84UGR/All-84UGR/SPE-12884-MS/2037889/spe-12884-ms.pdf.
- 97. Settari A., Cleary M. Three-dimensional simulation of hydraulic fracturing //
  J. Petroleum Technology. 1984. Vol. 36, No. 7. P. 1177–1190.
- 98. Hydraulic Fracture Geometry Modeling, Prediction, and Comparisons. Vol. All Days of SPE Rocky Mountain Petroleum Technology Conference / Low Permeability Reservoirs Symposium, 1985. — SPE-13863-MS. https://onepetro.org/SPERMPTC/proceedings-pdf/85LPG/All-85LPG/SPE-13863-MS/2075338/spe-13863-ms.pdf.
- 99. Comprehensive Design Formulae For Hydraulic Fracturing. Vol. All Days of SPE Annual Technical Conference and Exhibition, 1980. — SPE-9259-MS. https://onepetro.org/SPEATCE/proceedings-pdf/80SPE/All-80SPE/SPE-9259-MS/2047601/spe-9259-ms.pdf.
- 100. Adachi J.I., Detournay E., Peirce A.P. Analisys of the classical pseudo-3D model for hydraulic fracture with equilibrium height growth across stress barriers // Int. J. Rock Mechanics and Mining Sciences. 2010. Vol. 47, No. 4. P. 625–639.
- 101. Dontsov E.V., Peirce A.P. An enhanced pseudo-3d model for hydraulic fracturing accounting for viscous height growth, non-local elasticity, and lateral toughness // Engineering Fracture Mechanics. — 2015. — Vol. 142. — P. 116–139.
- 102. Dontsov Egor, Peirce Anthony. Incorporating viscous, toughness, and intermediate regimes of propagation into enhanced pseudo-3d model. — 2015.
- 103. Markov N.S., Linkov A.M. Correspondence principle for simulation hydraulic fractures by using pseudo 3d model // Materials Physics and Mechanics. — 2018. — Vol. 40. — P. 181–186.
- 104. Zhang Xi, Wu Bisheng, Jeffrey Robert G., Connell Luke D., Zhang Guangqing. A pseudo-3d model for hydraulic fracture growth in a

layered rock // International Journal of Solids and Structures. — 2017. — Vol. 115-116. — P. 208–223.

- 105. Dontsov E.V., Peirce A.P. Comparison of toughness propagation criteria for blade-like and pseudo-3d hydraulic fractures // Engineering Fracture Mechanics. — 2016. — Vol. 160. — P. 238–247.
- 106. Peirce A., Detournay E., Adachi J. colp3d: a matlab code for simulating a pseudo-3d hydraulic fracture with equilibrium height growth across stress barriers. — 2010.
- 107. Vandamme L., Curran J.H. A three-dimensional hydraulic fracturing simulator // Int. J. for Numerical Methods in Engineering. — 1989. — Vol. 28, No. 4. — P. 909–927.
- 108. Dontsov E.V., Peirce A.P. Proppant transport in hydraulic fracturing: Crack tip screen-out in kgd and p3d models // International Journal of Solids and Structures. — 2015. — Vol. 63. — P. 206–218.
- 109. Skopintsev A.M., Dontsov E.V., Kovtunenko P.V., Baykin A.N., Golovin S.V. The coupling of an enhanced pseudo-3d model for hydraulic fracturing with a proppant transport model // Engineering Fracture Mechanics. — 2020. — Vol. 236. — P. 107177.
- 110. Meyer fracturing simulators. user's guide. ninth edition. 2011. URL: http://tm.spbstu.ru/images/d/df/MFRAC\_User's\_Guide.pdf.
- 111. Fracpro fracture design and analysis software. 2021. URL: https:// carboceramics.com/products/software-platforms-data-management/ fracpro-software/fracpro-classic.
- 112. A Discrete Fracture Network Model for Hydraulically Induced Fractures -Theory, Parametric and Case Studies. — Vol. All Days of SPE Hydraulic Fracturing Technology Conference and Exhibition, 2011. — SPE-140514-MS. https://onepetro.org/SPEHFTC/proceedings-pdf/11HFTC/All-11HFTC/SPE-140514-MS/2298884/spe-140514-ms.pdf.
- 113. Weng X., Kresse O., Cohen C., Wu R., Gu H. Modeling of Hydraulic-Fracture-Network Propagation in a Naturally Fractured Formation // SPE Production and Operations. — 2011. — Vol. 26, No. 04. — P. 368–380.
- 114. Erofeev A A, Nikitin R N, Mitrushkin D A, Golovin S V, Baykin A N, Osiptsov A A, Paderin G V, Shel E V and. CYBER FRAC software platform

for modeling, optimization and monitoring of hydraulic fracturing operations // Oil Industry.  $-\,2019.-{\rm T}.\,\,12.-{\rm C}.\,\,64-\!68.$ 

