ОТЗЫВ

официального оппонента д. ф.-м. н. Еленина Георгия Георгиевича
на диссертационную работу Капцова Евгения Игоревича
«Симметрии и законы сохранения нелинейных дискретных моделей сплошной среды»,
представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.07 – «Вычислительная математика».

Актуальность темы диссертации. Методы группового анализа конечно-разностных уравнений активно разрабатываются исследователями различных стран в течение нескольких последних десятилетий. Разностные уравнения, обладающие симметриями, как и породившие их дифференциальные уравнения математической физики, имеют ряд качественных особенностей (законы сохранения, интегрируемость, редукции на подгруппах), отражающих важнейшие геометрические и физические свойства объектов исследования. Поэтому разностные схемы, наследующие симметрии исходных дифференциальных уравнений, представляют значительный интерес при математическом моделировании процессов в междисциплинарных исследованиях.

В диссертационной работе Капцова Е. И. представлен ряд новых методов, позволяющих как конструировать инвариантные разностные схемы, так и находить их первые интегралы, редуцировать разностные уравнения, строить точные решения. Автором работы построены новые примеры инвариантных разностных схем, в том числе консервативные схемы для волновых уравнений и схема для одномерных уравнений мелкой воды в координатах Лагранжа, обладающая всеми законами сохранения исходных дифференциальных уравнений. Кроме того, проведена групповая классификация, дополняющая уже известные классификации уравнений механики сплошной среды.

Таким образом, диссертация Е. И. Капцова является, безусловно, актуальной. Полученные в работе результаты являются новыми и представляют значимый вклад в групповой анализ конечно-разностных уравнений.

Краткое содержание диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы и приложений.

Во введении содержатся краткая история развития методов группового анализа конечно-разностных уравнений и обзор литературы по теме работы, формулируются цели и задачи исследования.

В первой главе приведены предварительные сведения из теории групп Ли и теории конечно-разностных схем, даются критерии инвариантности разностных схем, критерии сохранения равномерности и ортогональности разностных сеток при групповых преобразованиях. Далее строятся инвариантные разностные интегрируемые схемы (со всеми разностными аналогами первых интегралов) для некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений (о.д.у.) второго порядка. Эти схемы получены с помощью разностного аналога тождества Нётер. Одна из построенных схем завершает ранее начатый В. А. Дородницыным и соавторами список инвариантных разностных схем для уравнений из классификационного списка Софуса Ли. Среди полученных схем имеются точные, то есть схемы, решения которых в узлах сетки совпадают с решениями аппроксимируемых о.д.у. В последнем разделе главы разностный аналог тождества Нётер обобщается на случай систем о.д.у. В качестве примера построена инвариантная консервативная схема для системы уравнений В. П. Ермакова. Схема интегрируема в той же степени, что и дифференциальные уравнения.

Во второй главе рассматривается тождество Ж. Лагранжа для о.д.у., позволяющее получать первые интегралы уравнений, не обладающих функцией Лагранжа или Гамильтона. Метод, основанный на применении этого тождества, также называют методом сопряженных уравнений. Построен разностный аналог указанного тождества. С помощью этого разностного тождества полностью проинтегрирована рассмотренная в качестве примера разностная схема для уравнения Шварца.

В третьей главе изучаются инвариантные консервативные разностные схемы для уравнений в частных производных второго порядка на примерах линейного и нелинейного волновых уравнений. При построении разностных схем используется разностный аналог так называемого «прямого метода». Прямой метод, основанный на известных свойствах вариационной производной (оператор Эйлера), позволяет получать локальные законы сохранения исходного уравнения. Построены полиномиальные инвариантные консервативные разностные схемы для волновых уравнений и выполнена классификация таких схем по количеству допускаемых ими законов сохранения.

В четвертой главе произведена групповая классификация уравнений течения жидкости и газа специального вида, зависящих от двух произвольных функций. Для полученных классов уравнений приводятся законы сохранения в координатах Лагранжа и Эйлера. Результаты классификации используются в пятой главе диссертации.

