

Федеральное государственное учреждение
«Федеральный исследовательский центр
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша
Российской академии наук»

На правах рукописи

подпись соискателя

Иванов Александр Владимирович

**Регуляризованные уравнения мелкой воды для моделирования
неоднородных течений и течений со свободной поверхностью в задачах
геофизики**

Специальность 1.2.2 —

«Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Елизарова Татьяна Геннадьевна

Москва – 2023

Оглавление

	Стр.
Введение	4
Глава 1. Усовершенствование алгоритмов решения регуляризованных уравнений мелкой воды и их применение для моделирования северных морей	11
1.1 Регуляризованные уравнения мелкой воды	11
1.2 Алгоритм численного решения и его модификации	14
1.2.1 Разностная аппроксимация	14
1.2.2 Метод расчёта сухих областей	17
1.2.3 Условия хорошей балансировки	21
1.2.4 Внешние силы и приливные течения	22
1.2.5 Способ эффективного расчёта набегания волны на берег	27
1.3 Описание исследовательского программного комплекса	33
1.3.1 Структура комплекса программ	33
1.3.2 Совмещение модели мелкой воды с глобальной моделью NEMO	36
1.3.3 Расчёт скорости ветра с использованием пакета WRF	39
1.4 Постановка задачи и результаты моделирования отдельных областей северных морей	40
Глава 2. Моделирование неоднородных течений в приближении мелкой воды	45
2.1 Моделирование неоднородных течений с применением модели двухслойной мелкой воды	45
2.1.1 Сглаженные уравнения двухслойной мелкой воды	45
2.1.2 Алгоритм численного решения регуляризованных уравнений двухслойной мелкой воды	53
2.1.3 Численное моделирование одномерных задач	59
2.2 Перенос пассивного скаляра в мелкой воде	70
2.2.1 Построение системы сглаженных уравнений	70

2.2.2	Моделирование переноса примеси в одномерном случае . . .	73
2.2.3	Разностный алгоритм для моделирования пространственных течений и пример расчёта задачи о разрушении дамбы	80
2.2.4	Разрушение дамбы над неровным дном при наличии источника	84
2.2.5	Расчёт циркуляции озера Валунден	89
Глава 3. Реализация решателя на базе регуляризованных уравнений мелкой воды в открытом программном комплексе OpenFOAM		
3.1	Особенности реализации численного алгоритма в OpenFOAM . . .	95
3.1.1	Конечно-объёмная аппроксимация уравнений мелкой воды .	95
3.1.2	Условия хорошей балансировки и сухого дна	99
3.1.3	Реализация решателя RSWEFoam и основы работы с ним .	101
3.2	Расчётные задачи	104
3.2.1	Одномерная задача распада разрыва над сухим дном	104
3.2.2	Разрушение несимметричной дамбы	106
3.2.3	Задача о затоплении поверхности с тремя конусами	108
Заключение		114
Публикации автора по теме работы		116
Список литературы		118

Введение

Приближение мелкой воды (МВ) представляет собой упрощение исходных полных уравнений гидродинамики, а именно переход от трёхмерных течений к плоским двумерным за счёт предположения о малости глубины водоёма по сравнению с характеристическими размерами задачи, такими как длина волны, горизонтальный масштаб водоёма и т.д. В таком случае можно пренебречь вертикальной компонентой скорости и ускорения частиц жидкости, осреднив величины горизонтальных компонент по всей глубине.

С практической точки зрения приближение мелкой воды интересно при исследованиях, в которых можно пренебречь стратификацией, например, для моделирования озёр и искусственных водоёмов; для изучения явлений с преобладанием горизонтальных эффектов над вертикальными, например таких, как приливные колебания или распространение цунами; моделирования колебаний жидкости в резервуарах, например, углеводородов в баке топливного танкера. Приближение мелкой воды с использованием реальных данных о рельефе поверхности широко применяется при численном моделировании процессов подтопления территорий при разливах рек и авариях на плотинах. Важным преимуществом МВ является простота модели в сравнении с исходными полными уравнениями гидродинамики, что значительно ускоряет процесс численного расчёта. Благодаря этому модель мелкой воды зачастую используется в расчётных кодах и входит в состав комплексов программ для оперативного прогноза и моделирования больших акваторий, где помимо гидродинамики учитываются также параметры атмосферы, эрозии береговых склонов, образования льда и др.

Уравнения мелкой воды, записанные при отсутствии внешних сил и для плоского дна, представляют собой баротропное приближение уравнений газовой динамики. Этот факт позволяет использовать для решения уравнений МВ численные методы, применимые к уравнениям Эйлера. По аналогии с алгоритмом регуляризации уравнений газовой динамики, в результате которого была выписана система квазигазодинамических (КГД) уравнений [1—6], был предложен способ регуляризации уравнений мелкой воды. Полученная система уравнений была названа системой регуляризованных уравнений мелкой воды (РУМВ) [7], а метод регуляризации несмотря на то, что речь идёт о гидродинамических уравнении-

ях, принято называть квазигазодинамическим (или КГД методом/подходом) ввиду связи с уравнениями газовой динамики.

Основные исследования и результаты по РУМВ были получены О.В. Булатовым, Ю.В. Шеретовым, Д.С. Сабуриным и Т.Г. Елизаровой и опубликованы в работах [6—10]. В частности, в [7] была впервые выписана и построена система РУМВ, в [6] помимо квазигазодинамического рассмотрен квазигидродинамический (КГиД) подход регуляризации уравнений мелкой воды и его сравнение с КГД подходом. В статьях [7—10] продемонстрированы результаты моделирования как тестовых, так и прикладных задач. В статье [7] описано исследование алгоритма на общепринятых одномерных и двумерных тестах, таких как задача о распаде разрыва и задача о разрушении несимметричной дамбы, а в работе [9] приведено моделирование реального течения – сейшевых колебаний Азовского моря, возникающих под действием перепада атмосферного давления и ветра, и проведено сравнение результатов с реальными данными.

Данная диссертационная работа посвящена развитию КГД-подхода в рамках приближения мелкой воды для решения прикладных задач в трёх направлениях. Первое направление – это усовершенствование уже имеющейся модели РУМВ: включение в модель внешних факторов и сил, модификация условий сухого дна; второе – разработка новых методов моделирования неоднородных течений в приближении РУМВ; третье направление – включение алгоритма на основе РУМВ в открытый программный комплекс.

Вопрос моделирования течений в реальных акваториях поднимался во множестве работ [11—21]. Отличие от решения модельных задач здесь заключается в наличии большого числа внешних параметров (атмосферное воздействие, приливные силы, учёт температуры и т.д.). Вследствие этого, такие задачи эффективнее решать с использованием комплексов программ, [13; 14]. В частности, существуют и комплексы, в основе которых лежит модель мелкой воды [20; 21]. В рамках этого направления автор дополнил существующие РУМВ путём включения в них более аккуратного описания процессов наводнения/осушения в береговой зоне, сил трения и ветрового давления, силы Кориолиса, приливных эффектов. Все указанные эффекты были эффективным образом включены в разностные алгоритмы.

Для моделирования неоднородных течений были разработаны алгоритмы для переноса пассивного скаляра (примеси) в мелкой воде и приближения двухслойной мелкой воды.

Одним из подходов для численного исследования неоднородных течений является использование системы уравнений гидродинамики вместе с уравнением переноса. Разработка эффективного и точного численного алгоритма для подобной модели представляет собой сложную задачу. Дело в том, что при численном моделировании переноса примеси или другого пассивного скаляра, например, солёности или температуры, численное решение уравнения переноса становится плохо устойчивым. Это особенно сильно проявляется при малых коэффициентах диффузии скаляра. Для решения этой задачи на данный момент разработано большое количество методов. Одним из первых таких научных направлений можно назвать работы Г.И. Марчука, например [22], где главной целью ставится определение оптимального расположения промышленных зон для минимизации загрязнения. Помимо этого разрабатывались и изучались схемы для решения уравнения переноса (см., например, [23]).

Другим распространённым методом учёта неоднородности течений является использование моделей, учитывающих определённую степень стратификации жидкости. Одной из таких моделей является система уравнений двухслойной мелкой воды. Такое приближение, пусть и в грубом виде, позволяет учитывать стратификацию течений и водоёмов с чёткой границей раздела двух сред. Примером такой практической задачи может служить задача исследования циркуляции течений Чёрного моря, которая получается неточной при использовании однослойного приближения, поскольку в решении не ведётся учёт многослойности морской воды, которая выражается в различии плотности лёгкого поверхностного слоя и глубинного слоя, насыщенного сероводородом. Также открывается возможность исследования океанических течений, таких как Гольфстрим или течение в проливе Гибралтар, моделирования селевых потоков, течений различной температуры, примесей, т.е. полноценное моделирование неоднородных течений.

Финальным же результатом работы является создание нового решателя, построенного на базе РУМВ в рамках открытого пакета OpenFOAM. Этот решатель RSWEFoam позволяет научной общественности тестировать и развивать текущие научные достижения в области РУМВ, а также даёт возможность другим научным

группам воспользоваться созданными алгоритмами для решения своих задач, экономия при этом ресурсы и время.