- 115. Akhtyamov A. V., Makeev G. A., Baydyukov K. N., Muslimov U. S., Matveev S. N., Pestrikov A. V., Rezaev S. N. Corporate fracturing simulator RN-GRID: from software development to in-field implementation (Russian) // Neftyanoe khozyaystvo - Oil Industry. — 2018. — Vol. 2018, No. 05. — P. 94–97.
- 116. Stacked Height Model to Improve Fracture Height Growth Prediction, and Simulate Interactions With Multi-Layer DFNs and Ledges at Weak Zone Interfaces. — Vol. Day 2 Wed, January 25, 2017 of SPE Hydraulic Fracturing Technology Conference and Exhibition, 2017. — D021S003R007. https://onepetro.org/SPEHFTC/proceedingspdf/17HFTC/2-17HFTC/D021S003R007/1304720/spe-184876-ms.pdf.
- 117. Wong Sau-Wai. Hydraulic fracture modeling and design a perspective on how things have changed from conventional to unconventional reservoirs // IPTC, March 27, 2019.—IPTC, 2019.
- 118. A Practical Numerical Simulator for Three-Dimensional Frac-Propagation in Heterogeneous Media. — Vol. All Davs of ture Simulation Conference, SPE Reservoir 1983. — SPE-12273-MS. https://onepetro.org/spersc/proceedings-pdf/83RS/All-83RS/SPE-12273-MS/2037375/spe-12273-ms.pdf.
- 119. Siebrits Eduard, Peirce Anthony P. An efficient multi-layer planar 3d fracture growth algorithm using a fixed mesh approach // International Journal for Numerical Methods in Engineering. — 2002. — Vol. 53, No. 3. — P. 691–717.
- 120. Advani S. H., Lee T. S., Lee J. K. Three-Dimensional Modeling of Hydraulic Fractures in Layered Media: Part I—Finite Element Formulations // Journal of Energy Resources Technology. — 1990. — Vol. 112, No. 1. — P. 1–9.
- 121. Ben Naceur Kamel, Thiercelin Marc, Touboul Eric. Simulation off Fluid Flow in Hydraulic Fracturing: Implications for 3D Propagation // SPE Production Engineering. — 1990. — Vol. 5, No. 02. — P. 133–141.
- 122. Devloo Philippe R.B., Fernandes Paulo Dore, Gomes Sônia M., Bravo Cedric Marcelo Augusto Ayala, Damas Renato Gomes. A finite element model for three dimensional hydraulic fracturing // Mathematics and Computers in

Simulation. — 2006. — Vol. 73, No. 1-4. — P. 142–155.

- 123. Peirce Anthony, Detournay Emmanuel. An implicit level set method for modeling hydraulically driven fractures // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2008. — Vol. 197, No. 33-40. — P. 2858–2885.
- 124. Garagash D.I., Detournay E., Adachi J.I. Multiscale tip asymptotics in hydraulic fracture with leak-off // Journal of Fluid Mechanics. — 2011. — Vol. 669. — P. 260–297.
- 125. Dontsov E.V., Peirce A.P. A non-singular integral equation formulation to analyse multiscale behaviour in semi-infinite hydraulic fractures // Journal of Fluid Mechanics. — 2015. — Vol. 781. — P. R1.
- 126. Peirce A. Implicit level set algorithms for modelling hydraulic fracture propagation // Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. — 2016. — Vol. 374, No. 2078. — P. 20150423.
- 127. Zia Haseeb, Lecampion Brice. PyFrac: A planar 3d hydraulic fracture simulator // Computer Physics Communications. 2020. Vol. 255. P. 107368.
- 128. Dontsov E.V., Peirce A.P. A multiscale implicit level set algorithm (ilsa) to model hydraulic fracture propagation incorporating combined viscous, toughness, and leak-off asymptotics // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2017. — Vol. 313. — P. 53–84.
- 129. Baykin A N, Golovin S V. Application of the fully coupled planar 3D poroelastic hydraulic fracturing model to the analysis of the permeability contrast impact on fracture propagation // Rock Mech. Rock Eng. — 2018. — Vol. 51, No. 10. — P. 3205–3217.
- 130. Gordeliy Elizaveta, Peirce Anthony. Coupling schemes for modeling hydraulic fracture propagation using the xfem // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2013. — Vol. 253. — P. 305–322.
- 131. Weber N. The X-FEM for Hydraulic Fracture Mechanics: Ph.D. thesis /
  N. Weber ; Rheinisch-Westf alischen Technischen Hochschule, Aachen. —
  2016. 149 p.
- 132. Mogilevskaya S.G. Lost in translation: Crack problems in different languages // International Journal of Solids and Structures. — 2014. — Vol. 51,

No. 25. – P. 4492–4503.

- 133. Gohfer fracture modeling software. 2021. URL: https://www.halliburton.com/en/completions/stimulation/fracture-modeling.
- 134. Fraccade fracturing design and evaluation software. URL: http: //www.slb.com/services/completions/sand\_control/~/media/Files/ sand\_control/product\_sheets/software/fraccade\_frac\_design\_ software\_ps.ashx.
- 135. Stimplan<sup>TM</sup> software. 2021. URL: https://www.nsitech.com/ stimplan-software/.
- 136. Sousa J.L., Carter B.J., Ingraffea A.R. Numerical simulation of 3D hydraulic fracture using newtonian and power-law fluids // Int. J. Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts. — 1993. — Vol. 30, No. 7. — P. 1265–1271.
- 137. Development of a True 3D Hydraulic Fracturing Simulator. Vol. All Days of SPE Asia Pacific Oil and Gas Conference and Exhibition, 1999. — SPE-54265-MS. https://onepetro.org/SPEAPOG/proceedingspdf/99APOGCE/All-99APOGCE/SPE-54265-MS/1918805/spe-54265ms.pdf.
- 138. Lee Sanghyun, Wheeler Mary F., Wick Thomas. Pressure and fluid-driven fracture propagation in porous media using an adaptive finite element phase field model // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2016. — Vol. 305. — P. 111–132.
- 139. Zhang Dongxu, Zhang Liehui, Tang Huiying, Zhao Yulong. Fully coupled fluid-solid productivity numerical simulation of multistage fractured horizontal well in tight oil reservoirs // Pet. Explor. Dev. — 2022. — Vol. 49, No. 2. — P. 382–393.
- 140. Li Jianxiong, Dong Shiming, Hua Wen, Yang Yang, Li Xiaolong. Numerical simulation on deflecting hydraulic fracture with refracturing using extended finite element method // Energies. — 2019. — Vol. 12, No. 11.
- 141. Damjanac Branko, Detournay Christine, Cundall Peter A. Application of particle and lattice codes to simulation of hydraulic fracturing // Comput. Part. Mech. — 2016. — Vol. 3, No. 2. — P. 249–261.
- 142. Lefort Vincent, Nouailletas Olivier, Grégoire David, Pijaudier-Cabot Gilles.

