На правах рукописи

### Лапин Василий Николаевич

# Моделирование распространения трещин, нагруженных давлением вязкой жидкости

Специальность 1.2.2 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Новосибирск $-\ 2022$ 

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном научном учреждении «Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий» г. Новосибирск.

Научный Черный Сергей Григорьевич, консультант: доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе Сибирского отделения Российской академии наук, главный научный сотрудник

#### Официальные Смирнов Николай Николаевич,

оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», г. Москва, заведующий лабораторией

#### Татосов Алексей Викторович,

доктор физико-математических наук, доцент, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Тюменский государственный университет», г. Тюмень, профессор

#### Осипцов Андрей Александрович,

доктор физико-математических наук, Автономная некоммерческая образовательная организация высшего образования «Сколковский нститут науки и технологий», г. Москва, директор проектного центра

Ведущая Федеральное государственное бюджетное учреждение организация: Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук, г. Новосибирск

Защита диссертации состоится «23» марта 2023 г. в 11:00 на заседании диссертационного совета 24.1.237.01, созданного на базе ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, расположенного по адресу: 125047, г. Москва, Миусская пл., д.4

С диссертацией библиотеке Институможно ознакомиться в М.В.Келдыша PAH та прикладной математики ИМ. И на сайте https://keldysh.ru/council/3/D00202403/defence3.htm

Автореферат разослан «\_\_\_\_» \_\_\_\_ 2022 г.

Ученый секретарь диссертационного совета 24.1.237.01 кандидат физико-математических наук

Корнилина М.А.

### Общая характеристика работы

Актуальность работы. Построение и обоснование полных трехмерных моделей и численных методов их реализации для описания вызванного закачиванием вязкой жидкости распространения трещины от полости в упругой среде является актуальной научной и прикладной задачей. Актуальность задачи построения модели для механики трещин, обусловливающая научную значимость работы, заключается в необходимости выявления механизмов и параметров, влияющих на траекторию и раскрытие трещины на ранней стадии ее распространения: реологии жидкости, закачиваемой в полость и трещину, параметров напряженного состояния среды, ее упругих свойств и т. д. Для математического моделирования актуальность заключается в построении и обосновании новых, более полных трехмерных математических моделей механики трещин и разработке надежных, экономичных численных методов, необходимых для повышения качества описания механики разрушения материалов и снижения связанных с этим затрат вычислительных ресурсов.

Одним из очевидных приложений моделей, позволяющих рассчитывать распространение трещины одновременно с движением жидкости в ней, является описание распространения трещины гидроразрыва пласта (ГРП). Популярность ГРП как метода повышения отдачи нефте- и газоносных пластов в XXI веке значительно возросла в связи с повышением доли нетрадиционных месторождений с низкой проницаемостью породы и малыми размерами нефте- и газонасыщеных пропластков. Метод основывается на закачке в скважину вязкой жидкости с давлением, достаточным для инициации и распространения трещины в пласте, которая в дальнейшем заполняется проппантом (твердыми частицами), предотвращающим закрытие трещины и обеспечивающим ее высокую проводимость.

Ввиду сложности физики и недоступности прямому наблюдению процесса развития трещины гидроразрыва пласта оценка технологических параметров при проведении ГРП и геометрических размеров созданной трещины возможна только на основе математического моделирования. Первые модели, описывающие эволюцию трещин ГРП на основе одномерных дифференциальных уравнений, были предложены и развивались Баренблаттом Г.И., Желтовым Ю.П., Христиановичем С.А., de Klerk F., Carter R.D., Geertsma J., Kern L.R., Nordgren R.P., Perkins T.K. Более сложные, псевдотрехмерные и плоские трехмерные модели, которые позволяют описывать распространение трещины в нескольких направлениях, учитывать контраст напряжений, фильтрацию жидкости в породе и т. д., разрабатывались Донцовым Е.В., Киселевым А.Б., Кривцовым А.М., Линьковым А.М., Смирновым Н.Н., Федоровым А.И., Adachi J., Garagash D.I., Mack M., Peirce A., Settari A., Warpinski N. Одним из основных процессов, определяющих распространение трещины, является движение жидкости в ней и в окружающей трещину породе. Описанию этого процесса большое внимание уделяли Акулич А.В., Байкин А.Н., Головин С.В., Малышев С.В., Меньшов И.С., Савенков Е.Б., Салимов О.В., Сандаков А.Е. Однако использование новых жидкостей для повышения эффективности ГРП в нетрадиционных коллекторах требует для описания их течения и переноса ими проппанта сложных реологических законов. Моделированием движения в трещине жидкостей сложных реологий, переносом проппанта и их влиянием на процесс распространения занимались Боронин С.А., Ентов В.М., Татосов А.В., Осипцов А.А., Cleary M.P., Desroches J., Lecampion B., Mishuris G., Morris J.P., Zhang G.

Современные подходы к разработке нетрадиционных пластовых резервуаров предполагают создание множества криволинейных скважин, которые не позволяют гарантированно ориентировать зародышевую трещину ГРП в плоскости, ортогональной направлению действия минимальных напряжений в пласте. Это приводит к искривлению трещины при ее распространении и переориентации, что в свою очередь вызывает уменьшение раскрытия трещины на искривленном участке — пережатие. Искривление поверхности трещины также может быть вызвано неоднородностью поля напряжений, обусловленной, например, неоднородностью поля порового давления или влиянием других близко расположенных трещин ГРП. Современные авторы Duarte C.A., Ghassemi A., Gupta P., Kumar D., Mear M.E., Paul B., Zeng Q. при разработке моделей трехмерных, неплоских трещин ограничиваются рассмотрением последнего случая, который характеризуется относительно слабым отклонением трещины от плоскости и гладкостью ее поверхности <sup>1</sup>, <sup>2</sup>, <sup>3</sup>, <sup>4</sup>, <sup>5</sup>. Это приводит к использованию в таких моделях классических критериев выбора направления распространения трещины без экспериментального обоснования их применимости для общего случая развития криволинейной трещины в сложном анизотропном поле напряжений, которым характеризуется задача ее переориентации на начальном этапе развития. Несмотря на хорошо развитую теорию трещин, которой занимались Гольдштейн Р.В., Звягин А.В., Морозов Е.М., Салганик Р.Л., Черепанов Г.П., Erdogan F.,

 $<sup>^1</sup>$  Gupta P., Duarte C.A. Coupled formulation and algorithms for the simulation of non-planar three-dimensional hydraulic fractures using the generalized finite element method // Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech. – 2016. – V. 40. – P. 1402–1437.

 $<sup>^2</sup>$ Kumar D., Ghassemi A., Three-dimensional poroelastic modeling of multiple hydraulic fracture propagation from horizontal wells // Int. J. Rock Mech. Mining Sci. – 2018. – V. 105. – P. 192–209.

 $<sup>^3</sup>$  Paul B. et al. 3D coupled HM–XFEM modeling with cohesive zone model and applications to non planar hydraulic fracture propagation and multiple hydraulic fractures interference // Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng. – 2018. – V. 342. – P. 321–353.

 $<sup>^4</sup>$  Sun T., Zeng Q., Xing H. A model for multiple hydraulic fracture propagation with thermo-hydromechanical coupling effects // Energies. – 2021. – V. 14, N. 4. – P. 894.

 $<sup>^5</sup>$  Caston guay S., Mear M.E. et al. Predictions of the growth of multiple interacting hydraulic fractures in three dimensions // SPE-166259-MS.

Lazarus V., Nuismer R.J., Rice J.R., Schollmann M., Sih G., и ее подкрепление экспериментальными исследованиями, проводимыми Клишиным В.И., Сердюковым С.В., Турунтаевым С.Б., задача построения критерия распространения трещины ГРП в анизотропном поле напряжений, способном описывать негладкую или сильно искривленную поверхность трещины, а также его обоснования на основе экспериментальных данных остается актуальной и до настоящего момента нерешенной.

Актуальность и значимость задач моделирования гидроразрыва пласта кроме того подчеркивается их включением в «Приоритетные направления развития науки, технологий и техники в Российской Федерации» (энерго-эффективность, энергосбережение, ядерная энергетика) и перечень критических технологий Российской Федерации (технологии поиска, разведки, разработки месторождений полезных ископаемых и их добычи)<sup>6</sup>.

Целью диссертации является разработка иерархии трехмерных и одномерных численных моделей распространения трещин в упругой хрупкой среде под действием закачиваемой жидкости сложной реологии и исследование на основе построенных моделей особенностей распространения.

**Объектом исследования** являются задачи распространения в хрупкой упругой среде трещин под действием закачиваемой в них вязкой жидкости сложной реологии, включающие в себя описание течения жидкости в трещинах, деформации и разрушения материала, а также численные математические модели этих процессов.

**Предметом исследования** являются закономерности и особенности процессов распространения трещин и зависимости основных параметров таких процессов от свойств разрушаемого материала, реологии жидкости и темпа ее закачки, геометрии рассматриваемой области.

В ходе достижения поставленной цели решены следующие задачи

1. Предложена и обоснована новая постановка задачи распространения трещины в упругой среде под действием закачиваемой жидкости, впервые позволяющая одновременно описывать 1) деформацию материала в трехмерной области сложной формы, 2) изменение направления распространения трещины и ее формы под действием анизотропного нагружения материала, 3) движение в трещине жидкости сложной реологии.

2. Предложена иерархия моделей трещин, распространяющихся под действием закачиваемой жидкости, каждая из которых получена внесением в постановку задачи из п.1 дополнительных предположений о форме трещины, таких как задание поверхности, вдоль которой распространяется трещина; рассмотрение плоских трещин с круговым фронтом; описание трещин, раз-

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup>Об утверждении приоритетных направлений развития науки, технологий и техники в Российской Федерации и перечня критических технологий Российской Федерации: Указ Президента Рос. Федерации от 7 июля 2011 г. № 899 // Собр. законодательства Рос. Федерации. — 2011. — № 28. — Ст. 4168. (В редакции Указа Президента Российской Федерации от 16.12.2015 г. № 623).

мер которых в одном из направлений является доминирующим. Такие предположения позволяют упростить описание движения жидкости, напряженнодеформированного состояния упругого материала и условий его разрушения, что повышает эффективность моделей при сужении области их применимости.