Работа поддержана грантами РФФИ 19-01-00262, 20-08-00246, РНФ 19-11-00076.

Целью данной работы является усовершенствование существующих методов для моделирования прикладных задач в рамках регуляризованных уравнений мелкой воды, разработка новых численных методов для моделирования неоднородных течений в приближении мелкой воды, а также создание нового решателя для моделирования течений в приближении мелкой воды в рамках открытого пакета программ.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Усовершенствование текущих методов моделирования в рамках РУМВ.
2. Построение регуляризованных уравнений двухслойной мелкой воды, метод их численного решения и решение модельных задач.
3. Регуляризация уравнения переноса и моделирование процессов переноса в рамках приближения мелкой воды.
4. Реализация решателя в рамках открытого пакета программ OpenFOAM для моделирования течений в приближении мелкой воды.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Разработаны усовершенствованные алгоритмы численного решения регуляризованных уравнений мелкой воды для расчёта сухих зон, выполнения условий «хорошей балансировки» и учёта внешних сил и приливных воздействий. На базе усовершенствованных алгоритмов создан исследовательский комплекс программ для моделирования прикладных задач. С его помощью выполнено моделирование прибрежной акватории Карского, Печорского и части Баренцева морей.
2. На основе квазигазодинамического подхода построена система регуляризованных уравнений двухслойной мелкой воды и создан алгоритм их численного решения. Выполнена валидация алгоритма на характерных модельных задачах.
3. Предложена модификация регуляризованной системы уравнений мелкой воды, включающая в себя уравнение переноса пассивного скаляра. Разработан и программно реализован численный алгоритм решения полу-

ченной системы уравнений. С его помощью проведено моделирование циркуляции озера Валунден (о. Шпицберген). В численном эксперименте получены распределения температур и скоростей, что позволило теоретически обосновать наблюдаемые толщины слоя льда на поверхности озера.

4. На базе усовершенствованных и доработанных алгоритмов решения регуляризованных уравнений мелкой воды создан новый решатель RSWEFoam в рамках открытого пакета программ OpenFOAM. Проведена апробация решателя на модельных задачах.

Научная новизна:

1. Впервые в рамках квазигазодинамического подхода были построены и применены алгоритмы для моделирования неоднородных течений в приближении двухслойной мелкой воды.
2. Впервые получена система уравнений для переноса пассивного скаляра в рамках регуляризованных уравнений мелкой воды и реализован эффективный численный алгоритм решения.
3. Реализован новый решатель в рамках открытого пакета программ OpenFOAM для моделирования течений в приближении мелкой воды.

Научная и практическая значимость разработаны новые однородные алгоритмы для решения описанных выше задач. Применение регуляризованных уравнений даёт возможность проводить моделирование исследуемых водоёмов в режиме реального времени. Созданные методы можно использовать для мониторинга экологически важных объектов, а также встраивать в уже существующие численные пакеты.

Реализация решателя в рамках OpenFOAM даёт возможность воспользоваться описанными в работе методами для решения различных задач другими исследователями, что важно как для практических приложений, так и для развития КГД методов, а также позволит поддерживать, модифицировать и создавать новые решения на базе текущих разработок.

Степень достоверности полученных результатов обеспечивается их сравнением с данными экспериментов и валидацией численных алгоритмов на модельных задачах с известным решением. Результаты хорошо согласуются с результатами, полученными другими исследователями и уже существующими расчётами.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на:

- XXIV Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2017», Москва, Россия, 10-14 апреля 2017.
- Семинар лаборатории Цунами им. академика С.Л. Соловьёва, ИО РАН, Москва, Россия, 22 декабря 2017.
- Ломоносовские чтения - 2018, МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия, 16-25 апреля 2018.
- XXVI Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2019», Москва, Россия, 11 апреля 2019.
- 5th International Conference on Geographical Information Systems Theory, Applications and Management (GISTAM 2019), Heraklion, Crete, Greece, Греция, 3–5 мая, 2019.
- Всероссийская конференция молодых учёных-механиков, «Буревестник» МГУ, Сочи, Россия, 3-13 сентября 2020.
- Международная конференция «Марчуковские научные чтения 2020», посвящённая 95-летию со дня рождения академика Гурия Ивановича Марчука (МНЧ-2020) Академгородок, Новосибирск, Россия, 19-23 октября 2020.
- 16th OpenFOAM Workshop, University College Dublin, Dublin, Ireland, Ирландия, 8-11 июня 2021.
- Открытая международная конференция ИСП РАН им. В.П. Иванникова, Москва, Россия, 2-3 декабря 2021.
- Открытая международная конференция ИСП РАН им. В.П. Иванникова, Москва, Россия, 1-2 декабря 2022.

Личный вклад. Лично автором выполнены все описанные исследования и положения, выносимые на защиту. В частности, это непосредственная разработка математической модели регуляризованных уравнений двухслойной мелкой воды и построение регуляризованного уравнения переноса примеси в мелкой воде, написание всех программных кодов, их тестирование и оформление результатов в виде статей и докладов. Также автором была выполнена разработка и реализация нового вычислительного модуля в рамках открытого программного комплекса OpenFOAM для библиотеки КГД/КГиД течений. Автор принимал активное участие в развитии КГД/КГиД методов.

Публикации. Основные результаты по теме работы представлены отдельным списком и изложены в 13 печатных изданиях, 8 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК [1–8], 4 — опубликованы в рецензируемых изданиях, индексируемых в международных базах данных Scopus и/или Web of Science [9–12]. Кроме того, 3 работы опубликованы соискателем без соавторов [6], [8] и [11].

Объём и структура работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав и заключения. Полный объём работы составляет 125 страниц с 61 рисунком и 2 таблицами. Список литературы содержит 80 наименований.

Глава 1. Усовершенствование алгоритмов решения регуляризованных уравнений мелкой воды и их применение для моделирования северных морей

1.1 Регуляризованные уравнения мелкой воды

Рассмотрим некоторую область, в которой располагается вода и которая может быть ограниченной береговой линией, пример прибрежной области приведён на рис. 1.1. Декартову систему координат выберем таким образом, чтобы плоскость OXY была параллельна поверхности воды в её спокойном состоянии, а наиболее глубокая точка водоёма лежала на координате по вертикальной оси $z = 0$. Для обозначения координат на плоскости OXY будем использовать вектор $\mathbf{x} = \{x, y\}$.

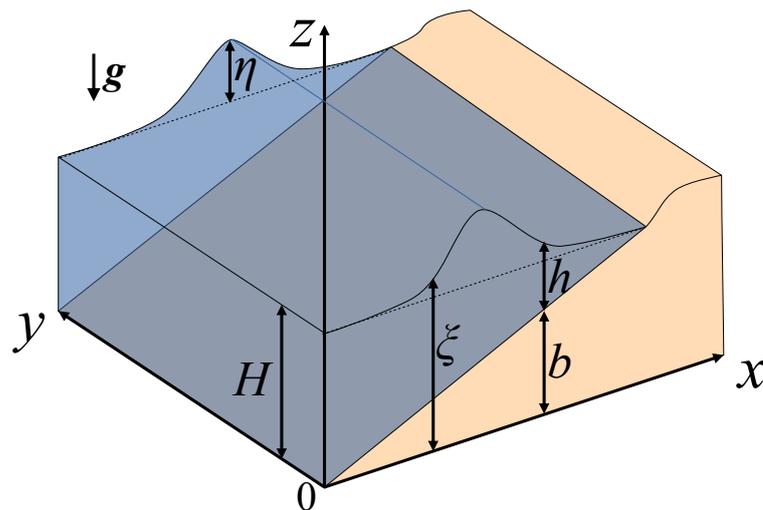


Рисунок 1.1 — Иллюстрация обозначений для модели мелкой воды.

В предложенной системе можно ввести неотрицательную функцию батиметрии – функцию описания рельефа дна – $b(\mathbf{x}) \geq 0$, а также неотрицательную функцию толщины слоя воды $h(\mathbf{x},t) \geq 0$, которая зависит от времени и отсчитывается от уровня дна $b(\mathbf{x})$, рис. 1.1. Такой выбор системы координат удобен тем, что минимальные значения функций фиксированы и равны нулю, т.е. минимальная глубина $b_{min}(\mathbf{x}) = 0$, а отсутствие воды в точке в момент времени t определяется как $h(\mathbf{x},t) = 0$. При этом можно выделить толщину слоя при спокойной воде $H(\mathbf{x})$, а также амплитуду малых возмущений $\eta(\mathbf{x},t)$, так что $h(\mathbf{x},t) = H(\mathbf{x}) + \eta(\mathbf{x},t)$. Кроме того, для описания свободной поверхности удобно ввести функцию $\xi(\mathbf{x},t) = h(\mathbf{x},t) + b(\mathbf{x})$, рис. 1.1.