Lattice modelling of hydraulic fracture: Theoretical validation and interactions with cohesive joints // Eng. Fract. Mech. — 2020. — Vol. 235, No. 107178. - P. 107178.

- 143. Zhao Kaikai, Stead Doug, Kang Hongpu, Gao Fuqiang, Donati Davide. Three-dimensional numerical investigation of the interaction between multiple hydraulic fractures in horizontal wells // Eng. Fract. Mech. — 2021. — Vol. 246, No. 107620. — P. 107620.
- 144. Richard H.A., Fulland M., Sander M. Theoretical crack path prediction // Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures. — 2005. — Vol. 28, No. 1-2. — P. 3–12.
- 145. Lin Bisen, Mear M E, Ravi-Chandar K. Criterion for initiation of cracks under mixed-mode I + III loading // Int. J. Fract. — 2010. — Vol. 165, No. 2. — P. 175–188.
- 146. Lazarus V. Perturbation approaches of a planar crack in linear elastic fracture mechanics: A review // J. Mech. Phys. Solids. — 2011. — Vol. 59, No. 2. — P. 121–144.
- 147. Pham K. H., Ravi-Chandar K. On the growth of cracks under mixed-mode i + iii loading // International Journal of Fracture. — 2016. — Vol. 199, No. 1. — P. 105–134.
- 148. Ren Xiangyan, Zhou Lei, Li Honglian, Lu Yiyu. A three-dimensional numerical investigation of the propagation path of a two-cluster fracture system in horizontal wells // Journal of Petroleum Science and Engineering. — 2019. — Vol. 173. — P. 1222–1235.
- 149. Zheng Shuang, Manchanda Ripudaman, Sharma Mukul M. Development of a fully implicit 3-d geomechanical fracture simulator // Journal of Petroleum Science and Engineering. — 2019. — Vol. 179. — P. 758–775.
- 150. Gupta P., Duarte C. A. Coupled hydromechanical-fracture simulations of nonplanar three-dimensional hydraulic fracture propagation // International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. — 2018. — Vol. 42, No. 1. — P. 143–180.
- 151. Савенков Е.В. Математическое моделирование развития флюидонаполненных трещин в пороупругой среде, автореферат. дисс. д.ф.-м.н. — Москва: ИПМ Келдыша РАН, 2020. — 32с.

- 152. Shauer N, Duarte A. A generalized finite element method for threedimensional hydraulic fracture propagation: Comparison with experiments // Engineering Fracture Mechanics. — 2020. — Vol. 235. — P. 107098.
- 153. Betti E. Teoria dell elasticita // Il Nuovo Cienmento. 1872. P. 7–10.
- 154. Somigliana C. Sopra l'equilibrio di un corpo elastico isotropo // Il Nuovo Cienmento. 1886. P. 17–29.
- 155. Купрадзе В.Д. Методы теории потенциала в теории упругости. М.: Наука, 1963. — 472 с.
- 156. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1979. 560 с.
- 157. Амензаде Ю.А. Теория упругости: Учебник для университетов. М.: Высшая школа, 1971. — 288 с.
- 158. Saad Youcef, Schultz Martin H. Gmres: a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems // Siam Journal on Scientific and Statistical Computing. — 1986. — Vol. 7. — P. 856–869.
- 159. Irwin G. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate // J. Applied Mechanics. — 1957. — Vol. 24. — P. 361–364.
- 160. Aliabadi M.H. Boundary element formulations in fracture mechanics // Applied Mechanics Reviews. 1997. Vol. 50, No. 2. P. 83.
- 161. Tsepoura K.G., Polyzos D. Static and harmonic BEM solutions of gradient elasticity problems with axisymmetry // Computational Mechanics. — 2003. — Vol. 32, No. 1–2. — P. 89–103.
- 162. Aliabadi M.H. The Boundary Element Method, Applications in Solids and Structures (Volume 2). — John Wiley & Sons, 2002. — ISBN: 0470842989.
- 163. Weber W., Kuhn G. An optimized predictor-corrector scheme for fast 3D crack growth simulations // Engineering Fracture Mechanics. 2008. Vol. 75, No. 3-4. P. 452–460.
- 164. Zia Haseeb, Lecampion Brice. Explicit versus implicit front advancing schemes for the simulation of hydraulic fracture growth: Explicit versus implicit hydraulic fracture front advancing schemes // International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. — 2019. — Vol. 43.
- 165. Chen Ming, Zhang Shicheng, Li Sihai, Ma Xinfang, Zhang Xi, Zou Yushi. An explicit algorithm for modeling planar 3D hydraulic fracture growth based on a super-time-stepping method // Int. J. Solids Struct. — 2020. — Vol.

191-192. — P. 370–389.

