



**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ НАУЧНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«Федеральный исследовательский центр
«Красноярский научный центр
Сибирского отделения
Российской академии наук»
(КНЦ СО РАН, ФИЦ КНЦ СО РАН)**

Академгородок, 50,
г. Красноярск, 660036, Россия
тел.: +7 (391)243-45-12, факс: +7 (391)290-53-78
e-mail: fic@ksc.krasn.ru, <http://ksc.krasn.ru>
ОКПО 05239177, ОГРН 1022402133698
ИНН/КПП 2463002263/246301001

«Утверждаю»
Заместитель директора
ФИЦ КНЦ СО РАН
к.ф.-м.н. Пошков С.И.
«30» сентября 2019 г.



от 30 09 2019 № 15303-13/03-15

Отзыв ведущей организации

на диссертацию Коптевой Натальи Викторовны
«Апостериорные и априорные оценки конечноэлементных решений некоторых
сингулярно возмущенных уравнений на анизотропных сетках» по специальности
01.01.07 – «Вычислительная математика», представленной на соискание ученой
степени доктора физико-математических наук

Большой круг задач, возникающих при моделировании проблем техники, физики, механики приводит к сингулярно возмущенным дифференциальным уравнениям, т. е. содержащим малый параметр в виде множителя при старших производных. Сингулярное возмущение вызывает появление пограничных и внутренних слоев с огромными градиентами и производными. В результате применение традиционных (хотя и устойчивых) разностных схем и методов конечных элементов на квазиравномерных сетках или триангуляциях обычно не дает необходимой точности несмотря на большие вычислительные затраты.

Поэтому разработка эффективных вычислительных методов, теоретическое обоснование их точности, а также предоставление способов апостериорной оценки точности получаемых приближенных решений является весьма актуальной задачей.

Полезно отметить, что начало использования и теоретическое обоснование двух распространенных способов повышения эффективности численных методов для решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений (сначала для довольно простых) было положено российскими учеными Ильиным А.М. и Бахваловым Н.С. соответственно для схем с подгонкой коэффициентов на равномерной сетке и для обычных схем на локально сгущающихся сетках.

Приведем результаты, полученные автором диссертации, для обсуждения их значимости.

1. Для полулинейных сингулярно возмущенных эллиптических уравнений реакции-диффузии в полигональных областях установлены явные апостериорные оценки ошибки численного решения на основе невязок в норме максимума модуля на локально квазиравномерных сетках. Постоянные в полученных оценках не зависят от диаметров элементов сетки и малого параметра.

2. Для полулинейных сингулярно возмущенных эллиптических уравнений реакции-диффузии в многоугольных областях получены явные апостериорные оценки ошибки численного решения в норме максимума модуля на неструктурированных анизотропных сетках. Постоянные в полученных оценках не зависят от диаметров элементов сетки, их аспектного соотношения (т.е. степени их сплюснутости) и малого параметра. Полученные апостериорные оценки являются новыми даже для уравнения Лапласа. Представленный подход обобщен для получения апостериорных оценок ошибки в энергетической норме.

3. Для полулинейных параболических уравнений второго порядка получены апостериорные оценки в норме максимума модуля для ошибки соответствующих численных решений. Рассмотрены временные полудискретизации и полностью дискретные методы на основе неявного метода Эйлера, метода Кранка-Николсон и разрывного метода Галеркина с квадратурой Радо.

4. Для немонотонных полулинейных сингулярно возмущенных эллиптических уравнений реакции-диффузии в гладких областях исследованы численные решения на сгущающихся в пограничных слоях сетках типа Бахвалова и Шишкина. Доказано существование решений соответствующих нелинейных дискретных задач и установлен второй порядок сходимости (с логарифмическим множителем в случае сетки Шишкина) в сеточной норме максимума модуля равномерно по малому параметру ε при условии $\varepsilon \leq Ch$, при этом число степеней свободы не превосходит Ch^{-2} .