3. Для решения задачи п. 1 предложен новый полностью трехмерный неявный глобальный критерий скорости роста трещины и выбора направления ее распространения, в котором вместо предсказания направления распространения в каждой отдельной точке фронта анализируются возможные конфигурации фронта в целом, получающиеся после продвижения трещины. Это позволяет адекватно описывать распространение трещины при сложном нагружении, вызывающем наличие всех трех мод коэффициента интенсивности напряжений (КИН).

4. Для решения задачи п. 1 предложены численные модели описания движения жидкости Гершеля–Балкли<sup>7</sup> и слабосжимаемой жидкости внутри трещины, необходимые для адекватного расчета давления жидкости на стенки трещины.

5. Предложен и реализован метод решения системы интегральных и дифференциальных уравнений в области со свободными границами и нелинейной связью между искомыми функциями, формирующейся на каждом шаге распространения трещины в задаче п. 1. Метод основан на разделении задач для определения положения границ области и распределений давления и раскрытия трещины, которые решаются с помощью модификаций методов Ньютона и релаксации.

6. Проведена верификация и валидация предложенной полностью трехмерной модели распространения трещин и ее компонент: глобального неявного критерия распространения (п. 3) и моделей движения жидкостей разных реологий в трещине (п. 4).

7. Разработано программное обеспечение для численного моделирования нестационарного распространения трещин в упругой среде под действием закачиваемой жидкости.

8. Созданное на основе предложенной иерархии численных моделей (п. 2) программное обеспечение применено для моделирования процесса гидроразрыва пласта в трехмерной постановке: исследован эффект пережатия трещины при искривлении ее траектории, описаны особенности выхода трещины на магистральное направление и изучено влияние реологии закачиваемой жидкости на форму трещины.

9. Это же программное обеспечение применено для моделирования процесса распространения трещины вдоль гидроизоляции скважины. Исследова-

<sup>&</sup>lt;sup>7</sup>Herschel W.H., Bulkley R. Konsistenzmessungen von Gummi-Benzollosungen // Kolloid-Zeitschrift. – 1926.
– V. 39, N. 4. – P. 291–300.

ны условия инициации и распространения трещины, выявлена зависимость прочности гидроизоляции от условий ее создания.

Метод исследования. Основные результаты диссертации получены с применением современных методов математического моделирования, вычислительной математики, теории дифференциальных и интегральных уравнений. Для вычисления напряженно-деформированного состояния (НДС) упругих тел с полостями и трещинами использовался метод граничных элементов решения уравнений упругого равновесия. Описание движения жидкости внутри трещины основано на методе конечных элементов решения уравнений Навье-Стокса, осредненных по ширине канала (раскрытию трещины). Методы решения систем нелинейных уравнений использовались для нахождения совместного решения уравнений движения жидкости и уравнений упругого равновесия, а также для решения нелинейных уравнений движения жидкости в случае ее неньютоновской реологии. Модель распространения трещины базируется на критериях выбора направления и величины продвижения ее фронта, использующих анализ НДС материала в его окрестности. Закономерности процессов, протекающих при распространении трещины, области применимости моделей для их описания исследовались на основе вычислительного эксперимента.

**На защиту выносятся** следующие результаты, соответствующие четырем пунктам (1, 3, 4, 5) паспорта специальности 1.2.2 — математическое моделирование, численные методы и комплексы программ по физикоматематическим наукам.

## Пункт 1: Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений.

Трехмерная математическая модель распространения существенно трехмерной, криволинейной трещины при закачке в нее жидкости сложной реологии [7, 8, 16], описывающая одновременно движение жидкости в трещине, деформацию и разрушение породы. Модель состоит из новой подмодели движения жидкости сложной реологии в канале малой ширины [15, 5], учитывающей как наличие критического напряжения сдвига, так и нелинейную связь тензоров скоростей деформаций и напряжений и нового неявного глобального критерия выбора направления распространения трещины [3, 13, 8], учитывающего все три моды коэффициента интенсивности напряжений и описывающего распространение трещины при сложном нагружении.

Иерархия моделей трещин, распространяющихся под действием закачиваемой жидкости, построенная на основе упрощающих предположений о геометрии трещины [12, 1, 2, 4, 6, 9, 10].

Пункт 3: Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий. Метод решения связанной системы интегральных и дифференциальных уравнений в области со свободными границами и нелинейной связью между искомыми функциями, формирующейся на каждом шаге в модели распространения трещины [7, 8, 16]. В нем уравнения упругого равновесия и движения жидкости в трещине после аппроксимации решаются методом релаксации с коррекцией релаксационного параметра. В результате на каждой итерации решаются только системы линейных уравнений. Модифицированный метод Ньютона с выделением диагонали матрицы производных применяется для реализации неявного глобального критерия распространения трещины с целью определения направления и скорости распространения фронта.

Пункт 4: Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента.

Программный комплекс для решения задач распространения трещины от полости в упругой среде и по границе между материалами при закачке в них вязкой жидкости, зарегистрированный в Федеральной службе по интеллектуальной собственности и использованный в Новосибирском технологическом центре компании «Шлюмберже» [18].

Пункт 5: Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента.

Решена задача криволинейного распространения трещины от скважины в породу под действием давления закачиваемой в нее вязкой жидкости гидроразрыва. Результатом решения задачи являются зависимости давления в скважине от времени, распределения раскрытия трещины и давления вдоль поверхности трещины, форма самой поверхности трещины. Исследован процесс распространения трещины при ее инициации в направлении, не совпадающем с направлением предпочтительного распространения. Обнаружено и описано пережатие трещины в окрестности скважины. Показано, что в случае продольной к скважине трещины пережатие, вызванное искривлением ее траектории, существенно (может составлять до 80 % от ее раскрытия [17, 11]), тогда как для поперечной трещины этот эффект выражен слабее (не превышает 30 % [7,5]).

На основе безразмерного анализа и анализа чувствительности, проведенного путем вычислительного эксперимента, показано, что для моделирования распространения трещины, вызванного закачкой в нее жидкости сложной реологии, на начальном этапе формирования ее траектории может использоваться модель ньютоновской жидкости [5]. При этом коэффициент вязкости, используемый в модели ньютоновской жидкости, должен рассчитываться с учетом только показателя степени в реологическом законе Гершеля–Балкли и параметров породы, тогда как критическим напряжением сдвига можно пренебречь.

Установлены зависимости стойкости гидроизоляции скважин от параметров используемого цемента и условий его застывания, размеров возможных дефектов, порового давления [2]. Проведены оценки времени, в течение которого гидроизоляция скважины может противостоять повышению порового давления в породе.

Таким образом, в соответствии с формулой специальности 1.2.2 в диссертации представлены оригинальные результаты одновременно из четырех областей исследований.

Научная новизна выносимых на защиту результатов заключается в следующем. Отличительными особенностями разработанной модели являются ее полная трехмерность и одновременное рассмотрение в ней скважины с трещиной, нагруженных непостоянным давлением от течения жидкости в них. Существующие в настоящее время модели распространения трещин способны учитывать либо переменность нагрузки в трещине, либо влияние полости.

Автором разработан новый единый подход к описанию движения в трещине неньютоновской и слабосжимаемой жидкостей, в котором исходная задача сводится к решению нелинейного дифференциального уравнения в частных производных. Предложен численный метод решения такого нелинейного уравнения, требующий для расчета распределения давления в трещине всего нескольких итераций по нелинейности.

На основе предложенного неявного критерия выбора направления и величины приращения трещины сложной геометрии впервые строится положение всего фронта трещины с учетом всех трех мод КИН. Это позволяет описывать распространение трещины при сложном нагружении, даже если траектория распространения не является гладкой кривой.

Впервые в рамках трехмерной постановки численно описан эффект пережатия трещины, вызванный искривлением ее поверхности, показано влияние на него внешних факторов, определены области применимости моделей, использующихся для его описания.

Достоверность и обоснованность полученных результатов обеспечивается использованием в качестве основы моделирования фундаментальных законов механики разрушения, механики жидкости, механики твердого тела, выбором теоретически обоснованных численных методов. Достоверность результатов вычислительных экспериментов также подтверждается хорошим их согласованием с известными аналитическими решениями, экспериментальными данными и расчетами других исследователей.

Практическая ценность диссертационной работы заключается в возможности применения ее результатов (методик, алгоритмов, их программной реализации и результатов расчетов) в ряде прикладных областей нефтегазовой промышленности и горного дела, для моделирования распространения трещин в технических конструкциях. Результаты диссертационной работы использовались в филиале ООО «Технологическая Компания Шлюмберже» в г. Новосибирске.

Практическая значимость диссертационной работы обусловлена возможностью использования ее результатов при усовершенствовании и создании новых технологий гидроразрыва пласта, направленных на интенсификацию добычи из все более сложно разрабатываемых коллекторов. Этим обосновывается необходимость построения трехмерной модели распространения трещин, позволяющей учитывать особенности как самого коллектора (анизотропность его напряженного состояния), так и сложную геометрию трещины в окрестности скважины и сложную реологию жидкости, используемой для операции гидроразрыва. Выявлены области применимости модели ньютоновской жидкости для описания движения в трещине неньютоновской жидкости со сложной реологией Гершеля-Балкли. Показано, что для расчета траектории трещины на начальном этапе ее развития может использоваться простая модель ньютоновской жидкости при надлежащем расчете коэффициента вязкости, что позволяет существенно сократить время расчета при моделировании распространения трещины ГРП. В то же время при описании дальнейшего распространения трещины использование модели ньютоновской жидкости приводит к появлению существенной погрешности в представлении ее характеристик (формы, раскрытия, давления и т. д.).

Важным фактором, влияющим на характеристики ГРП, является искривление траектории или поверхности трещины, которая формируется в начальный период ее эволюции, но воздействует на весь процесс ГРП. Выявленный эффект пережатия трещины, результаты анализа условий его образования позволяют при проектировании гидроразрыва создавать условия, препятствующие пережатию, что повышает вероятность успешного проведения всего ГРП.