- 166. Gupta P., Duarte C. A. Coupled hydromechanical-fracture simulations of nonplanar three-dimensional hydraulic fracture propagation // International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. — 2017. — Vol. 42, No. 1. — P. 143–180.
- 167. Trimonova M A, Zenchenko E V, Zenchenko P E, Turuntaev S B, Baryshnikov N A. Experimental confirmation of the existence of the lag in the hydraulic fracture // Proceedings of the International Field Exploration and Development Conference 2018. — Singapore: Springer Singapore, 2020. — Springer series in geomechanics and geoengineering. — P. 1934–1942.
- 168. Garagash I.A., Osiptsov A.A. Fracture propagation in an initially stressed anisotropic reservoir under shear: Reorientation and fluid lag // Engineering Fracture Mechanics. — 2021. — Vol. 242. — P. 107457.
- 169. Bunger Andrew P., Detournay Emmanuel. Early-time solution for a radial hydraulic fracture // Journal of Engineering Mechanics. — 2007. — Vol. 133, No. 5. — P. 534–540.
- 170. Matvienko Y. G., Morozov E. M. Two basic approaches in a search of the crack propagation angle // Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures. — 2017. — Vol. 40, No. 8. — P. 1191–1200.
- 171. Khludnev A.M., Shcherbakov V.V. A note on crack propagation paths inside elastic bodies // Applied Mathematics Letters. — 2018. — Vol. 79. — P. 80 – 84.
- 172. Griffith A.A. The phenomena of rupture and flow in solids // Phylosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character. — 1921. — Vol. 221. — P. 163–198.
- 173. Erdogan F., Sih G.C. On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear // Journal of Basic Engineering. — 1963. — Vol. 85, No. 4. — P. 519–525.
- 174. Sih G. C. Strain-energy-density factor applied to mixed mode crack problems // International Journal of Fracture. — 1974. — Vol. 10, No. 3. — P. 305–321.
- 175. Nuismer R.J. An energy release rate criterion for mixed mode fracture // Int. J. Fracture. — 1975. — Vol. 11, No. 2. — P. 245–250.

- 176. Hussain M.A., Pu S.L., Underwood J.H. Strain energy release rate for a crack under combined mode i and mode ii // Fract. Anal. ASTM STP 560. — 1974. — Vol. 560. — P. 2–28.
- 177. Barr D.T. Leading-edge Analysis for Correct Simulation of Interface Separation and Hydraulic Fracturing: Ph. D. thesis / D.T. Barr ; Massachusetts Institute of Technology, Department of Mechanical Engineering. — 1991. — 229 p.
- 178. Carter B.J., Desroches J., Ingraffea A.R., Wawrzynek P.A. Simulating fully 3D hydraulic fracturing // Modeling in Geomechanics / Ed. by M. Zaman, G. Gioda, J. Booker. — John Wiley & Sons, 2000. — P. 525–557.
- 179. Rungamornrat J. A Computational Procedure for Analysis of Fractures in Three Dimensional Anisotropic Media: Ph. D. thesis / J. Rungamornrat ; Department of Aerospace Engineering and Engineering Mechanics, The University of Texas at Austin. — 2004.
- 180. Rungamornrat J., Wheeler M.F., Mear M.E. Coupling of fracture/nonnewtonian flow for simulating nonplanar evolution of hydraulic fractures // SPE Annual Technical Conference and Exhibition. — 2005. — SPE-96968-MS.
- 181. Gdoutos E.E. Fracture Mechanics Criteria and Applications. Engineering Applications of Fracture Mechanics. — Springer Netherlands, 2012. — ISBN: 9789400919563.
- 182. Schöllmann M., Richard H.A., Kullmer G., Fulland M. A new criterion for the prediction of crack development in multiaxially loaded structures // Int. J. Fracture. — 2002. — Vol. 117, No. 2. — P. 129–141.
- 183. BUCHHOLZ F.-G., JUST V., RICHARD H. A. Computational simulation and experimental findings of three-dimensional fatigue crack growth in a single-edge notched specimen under torsion loading // Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures. — Vol. 28, No. 1-2. — P. 127–134.
- 184. Sih G.C. Mechanics of fracture initiation and propagation: surface and volume energy density applied as failure criterion. Engineering application of fracture mechanics. — Kluwer Academic, 1991. — ISBN: 9780792308775.
- 185. Germanovich L.N., Cherepanov G.P. On some general properties of strength criteria // Int. J. Fracture. — 1995. — Vol. 71, No. 1. — P. 37–56.