5. Для немонотонного полулинейного сингулярно возмущенного эллиптического уравнения реакции-диффузии в выпуклой многоугольной области построено асимптотическое разложение и установлено существование решения исходной задачи в окрестности построенного асимптотического разложения.

Таким образом, результаты диссертации имеют теоретическую направленность и обладают большой методической ценностью для разработки и применения эффективных вычислительных методов, теоретического обоснования их точности, а также предоставления апостериорной оценки точности получаемых приближенных решений для задач с пограничными и внутренними слоями. С этой точки зрения детально и на высоком теоретическом уровне рассмотрены двумерные полулинейные уравнения эллиптического типа и двумерные по пространству полулинейные уравнения параболического типа.

Наибольший интерес, в том числе для дальнейшего развития и распространения на более широкий круг задач, представляет теоретический аппарат для робастных апостериорных оценок (эффективность которых не зависит от малости параметра) на анизотропных пространственных сетках. Теоретический аппарат существенно улучшен по сравнению с известными методами для двумерных полулинейных уравнений эллиптического типа, а также предложены новые средства для робастных апостериорных оценок для двумерных по пространству полулинейных уравнений параболического типа.

В целом, создан и теоретически обоснован набор средств для эффективного решения задач с пограничными и внутренними слоями, в том числе, робастные апостериорные оценки численных решений, имеющие практическую ценность. Результаты диссертации вносят значительный вклад в создание эффективных численных методов для решения задач с пограничными и внутренними слоями.

Полученные теоретические результаты могут успешно применяться для развития численных методов и применения к задачам с анизотропными пространственными сетками в Институте вычислительных технологий СО РАН, Институте вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Сибирском федеральном университете. Что касается теоретического аппарата и применения робастных апостериорных оценок на анизотропных пространственных сетках, то они могут найти довольно широкое применение в численных расчетах в ряде организаций, помимо указанных выше. Цитируемость работ Н.В. Коптевой демонстрирует распространение предложенных алгоритмов и методов их исследования в нескольких зарубежных организациях.

В качестве замечания отметим, что в диссертации не хватает численных примеров для иллюстрации несомненно эффективных и полезных апостериорных оценок.

Заключение

В целом, диссертационная работа Коптевой Н.В. является законченным научным исследованием на актуальную тему, содержащим большое количество предложений, реализованных при создании новых эффективных численных методов. Работа выполнена автором самостоятельно на высоком научном уровне.

Основные результаты работы и выводы представлены в автореферате, который соответствует основному содержанию диссертации. Результаты диссертации опубликованы в высокорейтинговых рецензируемых научных журналах, рекомендованных ВАК для публикации научных результатов докторских диссертаций и входящих в реферативные базы Web of Science и Scopus. Результаты диссертационного исследования докладывались и обсуждались на ведущих международных и российских научных конференциях по численным методам решения задач математической физики.

Таким образом, диссертация Коптевой Н.В. является научно-квалификационной работой, в которой на основании выполненных автором исследований получены новые научные результаты, имеющие существенное значение для науки.

Совокупность полученных результатов можно квалифицировать как важное научное достижение в области создания численных методов для решения задач с пограничными и внутренними слоями. Работа отвечает требованиям Постановления Правительства РФ от 24.09.2013 № 842 "О порядке присуждения ученых степеней", предъявляемым к диссертациям на соискание учёной степени доктора наук, а её автор, Коптева Наталья Викторовна, заслуживает присуждения учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.07 – «Вычислительная математика».

Отзыв обсужден и одобрен на заседании Семинара Института вычислительного моделирования СО РАН – обособленного подразделения Федерального исследовательского центра «Красноярский научный центр СО РАН», протокол № 1 от 19 сентября 2019 г.

Руководитель научного направления
«Математическое моделирование»
ФИЦ КНЦ СО РАН,
член-корреспондент РАН
доктор физико-математических наук



Шайдуров Владимир Викторович