Теоретическая значимость результатов заключается в следующем. Разработанный трехмерный критерий распространения трещины, учитывающий все три моды напряжений, решает задачу нахождения величины приращения и направления распространения фронта трещины на каждом шаге ее распространения при смешанном нагружении. Неявный алгоритм его реализации обеспечивает устойчивость траектории трещины к величине ее приращения, что позволяет уменьшить количество шагов распространения трещины и снизить объем необходимых вычислительных ресурсов. Область применимости предложенного критерия не ограничена трещинами, распространение которых поддерживается закачкой жидкости, но включает в себя и распространение усталостных трещин. Предложенная модель движения жидкости Гершеля–Балкли в трещине может применяться для описания движения жидкости в произвольном тонком канале переменного сечения, высота которого мала по сравнению с его размерами в других направлениях. Преимущество реологического закона Гершеля–Балкли заключается в возможности его использования для описания поведения более простых жидкостей: ньютоновской, степенной, вязкопластической, часто используемых в моделях трещин ГРП, при моделировании переноса проппанта и его осаждения, при описании движения бурового раствора в скважине, смазки в различных устройствах сложной геометрии.

С позиций вычислительной механики значимым является созданный эффективный метод совместного решения трех основных связанных задач модели распространения для описания течения жидкости гидроразрыва со сложной реологией, напряженно-деформированного состояния материала, его разрушения и распространения в нем трещины. Модель распространения трещины представляет собой систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений параболического типа в области, положение границы которой определяется решением системы. Метод совместного решения позволяет свести такую систему к решению последовательности систем линейных алгебраических уравнений.

Представление работы и апробация результатов. Основные положения и результаты диссертации докладывались и обсуждались на семинарах «Информационно-вычислительные технологии», ФИЦ ИВТ (руководители — академик Ю.И. Шокин и проф. В.М. Ковеня); «Математическое моделирование гидроразрыва пласта», ИГиЛ СО РАН (руководитель проф. С.В. Головин); «Вычислительно-информационные технологии» ИВ-МиМГ СО РАН, НГУ (руководитель — проф. В.П. Ильин); «Научный семинар по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям», РУДН (руководитель — проф. А.Л. Скубачевский); «Геофизический семинар», ИДГ РАН (руководитель — д.ф.-м.н. С.Б. Турунтаев); «Механика прочности и разрушения материалов и конструкций», ИПМех РАН (руководитель — д.ф.-м.н. Е.И. Шифрин); «Механика: эксперимент, моделирование, приложения» (руководитель — д.ф.-м.н. А.В. Хохлов); «Научный семинар Газпромнефть-Политех», СПбПУ (руководитель — член-корр. д.ф.м.н. А.М. Кривцов); «Научно-исследовательском семинаре кафедры газовой и волновой динамики» ММФ МГУ (руководитель проф. Н.Н. Смирнов); Семинаре лаборатории физических методов воздействия на массив горных пород, ИГД СО РАН, (руководитель проф. С.В. Сердюков) и на ведущих международных и российских конференциях, среди которых «Цифровые технологии в добыче и переработке углеводородов: от моделей к практике», 2020, г. Уфа; «Моделирование геологического строения и процессов разработки – основа успешного освоения нефтегазовых месторожде-

ний», 2018, г. Казань; 22nd European Conference on Fracture (ECF22), 2018, Belgrade, Serbia; 14th U.S. National Congress on Computational Mechanics, 2017, Montreal, Canada; 21st European Conference on Fracture (ECF21), 2016, Catania, Italy; 2016 International Conference Mathematical and Information Technologies, 2016, Vrnjacka Banja, Serbia; XVII Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям, 2016, г. Новосибирск; International Conference «Computational and Informational Technologies in Science, Engineering and Education», 2015, Almaty, Kazakhstan; 8th International Conference on Mathematical Modeling of Technological Processes, 2015, Almaty, Kazakhstan; VIII Казахстанско-Российская Международная конференция «Математическое моделирование в научно-технологических и экологических проблемах нефтегазовой отрасли», 2014, Атырау, Казахстан; International conference «Advanced mathematics, computations and applications», 2014, Novosibirsk; Междунар. конф. «Современные проблемы вычислительной математики и математической физики» памяти и к 90-летию А.А. Самарского, 2009, г. Москва.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 18 печатных работах 1–17,19,на программное обеспечение, разработанное на их основе, получено свидетельство о государственной регистрации 18. Из публикаций в периодических изданиях 11 работ 1–11 опубликованы в изданиях, рекомендованных ВАК для представления основных научных результатов диссертаций на соискание ученой степени доктора наук (общий объем 23.3 печ. л., автору принадлежит 8.8 печ.л.), 7 работ 5–8, 11, 13, 15 индексируются в базе данных Web of Science (8, 11 — в Q1) и 13 работ — 1, 3, 5–8, 11–17 — в базе данных Scopus. Опубликована одна монография 19 общим объемом 39.6 печ. л., из которых автору принадлежит 9.1 печ. л.

Личный вклад автора. Результаты, составляющие основное содержание диссертации, получены автором самостоятельно. Во всех работах, написанных совместно, автором выполнена основная часть постановок задач, ему принадлежит разработка и реализация математических моделей и критериев. В работах 1, 14 автору принадлежат предложенные варианты модели радиальной трещины и их численная реализация; в работах 3, 7, 13, 16 трехмерный критерий распространения; в 5, 15 — численная модель течения неньютоновской жидкости в трещине; в 6, 10 — постановки задач, модели трещин и критерии образования проппантных пробок; в 8, 16 — численная модель течения жидкости в трещине, алгоритм совместного решения уравнений модели; в 9 — анализ постановок задач моделей и объединение их в иерархическую структуру, в 11, 17 — алгоритм совместного решения уравнений модели, исследование эффекта пережатия трещины.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, приложения и списка литературы из 281 наименования.



Рис. 1. Схема трехмерной трещины.

Общий объем диссертации составляет 297 страницы.

## Содержание работы

Во **введении** определен объект исследования, обоснована его актуальность, поставлены цели и научные задачи, представлены методы исследования, сформулированы результаты, выносимые на защиту, определена научная новизна, теоретическая и практическая значимость работы.

В *первой главе* формулируется задача описания распространения трещины, вызванной закачкой вязкой жидкости, описывается концепция предлагаемой модели распространения трехмерной трещины, в которой указываются основные процессы, учитываемые моделью: движение жидкости в трещине, деформация и разрушение материала, и предлагается алгоритм объединения моделей этих процессов. Так же в первой главе приводится обзор существующих подходов к решению к задаче распространения трещин на примере моделей трещин гидроразрыва пласта (ГРП) [9].

В параграфе 1.2 описывается концепция трехмерной модели начального этапа распространения трещины ГРП, перечисляются модели процессов, описываемых при распространении трещины, и подробно описывается метод совместного решения уравнений [16]. Термин «трехмерная» означает, что модель не имеет каких-либо ограничений на геометрию трещины и направление ее распространения. Схематично такая трещина показана на рисунке 1. Предлагаемая модель соединяет описание двумерного течения жидкости внутри полости трещины с расчетом трехмерных полей напряженнодеформированного состояния породы и критериями роста и направления распространения фронта трещины. Разработанная модель учитывает отставание фронта жидкости от фронта трещины («Лаг»), которое хорошо заметно на начальном этапе развития трещины и оказывает влияние на формирование ее траектории. Согласно концепции модели, распространение трещины описывается последовательностью шагов, на каждом из которых отыскиваются положения фронта жидкости  $\mathbf{x}_f$ , фронта самой трещины  $\mathbf{x}_r$ , распределения раскрытия w трещины и давления p на ее поверхности.

Движение жидкости описывается двумерными уравнениями смазки, полученными осреднением по раскрытию трещины (ширине канала) уравнений движения вязкой жидкости с неньютоновской реологией, описываемой моделью Гершеля–Балкли. Вывод уравнений, постановка задачи, подробное описание модели жидкости сложной реологии и метода конечных элементов (MKЭ) для решения уравнений приведены в четвертой главе диссертации. Здесь же для иллюстрации концепции модели и алгоритма ее реализации приведены только сами уравнения движения жидкости для случая ньютоновской реологии

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \nabla(a(w)\nabla p) = 0. \tag{1}$$

Коэффициент уравнения a(w) в (1) зависит от параметров реологии жидкости и величины раскрытия трещины, оператор  $\nabla$  определяет градиент на поверхности трещины, а граничные условия задаются для расхода на кривой пересечения трещины со скважиной  $\mathbf{x}_q$  и для давления на фронте жидкости  $\mathbf{x}_f$ .

Условие Стефана, задающее скорость продвижения фронта жидкости  $d\mathbf{x}_f/dt$  равным скорости жидкости на фронте  $v_{fluid}$ , записывается как

$$\frac{d\mathbf{x}_f}{dt} = v_{fluid}(\mathbf{x}_f). \tag{2}$$

Для описания деформации материала используются уравнения упругого равновесия, которые решаются методом граничных элементов (МГЭ), описанным в **параграфе 1.3**<sup>8</sup> В результате применения метода получается линейная зависимость раскрытия от давления, которая может быть для наглядности записана в виде

$$p = Tw + \sigma, \tag{3}$$

где T — некоторый линейный оператор, а слагаемые  $\sigma$  содержат информацию о сжимающих напряжениях в породе.

<sup>&</sup>lt;sup>8</sup>Используемая в модели модификация метода граничных элементов не является личным результатом автора, и ее описание приводится для полноты изложения.

Положение точек фронта трещины  $\mathbf{x}_r$  на каждом шаге определяется на основе неявного критерия приращения трещины, описанного в третьей главе диссертации, который кратко может быть записан в виде

$$\mathbf{K}(w, \mathbf{x}_r) = 0,\tag{4}$$

где  $\mathbf{K}(w, \mathbf{x}_r)$  — функция, зависящая от значений трех коэффициентов интенсивности напряжений (КИН)  $K_{\mathbf{I},\mathbf{II},\mathbf{III}}(p, \mathbf{x}_r)$  в точках фронта трещины, которые рассчитываются по положению фронта трещины  $\mathbf{x}_r$  и ее раскрытию w.