- 186. Weber W., Steinmann P., Kuhn G. Precise 3D crack growth simulations // Int. J. Fracture. — 2008. — Vol. 149, No. 2. — P. 175–192.
- 187. Chang Jun, quan Xu Jin, Mutoh Yoshiharu. A general mixed-mode brittle fracture criterion for cracked materials // Engineering Fracture Mechanics. — 2006. — Vol. 73, No. 9. — P. 1249 – 1263.
- 188. Wu H.C. Dual failure criterion for plane concrete // Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE. — Vol. 14, No. 6. — P. 1167–1181.
- 189. Chao C.K., Wang J.L. Failure prediction of a plate weakened by an elliptic hole under thermal or mechanical load // Engineering Fracture Mechanics. — 1993. — Vol. 45, No. 6. — P. 843 – 856.
- 190. Chang Kaung Jain. On the maximum strain criterion—a new approach to the angled crack problem // Engineering Fracture Mechanics. — 1981. — Vol. 14, No. 1. — P. 107 – 124.
- 191. Mirsayar M.M., Razmi A., Aliha M.R.M., Berto F. Emtsn criterion for evaluating mixed mode i/ii crack propagation in rock materials // Engineering Fracture Mechanics. — 2018. — Vol. 190. — P. 186 – 197.
- 192. Neuber H. Kerbspannungslehre grundlagen für genaue spannungsrechnung. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1937. — ISBN: 978-3-662-36565-6.
- 193. Novozhilov V.V. On a necessary and sufficient criterion for brittle strength // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. — 1969. — Vol. 33, No. 2. — P. 201–210.
- 194. F.-G. Buchholz, A. Chergui, H.A. Richard. Fracture analyses and experimental results of crack growth under general mixed mode loading conditions // Engineering Fracture Mechanics. — 2004. — Vol. 71, No. 4. — P. 455 – 468.
- 195. Chen Chih-Hung, Cambonie Tristan, Lazarus Veronique, Nicoli Matteo, Pons Antonio J., Karma Alain. Crack front segmentation and facet coarsening in mixed-mode fracture // Phys. Rev. Lett. — 2015. — Vol. 115. — P. 265503.
- 196. Eberlein A., Richard H.A., Kullmer G. Facet formation at the crack front under combined crack opening and anti-plane shear loading // Engineering Fracture Mechanics. — 2017. — Vol. 174. — P. 21 – 29. — Special Issue on Multiaxial Fracture 2016.

- 197. Goldstein R V, Osipenko N M. Fracture structure near a longitudinal shear macrorupture // Mech. Sol. 2012. Vol. 47, No. 5. P. 505–516.
- 198. Cooke M.L., Pollard D.D. Fracture propagation paths under mixed mode loading within rectangular blocks of polymethyl methacrylate // Journal of Geophysical Research. — 1996. — Vol. 101, No. B2. — P. 3387–3400.
- 199. Xu X.-P., Needleman A. Numerical simulations of fast crack growth in brittle solids // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. — 1994. — Vol. 42, No. 9. — P. 1397–1434.
- 200. Lazarus V., Buchholz F.-G., Fulland M., Wiebesiek J. Comparison of predictions by mode ii or mode iii criteria on crack front twisting in three or four point bending experiments // International Journal of Fracture. — 2008. — Vol. 153, No. 2. — P. 141–151.
- 201. Leblond Jean-Baptiste, Karma Alain, Lazarus Véronique. Theoretical analysis of crack front instability in mode i+iii // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. — 2011. — Vol. 59, No. 9. — P. 1872 – 1887.
- 202. Pons A.J., Karma A. Helical crack-front instability in mixed-mode fracture // Nature Letters. 2010. Vol. 464. P. 85–89.
- 203. Leblond Jean-Baptiste, Ponson Laurent. Out-of-plane deviation of a mode i+iii crack encountering a tougher obstacle // Comptes Rendus Mécanique. — 2016. — Vol. 344, No. 7. — P. 521 – 531.
- 204. Goldstein R.V., Salganik R.L. Brittle fracture of solids with arbitrary cracks // Int. J. Fracture. 1974. Vol. 10. P. 507–523.
- 205. Lazarus V., J-B. Leblond, S.-E. Mouchrif. Crack front rotation and segmentation in mixed mode i+iii or i+ii+iii. part ii: Comparison with experiments // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. — 2001. — Vol. 49, No. 7. — P. 1421 – 1443.
- 206. Shlyannikov V.N. T-stress for crack paths in test specimens subject to mixed mode loading // Engineering Fracture Mechanics. — 2013. — Vol. 108, No. Complete. — P. 3–18.
- 207. Sajjadi S.H., Salimi-Majd D., Ghorabi M.J. Ostad Ahmad. Development of a brittle fracture criterion for prediction of crack propagation path under general mixed mode loading // Engineering Fracture Mechanics. — 2016. — Vol. 155. — P. 36 – 48.
- 208. Sajjadi S. H., Ostad Ahmad Ghorabi M. J., Salimi-Majd D. A novel mixedmode brittle fracture criterion for crack growth path prediction under static and fatigue loading // Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures. — 2015. — Vol. 38, No. 11. — P. 1372–1382.
- 209. Berto F., Lazzarin P. A review of the volume-based strain energy density approach applied to v-notches and welded structures. — 2009. — Vol. 52, No. 3. — P. 183–194. — Exported from https://app.dimensions.ai on 2018/10/30.
- 210. Matvienko Yu. G. Maximum average tangential stress criterion for prediction of the crack path // International Journal of Fracture. 2012. Vol. 176, No. 1. P. 113–118.
- 211. Smith D. J., Ayatollahi M. R., Pavier M. J. The role of t-stress in brittle fracture for linear elastic materials under mixed-mode loading // Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures. — Vol. 24, No. 2. — P. 137– 150.
- 212. Aliha M.R.M., Ayatollahi M.R. Two-parameter fracture analysis of scb rock specimen under mixed mode loading // Engineering Fracture Mechanics. —
  2013. Vol. 103. P. 115 123. Advances in Failure Assessment Using Fracture and Damage Mechanics.
- 213. Meliani M. Hadj, Matvienko Y. G., Pluvinage G. Two-parameter fracture criterion (kρ,c-tef,c) based on notch fracture mechanics // International Journal of Fracture. — 2011. — Vol. 167, No. 2. — P. 173–182.
- 214. CHENG C., NIU Z., RECHO N., ZHOU H. Analyse the role of the nonsingular stress in brittle fracture by bem coupled with eigen-analysis // Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures. — 2013. — Vol. 36, No. 5. — P. 416–426.
- 215. Ayatollahi Majid R., Saboori Behnam. T-stress effects in mixed mode i/ii/iii brittle fracture // Engineering Fracture Mechanics. 2015. Vol. 144. P. 32 45.
- 216. Xu F, Li Y.L., Guo W. Development and application of the strain energy density criterion to three-dimensional i-ii mixed-mode fracture // Progress in Experimental and Computational Mechanics in Engineering. — Vol. 243 of Key Engineering Materials. — Trans Tech Publications, 2003. — P. 369–374.