Обозначив вектор горизонтальной скорости течения $\mathbf{u} = \{u_x(\mathbf{x},t), u_y(\mathbf{x},t)\}$, а модуль ускорения силы тяжести $g = |\mathbf{g}|$, запишем систему уравнений мелкой воды (УМВ) в декартовой системе координат при наличии неровностей дна $b(\mathbf{x})$ и внешних сил:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (h\mathbf{u}) = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial (h\mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (h\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla \frac{gh^2}{2} = h(\mathbf{f}^v - g\nabla b) + \mathbf{f}^s, \quad (1.2)$$

где $\mathbf{f}^v = \{f_x^v(\mathbf{x},t), f_y^v(\mathbf{x},t)\}$ – вектор объёмной внешней силы, действующей на всю толщу слоя воды, $\mathbf{f}^s = \{f_x^s(\mathbf{x},t), f_y^s(\mathbf{x},t)\}$ – вектор поверхностной внешней силы, \otimes – символ тензорного произведения, который можно расписать как

$$\nabla \cdot (h\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = h\mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{u}) + (h\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \nabla h).$$

УМВ могут быть получены из газодинамики как специальный вид баротропного приближения, либо исходя из уравнений Эйлера для несжимаемой жидкости в случае плоского движения, при условии, что толщина слоя воды достаточно мала по сравнению с характерными размерами задачи. Из этого допущения следует, что вертикальной компонентой скорости частиц жидкости можно пренебречь, как и вертикальным ускорением, откуда также следует, что давление в жидкости гидростатическое.

Система УМВ (1.1)–(1.2) хорошо изучена, в том числе существует множество работ, посвящённых построению численных алгоритмов для моделирования задач в приближении мелкой воды. Одно из ключевых направлений – это численное решение УМВ с помощью явных по времени разностных схем с аппроксимацией пространственных производных центральными разностями. Такой подход имеет ряд преимуществ: во-первых, это простота эффективной реализации и возможность распараллеливания программного кода алгоритма, а во-вторых, решение, полученное с применением таких схем, имеет второй порядок точности по пространству.

Однако при решении системы (1.1)–(1.2) схемами с центральными разностями могут проявляться свойства немонотонности на разрывных решениях [24]. Как правило, для решения данной проблемы используются методы с добавлением дополнительной искусственной вязкости, выбор которой зависит от конкретной задачи, что значительно усложняет процесс решения. Альтернативой в таком

случае является использование системы регуляризованных уравнений мелкой воды.

Как уже было сказано, УМВ тесно связаны с уравнениями газовой динамики. Это позволило применить к ним метод регуляризации по аналогии с построением системы квазигазодинамических (КГД) уравнений [1—6]. Для введённых обозначений система регуляризованных уравнений мелкой воды (РУМВ) имеет вид, см. [6; 7]:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_m = 0, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial (h\mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{j}_m \otimes \mathbf{u}) + \nabla \frac{gh^2}{2} = h^* (\mathbf{f}^v - g\nabla b) + \mathbf{f}^s + \nabla \cdot \Pi, \quad (1.4)$$

где

$$h^* = h - \tau \nabla \cdot (h\mathbf{u}), \quad (1.5)$$

$$\mathbf{j}_m = h (\mathbf{u} - \mathbf{w}), \quad (1.6)$$

$$\mathbf{w} = \frac{\tau}{h} [\nabla \cdot (h\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + gh\nabla (b + h)], \quad (1.7)$$

$$\Pi = \Pi_{NS} + \tau \mathbf{u} \otimes [h (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + gh\nabla (b + h)] + \tau I [gh\nabla \cdot (h\mathbf{u})], \quad (1.8)$$

где \mathbf{I} – диагональная единичная матрица. Π_{NS} – тензор вязких напряжений Навье–Стокса, который при необходимости в ряде задач рассматривается как дополнительный регуляризатор и может быть включён или отброшен, см., например, [6; 7]. Коэффициент кинематической вязкости жидкости μ считается искусственным и вычисляется через параметр τ :

$$\Pi_{NS} = \mu \frac{h}{2} [(\nabla \otimes \mathbf{u}) + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T], \quad \mu = \tau gh. \quad (1.9)$$

Систему РУМВ (1.3)–(1.8) можно получить из исходной системы уравнений мелкой воды (1.1)–(1.2) путём осреднения уравнений по некоторому малому промежутку времени Δt , предполагая что за это время успевают значительно измениться только величины толщины слоя воды h и скорости течения \mathbf{u} . Соответствующие изменённые величины h^* и \mathbf{u}^* можно выразить через исходные с помощью разложения в ряд Тейлора, используя только члены нулевого и первого порядка малости

$$h^* = h + \tau \frac{\partial h}{\partial t} \quad \mathbf{u}^* = h + \tau \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}.$$

Подставляя полученные выражения в осреднённую систему, отбрасывая члены порядка $\mathcal{O}(\tau^2)$ и выражая производные по времени из исходной системы УМВ (1.1)–(1.2), получим систему регуляризованных уравнений (1.3)–(1.8).

Свойства системы РУМВ (1.3)–(1.8) широко изучены и описаны в научных публикациях, например в работах [6; 25; 26]. В основе регуляризации уравнений мелкой воды лежит тот факт, что массовая плотность потока \mathbf{j}_m отличается от импульса единицы объёма $h\mathbf{u}$. Это приводит к появлению малых дополнительных диссипативных слагаемых в каждом из уравнений системы (1.3)–(1.4), что описано в [25; 26]. Эти регуляризирующие слагаемые имеют физический характер и улучшают свойства численной устойчивости явных разностных алгоритмов, в которых пространственные производные аппроксимированы центральными разностями. Степень вязкости определяется параметром τ , который также называется параметром регуляризации и подробнее будет описан в следующем разделе. При $\tau \rightarrow 0$ система РУМВ (1.3)–(1.8) переходит в систему УМВ.

1.2 Алгоритм численного решения и его модификации

1.2.1 Разностная аппроксимация

Разностная аппроксимация системы уравнений (1.3)–(1.8) на равномерной прямоугольной неразнесённой по пространству и времени сетке, как и в случае с системой квазигазодинамических уравнений, строится с использованием центральных разностей для пространственных производных, пример шаблона изображён на рис. 1.2. В узлах сетки (i, j) задаются основные величины $h(x, y, t)$, $b(x, y)$ и $\mathbf{u}(x, y, t)$, а значения в полуцелых точках $(i \pm 1/2, j)$, $(i, j \pm 1/2)$ записываются как полусумма величин в соседних узлах, т.е. $h_{i\pm 1/2, j} = 0.5(h_{i\pm 1, j} + h_{i, j})$. Значения в центрах ячеек $(i \pm 1/2, j \pm 1/2)$ определяются как среднее арифметическое значений в соседних узлах, например: $h_{i+1/2, j+1/2} = 0.25(h_{i+1, j} + h_{i-1, j} + h_{i, j+1} + h_{i, j-1})$. Аппроксимация потоков выполняется в полуцелых точках на рёбрах.

Приведём вид схемы для уравнений (1.3)–(1.4) на шаблоне рис. 1.2. Для удобства здесь и далее верхним индексом будем обозначать пространственную

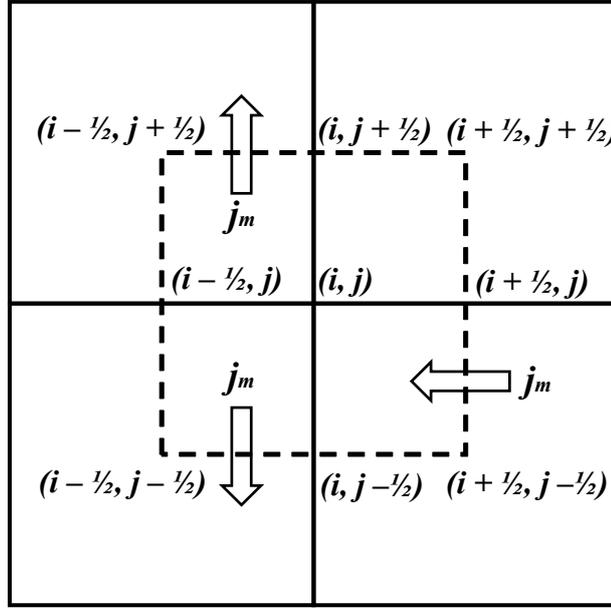


Рисунок 1.2 — Шаблон разностной аппроксимации.