Как видно из (1), (3) задача описания распространения трещины сводится к системе нелинейных дифференциальных уравнений параболического типа для распределений w, p, изменяющихся в областях с подвижными границами  $\mathbf{x}_f$ ,  $\mathbf{x}_r$ , которые определяются условиями (2), (4). Нелинейность и наличие подвижных границ делают задачу сложной и требующей разработки специализированных алгоритмов ее решения.

Предложенный в диссертационной работе алгоритм решения уравнений (1), (3) с условиями (2), (4) описан в **параграфе 1.4** [16, 19] и заключается в построении двух итерационных процессов: внешнего — для определения положения фронтов жидкости и трещины  $\mathbf{x}_f$ ,  $\mathbf{x}_r$  и внутреннего — для решения задачи «гидродинамика–упругость», в которой при фиксированных положениях фронтов определяются распределения давления p и раскрытия w. Внешний итерационный процесс состоит из следующих шагов.

1. Задается положение фронта жидкости из аппроксимации условия (2) явным методом Эйлера. Точка фронта, в которой скорость жидкости  $v_{fluid}(\mathbf{x_f^n})$  максимальна, продвигается на фиксированное расстояние  $L_f$ . Изменение положения остальных точек фронта  $\mathbf{x_f^{n+1}}$  считается пропорциональным скорости жидкости на фронте

2. Начальное положение точек фронта трещины  $\mathbf{x_r}^k = (\mathbf{x_r}^{n+1})^k, k = 0$ задается в виде некоторого приращения («лага»  $\vec{\Delta L}$ ) к положению точек фронта жидкости

$$\mathbf{x_r}^0 = \mathbf{x_f}^{n+1} + \vec{\Delta L}.$$
 (5)

3. Для фиксированных положений фронтов жидкости и трещины решается задача «гидродинамика–упругость». Полученное в результате решения раскрытие w используется для расчета КИН  $K_{\mathbf{I},\mathbf{II},\mathbf{III}}(p,\mathbf{x}_r)$  в точках фронта трещины  $\mathbf{x_r}^k$ .

4. Если полученные значения КИН не удовлетворяют критерию распространения (4), то положение точек фронта трещины корректируется в соответствии с алгоритмом реализации критерия распространения, описанным в главе 2, после чего шаги 3–4 алгоритма повторяются.

Для решения задачи «гидродинамика–упругость» на каждой итерации к внешнего итерационного процесса реализуется внутренний итерационный процесс, содержащий два вложенных цикла, организованные следующим образом.

1. С предыдущего шага по времени задается начальное распределение давления  $p^m = ((p^{n+1})^k)^m = p^n, m = 0.$ 

2. Для распределения давления  $p^m$  из уравнений упругого равновесия (3) рассчитывается раскрытие трещины  $w^m$ .

3. Для заданного распределения раскрытия  $w^m$  из задачи движения жидкости (1) и условия Стефана (2) рассчитываются промежуточное распределение давления  $\tilde{p}$  и величина шага по времени  $\Delta t^{m+1}$ . Шаг по времени подбирается так, чтобы в точке с максимальной скоростью на фронте  $\max_{\mathbf{x_f}^{n+1}}(v_{fluid}(\mathbf{x_f}^{n+1}, w^m, \Delta t))$  удовлетворялось условие Стефана (2). Расчеты показывают, что для этого достаточно 5–10 итераций метода секущих.

4. Давление на следующей итерации m + 1 рассчитывается методом релаксации

$$p^{m+1} = (1 - r_p)p^m + r_p\tilde{p}$$

$$\tag{6}$$

с коррекцией релаксационного параметра  $r_p$ , гарантирующей ограниченность изменения давления величиной  $r_{max} \|p^s\|_C$ , где  $r_{max} = 2 \div 5 \%$ .

5. Шаги 2–4 повторяются, пока изменение давления не станет меньше заданной величины.

Одной из особенностей алгоритма является то, что в качестве параметра задается величина максимального продвижения фронта жидкости за один шаг  $L_f$ , а не шаг по времени  $\Delta t$ , что позволяет непосредственно контролировать размер прифронтового элемента расчетных сеток. Благодаря (2) это исключает появление больших скоростей и градиентов давления в окрестности фронта жидкости на всех итерациях задачи «гидродинамика-упругость», что повышает устойчивость итерационного процесса. Кроме того, основные вычислительные затраты в алгоритме приходятся на формирование и решение системы линейных уравнений (3). Эта система формируется при каждом перестроении фронта, а следовательно, и расчетной сетки, поэтому минимизация таких перестроений за счет подбора шага по времени для фиксированной формы фронта позволяет уменьшить количество арифметических операций. Итерационный процесс для расчета шага по времени  $\Delta t$  требует большего количества (5 ÷ 10 в методе секущих) вычислений поля давления из уравнений движения жидкости (1), но решение такой задачи требует значительно меньше операций в силу разреженности матрицы системы, получаемой при аппроксимации уравнений движения жидкости МКЭ, и ее меньшего (более чем в 3 раза) размера по сравнению с матрицей, получаемой из МГЭ для задачи упругости.

В параграфе 1.5 приводится описание назначения, возможностей, структуры, типов данных и системных требований разработанного программного комплекса трехмерного моделирования распространения трещины в хрупком



Рис. 2. Угол поворота  $\theta$ и угол кручения  $\psi$ определяют направление распространения фронта трещины

материале под действием давления вязкой жидкости «CADFRAC/2019» [18]. Показаны особенности реализации и взаимодействия составных частей программного комплекса.

**Вторая глава** посвящена описанию трехмерного неявного глобального критерия распространения трещины. В главе проведено сравнение предложенного критерия с современными явными и неявными критериями, выполнены его валидация и выбор весового параметра на серии экспериментов. В **параграфе 2.1** формулируется задача распространения трещины в упругом хрупком материале, согласно которой в каждой точке фронта l приращение трещины характеризуется длиной приращения L(l), углом поворота  $\theta$  и углом кручения  $\psi$ , показанными на рисунке 2. Также приводится краткий обзор классических и современных критериев выбора направления и величины приращения трещины, с которыми ниже будет проведено сравнение предлагаемого неявного глобального критерия распространения.

В параграфе 2.2 описывается предлагаемый неявный критерий распространения трещины [7], [13] объединяющий критерии выбора направления и величины приращения трещины. Величина приращения L определяется из критерия скорости высвобождения упругой энергии для случая смешанного нагружения, в котором присутствуют все три моды КИН (*G*-критерий<sup>9</sup>). Согласно этому критерию, трещина распространяется в направлении  $\theta^*$  тогда, когда интенсивность освобождающейся энергии при распространении в этом направлении достигает критической для рассматриваемого материала величины  $G_c$ 

$$G = \frac{1 - \nu^2}{E} \left( K_{\rm I}^2 + K_{\rm II}^2 \right) + \frac{1 + \nu}{E} K_{\rm III}^2 = G_c.$$
(7)

Ключевым отличием предлагаемой в диссертационной работе формулиров-

 $<sup>^{9}</sup>$  Nuismer R.J. An energy release rate criterion for mixed mode fracture // Int. J. Fracture. – 1975. – V. 11, N. 2. – P. 245–250.

ки критерия является использование в (7) значений  $K_{I,II,III} = K_{I,II,III}(\theta^*, t + \Delta t)$ , соответствующих напряженно-деформированному состоянию материала (НДС) после распространения трещины и изменения ее траектории за интервал времени  $\Delta t$ .

Направление распространения трещины, то есть углы  $\theta, \psi$  определяются из принципа локальной симметрии<sup>10</sup>, согласно которому после продвижения трещины в каждой точке фронта выполняется условие трещины нормального отрыва

$$K_{\mathbb{I}}(\theta(l)) = 0, \quad K_{\mathbb{I}}(\psi(l)) = 0.$$
(8)

Как и в критерии (7), значения КИН  $K_{I}, K_{II}, K_{II}$  в (8) соответствуют НДС материала после продвижения фронта трещины на L(l)

В общем случае неплоской трещины одновременное выполнение обоих условий (8) в каждой точке фронта l невозможно, так как углы  $\theta, \psi$  связаны соотношением (см. рисунок 2)

$$\psi(l) = \frac{L(l)\Delta\theta}{\Delta l} = L(l)\frac{\partial\theta}{\partial l}(\theta(l))$$
(9)

и двум условиям (9) соответствует только один варьируемый независимый параметр  $\theta(l)$ . Кроме того, изменение значения параметра  $\theta(l)$  в одной точке фронта ведет к изменению значений угла  $\psi(l)$ , а следовательно, и  $K_{\mathbb{II}}(\psi(l))$ в ее окрестности, что делает невозможным поиск решения в точках фронта независимо друг от друга.

Поэтому для получения фронта  $\mathbf{x}_r$  условия (8) переписываются виде задачи минимизации функционала  $F(\theta(l))$ , рассчитываемого как интеграл по всей длине фронта от взвешенной суммы квадратов КИН  $K_{II}, K_{III}$ 

$$F(t + \Delta t, \theta(l)) = \int_{\mathbf{x}_r} (1 - \beta) K_{\mathbb{I}}^2(t + \Delta t, \theta(l)) + \beta K_{\mathbb{II}}^2(t + \Delta t, \theta(l)) dl.$$
(10)

Конфигурация фронта, при которой достигается минимум функционала (10), выбирается в качестве искомой.

В параграфе 2.3 на основе двух серий экспериментов проводится валидация предложенного неявного критерия и выбор введенного в (10) весового параметра  $\beta$  [3, 13]. В рассмотренных экспериментах распространение трещины происходит под действием смешанного нагружения с большим значением третьей моды КИН  $K_{III}$ . Наиболее показательной является серия экспериментов, в которой наклонная трещина распространяется в брусе из

 $<sup>^{10}</sup>$ Goldstein R.V., Salganik R.L. Brittle fracture of solids with arbitrary cracks // Int. J. Fracture. – 1974. – V. 10. – P. 507–523.