- 217. Salimi-Majd Davood, Shahabi Farhad, Mohammadi Bijan. Effective local stress intensity factor criterion for prediction of crack growth trajectory under mixed mode fracture conditions // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. — 2016. — Vol. 85. — P. 207 – 216.
- 218. Aliha M.R.M., Ayatollahi M.R., Smith D.J., Pavier M.J. Geometry and size effects on fracture trajectory in a limestone rock under mixed mode loading // Engineering Fracture Mechanics. — 2010. — Vol. 77, No. 11. — P. 2200 – 2212. — International Conference on Crack Paths 2009.
- 219. Safaei Sajjad, Ayatollahi Majid R., Saboori Behnam. Fracture behavior of GPPS brittle polymer under mixed mode i/III loading // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. — 2017. — Vol. 91. — P. 103–115.
- 220. Lazarus V., J-B. Leblond, S.-E. Mouchrif. Crack front rotation and segmentation in mixed mode i+iii or i+ii+iii. part i: Calculation of stress intensity factors // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. — 2001. — Vol. 49, No. 7. — P. 1399–1420.
- 221. Ravi-Chandar K., Knauss W. G. An experimental investigation into dynamic fracture: I. crack initiation and arrest // International Journal of Fracture. — 1984. — Vol. 25, No. 4. — P. 247–262.
- 222. Aliha M. R. M., Bahmani A. Rock fracture toughness study under mixed mode i/iii loading // Rock Mechanics and Rock Engineering. — 2017. — Vol. 50, No. 7. — P. 1739–1751.
- 223. Aliha M.R.M., Linul E., Bahmani A., Marsavina L. Experimental and theoretical fracture toughness investigation of pur foams under mixed mode i+iii loading // Polymer Testing. — 2018. — Vol. 67. — P. 75 – 83.
- 224. Pereira J.P.A. Generalized finite element methods for three-dimensional crack growth simulations: Ph. D. thesis / J.P.A. Pereira ; Department of Civil and Environmental Engineering, University of Illinois. — Urbana-Champaign, 2010. — 221 p. URL: http://hdl.handle.net/2142/15598.
- 225. Garagash D.I. Transient solution for a plane-strain fracture driven by a shearthinning, power-law fluid // Int. J. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. — 2006. — Vol. 30, No. 14. — P. 1439–1475.
- 226. Зенкевич О.С. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.

- 227. Smith I.M. Programming the finite element method. Chichester, West Sussex, UK: John Wiley & Sons, 2014. ISBN: 978-1-119-97334-8.
- 228. Норри Д., де Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов. М.: Мир, 1981. 155 с.
- 229. Норри Д., де Фриз Ж. Лаевский Ю.М. Метод конечных элементов (основы теории, задачи). Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1999. 166 с.
- 230. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. 3-е изд. М.: Наука, 1986. Т. VI. Гидродинамика. 736 с.
- 231. Kauzlarich J.J., Greenwood J.A. Elastohydrodynamic lubrication with Herschel-Bulkley model greases // A S L E Transactions. — 1972. — Vol. 15, No. 4. — P. 269–277.
- 232. Bunger A.P., Detournay E. Early-time solution for a radial hydraulic fracture // Journal of Engineering Mechanics. 2007. Vol. 133, No. 5. P. 534–540.
- 233. Linkov A. Bench-mark solution for a penny-shaped hydraulic fracture driven by a thinning fluid // ArXiv e-prints. 2015. No. 1508.07968.
- 234. Savitski A.A., Detournay E. Propagation of a penny-shaped fluid-driven fracture in an impermeable rock: asymptotic solutions // Int. J. Solids and Structures. — 2002. — Vol. 39, No. 26. — P. 6311–6337.
- 235. Detournay E. Propagation regimes of fluid-driven fractures in impermeable rocks // International Journal of Geomechanics. — 2004. — Vol. 4, No. 1. — P. 35–45.
- 236. Abass H.H., Brumley J.L., Venditto J.J. et al. Oriented perforations-a rock mechanics view // SPE annual technical conference and exhibition. 1994.
- 237. Desroches J., Thiercelin M. Modelling the propagation and closure of microhydraulic fractures // Int. J. Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts. — 1993. — Vol. 30, No. 7. — P. 1231–1234.
- 238. Carbonell R., Desroches J., Detournay E. A comparison between a semianalytical and a numerical solution of a two-dimensional hydraulic fracture // Int. J. Solids and Structures. — 1999. — Vol. 36, No. 31-32. — P. 4869–4888.
- 239. Aidagulov G., Alekseenko O., Chang F., Bartko K., Cherny S., Esipov D., Kuranakov D., Lapin V. Model of hydraulic fracture initiation from the notched openhole // Proceedings of the 2015 Annual Technical Symposium

& Exhibition. — Al Khobar, Saudi Arabia, 2015. — P. 1–12.