координату, а нижними – индексы разностной сетки. Символом $\hat{}$ обозначим величины на следующем слое по времени:

$$\hat{h}_{i,j} = h_{i,j} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(j_{i+1/2,j}^{mx} - j_{i-1/2,j}^{mx} \right) - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(j_{i,j+1/2}^{my} - j_{i,j-1/2}^{my} \right), \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} \hat{h}_{i,j} \hat{u}_{i,j}^x &= h_{i,j} u_{i,j}^x + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\Pi_{i+1/2,j}^{xx} - \Pi_{i-1/2,j}^{xx} \right) + \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(\Pi_{i,j+1/2}^{yx} - \Pi_{i,j-1/2}^{yx} \right) \\ &- \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(j_{i+1/2,j}^{mx} u_{i+1/2,j}^x - j_{i-1/2,j}^{mx} u_{i-1/2,j}^x \right) - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(j_{i,j+1/2}^{my} u_{i,j+1/2}^x - j_{i,j-1/2}^{my} u_{i,j-1/2}^x \right) \\ &- \frac{g\Delta t}{2\Delta x} \left(h_{i+1/2,j}^2 - h_{i-1/2,j}^2 \right) + \Delta t h_{i,j}^{*,x} \left(f_{i,j}^{v,x} - g \frac{b_{i+1/2,j} - b_{i-1/2,j}}{\Delta x} \right) + \Delta t f_{i,j}^{s,x}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} \hat{h}_{i,j} \hat{u}_{i,j}^y &= h_{i,j} u_{i,j}^y + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\Pi_{i+1/2,j}^{xy} - \Pi_{i-1/2,j}^{xy} \right) + \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(\Pi_{i,j+1/2}^{yy} - \Pi_{i,j-1/2}^{yy} \right) \\ &- \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(j_{i+1/2,j}^{mx} u_{i+1/2,j}^y - j_{i-1/2,j}^{mx} u_{i-1/2,j}^y \right) - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(j_{i,j+1/2}^{my} u_{i,j+1/2}^y - j_{i,j-1/2}^{my} u_{i,j-1/2}^y \right) \\ &- \frac{g\Delta t}{2\Delta y} \left(h_{i,j+1/2}^2 - h_{i,j-1/2}^2 \right) + \Delta t h_{i,j}^{*,y} \left(f_{i,j}^{v,y} - g \frac{b_{i,j+1/2} - b_{i,j-1/2}}{\Delta y} \right) + \Delta t f_{i,j}^{s,y}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Для такого шаблона, рис. 1.2, полная разностная схема системы РУМВ выписана и приводится, например, в статьях [7; 10] и в диссертации [27].

Устойчивость описываемого метода связана со слагаемыми с коэффициентом τ , который имеет вид

$$\tau = \alpha \frac{l}{c}, \quad (1.13)$$

где l – характерный размер пространственной ячейки, который используется в численном алгоритме, например, в виде $l = \sqrt{s}$, где s – площадь ячейки, $c = \sqrt{gh}$ – скорость распространения длинной волны, α – численный коэффициент, выбираемый из условий точности и устойчивости счёта. Как правило, $0 < \alpha < 1$, и в качестве базового значения можно выбирать $\alpha = 0.5$. При правильном подборе α параметр τ соотносится со временем, необходимым малому возмущению для преодоления площади пространственной ячейки. Однако, параметр τ можно модифицировать. Поскольку $c = \sqrt{gh}$ выражает скорость распространения длинных волн, то можно расширить область применения алгоритма на случаи, когда характерная скорость течения будет значительно больше величины c . В таком случае в качестве характерной скорости распространения возьмём

$$c = \sqrt{gh} + |\mathbf{u}|,$$

тогда

$$\tau = \alpha \frac{l}{\sqrt{gh} + |\mathbf{u}|}. \quad (1.14)$$

Условие устойчивости для выписанной явной схемы имеет вид условия Куранта, подробнее см. в [6], где шаг по времени выбирается по формуле

$$\Delta t = \beta \left(\frac{\Delta x + \Delta y}{2c} \right)_{min}, \quad (1.15)$$

число Куранта $0 < \beta < 1$ зависит от величины параметра регуляризации τ в виде $\beta = \beta(\alpha)$ и подбирается в процессе вычислений для обеспечения монотонности численного решения.

1.2.2 Метод расчёта сухих областей

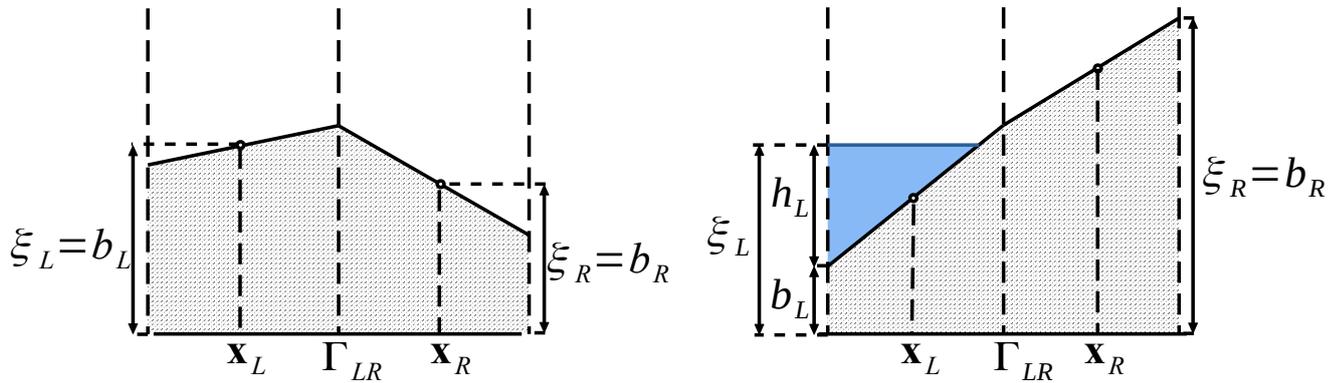
При решении практических задач возникает проблема учёта сложных береговых границ исследуемых водоёмов и постановки на них граничных условий, поскольку вблизи берега образуется так называемая сухая граница, на которой толщина слоя воды обращается в ноль $h = 0$. Во избежание этого в некоторых моделях, например в [16], прибрежная зона ограничивается некоторой минимальной глубиной, на которой ставятся условия отражения, т.е. своего рода “невидимой стенки”. Это позволяет исключить прибрежные зоны из расчёта, однако существенно снижает точность результатов и требует отдельного решения вопроса об определении характера набегания волны на берег.

Другим способом решения проблемы является постановка условий сухого дна (“dry-zone condition” – с англ.), которые доопределяют уравнения или само численное решение в сухой области. Пример таких условий предложен в статьях [28; 29] и был применён для решения задач с использованием РУМВ [7; 9; 10].

Определим величину ε – параметра отсечения, определяющего некоторое минимальное значение уровня воды h . Фактически этот параметр задаёт пороговое значение толщины слоя воды, определяющее начало сухой зоны. Поскольку в сухой области нет движения жидкости, то для сухих расчётных ячеек необходимо ввести ограничение на потоки массы и импульса через их границы. В зависимости от типа соседних ячеек определим различные типы границ – рёбер – между ними, рис. 1.3, где Γ_{LR} – общая граница двух расчётных ячеек, а значения величин в центрах левой и правой (относительно общего ребра) ячеек имеют индекс L и R соответственно:

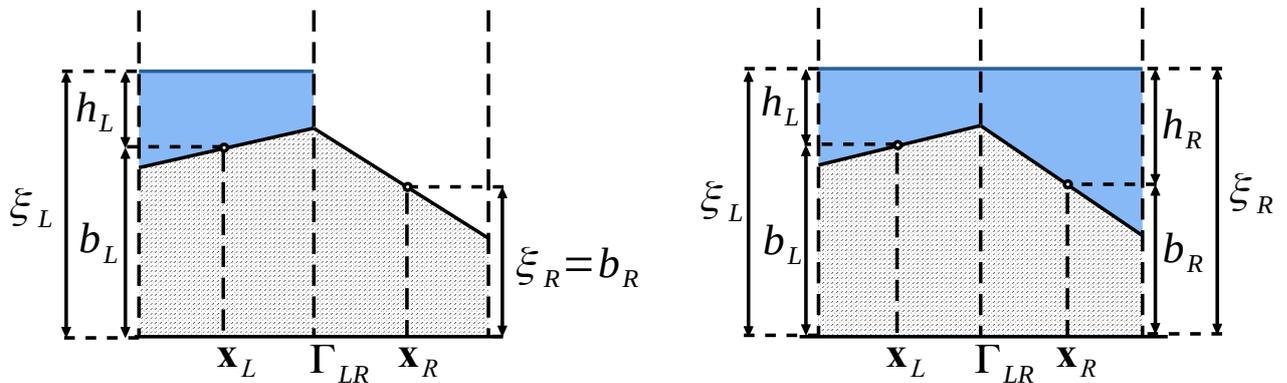
- а) сухая граница, уровень воды в каждой из ячеек меньше уровня отсечения ε : $h_L \leq \varepsilon, h_R \leq \varepsilon$ (рис. 1.3а);
- б) частично влажная граница (без потока), уровень воды только в одной из ячеек больше уровня отсечения ε : $h_L > \varepsilon, h_R \leq \varepsilon$, однако при этом центр сухой ячейки находится выше уровня воды: $\xi_L \leq \xi_R$ (рис. 1.3б);
- в) частично влажная граница (с потоком), уровень воды только в одной из ячеек больше уровня отсечения ε : $h_L > \varepsilon, h_R \leq \varepsilon$, однако при этом центр сухой ячейки находится ниже уровня воды: $\xi_L > \xi_R$ (рис. 1.3в);

г) влажная граница, уровень воды в обеих ячейках больше уровня отсечения ε : $h_L > \varepsilon, h_R > \varepsilon$ (рис. 1.3г).