Рис. 3. Схема эксперимента о распространении трещины в брусе, подверженном трехточечному изгибу (слева), и распределения угла поворота трещины вдоль фронта (справа): 0 – эксперимент, 1 – критерий MPH, 2 – трехмерная модификация критерия MPH, 3 – неявный критерий MVG; 4 – предлагаемый неявный критерий при β = 0.5

полиметилметакрилата, подверженном трехточечному изгибу<sup>11</sup>, как показано на рисунке 3. Выбор различных углов  $\gamma$  наклона зародышевой трещины позволяет рассматривать различные соотношения между третьей и второй модами КИН, а результаты численного моделирования, полученные другими авторами, дают необходимые данные для сравнения с существующими критериями.

На рисунке 3, справа показаны распределения угла поворота трещины  $\theta$  вдоль фронта, полученные в эксперименте и рассчитанные по различным критериям на первом шаге распространения трещины. Видно, что предлагаемый неявный критерий при  $\beta = 0.5$  обеспечивает наилучшее совпадение фронта трещины с наблюдаемым в эксперименте. Для сравнения выбраны классический критерий максимальных растягивающих напряжений (MPH)<sup>12</sup>, его обобщение на трехмерный случай<sup>13</sup> и неявный критерий MVG («Mean Value of G»)<sup>14</sup>, в котором выбирается конфигурация фронта трещины, максимизирующая среднее значение аналитически вычисленной энергии разрушения, полученной приближенно в предположени о прямолинейности фронта. Также в диссертации была рассмотрена задача распространения наклонной трещины в диске из пористого полиуретана, подверженного трехточечному изгибу [3]. В этой задаче наиболее близкое к полученному в эксперименте распределение угла поворота трещины получается при использовании значе-

 $<sup>^{11}</sup>$  Lazarus V. et al. Comparison of predictions by mode II or mode III criteria on crack front twisting in three or four point bending experiments // Int. J. of Frac. – 2008. – V. 153, N. 2. – P. 141–151.

 $<sup>^{12}</sup>$ Erdogan F., Sih G.C. On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear // J. of Basic Eng. – 1963. – V. 85, N. 4. – P. 519–525.

 $<sup>^{13}</sup>$  Schollmann M. et al. A new criterion for the prediction of crack development in multiaxially loaded structures // Int. J. of Fract. – 2002. – V. 117, N. 2. – P. 129–141.

 $<sup>^{14}</sup>$  Lazarus V., Leblond J.-B., Mouchrif S.E. Crack front rotation and segmentation in mixed mode I+III or I+II+III. Part II: Comparison with experiments // J. of the Mech. and Phys. of Solids. – 2001. – V. 49, N. 7. – P. 1421–1443.



Рис. 4. Полость и трещина, нагруженные давлением p в материале с анизотропными напряжениями.



Рис. 5. Траектории наклонных ( $\alpha = 50^{\circ}$ ) круговых трещин, полученные при различных значениях весового коэффициента  $\beta$ .

ния  $\beta = 0$ , что не позволяет считать этот параметр универсальным и говорит о необходимости его определения для каждого материала.

В параграфе 2.4 приведены результаты моделирования распространения трещин, полученные при различных значениях весового параметра  $\beta$  для демонстрации его влияния не только на начало распространения трещины, но и на ее траекторию [5]. В частности, рассмотрена задача о распространении поперечной скважине круговой трещины, нагруженной постоянным давлением в анизотропном ( $\sigma_x^{\infty} = \sigma_z^{\infty} = 1.6\sigma_y^{\infty}$ ) поле напряжений, геометрическая схема которой показана на рисунке 4. Зародышевая трещина находится под углом  $\alpha = 50^{\circ}$  к плоскости xz, ортогональной минимальным сжимающим напряжениям  $\sigma_y^{\infty}$ , что приводит к переориентации трещины при ее развитии. Формы таких трещин, предсказанные при использовании различных значений параметра  $\beta$ , различаются, что видно из рисунке 5, где показаны сечения поверхностей трещин вертикальной плоскостью xy, проходящей через центр области. **Третья глава** посвящена описанию движения жидкости в трещине. Приведены постановка задачи, используемые модели, описан численный метод решения уравнений моделей и проведена его верификация на серии тестовых задач.

В параграфе 3.1 приведен вывод двумерных уравнений движения несжимаемой неньютоновской и слабо сжимаемой ньютоновской жидкости в двумерном канале переменного сечения [5, 15]. В качестве исходных соотношений выбраны трехмерные уравнения движения слабосжимаемой жидкости с реологией Гершеля–Балкли, характеризующейся нелинейной связью тензора вязких напряжений Т и тензора скоростей деформаций D с использованием кажущейся вязкости  $\eta$ 

$$\mathbb{T} = \eta \mathbb{D}, \text{ при } T \ge \tau_0, \quad \mathbb{D} = 0, \text{ при } T < \tau_0.$$
 (11)

где

$$T = \sqrt{\frac{1}{2}\tau_{ij}\tau_{ij}}, \quad D = \sqrt{\frac{1}{2}D_{ij}D_{ij}}, \quad \eta(D) = KD^{n-1} + \frac{\tau_0}{D}.$$
 (12)

Здесь K — показатель консистенции жидкости; n — показатель степени, который отражает степень сдвиговых напряжений,  $\tau_0$  — критическое напряжение сдвига.

Сжимаемость жидкости описывается линейным уравнением состояния, связывающим давление и плотности с помощью постоянного коэффициента сжимаемости  $C_0$ 

$$\rho(p) = \rho_0 (1 + C_0 p). \tag{13}$$

После осреднения по ширине канала (направлению, в котором его размер минимален) и отбрасывания конвективных членов получаются классические уравнения смазки для давления p

$$\nabla(a\nabla p) = f \tag{14}$$

и для потока жидкости **q** 

$$\mathbf{q} = -\frac{W^3}{12\eta_p} \nabla p. \tag{15}$$

Особенность выведенных в диссертации уравнений (14), (15) заключается в коэффициентах  $a, f, \eta_p$ , вид которых зависит от используемой модели жидкости. Для несжимаемой жидкости Гершеля–Балкли они равны

$$a = \frac{W^3}{12\eta_a}, \quad f = \frac{\partial W}{\partial t},$$
  
$$\eta_p = \eta_p(\nabla p) = \frac{(2K)^{1/n}(2n+1)}{6n} (W|\nabla p|)^{(n-1)/n} + \frac{(4n+2)2^{1/n}\tau_0}{3n(W|\nabla p|)^{1/n}}, \quad (16)$$

для слабосжимаемой ньютоновской жидкости с вязкостью  $\mu$  —

$$a = \frac{(1+C_0P)W^3}{12\mu}, \quad f = \frac{\partial W(1+C_0P)}{\partial t}, \quad \eta_p = \mu.$$
 (17)

Уравнения (14)–(15) решаются на занятой трещиной поверхности жидкости S, схематично показанной на рисунке 6. В качестве краевых условий на фронте жидкости  $\mathbf{x}_f$  задается давление, равное давлению поровой жидкости  $p_{\text{pore}}$ , а на линии пересечения трещины и скважины  $\mathbf{x}_q$  — поток жидкости  $q_{\text{in}} = Q_{\text{in}}/L_q$ , рассчитываемый по расходу жидкости в трещину  $Q_{\text{in}}$  и длине линии пересечения  $L_q$ 

$$p|_{\Gamma^p} = p_{\text{pore}}, \quad \mathbf{q}|_{\mathbf{x}_{\mathbf{q}}} = q_{\text{in}} \cdot \mathbf{n}_q.$$
 (18)

Задача (14), (18) решается методом конечных элементов, описанным в параграфе 3.2.. Согласно идеологии метода, область решения разбивается на элементы, в каждом из которых давление (и координаты точек) представляются в виде суммы форм-функций  $\phi_i(\xi_1, \xi_2)$ 

$$p(\xi_1, \xi_2) = \sum p_i \phi_i(\xi_1, \xi_2).$$
(19)

Веса  $p_i$  в формуле (19) равны значениям давления (координат) в узлах сетки, а форм-функции записаны в локальной системе координат элемента ( $\xi_1, \xi_2$ ) (см. рисунок 6). После этого уравнение (14) переписывается в слабой формулировке, и при подстановке форм-функций в качестве тестовых выписывается система уравнений для коэффициентов разложения давления

$$\mathbf{K}\mathbf{p} = \mathbf{Q} + \mathbf{F}.\tag{20}$$

Здесь  $\mathbf{p} = (p_1, ..., p_M)$  – вектор, состоящий из значений давления во всех M узлах сетки,  $\mathbf{K}$  – матрица размера  $M \times M$ ,  $\mathbf{F}, \mathbf{Q}$  – векторы размера M, соответствующие f и q из (16)–(17) и (18). В случае несжимаемой ньютоновской



Рис. 6. Криволинейная поверхность трещины в трехмерном пространстве и ее аппроксимация плоскими элементами.

жидкости коэффициенты матрицы **K** и векторов **F**, **Q** не зависят от давления и система линейных уравнений (20) решается стандартным GMRESметодом. После решения системы (20) представление решения (19) позволяет найти давление в каждой точке поверхности. Вектор потока рассчитывается из дискретного следствия уравнения (15) и используется для расчета скорости жидкости на ее фронте  $\mathbf{x}_f$ .

В случае неньютоновской или сжимаемой жидкости коэффициенты матрицы **K** и вектора **F** зависят от решения **p**, так как содержат кажущуюся вязкость  $\eta_p$  в (16) либо непосредственно давление в (17). Поэтому система (20), в этом случае, нелинейных уравнений решается итерационным методом релаксации, описание которого хорошо известно и не приводится в автореферате из соображений компактности изложения.

Параграф 3.3 посвящен верификации численного метода решения уравнений жидкости на сериях задач о плоском прямолинейном и плоскорадиальном движении ньютоновской жидкости, жидкости Гершеля–Балкли и слабосжимаемой жидкости в каналах переменной ширины при задании расхода или перепада давления.

Исследование влияния реологии жидкости на начальный этап распространения трещины с использованием численного моделирования проведено в четвертой главе, в **параграфе 3.4** аналогичное исследование проведено на основе безразмерного анализа для плоской радиальной трещины [5]. Анализ позволяет выделить области влияния реологических параметров на процесс распространения и определить границы применимости модели ньютоновской жидкости при описании жидкости неньютоновской. Такая замена существенно упрощает моделирование процесса в силу линейности модели и часто используется инженерами при применении симуляторов ГРП.