Пятая глава посвящена построению инвариантных консервативных конечно-разностных схем для одномерных уравнений мелкой воды с плоским и наклонным дном в координатах Лагранжа. Для случая плоского дна построена инвариантная схема, обладающая всеми законами сохранения (масса, энергия, импульс, закон движения центра масс). Случай наклонного дна в лагранжевых координатах сводится к случаю плоского дна с помощью точечного преобразования, для которого приводится разносный аналог. Выполнена численная реализация схемы для случая плоского дна. На нескольких тестовых задачах схема сравнивается с некоторыми известными консервативными схемами для уравнений мелкой воды и газовой динамики. Расчеты ведутся итерационными методами с добавлении в схемы псевдовязкости. В главе кратко описан разработанный для расчетов вспомогательный программный комплекс.

В заключении подведены итоги исследования. Список литературы состоит из 157 наименований.

Новизна и достоверность результатов. Все результаты, полученные в диссертационной работе, являются новыми. Работа основана на материалах 8 научных статей, опубликованных в иностранных рецензируемых журналах. Результаты работы доложены на профильных отечественных и зарубежных семинарах и конференциях. Результаты численных расчетов по новым разностным схемам проверены путем сравнения с известными точными решениями либо с расчетами, полученными другими известными методами. Приведенные в работе тождества проверяются непосредственно. Таким образом, достоверность полученных результатов сомнений не вызывает.

Критические замечания к диссертации.

1. Во второй главе рассматриваются двухшаговые разностные схемы для решения задачи Коши для о.д.у., но нет разъяснения как выполняется первый шаг бегущего счета, для выполнения которого нужно знать значения не только в первой, но и во второй точке разностной схемы. Как выбор значения во второй точке влияет на свойства схемы и точность приближенного решения?

2. Новые инвариантные схемы с переменным шагом интегрирования, полученные в главе 2, являются основой для адаптивных алгоритмов решения задачи Коши. К сожалению, в работе нет исследований о зависимости шага и точности метода в случае наличия пограничного слоя в решении.
3. В третьей главе, посвященной разностным схемам для волновых уравнений, рассмотрены только полиномиальные схемы. Остается открытым вопрос о существовании не полиномиальных интегрирующих множителей.
4. Новые разностные схемы не исследуются на устойчивость.
5. В случае схем для уравнений в частных производных рассматриваются только разностные аналоги локальных законов сохранения. Интересно, что можно сказать о поведении приближенных решений, полученных с помощью этих схем, в случае разрывных точных решений задачи.
6. В приложении А следовало бы представить отдельно графики точных решений задачи Коши и погрешности приближенных решений. Такое представление результатов численных расчетов дало бы четкое представление о распределении ошибок приближенных методов на отрезке интегрирования и о связи величины погрешности с гладкостью точного решения.
7. В работе имеются описки на стр. 25, 4-я строка сверху, стр. 36, 9-я строка снизу, стр. 37, 8-я строка сверху, стр. 57, 11-я строка снизу, стр. 61, 2-я строка сверху.
8. Нет определения понятия - плотность сетки (параметр ε).

Приведенные замечания не влияют на достоверность полученных в диссертации результатов и на общую положительную оценку работы.

Заключение. Настоящая диссертационная работа является завершенным научным исследованием, в котором получены новые результаты, соответствующие паспорту научной специальности 01.01.07 «Вычислительная математика». Структура и оформление диссертации и автореферата соответствуют требованиям ГОСТ Р 7.0.11-2011. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Считаю, что диссертация «Симметрии и законы сохранения нелинейных дискретных моделей сплошной среды» соответствует требованиям Положения о присуждении ученых степеней, предъявляемых к кандидатским диссертациям, а её автор, Капцов Евгений Игоревич, заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.07 «Вычислительная математика».

Официальный оппонент, д.ф.-м.н, профессор кафедры
вычислительных методов факультета вычислительной
математики и кибернетики Федерального государственного
бюджетного образовательного учреждения высшего образования
«Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»

Г. Г. Еленин

«22» сентября 2020 г.

Подпись д.ф.-м.н., профессора Еленина Г. Г. удостоверяю.

Подпись удостоверяю
Начальник отдела кадров
В.Ю. Решетов

ОТДЕЛ КАДРОВ

119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 52, Факультет вычислительной математики и кибернетики Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова». тел. +7(495)939-30-10, e-mail: cmc@cs.msu.su, http://www.cs.msu.su/.