а) Сухая граница $h_L \leq \varepsilon, h_R \leq \varepsilon$

б) Частично влажная граница (без потока)
 $h_L > \varepsilon, h_R \leq \varepsilon, \xi_L \leq \xi_R$



в) Частично влажная граница (с потоком)
 $h_L > \varepsilon, h_R \leq \varepsilon$

г) Влажная граница $h_L > \varepsilon, h_R > \varepsilon$

Рисунок 1.3 — Схематическое обозначение типов границ ячеек.

В случае, если граница двух ячеек является сухой (тип а, рис. 1.3а) или частично влажной (типы б и в, рис. 1.3б и 1.3в), то значение скорости в ячейках принимается равным нулю:

$$u_x \Big|_{\mathbf{x}_L} = u_y \Big|_{\mathbf{x}_L} = u_x \Big|_{\mathbf{x}_R} = u_y \Big|_{\mathbf{x}_R} = 0. \quad (1.16)$$

При этом, если граница является частично влажной без потока (тип б, рис. 1.3б) или сухой (тип а, рис. 1.3а), то накладывается дополнительное условие, гарантирующее отсутствие массового потока через него, которое применительно к РУМВ имеет вид

$$\tau \Big|_{\Gamma_{LR}} = 0. \quad (1.17)$$

Помимо этого, может возникнуть ситуация, когда суммарный отток массы из ячейки превышает величину текущей массы воды в ней, то есть толщина слоя воды становится отрицательной: $h < 0$. Для решения этой проблемы во многих работах, например в [28], предлагается в случае $h < 0$ компенсировать толщину из соседних ячеек. Применительно к алгоритму РУМВ это выглядит следующим образом. Для удобства рассмотрим прямоугольную сетку, в которой расположена ячейка с индексами (i, j) , с уровнем воды $h_{i,j} > 0$. Через $\hat{h}_{i,j}$ обозначим толщину воды в ячейке на следующем слое по времени как функцию шага по времени Δt и предположим, что в следующий момент времени толщина становится отрицательной:

$$\hat{h}_{i,j}(\Delta t) = h_{i,j} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(j_{i+1/2,j}^{mx} - j_{i-1/2,j}^{mx} \right) - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(j_{i,j+1/2}^{my} - j_{i,j-1/2}^{my} \right) < 0.$$

Тогда при некотором Δt^0 величина $\hat{h}_{i,j}(\Delta t^0) = 0$, соответственно

$$\Delta t^0 = \frac{h_{i,j}}{\frac{1}{\Delta x} \left(j_{i+1/2,j}^{mx} - j_{i-1/2,j}^{mx} \right) + \frac{1}{\Delta y} \left(j_{i,j+1/2}^{my} - j_{i,j-1/2}^{my} \right)}, \quad (1.18)$$

то есть, с физической точки зрения, только в течение времени Δt^0 может происходить отток жидкости из ячейки (i, j) .

Чтобы учесть изменения в соседних ячейках, потоки через их ребра, соединяющих их с рассматриваемой ячейкой (i, j) , компенсируются путём изменения интервала времени Δt на Δt^0 . Для примера приведём аппроксимацию уравнения в ячейке $(i + 1, j)$, находящейся справа от ячейки (i, j) :

$$\hat{h}_{i+1,j}(\Delta t) = h_{i+1,j} - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} j_{i+3/2,j}^{mx} - \frac{\Delta t^0}{\Delta x} j_{i+1/2,j}^{mx} \right) - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(j_{i+1,j+1/2}^{my} - j_{i+1,j-1/2}^{my} \right).$$

Аналогичным образом происходит расчёт толщины воды в точках $(i - 1, j)$, $(i, j + 1)$, $(i, j - 1)$, при этом модифицируются слагаемые $\frac{\Delta t^0}{\Delta x} j_{i-1/2,j}^{mx}$, $-\frac{\Delta t^0}{\Delta y} j_{i,j+1/2}^{my}$, $\frac{\Delta t^0}{\Delta y} j_{i,j-1/2}^{my}$ соответственно.

Однократного применения описанного алгоритма корректировки потоков может быть недостаточно, поэтому, как отмечается в [29] и [28], необходимо применять его итерационно до тех пор, пока толщина слоя воды в каждой ячейке не будет положительной. В рамках данной работы алгоритм корректировки потоков

применяется только один раз. Весь описанный алгоритм расчёта сухих областей выглядит следующим образом:

1. проверка ячеек на условие сухого дна: $h_{i,j} < \varepsilon$, если ячейка сухая, то:
 - а) она маркируется,
 - б) скорости ячейки, а также всех соседних ячеек, принимаются равными нулю: $u_{k,l}^x = u_{k,l}^y = 0$, $k = \{i - 1, i, i + 1\}$, $l = \{j - 1, j, j + 1\}$,
 - в) производится проверка соседних ячеек (обозначим их как NB), если они не удовлетворяют условию $\xi_{NB} > \xi_{i,j}$, то они также маркируются;
2. если обе ячейки, которым принадлежит ребро, промаркированы, то величина τ на этом ребре принимается равной нулю, к примеру, в случае сухих ячеек (i,j) и $(i + 1,j)$: $\tau_{i+1/2,j} = 0$;
3. при расчете потоков для каждой ячейки происходит проверка $h_{i,j} < 0$, если толщина воды отрицательна, то вычисляется Δt^0 по формуле (1.18) и происходит корректировка потоков.

Отметим, что для ε существует ограничение снизу, накладываемое исходя из геометрических соображений, см. [10], выражение для уровня отсечения в ячейке P для произвольного шаблона запишется как

$$\varepsilon_P \leq \max_{N \in \{N_i\}} (|b_P - b_N|, \varepsilon_0),$$

где $\{N_i\}$ – центры ячеек, смежных с ячейкой P , ε_0 – минимальное значение параметра.

В заключение этого раздела стоит подчеркнуть, что приведённый алгоритм позволяет эффективно описывать течения в областях со сложной конфигурацией границы с помощью прямоугольных пространственных сеток без их адаптации к береговой линии.

1.2.3 Условия хорошей балансировки

Построение сбалансированных разностных схем для алгоритмов высокого порядка точности представляет существенные трудности, см., например, [29]. Для системы РУМВ (1.3)–(1.8) так же, как и для исходной системы, выполняется так называемое условие “хорошей балансировки”: т.е. для покоящейся в начальный момент времени жидкости в отсутствие внешних сил в любой последующий момент времени уровень поверхности жидкости остаётся постоянным:

$$\xi = h + b = const. \quad (1.19)$$

Важность соблюдения этого условия для разностных схем заключается в том, что в отсутствие внешних сил для изначально покоящейся жидкости в численном решении не должны появляться нефизичные возмущения, обусловленные разностной аппроксимацией неровностей дна.

Для корректного учёта условия “well-balanced” в построенном численном алгоритме величина h^* , определяемая уравнением (1.5) аппроксимируется специальным образом: для первого слагаемого h вместо величины $h_{i,j}$ в ячейке (i,j) используется полусумма значений

$$h_{i,j}^{*,x} = \frac{1}{2} (h_{i+1/2,j} + h_{i-1/2,j}) - \tau_{i,j} [\nabla \cdot (h\mathbf{u})]_{i,j}, \quad (1.20)$$

$$h_{i,j}^{*,y} = \frac{1}{2} (h_{i,j+1/2} + h_{i,j-1/2}) - \tau_{i,j} [\nabla \cdot (h\mathbf{u})]_{i,j}, \quad (1.21)$$

где

$$[\nabla \cdot (h\mathbf{u})]_{i,j} = \frac{(hu^x)_{i+1/2,j} - (hu^x)_{i-1/2,j}}{\Delta x} + \frac{(hu^y)_{i,j+1/2} - (hu^y)_{i,j-1/2}}{\Delta y}$$

– аппроксимация дивергенции.

При использовании аппроксимации вида (1.20) и (1.21) условие хорошей балансировки выполняется естественным образом, т.е. при подстановке разностного решения $u_{i,j}^x = u_{i,j}^y = 0$ и $\xi_{i,j} = h_{i,j} + b_{i,j} = const$ уравнения превращаются в тождество. Простота аппроксимации объясняется тем, что включённые в численный алгоритм диссипативные добавки с коэффициентом τ обращаются в ноль

на стационарных решениях, а также первым порядком точности разностного алгоритма. Подробнее об условии “well-balance” для регуляризованных уравнений мелкой воды см. в [10].

1.2.4 Внешние силы и приливные течения

Для наиболее полного физического описания исследуемых водоёмов необходимо принимать во внимание различные внешние факторы. В качестве внешней объёмной силы во многих практических задачах важно учитывать силу Кориолиса, которая определяется как

$$f_x^{cor} = f^c u_y, \quad f_y^{cor} = -f^c u_x.$$

Параметр Кориолиса $f^c = 2\Omega \sin \varphi$, $\Omega = 7.2921 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ – угловая скорость вращения Земли.