- 240. Fox R.W., McDonald A.T., Pritchard P.J., Mitchell J.W. Fluid mechanics. 9th edition. — John Wiley & Sons, 2015. — ISBN: 978-1-118-96127-8.
- 241. Montgomery C. Fracturing fluids // Effective and Sustainable Hydraulic Fracturing / Ed. by R. Jeffrey. InTech, 2013.
- 242. 13503-1:2011 ISO. Petroleum and natural gas industries Completion fluids and materials – Part 1: Measurement of viscous properties of completion fluids. — Geneva, Switzerland: International Organization for Standardization, 2011.
- 243. Kartoatmodjo T., Schmidt Z. Large data bank improves crude physical property correlations // Oil and Gas Journal. 1994. Vol. 92, No. 27. P. 51–55.
- 244. Шер Е.Н., Колыхалов И.В. Особенности последовательного развития близко расположенных трещин гидроразрыва // ФТПРПИ. — 2011. — № 6. — С. 43–53.
- 245. Колыхалов И.В., Мартынюк П.А., Шер Е.Н. Моделирование развития трещин при последовательном поинтервальном гидроразрыве пласта вязкой жидкостью // ФТПРПИ. — 2016. — № 4. — С. 39–48.
- 246. Peirce A, Bunger A. Interference fracturing: Nonuniform distributions of perforation clusters that promote simultaneous growth of multiple hydraulic fractures // SPE Journal. — 2015. — Vol. 20, No. 02. — P. 384–395.
- 247. Alekseenko O.P., Potapenko D.I., Kuranakov D.S., Lapin V.N., Cherny S.G., Esipov D.V. 3D modeling of fracture initiation from cemented perforated wellbore // 19th European Conference on Fracture "Fracture mechanics for durability, reliability and safety", Kazan, Russia, 1 CD-ROM. — 2012.
- 248. Alekseenko O.P., Potapenko D.I., Cherny S.G., Esipov D.V., Kuranakov D.S., Lapin V.N. 3D modeling of fracture initiation from perforated noncemented wellbore // SPE Journal. — 2013. — Vol. 18, No. 3. — P. 589– 600.
- 249. Briner A., Florez J.C., Nadezhdin S., Alekseenko O., Gurmen N., Cherny S., Kuranakov D., Lapin V. Impact of perforation tunnel orientation and length in horizontal wellbores on fracture initiation pressure in maximum tensile stress criterion model for tight gas fields in the Sultanate of Oman // SPE

Middle East Oil & Gas Show and Conference. — Manama, Bahrain, 2015. — SPE-172663-MS, **Scopus**.

- 250. Briner A., Florez J.C., Nadezhdin S., Gurmen N., Alekseenko O., Cherny S., Kuranakov D., Lapin V. Impact of wellbore orientation on fracture initiation pressure in maximum tensile stress criterion model for tight gas field in the Sultanate of Oman // SPE North Africa Technical Conference and Exhibition. — Cairo, Egypt, 2015. — SPE-175725-MS, Scopus.
- 251. Briner A., Florez J.C., Nadezhdin S., Gurmen N., Alekseenko O., Cherny S., Kuranakov D., Lapin V. Impact of wellbore completion type on fracture initiation pressure in maximum tensile stress criterion model for tight gas field in the Sultanate of Oman // International Petroleum Technology Conference. — Doha, Qatar, 2015. — IPTC-18261-MS.
- 252. Alekseenko O.P., Potapenko D.I., Cherny S.G., Esipov D.V., Kuranakov D.S., Lapin V.N. 3-D modeling of fracture initiation from perforated non-cemented wellbore // SPE Hydraulic Fracturing Technology Conference. The Woodlands, Texas, 2012. P. 1–16. SPE-151585-PA.
- 253. Alekseenko Olga, Vaisman Mario. Exact solution of one classical problem on hydraulic fracturing // Journal of Mining Science - J MIN SCI-ENGL TR. — 2001. — Vol. 37. — P. 493–503.
- 254. Gasda Sarah E., Bachu Stefan, Celia Michael A. Spatial characterization of the location of potentially leaky wells penetrating a deep saline aquifer in a mature sedimentary basin // Environmental Geology. — 2004. — Vol. 46, No. 6. — P. 707–720.
- 255. Vralstad Torbjorn, Saasen Arild, Fjer Erling, Oia Thomas, Ytrehus Jan David, Khalifeh Mahmoud. Plug and abandonment of offshore wells: Ensuring long-term well integrity and cost-efficiency // Journal of Petroleum Science and Engineering. — 2019. — Vol. 173. — P. 478 – 491.
- 256. Godoy R., Fontan M., Capra B., Kvalsund R., Poupard O. Well integrity support by extended cement evaluation numerical modeling of primary cement jobs // Abu Dhabi International Petroleum Exhibition and Conference. Society of Petroleum Engineers, 2015.
- 257. Watson Theresa, Bachu Stefan. Evaluation of the potential for gas and co2 leakage along wellbores // SPE Drilling & Completion. 2009. Vol. 24. —