Анализ заключается в обезразмеривании уравнений распространения трещины, выделении безразмерных комплексов и периодов распространения трещины, в которых основное влияние на распространение оказывают те или иные факторы<sup>15</sup>. Трехмерная модель начального этапа распространения трещины, предложенная в диссертации, учитывает наличие «лага», искривление траектории трещины и не учитывает утечку жидкости в породу, поэтому в результате безразмерного анализа выделяются только времена

$$t_{o} = \frac{E'^{2} \mu'}{(\sigma_{z}^{\infty})^{3}}, \quad t_{m} = \left(\frac{\mu'^{5} Q_{in}^{3} E'^{13}}{K_{Ic}'^{18}}\right)^{1/2},$$
$$t_{\tau} = \left(\frac{\mu'^{2} E'}{\tau_{0}^{3}}\right)^{1/2}, \quad t_{path} = \left(\frac{\mu' L_{c}^{9}}{E' Q_{in}^{3}}\right)^{1/4}, \quad (21)$$

<sup>&</sup>lt;sup>15</sup>Savitski A.A., Detournay E. Propagation of a penny-shaped fluid-driven fracture in an impermeable rock: asymptotic solutions // Int. J. Solids and Struct. – 2002. – V. 39, N. 26. – P. 6311–6337.

характеризующие интервалы влияния отставания фронта жидкости от фронта трещины  $(t_o)$ , вязкости жидкости  $(t_m)$ , критического напряжения сдвига  $(t_{\tau})$  и искривления траектории  $(t_{path})$ . В формуле (21) для удобства введены обозначения для модуля сдвига породы E', модифицированной вязкости жидкости  $\mu' = 2K((4n+2)/n)^n$ , сжимающих напряжений в породе, нормальных к поверхности трещины  $\sigma_z^{\infty}$ , модифицированного критического значения КИН  $K'_{Ic} = 4(2/\pi)^{1/2}K_{Ic}$  и длины трещины  $L_c$ , после которой ее распространение можно считать прямолинейным.

На начальном этапе  $t \ll t_o < t_m$  жидкость сильно отстает от кончика трещины. Поэтому ее реология не играет существенной роли, и скорость продвижения трещины определяется балансом между сжимающими напряжениями в породе и давлением жидкости на заполненном ей участке. В следующем, вязкостном режиме распространения при  $t_o \ll t \ll t_m$  основная часть энергии тратится на преодоление вязкого трения в жидкости<sup>16</sup>.

Введенные в диссертационной работе параметры  $t_{\tau}$  и  $t_{path}$  позволяют сопоставить указанные режимы распространения трещины с нововведенными временными интервалами, в которых пренебрежимо мало влияние критического сдвигового напряжения  $au_0$  (при  $t \ll t_{\tau}$ ) и искривления траектории трещины (при  $t > t_{path}$ ). Это дает возможность оценить необходимость учета реологических параметров жидкости и «лага» при описании основных этапов распространения трещины для характерных параметров задачи. Для этого выберем следующие диапазоны изменения параметров  $E = 7 \div 40 \,\Gamma \Pi a$ ,  $\nu = 0.15 \div 0.4, \, \mu = 0.1 \div 0.5 \, \Pi a \cdot c, \, Q_{in} = 0.03 \div 0.08 \, \mathrm{M}^3 \, / \, c, \, \tau_0 = 100 \div 500 \, \Pi a$  и ограничим длину криволинейного участка несколькими диаметрами скважины<sup>17</sup>  $L_c = 0.5 \div 2.5$  м. Сравнение введенных в (21) времен позволяет заключить, что большую часть времени ( $t_o \ll t \ll t_m$ ) трещина распространяется в вязкостном режиме, в котором необходимо использовать полную реологическую модель, учитывающую  $\tau_0$  и n, но можно пренебречь отставанием жидкости от кончика трещины. На этапе формирования траектории трещины  $(t < t_{path})$  отставание жидкости от кончика необходимо учитывать, так как этот этап заканчивается до перехода в вязкостный режим  $(t_{path} < t_o)$ , в котором отставанием можно пренебрегать. Наличием критического напряжения сдвига  $\tau_0$  на этапе формирования траектории можно пренебречь, так как влияние  $\tau_0$  становится заметным после выхода трещины на прямолинейный участок  $(t_{\tau} > t_{path})$ . Для описания этапа формирования траектории трещины, вызванной закачкой вязкопластической жидкости ( $n < 1, \tau_0 = 0$ ), можно использовать модель ньютоновской жидкости, в которой коэффициент вяз-

<sup>&</sup>lt;sup>16</sup>Нужно отметить, что трещиностойкостный режим ( $t \gg t_m > t_o$ ) в работе не рассматривается, так как для радиальной трещины он не достигается при реалистичных параметрах.

<sup>&</sup>lt;sup>17</sup>Economides M.J., Nolte K.G. Reservoir stimulation. 3-rd ed. – Wiley, 2000. – 856 p.

кости рассчитан, например, по формуле<sup>18</sup> :

$$\mu_a = C_{\xi} \frac{\theta_n^{\frac{3}{n+2}}}{12} \frac{t^{\frac{2-2n}{n+2}}}{E'^{\frac{1-n}{n+2}}} K^{\frac{3}{n+2}}, \ \theta_n = 2\left(\frac{4n+2}{n}\right)^n, \ 0.65 \le C_{\xi} \le 0.88,$$
(22)

так как при этом значении вязкости характерные времена (21) получаются близкими. Таким образом, при описании начального этапа распространения трещины необходимо учитывать отставание фронта жидкости от фронта трещины, но сложная реологическая модель жидкости может быть заменена моделью жидкости ньютоновской при аккуратном выборе коэффициента вязкости (22). Однако, для развитой трещины, поверхность которой в практических расчетах обычно заменяют плоскостью, реология жидкости, в отличие от отставания, должна описываться с использованием сложных неньютоновских моделей.

**Четвертая глава** диссертации посвящена описанию результатов численного моделирования начального этапа распространения трещины гидроразрыва и исследованию механизмов, влияющих на ее распространение в прискважинной области.

В параграфе 4.1 проводится верификация трехмерной модели распространения путем сравнения с одномерными моделями и проводится уточнение постановки задачи описания распространения трещины на этапе формирования траектории. В частности, показывается ключевое влияние на траекторию вязкости жидкости и важность учета наличия скважины при расчете НДС материала.

В параграфе 4.2 на основе результатов численного моделирования исследуется чувствительность основных параметров трещины к физическим параметрам задачи. В частности, показано влияние реологии жидкости: фактора консистенции, показателя степени, и критического напряжения сдвига на основные параметры поперечной трещины: траекторию, распределение раскрытия и давления на поверхности трещины. На основе численных расчетов подтверждены выводы, сделанные ранее с использованием безразмерного анализа о возможности использования ньютоновской модели жидкости для описания этапа формирования траектории. Для демонстрации на рисунке 7 приведены раскрытия трещин вдоль радиальной координаты и их траекторий, полученные при закачке жидкости различных реологий. Первая ньютоновская и бингамовская жидкости (кривые 1 и 4 на рисунке 7 соответственно) имеют одинаковые значения консистенции ( $K = 0.075 \, \Pia \cdot c$ ) и показатели степени (n = 1), а различаются только предельным напряжением сдвига, равным 0 для 1-й жидкости и  $\tau_0 = 11 \, \Pia$  для 4-й. И результаты

 $<sup>^{18}</sup>$ Linkov A. Bench-mark solution for a penny-shaped hydraulic fracture driven by a thinning fluid // ArXiv e-prints. – 2015. – N. 1508.07968.



Рис. 7. Распределения раскрытия трещины вдоль радиальной координаты (слева) и ее траектории (справа) при закачке жидкости различных реологий: 1 — ньютоновская 1; 2 — ньютоновская 2; 3 — степенная: 4 — бингамовская.

численного моделирования, и безразмерный анализ демонстрируют, что трещины, полученные с учетом и без учета критического напряжения сдвига, совпадают. Вторая ньютоновская (2) и степенная (3) жидкости различаются значениями показателя степени (n = 1 и n = 0.8 соответственно) при одинаковых консистенции ( $K = 0.3 \,\Pi a \cdot c$ ) и напряжении сдвига ( $\tau_0 = 0$ ). Как видно из рисунка 7, разные показатели степени приводят к существенному различию в раскрытии и траектории. В то же время трещина, полученная при закачке степенной жидкости, может быть приближена трещиной, полученной при закачке ньютоновской жидкости с правильно выбранным коэффициентом вязкости. Так, вязкость ньютоновской жидкости (1) рассчитанная по формуле (22) по параметрам степенной жидкости (3), приводит к формированию трещины с близкими раскрытием и траекторией, что и видно на рисунке 7.

Описанное использование модели ньютоновской жидкости для описания движения жидкости сложной реологии применимо только на начальном этапе распространения трещины. На основе серии численных расчетов подтверждено возрастание значимости использования сложной реологической модели при увеличении раскрытия трещины и уменьшении сдвиговых вязких напряжений.

На основе серии вычислительных экспериментов в трехмерной постановке описан эффект «пережатия» – уменьшения раскрытия трещины в окрестности скважины из-за искривления ее поверхности в анизотропном поле сжимающих напряжений [7, 8]. Искривление поперечной трещины вызывается тем, что направление скважины не совпадает с направлением минимальных сжимающих напряжений в естественном залегании, а плоскость зародышевой трещины — с плоскостью предпочтительного распространения трещины. На основе серии вычислительных экспериментов выявлена зависимость



Рис. 8. Форма трещины в вертикальном сечении поперечной трещины (слева) и распределение раскрытия трещины вдоль радиуса (справа) в зависимости от угла перфорирования:  $1 - \alpha = 0^{\circ}$ ;  $2 - \alpha = 15^{\circ}$ ;  $3 - \alpha = 30^{\circ}$ ;  $4 - \alpha = 45^{\circ}$ ;  $5 - \alpha = 60^{\circ}$ .