Кроме того, большое влияние на динамику морских течений оказывают ветер и придонное трение. Для описания силы трения о дно используется классическое квадратичное трение:

$$\boldsymbol{\tau}^b = -\mu^b |\mathbf{u}| \mathbf{u}, \quad (1.22)$$

где $|\mathbf{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$ – абсолютная величина скорости течения, а μ^b – коэффициент придонного трения.

Компоненты силы трения ветра $\boldsymbol{\tau}^w = \{\tau_x^w, \tau_y^w\}$ вычисляются по эмпирической формуле из [12]:

$$\boldsymbol{\tau}^w = \gamma |\mathbf{W}| \mathbf{W}, \quad \gamma = 0.001 \frac{\rho_a}{\rho_w} (1.1 + 0.04 |\mathbf{W}|), \quad (1.23)$$

где $\mathbf{W} = \{W_x(x, y, t), W_y(x, y, t)\}$ – скорость, а $|\mathbf{W}| = \sqrt{W_x^2 + W_y^2}$ модуль скорости ветра, γ – коэффициент трения ветра о свободную поверхность воды, $\rho_a = 1.3 \cdot 10^{-3} \text{ г/см}^3$ – плотность воздуха, $\rho_w = 1.025 \text{ г/см}^3$ – плотность воды, а величина при модуле скорости 0.04 имеет размерность $(\text{м/с})^{-1}$.

Таким образом объемные и поверхностные силы в РУМВ имеют вид

$$f_x^v = f^c u_y, \quad f_y^v = -f^c u_x; \quad (1.24)$$

$$f_x^s = \gamma |\mathbf{W}| W_x - \mu^b |\mathbf{u}| u_x, \quad f_y^s = \gamma |\mathbf{W}| W_y - \mu^b |\mathbf{u}| u_y. \quad (1.25)$$

Динамика приливно-отливных явлений может существенно влиять на изменение уровня, а также на образование течений. Для моделирования приливных волн существует два основных подхода. Первым и наиболее фундаментальным является расчёт приливных сил и индуцирование с их помощью приливных колебаний. Суть подхода заключается в вычислении приливного потенциала Ω , а затем и плотности распределения потенциальной силы, как его градиента:

$$\mathbf{f}^{tidal} = \nabla \Omega.$$

Описание модели приливного потенциала можно найти в различных источниках. В качестве примеров можно привести работы [30—32].

Согласно [32] приливообразующий потенциал в точке наблюдения A , созданный каждым из приливообразующих тел в отдельности, представляет собой следующее выражение:

$$\Omega(A) = \frac{\gamma M}{R} \left(\frac{R}{d} - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}}{R^2} \right), \quad (1.26)$$

где \mathbf{R} – радиус-вектор от центра Земли до центра приливообразующего тела, $R = |\mathbf{R}|$, \mathbf{r} – радиус-вектор от центра Земли до точки наблюдения, d – расстояние между точкой наблюдения и приливообразующим телом, $\gamma = -6.673 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/\text{кг} \cdot \text{с}^2$ – гравитационная постоянная, M – масса приливообразующего тела (Луны или Солнца). Здесь предполагается, что поверхность Земли является сферой постоянного радиуса $r = |\mathbf{r}|$, если учесть, что $\frac{r}{R} \ll 1$, то $\Omega(A)$ можно разложить в ряд по степеням $\frac{r}{R}$ и свести выражение к виду:

$$\Omega(A) = \sum_n \Omega_n(A), \quad \Omega_n(A) = \frac{\gamma M}{R} \left(\frac{r}{R} \right)^n P_n(\cos \nu), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.27)$$

где $P_n(x)$ – полиномы Лежандра, а ν – зенитный угол. Обычно учитывают только Ω_2 – второй член в разложении приливного потенциала: первый член разложе-

ния опускается при взятии производной, а членами высших порядков зачастую пренебрегают ввиду их малости, таким образом: $\mathbf{f}^{tidal} = \nabla\Omega_2$.

Опуская подробности, приведём формулу для нахождения Ω_2 :

$$\Omega_2(A) = \Omega_2^0(A) + \Omega_2^1(A) + \Omega_2^2(A);$$

$$\begin{aligned}\Omega_2^0(A) &= \mathcal{D} \left[\left(\frac{r}{a} \right)^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \sin^2 \varphi \right) \right] \left[\left(\frac{c}{R} \right)^3 \left(\frac{2}{3} - 2 \sin^2 \beta \right) \right]; \\ \Omega_2^1(A) &= \mathcal{D} \left[\left(\frac{r}{a} \right)^2 \sin 2\varphi \right] \left[\left(\frac{c}{R} \right)^3 \sin 2\beta \cos(t + \lambda) \right]; \\ \Omega_2^2(A) &= \mathcal{D} \left[\left(\frac{r}{a} \right)^2 \cos^2 \varphi \right] \left[\left(\frac{c}{R} \right)^3 \cos^2 \beta \cos 2(t + \lambda) \right];\end{aligned}\quad (1.28)$$

Требуется пояснить используемые здесь обозначения: согласно [32] соотношения (1.28) для потенциалов нулевого, первого и второго родов включают три сомножителя (они выделены квадратными скобками). Первый из них, $\mathcal{D} = \frac{3}{4} \frac{\gamma M a^2}{c^3}$ – размерная константа, называемая постоянной Дудсона, характеризующая порядок величины приливного потенциала, M – масса небесного тела (Луны или Солнца), $\gamma = 6.67 \times 10^{-11} \text{ м}^3 \text{ кг}^{-1} \text{ с}^{-2}$ – гравитационная постоянная, a – радиус Земли, c – среднее расстояние от центра Земли до центра небесного тела, в качестве такого расстояния выбирается длина большой полуоси эллиптической орбиты небесного тела. Второй имеет смысл “геодезического” множителя, не зависит от времени и связан только с положением исследуемой точки A на земной сфере, r обозначает расстояние от центра Земли до точки наблюдения. Третий сомножитель можно отождествить с “астрономическим” множителем, определяемым движением по орбите возмущающегося тела и вращением Земли, R – расстояние от точки наблюдения до приливообразующего тела. (φ, λ) – это географические широта и долгота соответственно, указанные в радианах, t – часовой угол и склонение β также отсчитываются в радианах. Подробные определения приведённых величин можно найти в [30; 31].

Для упрощения описанной модели были сделаны следующие допущения:

1. радиус земли постоянен, $r \approx a \Rightarrow \frac{r}{a} = 1$;
2. расстояние от точки A до небесного тела равно расстоянию между центрами Земли и небесного тела.

Тогда:

$$\begin{aligned} \Omega_2(A, \mathcal{D}) = \mathcal{D} \left(\frac{c}{R} \right)^3 & \left[3 \left(\sin^2 \varphi - \frac{1}{3} \right) \left(\sin^2 \beta - \frac{1}{3} \right) + \right. \\ & \left. + \sin 2\varphi \sin 2\beta \cos(t + \lambda) + \cos^2 \varphi \cos^2 \beta \cos 2(t + \lambda) \right]; \end{aligned} \quad (1.29)$$

Значения постоянной Дудсона \mathcal{D} для Луны и Солнца:

$$\mathcal{D}^M = 2.6206 \text{ м}^2/\text{с}^2;$$

$$\mathcal{D}^S = 1.2035 \text{ м}^2/\text{с}^2.$$

Таким образом, величина приливного потенциала рассматривалась как сумма приливных потенциалов Луны и Солнца:

$$\Omega_2(A) = \Omega_2^M(A) + \Omega_2^S(A).$$

Величины часового угла t , склонения β , а также расстояния от Земли до небесного тела вычислялись на основе данных частного пакета работы с координатами небесных тел *Ephemeris*, [33].

При использовании прямоугольной декартовой системы координат для моделирования больших акваторий, как правило, она выбирается таким образом, что ось x направлена вдоль параллелей, а ось y параллельна отрезкам меридианов. Поскольку в модели мелкой воды не учитывается кривизна Земли, то координаты (x, y) линейно-зависимы с (λ, φ) :

$$\lambda = \theta_x x + \delta_x;$$

$$\varphi = \theta_y y + \delta_y;$$

где $\theta_x, \theta_y, \delta_x, \delta_y$ – константы. Причём физический смысл θ_x и θ_y – соотношение расстояния в широтно-долготной координатной сетке (в радианах) и в декартовой. Например, для экватора коэффициенты будут выглядеть следующим образом:

$$\theta_x = \theta_y = \frac{1^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ}}{111000 \text{ м}}.$$

Преобразуем соответствующие производные:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Omega_2}{\partial x} &= \frac{\partial \Omega_2}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x} = \theta_x \frac{\partial \Omega_2}{\partial \lambda}; \\ \frac{\partial \Omega_2}{\partial y} &= \frac{\partial \Omega_2}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \theta_y \frac{\partial \Omega_2}{\partial \varphi}.\end{aligned}$$