P. 115–126.

- 258. Miyazaki Brent. Well integrity: An overlooked source of risk and liability for underground natural gas storage. lessons learned from incidents in the USA: Fig. 1. // Geological Society, London, Special Publications. — 2009. — Vol. 313, No. 1. — P. 163–172.
- 259. Loizzo Matteo, Akemu Onajomo Akpeki, Jammes Laurent, Desroches Jean, Lombardi Salvatore, Annunziatellis Aldo. Quantifying the risk of CO2 leakage through wellbores // SPE Drilling & Completion. — 2011. — Vol. 26, No. 03. — P. 324–331.
- 260. Carter L., Evans. G. A study of cement-pipe bounding // Journal of Petroleum technology. 1964. Vol. 16, No. 2. P. 157–160.
- 261. Lecampion Brice, Bunger Andrew, Kear James, Quesada Daniel. Interface debonding driven by fluid injection in a cased and cemented wellbore: Modeling and experiments // International Journal of Greenhouse Gas Control. — 2013. — Vol. 18. — P. 208 – 223.
- 262. Steffek T. Cement Plug Testing: Weight vs. Pressure Testing to Assess Viability of a Wellbore Seal Between Zones. — CSI Technologies, 2012. — P. 111.
- 263. Crouch S.L., Starfield A.M. Boundary element methods in solid mechanics : with applications in rock mechanics and geological engineering / S.L. Crouch and A.M. Starfield. — London: Allen and Unwin, 1983. — ISBN: 004620010X.
- 264. Hills D.A., Kelly P.A., Dai D.N., Korsunsky A.M. Solution of Crack Problems. The Distributed Dislocation Technique. — Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1996. — ISBN: 978-94-015-8648-1.
- 265. Peirce A. Modeling multi-scale processes in hydraulic fracture propagation using the implicit level set algorithm // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2015. — Vol. 283. — P. 881–908.
- 266. Dontsov E. V., Peirce A. P. A lagrangian approach to modelling proppant transport with tip screen-out in KGD hydraulic fractures // Rock Mechanics and Rock Engineering. — 2015. — Vol. 48, No. 6. — P. 2541–2550.
- 267. Maron S.H., Pierce P.E. Application of ree-eyring generalized flow theory to suspensions of spherical particles // Journal of Colloid Science. 1956. —

Vol. 11, No. 1. — P. 80–95.

- 268. Hammond P.S. Settling and slumping in a newtonian slurry, and implications for proppant placement during hydraulic fracturing of gas wells // Chemical engineering science. — 1995. — Vol. 50, No. 20. — P. 3247–3260.
- 269. Dontsov E. V. An approximate solution for a penny-shaped hydraulic fracture that accounts for fracture toughness, fluid viscosity and leak-off // Royal Society Open Science. — 2016. — Vol. 3, No. 12.
- 270. Baggini Almagro S.P., Frates C, Garand J, Meyer A. Sealing fractures: Advances in lost circulation control treatments // Oilfield Review. 2014. Vol. 26. P. 4–13.
- 271. Majidi R., Miska S., Thompson L.G., Yu M., Zhang J. Quantitative analysis of mud losses in naturally fractured reservoirs: The effect of rheology // Society of Petroleum Engineers. — 2010. — Vol. 26. — P. 4–13.
- 272. Астракова А.С., Лапин В.Н., Черный С.Г., Алексеенко О.П. Модель фильтрации вязкопластической жидкости в задаче определения параметров трещиновато-пористой среды // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Информационные технологии. — 2013. — Т. 11, № 2. — С. 18–35. — ISSN 1818-7900.
- 273. Каханер Д., Моулер К., С. Нэш. Численные методы и математическое обеспечение: Пер. с англ. — М.: Мир, 1998. — 575с.
- 274. Boronin S.A., Osiptsov A.A. Two-continua model of suspension flow in a hydraulic fracture // Doklady Physics. — 2010. — Vol. 55, No. 4. — P. 199– 202.
- 275. Osiptsov A.A. Fluid mechanics of hydraulic fracturing: a review // Journal of Petroleum Science and Engineering. 2017. Vol. 156. P. 513–535.
- 276. Gadde P.B., Sharma M.M. The impact of proppant retardation on propped fracture lengths // 2005 SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Dallas, Texas, USA. — 2005. — P. 9–12.
- 277. Coulter G.R., Wells R.D. The advantages of high proppant concentration in fracture stimulation // Journal of Petroleum Technology. — 1972. — Vol. 24, No. 06. — P. 643–650.
- 278. Sneddon I.N. The distribution of stress in the neighbourhood of a crack in an elastic solid // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 1946. Vol. 187, No. 1009. P. 229–260.

- 279. Meyer B.R., Bazan L.W., Walls D. Modeling of proppant permeability and inertial factor for fluid flow through packed columns // ISRM International Conference for Effective and Sustainable Hydraulic Fracturing. — International Society for Rock Mechanics, 2013.
- 280. Mueller S., Llewellin E.W., Mader H.M. The rheology of suspensions of solid particles. — Vol. 466. — The Royal Society, 2009. — P. 1201–1228.
- 281. Harlow F.H., Evans M.W. A machine calculation method for hydrodynamic problems // Los Alamos Scientific Laboratory report LAMS-1956. 1955.

## Приложение 1. Использование результатов

## Утверждаю

Директор филиала

ООО «Технологическая компания Шлюмберже» в г. Новосибирске Ф.Н. Литвинец «ОС» Длоня 2018 г

Акт

об использовании в филиале ООО «Технологическая компания Шлюмберже» в г. Новосибирске научных результатов диссертационной работы «Моделирование распространения трещин, нагруженных давлением вязкой жидкости» представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук старшего научного сотрудника Института Теплофизики им. С.С. Кутателадзе Лапина Василия Николаевича

Я, нижеподписавшийся составил настоящий акт о том, что следующие результаты диссертационной работы Лапина В.Н. в 2010-2014 г. использовались в практической деятельности филиала ООО «Технологическая компания Шлюмберже» в г. Новосибирске.

- Трехмерная модель начального распространения трещины в прискважинной области и полученное на основе ее применения описание эффекта пережатия трещины.
- Модель утечек бурового раствора в систему естественных трещин и ее программная реализация.
- 3. Модель распространения трещины по границе цементной пробки.

Инженер по моделированию

Бара Об» июня 2018 г \_\_\_\_ к.ф.-м.н. Д.В. Банников