траектории трещины и величины пережатия от угла поворота скважины и ортогональной ей зародышевой трещины  $\alpha$  (см. рисунок 4), скорости закачки жидкости, параметров ее реологии и свойств породы и установлено, что уменьшение раскрытия трещины не превышает 30 %, как видно из рисунка 8.

Проведено моделирование распространения поперечной трещины, вызванного закачкой слабосжимаемой жидкости. Анализ чувствительности показал, что сжимаемость жидкости увеличивает давление в скважине, но практически не влияет на траекторию трещины.

В параграфе 4.3 разработанная модель применена для описания одновременного распространения двух поперечных трещин, инициированных на двух параллельных круговых пропилах в скважине [8]. Взаимное влияние трещин обусловлено как изменением НДС материала, вызванным развитием каждой из них, так и перераспределением потока жидкости между трещинами, в случае если они находятся в разных условиях. При этом модель не требует использования явного задания создаваемых трещинами возмущений НДС или дополнительных итераций для определения потока жидкости в каждую трещину. На основе вычислительного эксперимента продемонстрирован эффект «отталкивания», при котором каждая из трещин, будучи расположенной в плоскости с наименьшими сжимающими напряжениями, искривляются в сторону от соседней.

Параграф 4.4 посвящен моделированию распространения продольной трещины и описанию эффекта пережатия в этом случае. Показано, что в случае продольной трещины этот эффект может быть описан и в двумерной постановке<sup>19</sup> [11, 17]. При этом «пережатие» трещины на криволинейном

<sup>&</sup>lt;sup>19</sup>Алексеенко О.П. и др. Двумерная пошаговая модель распространения трещины гидроразрыва // Вестник НГУ. Сер.: Мат., мех., инф. – 2011. – Т. 11, N. 3. – С. 36–59.

участке продольной трещины может составлять до 80% от максимального раскрытия, тогда как в случае поперечных трещин он выражен значительно слабее и не приводит к существенному уменьшению раскрытия трещины (менее 30%).

В **пятой главе** описывается иерархия моделей трещин, полученных из полностью трехмерной модели путем накладывания дополнительных ограничений на форму трещины. Такие ограничения позволяют отказаться от критерия выбора направления распространения трещины за счет фиксации формы поверхности трещины, упростить численное решение уравнений упругого равновесия или использовать их аналитические решения. Полученные в результате модели не способны описывать искривление траектории трещины, что компенсируется снижением требований к вычислительным ресурсам и возможностью описывать эволюцию развитых трещин и протекающие в них процессы, такие как перенос проппанта. Разработанные модели иерархии применены для решения нескольких практических задач: выявление условий нарушения гидроизоляции скважины, оценка свойств трещиновато-пористой среды по данным о потерях бурового раствора и определение интервалов изменения параметров гидроразрыва, приводящих к образованию проппантной пробки в различных частях трещины.

В параграфе 5.1 путем добавления предположения об известной поверхности трещины разработанная трехмерная модель модифицирована для описания распространения трещины вдоль границы гидроизоляции скважины (пробки) и обсадной колонны [2]. Так как поверхность трещины становится фиксированной, нет необходимости в использовании критерия, определяющего направление распространения трещины, и для определения формы фронта используется только критерий величины распространения.

Полученная модель позволяет предсказать условия инициации и описать распространение трещины вдоль внутренней границы обсадной колонны, между ней и цементной пробкой, как показано на рисунке 9, слева, что может быть одной из причин нарушения гидроизоляции скважины<sup>20</sup>. Распространение трещины поддерживается поровым давлением, увеличение которого обусловлено, например, фильтрацией жидкости в прискважинную область после прекращения добычи и консервации.

Валидация модели из-за недоступности полевых данных проводилась путем сравнения с результатами эксперимента<sup>21</sup> о распространении трещины по границе алюминиевой трубы в блоке из полиметилметакрилата под действием закачки высоковязкой ( $\mu = 11.9 \, \Pi a \cdot c$ ) подкрашенной жидкости, что

 $<sup>^{20}</sup>$ Gasda S.E., Bachu S., Celia M.A. Spatial characterization of the location of potentially leaky wells penetrating a deep saline aquifer in a mature sedimentary basin // Environmental Geology. – 2004. – V. 46, N. 6. – P. 707–720.

 $<sup>^{21}</sup>$ Lecampion B. et al. Interface debonding driven by fluid injection in a cased and cemented wellbore: Modeling and experiments // Int. J. of Greenhouse Gas Control. – 2013. – V. 18. – P. 208–223.



Рис. 9. Трещина, распространяющаяся по границе между внутренней поверхностью обсадной колонны и цементной пробкой (слева). Сравнение форм трещин в различные моменты времени (справа): пунктирная линия – эксперимент<sup>32</sup>, сплошная линия – результаты моделирования.

позволило сравнить формы трещины в различные моменты времени. На основе хорошего согласования форм фронтов трещин, показанных на рисунке 9, справа, можно сделать вывод о применимости модели для описания распространения трещин по границе материалов.

В результате моделирования распространения трещины вдоль внутренней границы обсадной колонны установлено, что распространение в окружном направлении ограничено, и поперечное сечение трещины имеет форму полумесяца, при этом полного отрыва цемента от обсадной колонны не происходит. Также показано, что распространение трещины вдоль цементной пробки очень чувствительно к приращению пластового давления. Так увеличение пластового давления на 10 МПа приводит к тому, что трещина способна быстро преодолеть пробку длиной свыше 100 метров, тогда как увеличение пластового давления всего до 2 МПа может сдерживаться 15-метровой пробкой в течение десяти дней, а 100-метровой — в течение десятилетий. Влияние прочности цемента и качества его прилипания к обсадной колонне оказывает влияние на способность пробки противостоять распространению трещины только для пробок, длина которых не превышает нескольких диаметров скважины. Для длинных же пробок наибольшее положительное влияние на способность противостоять увеличению порового давления оказывает повышение давления застывания цемента.

В параграфе 5.2 описана реализация плоской трехмерной модели трещины, полученной на основе следующего ограничения на поверхность трещины [12], а именно, предположение о плоской трещине. Это позволяет отказаться от метода граничных элементов и использовать интегральное уравнение, связывающее давление p и раскрытие трещины w вместо смещений и усилий на ее берегах. Критерий распространения в этой модели заменен асимптотическими решениями для кончика трещины<sup>22</sup>, что позволяет использовать более грубую сетку. После верификации путем сравнения с моделью круговой трещины реализованная модель была применена для описания распространения трещины в пласте с сильным контрастом напряжений.

Модель круговой трещины [1, 9, 14], описанная в **параграфе 5.3**, получена из модели плоской трещины путем внесения ограничения на форму фронта трещины. Осесимметричная постановка позволяет использовать аналитические решения задач о раскрытии и распространении осесимметрично нагруженной круговой трещины<sup>23</sup> для верификации полностью трехмерной и плоской трехмерной моделей.

В диссертационной работе модель применена для описания распространения развитой трещины после начала закачки в нее смеси проппанта с жидкостью, что позволило определить параметры, при которых происходит закупоривание трещины проппантом в различных ее частях [1]. На основе серии численных экспериментов удалось выделить интервалы изменения расхода смеси в трещину  $Q_{in}$  и коэффициента утечек жидкости в породу  $C_L^{24}$ , при которых проппантная пробка образуется в кончике или в середине трещины. Также было показано, что при фиксированных остальных параметрах задачи область закупоривания можно приближенно, но быстро предсказать на основе значения искусственного параметра  $\mathfrak{a} = C_L Q_{in}^{3/2}$ .

В параграфе 5.4 построенная модель радиальной трещины адаптирована для описания потерь бурового раствора в систему естественных трещин [4]. Ключевым отличием адаптированной модели является учет возможности движения жидкости по таким трещинам даже при отсутствии деформаций породы и введение в область моделирования части трещины, в которой деформации отсутствуют, но движется буровой раствор.

Разработанная модель применена для решения задачи определения параметров естественных трещин, через которые частично утекает буровой раствор, по временным зависимостям давления в скважине и величине потерь.

Однако, на основе безразмерного анализа и серии вычислительных экспериментов с использованием реальных полевых данных показано, что для определения раскрытия w и количества N естественных трещин недостаточно только информации о потерях бурового раствора. Это обусловлено тем,

 $<sup>^{22}</sup>$  Peirce A. Implicit level set algorithms for modelling hydraulic fracture propagation // Phil. Trans. R. Soc. – 2016. – A. 374.

 $<sup>^{23}</sup>$ Savitski A.A., Detournay E. Propagation of a penny-shaped uid-driven fracture in an impermeable rock: asymptotic solutions // Int. J. Solids & Struct. – 2002. – V. 39, N. 26. – P. 6311–6337.

 $<sup>^{24}</sup>$ Carter R.D. Derivation of the general equation for estimating the extent of the fractured area // in Drilling and Production Practice. – American Petrol. Institute, 1957. – p. 261–270.

что величина потерь бурового раствора инвариантна относительно одновременного измерения их раскрытия и количества при сохранении соотношения  $w/N^3$ . Тем не менее, так как количество трещин на единицу высоты скважины может быть определено на основе анализа керна, найденное соотношение позволяет определить ширину естественных трещин, необходимую для разработки закупоривающих составов.

В параграфах 5.5, 5.6 описаны две построенные модели длинной трещины, основанные, как и модели PKN-типа<sup>25</sup>, на предположении о независимости поперечных сечений. Оно дает возможность применять аналитические формулы, делающие связь раскрытия и среднего по высоте трещины давления локальной, что существенно снижает требования к вычислительным ресурсам и позволяет описывать эволюцию развитых трещин больших размеров. Для описания переноса проппанта в трещине использовались уравнения течения смеси в канале переменного сечения и уравнение переноса концентрации, использующейся для расчета вязкости смеси по закону Марона–Пирса<sup>26</sup>. После остановки проппанта, происходящей при достижении его концентрацией критического значения, уравнения течения смеси заменялись уравнениями фильтрации жидкости в проппантной пробке. Такая замена не только исключает ситуацию неограниченного возрастания вязкости при повышении концентрации, но и позволяет продолжить описание эволюции трещины после ее закупоривания проппантом. Различие между предложенными моделями заключается в размерности уравнений движения жидкости. В одномерной модели [10] давление в поперечном сечении считается одинаковым, а скорость проппанта до его остановки — совпадающей со скоростью жидкости. На основе серии расчетов, проведенных в рамках этой модели, показано, что при некоторых сочетаниях параметров задачи, образовавшаяся проппантная пробка может быть размыта фильтрующейся через нее в кончик трещины жидкостью, которая вызывает дальнейшее распространение трещины. Показана также принципиальная возможность увеличения длины итоговой трещины путем импульсной закачки проппанта и установлено, что существенное значение для описания этого процесса имеет выбор зависимости вязкости смеси от концентрации проппанта. В двумерной модели [6] движение смеси описывается на основе двумерных уравнений, что позволяет учесть силу тяжести и разницу скоростей несущей жидкости и проппанта, вызванную оседанием последнего. В рамках этой модели численно показано влияние увеличения размера проппанта на длину получившейся трещины за счет увеличения скорости фильтрации жидкости через проппантную пробку после ее образования.