Для определения градиента найдём производные в системе координат (λ, φ) (отметим также, что t содержит в себе λ в качестве слагаемого, поэтому производная $\frac{dt}{d\lambda} = 1$):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Omega_2}{\partial \lambda} &= \mathcal{D} \left(\frac{c}{R} \right)^3 [-2 \sin 2\varphi \sin 2\beta \sin(t + \lambda) - 4 \cos^2 \varphi \cos^2 \beta \sin 2(t + \lambda)] = \\ &= -2\mathcal{D} \left(\frac{c}{R} \right)^3 [\sin 2\varphi \sin 2\beta \sin(t + \lambda) + 2 \cos^2 \varphi \cos^2 \beta \sin 2(t + \lambda)];\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Omega_2}{\partial \varphi} &= \mathcal{D} \left(\frac{c}{R} \right)^3 [\sin 2\varphi (3 \sin^2 \beta - 1) + \\ &+ 2 \cos 2\varphi \sin 2\beta \cos(t + \lambda) - \sin 2\varphi \cos^2 \beta \cos 2(t + \lambda)];\end{aligned}$$

Тогда компоненты приливной силы запишутся в виде:

$$\begin{aligned}f_x^{tidal} &= -2\theta_x \mathcal{D} \left(\frac{c}{R} \right)^3 [\sin 2\varphi \sin 2\beta \sin(t + \lambda) + 2 \cos^2 \varphi \cos^2 \beta \sin 2(t + \lambda)]; \\ f_y^{tidal} &= \theta_y \mathcal{D} \left(\frac{c}{R} \right)^3 [\sin 2\varphi (3 \sin^2 \beta - 1) + \\ &+ 2 \cos 2\varphi \sin 2\beta \cos(t + \lambda) - \sin 2\varphi \cos^2 \beta \cos 2(t + \lambda)];\end{aligned}$$

Большим недостатком описанного подхода является то, что его можно использовать только для моделирования водоёмов целиком охваченных сухой границей. Т.е. для моделирования, например, части Енисейского залива необходимо учитывать динамику всего Северного-Ледовитого океана, что более трудоёмко с точки зрения вычислительных ресурсов. Однако наибольшее влияние имеют не локальные изменения уровня, вызванные приливыми силами, а глобальные индуцированные приливные волны. Поэтому зачастую используется второй подход к моделированию приливов, [11; 21]. В рамках него на открытых границах расчётной области задаётся уровень воды в виде суммы восьми приливных гармоник: K1, K2, M2, N2, O1, P1, Q1, S2:

$$\eta(x,y,t)\Big|_{\Gamma} = \eta_0 + \sum_{i=1}^8 f_i A_i(x,y) \cos(q_i t + \psi_{0i} - g_i(x,y)), \quad (1.30)$$

где η_0 – средний уровень моря рассматриваемой акватории, t – время от полуночи, выраженное в часах, $A_i(x,y)$, $g_i(x,y)$ и q_i – амплитуда, фаза и угловая скорость i -й приливной гармоник в каждой точке жидкой границы соответственно; ψ_{0i} и f_i – начальная фаза и редуцирующий множитель, определяемый по астрономическим данным. Формулы для определения ψ_{0i} и f_i хорошо описаны в [34]. Они определяются через χ – среднюю долготу Солнца, s – среднюю долготу Луны, p – среднюю долготу перигея лунной орбиты и N – долготу восходящего узла лунной орбиты. В свою очередь величины χ , s , p , N вычисляются в градусах и, согласно [35], их можно найти через астрономические константы и значение JD – юлианского дня. Более точные формулы также приведены в [36]. Для расчёта по модели РУМВ также была использована формула для средней долготы перигея лунной орбиты p из [36]. К сожалению, определение величин χ , s , N в [36] не соответствует современным результатам, поэтому для их вычисления лучше воспользоваться [35]. Для примера приведём здесь формулу для редуцирующего множителя и начальной фазы приливной волны K1:

$$f_{K1} = 1.006 + 0.115 \cos N - 0.008 \cos 2N,$$

$$\psi_{0,K1} = u_{K1} + \nu_{K1} = \chi + 90^\circ - v',$$

где

$$v' = 8.66^\circ \sin N - 0.68^\circ \sin 2N + 0.07^\circ \sin 3N.$$

1.2.5 Способ эффективного расчёта набегания волны на берег

Для численного моделирования задачи о набегании волны на берег в акватории с большими перепадами глубин коэффициент регуляризации τ (1.13) следует выбирать специальным образом. В областях мелководья величина τ может принимать большие значения, увеличивая искусственную диссипацию алгоритма. Корректного значения регуляризатора можно достигнуть путём построения

пространственной сетки, адаптивной к батиметрии акватории. При этом площадь ячейки должна меняться пропорционально толщине слоя $s \sim h$, обеспечивая нужные значения τ .

Практика расчётов одномерных и двумерных задач (см. работы [10], [9]) показывает, что шаг по времени явной разностной схемы, построенной на основе РУМВ, пропорционален минимальному значению τ . Поэтому указанный выбор коэффициента τ не приводит к неконтролируемому уменьшению вычислительного шага по времени при сгущения сетки в прибрежной зоне.

Идея уменьшения шага пространственной сетки в зонах мелководья для численного моделирования задач цунами была высказана в статье [16] в связи с требованием: $\lambda_{min} \geq 2\Delta x$, т.е. чтобы на одну длину волны приходилось по крайней мере два шага сетки. Поскольку скорость распространения длинноволнового возмущения зависит только от глубины $c = \sqrt{gh}$, то для того, чтобы избежать случая, при котором длина волны, соответствующая наименьшему периоду, станет меньше шага сетки, необходимо уменьшать шаг по пространству на мелководье, что приводит к сгущению всех разбиений в случае регулярных сеток. Применительно к использованию РУМВ такая идея оказывается адекватной указанному выше выбору коэффициента регуляризации τ путём построения пространственной сетки, адаптивной к батиметрии акватории.

Опишем алгоритм построения пространственной сетки и расчёта параметра регуляризации на примере одномерной задачи о распространения волны цунами, зарегистрированного в 2011 г. у побережья Японии, см. публикацию автора [3]. Батиметрия дна и берега приведены на рис. 1.4 и заданы на равномерной сетке, состоящей из 1000 узлов с шагом $\Delta x = 366.12$ м. Длина расчётной области составляет 366.12 км. Расстояние от максимума возмущения до берега $L = 189.65$ км. Высота возмущения в начальный момент времени составляет $h_{max} = 8.66$ м. Форма начального возмущения поверхности приведена на рис. 1.5.

Слева, в зоне свободной границы, граничным условием является условие сноса, справа используются условия сухого дна, рис. 1.4. В начальный момент времени скорости во всех точках полагаются равными нулю, так как начальное возмущение вызвано сдвигом поверхности дна.

Результаты расчётов этой задачи, представленные ниже, отсчитывают высоту уровня воды и дна от нулевой отметки, за которую принято значение высоты невозмущённой поверхности $\xi_0 = b(0) + h_0$. Для численного решения РУМВ

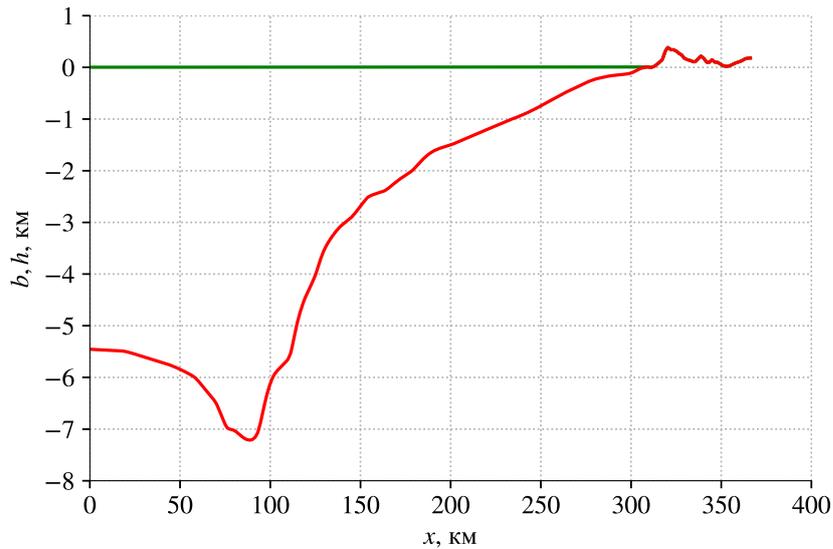


Рисунок 1.4 — Батиметрия дна и берега.

значения уровней дна и толщины слоя воды пересчитываются в положительные путём вычитания максимальной глубины: $b_{min} = -7214.31$ м.