 <sup>&</sup>lt;sup>25</sup>Perkins T.K., Kern L.R. Widths of hydraulic fractures // J. Petrol. Techn. – 1961. – V. 13, N. 9. – P. 937–949.
 <sup>26</sup>Maron S.H., Pierce P.E. Application of ree-eyring generalized flow theory to suspensions of spherical particles // J. of Colloid Sci. – 1956. – V. 11, N. 1. – P. 80–95.

## Основные результаты работы

1. Новая постановка задачи распространения трещины в упругой среде под действием закачиваемой жидкости жидкости [7], впервые позволяющая одновременно описывать

- деформацию материала в трехмерной области сложной формы;
- изменение направления распространения трещины и ее формы под действием анизотропного нагружения материала;
- движение в трещине жидкости сложной реологии.

2. Полная трехмерная модель распространения неплоской трещины от полости под действием закачки в нее жидкости сложной реологии в материале, нагруженном на бесконечном удалении сложными анизотропными напряжениями [7, 8, 16].

3. Новый полностью трехмерный неявный глобальный критерий скорости роста трещины и выбора направления ее распространения для полной трехмерной модели (п. 2), в котором вместо предсказания направления распространения в каждой отдельной точке фронта анализируются возможные конфигурации фронта в целом, получающиеся после продвижения трещины трещины [3, 13, 8].

4. Численные модели описания движения жидкости Гершеля–Балкли и слабосжимаемой жидкости внутри трещины, необходимые для адекватного расчета давления жидкости на берега трещины в полной трехмерной модели (п. 2) [15, 5].

5. Метод решения системы интегральных и дифференциальных уравнений в области со свободными границами и нелинейной связью между искомыми функциями, формирующейся в полной трехмерной подели (п. 2) на каждом шаге распространения [7, 8, 16].

6. Иерархия моделей трещин, распространяющихся под действием закачиваемой жидкости, в которой каждая из моделей получена внесением в полную трехмерную постановку задачи дополнительных предположений о форме трещины [12, 1, 2, 4, 6, 9, 10].

7. Обоснование путем верификации и валидации предложенной полностью трехмерной модели распространения трещины (п. 2) [7] и ее компонент: глобального неявного критерия распространения (п. 3) [3] и моделей движения жидкостей сложной реологии в (п. 4) [5], а также элементов иерархии моделей трещин (п. 5) [12, 1, 2, 4, 6, 9, 10].

8. Программное обеспечение [18] для численного моделирования нестационарного распространения трещин в упругой среде под действием закачиваемой жидкости, реализующее полную трехмерную модель (п. 2) и входящие в иерархию (п. 6) модели.

9. Результаты моделирования процесса распространения трещины гидро-

разрыва пласта на основе полной трехмерной модели (п. 2):

- исследован эффект "пережатия" трещины при искривлении ее траектории и описаны особенности выхода трещины на магистральное направление [7, 17, 11];
- изучено влияние реологии закачиваемой жидкости на форму трещины [15, 5];
- определены модели жидкости, пригодные для описания ее движения в трещине на начальном этапе распространения [5].

10. Результаты применения входящих в иерархию (п. 5) моделей для решения практических задач:

- исследованы условия инициации и распространения трещины в гидроизоляции скважины, выявлена зависимость прочности гидроизоляции от условий ее создания и напряженного состояния породы [2];
- разработан метод определения ширины естественных трещин по известным зависимостям давления и величины потерь бурового раствора в них. Показано, что невозможно одновременное определение количества и ширины трещин с использованием только этих зависимостей [4].

## Список публикаций по теме диссертации

#### Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК

1. Lapin V.N., Esipov D.V. Simulation of proppant transport and fracture plugging in the framework of a radial hydraulic fracturing model // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. -2020. - V.35, N. 6. - P.325-339. (Scopus).

2. Лапин В.Н. Модель распространения трещины вдоль гидроизоляции скважины // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Информационные технологии. — 2020. — Т. 18. № 1. — С. 36-49.

3. Лапин В.Н., Фомина А.А. Валидация неявного критерия выбора направления распространения трещины при смешанной нагрузке // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2019. — Т. 22, № 4. — С. 33-43. [V. N. Lapin, A. A. Fomina On the Global Implicit Criterion of a Fracture Propagation Under Mixed Load // Journal of Applied and Industrial Mathematics. — 2019. — V. 13, N. 4. — Р. 653-662.] (Scopus).

4. Лапин В.Н. Модель потерь бурового раствора в систему трещин в задаче определения параметров трещиновато-пористой среды // Вычислительные технологии. — 2019. — Т. 24, № 4. — С. 38-55.

5. Cherny S., Lapin V., Kuranakov D., Alekseenko O. 3D model of transversal fracture propagation from a cavity caused by Herschel–Bulkley fluid injection //

International Journal of Fracture. - 2018. - V. 212, N. 1. - P. 15-40. (WoS, Scopus).

6. Карнаков П.В., Куранаков Д.С., Лапин В.Н., Черный С.Г., Есипов Д.В. Особенности распространения трещины гидроразрыва породы при закачке в нее смеси проппанта и жидкости // Теплофизика и аэромеханика. — 2018. — Т. 25, № 3. — С. 611–628. [Karnakov P.V., Kuranakov D.S., Lapin V.N., Cherny S.G., Esipov D.V. Peculiarities of the hydraulic fracture propagation caused by pumping of proppant-fluid slurry // Thermophysics and Aeromechanics. — 2018. — V. 25, N. 4. — P. 587–603.] (WoS, Scopus).

7. Cherny S., Lapin V., Esipov D., Kuranakov D., Avdyushenko A., Lyutov A., Karnakov P. Simulating fully 3D non-planar evolution of hydraulic fractures // International Journal of Fracture -2016. - V. 201, N. 2 - P. 181–211. (WoS, Scopus).

8. Kuranakov D.S., Esipov D.V., Lapin V.N., Cherny S.G. Modification of the boundary element method for computation of three dimensional fields of strainstress state of cavities with cracks // Engineering Fracture Mechanics. - 2016. - V. 153. - P. 302-318. (WoS, Scopus).

9. Есипов Д.В., Куранаков Д.С., Лапин В.Н., Черный С.Г. Математические модели гидроразрыва пласта // Вычислительные технологии. — 2014. — Т. 19, № 2. — С. 33–61.

10. Карнаков П.В., Лапин В.Н., Черный С.Г. Модель гидроразрыва пласта, включающая механизм закупоривания трещины пропантом // Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. — 2014. — Т. 12, № 1. — С. 19–33.

11. Cherny S., Chirkov D., Lapin V., Muranov A., Bannikov D., Miller M., Willberg D., Medvedev O., Alekseenko O. Two dimensional modeling of the nearwellbore fracture tortuosity effect // Int. J. Rock Mechanics and Mining Sciences. - 2009. - V. 46, N. 6. - P. 992–1000. (WoS, Scopus).

Публикации, индексируемые в международных базах данных

12. Lapin V. Implementation of planar 3D hydraulic fracture model in rock with layered compressive stress // Journal of Physics: Conference Series. -2021. -V. 2099. -P. 1–10. (Scopus).

13. Lapin V.N., Cherny S.G. An implicit criterion of fracture growth direction for 3D simulation of hydraulic fracture propagation // Procedia Structural Integrity. -2018. - V. 11. - P. 1-6. (WoS, Scopus).

14. Shokin Yu.I., Cherny S.G., Lapin V.N., Esipov D.V., Kuranakov D.S., Astrakova A.S. Methods for optimal control of hydraulic fracturing process // CEUR Workshop Proceedings. -2017. - V. 1839. - P. 423-444. (Scopus).

15. Cherny S.G., Lapin V.N. 3D model of hydraulic fracture with Herschel-Bulkley compressible fluid pumping // Procedia Structural Integrity. -2016. - V. 2. - P. 2479-2486. (WoS, Scopus).

16. Shokin Yu., Cherny S., Esipov D., Lapin V., Lyutov A., Kuranakov D.

Three-dimensional model of fracture propagation from the cavity caused by quasi-static load or viscous fluid pumping // Communications in Computer and Information Science. — Springer Science + Business Media, 2015. — P. 143–157. (Scopus).

17. Cherny S.G., Lapin V.N., Chirkov D.V., Alekseenko O.P, Medvedev O.O. 2D modeling of hydraulic fracture initiating at a wellbore with or without microannulus // Materials of SPE Hydraulic Fracturing Technology Conference, The Woodlands, Texas. — 2009. — P. 1–23 (Scopus).

## Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ

18. Черный С.Г., Лапин В.Н., Есипов Д.В., Куранаков Д.С. Программа трехмерного моделирования распространения трещины в хрупком материале под действием давления вязкой жидкости «CADFRAC/2019», 2019, № RU 2019614059.

#### Монография

19. Черный С.Г., Лапин В.Н., Есипов Д.В., Куранаков Д.С. Методы моделирования зарождения и распространения трещин. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2016. 312 с.

Подписано в печать	· .2022, номер заказа	Формат $60 \times 84_{1/16}$
Печать цифровая	Объем 1,5 п.л.	Тираж 100 экз.

ИТ СО РАН, 630090, г. Новосибирск, пр-т Академика Лаврентьева, 1