В качестве базового значения параметра регуляризации τ_0 выберем значение, обеспечивающее разрешение минимальных частот начального возмущения, которое определяется заданным значением пространственного шага в зоне формирования волны цунами. А именно, используя имеющиеся координаты $\{x_k\}$, находим опорное значение коэффициента регуляризации $\tau = \tau_0$:

$$\tau_0 = \alpha \frac{\Delta x}{\sqrt{gh_{max}}}. \quad (1.31)$$

По заданной величине τ_0 и глубине определяется значение нового пространственного шага, затем находится положение следующей пространственной точки сетки

$$\Delta \tilde{x}_i = \tau_0 \sqrt{gh_i}, \quad \tilde{x}_i \in [x_k, x_{k+1}], \quad (1.32)$$

Глубина жидкости в начальный момент и форма дна в полученной точке аппроксимируются линейно по двум соседним точкам заданной сетки:

$$\tilde{b}_i = b_k + \frac{b_{k+1} - b_k}{\Delta x} (\tilde{x}_i - x_k), \quad (1.33)$$

$$\tilde{h}_i = h_k + \frac{h_{k+1} - h_k}{\Delta x} (\tilde{x}_i - x_k). \quad (1.34)$$

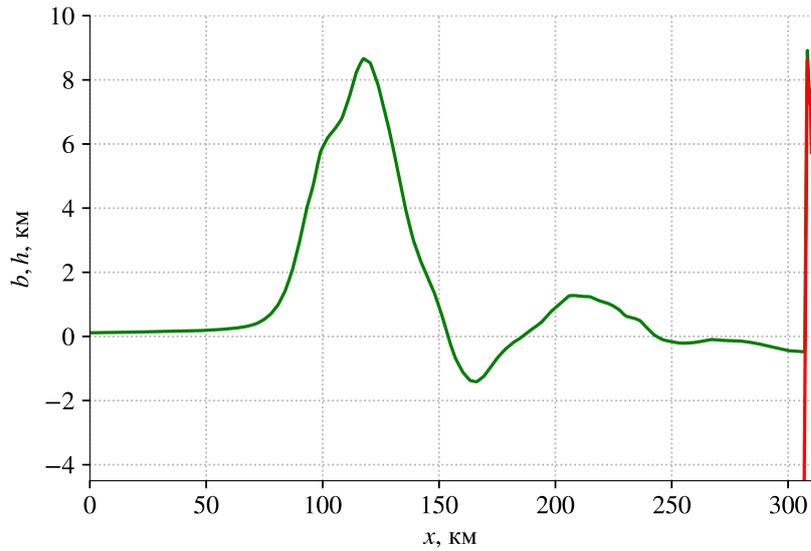


Рисунок 1.5 — Начальное возмущение $h_0(x)$, максимальная высота = 8.66 м.

Таким образом мы получаем новую адаптивную сетку по пространству, число разбиений которой в данной задаче составило $N = 3931$, причём максимальный и минимальный шаги сетки равны $\Delta\tilde{x}_{max} = 365.96$ м, $\Delta\tilde{x}_{min} = 30.6$ м соответственно. Зависимость пространственного шага адаптивной сетки от координаты представлена на рис. 1.6.

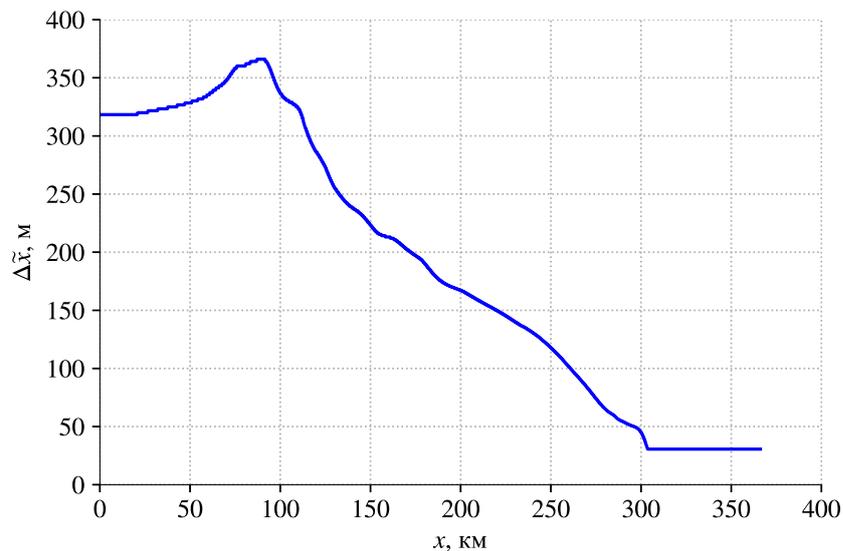


Рисунок 1.6 — Зависимость шага адаптивной сетки от координат

На рис. 1.7 представлены результаты численного моделирования наката волны цунами на берег, полученные при $\alpha = 0.5$. Характерное время достижения волной берега: $t \sim 2170$ с. Шаг по времени составляет $\Delta t = \tau_0 = 0.137$ с. Об-

ращает на себя внимание натекание волны на неровность берега, последующее её преодоление, стекание волны назад, а также остатки воды и наблюдающиеся колебания её уровня в зоне понижения профиля береговой линии.

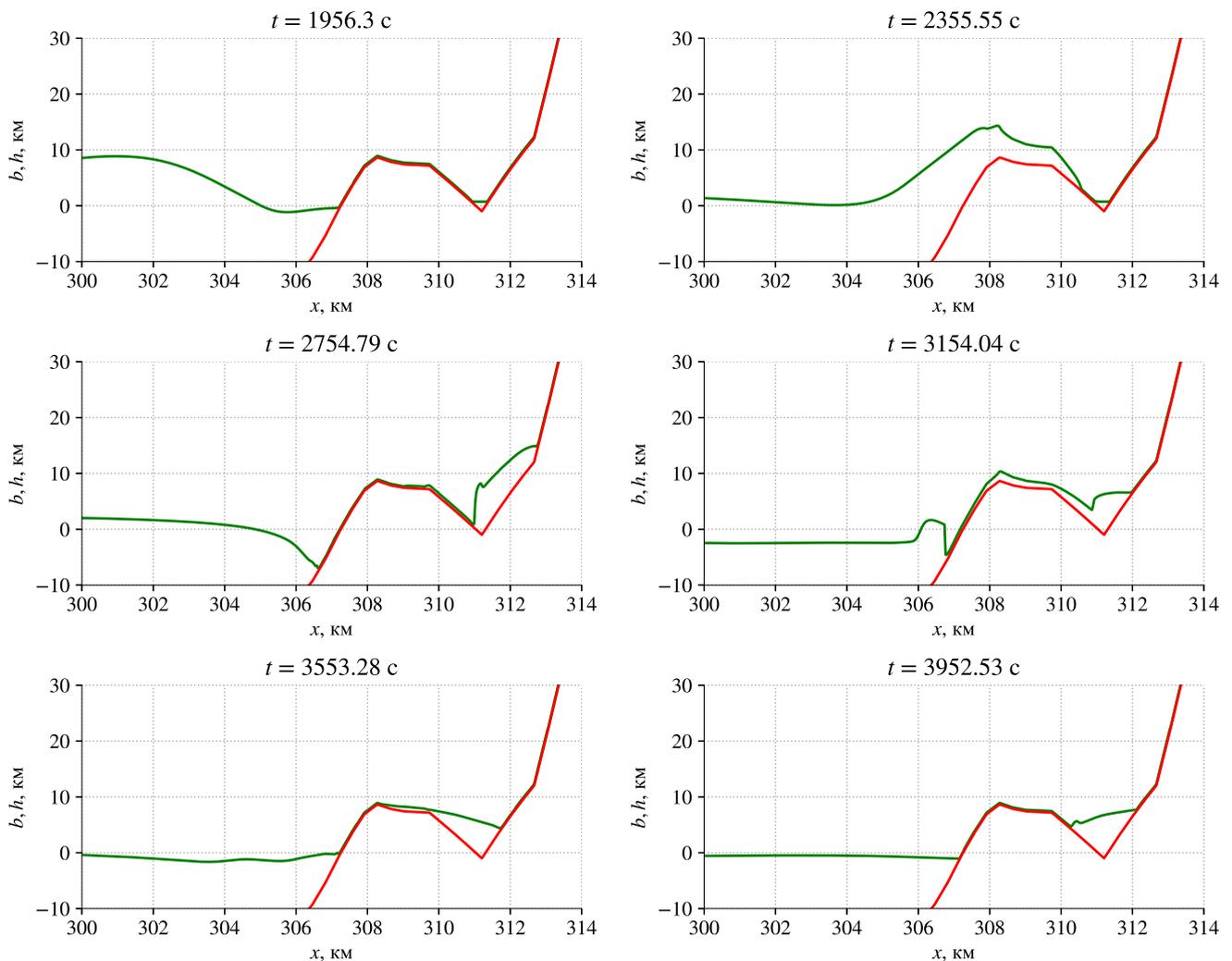


Рисунок 1.7 — Набегание на берег для различных моментов времени

Численное решение слабо зависит от коэффициента α в интервале $\alpha \in [0.1, 0.7]$. Однако, при значениях $\alpha \leq 0.3$ искусственной диссипации оказывается не достаточно, и в значениях h вблизи берега в отдельные моменты времени наблюдаются численные осцилляции.

Для изучения сходимости решения по сетке следует уменьшать исходное значение τ_0 (1.31), что приводит к разрешению более высоких частот исходного возмущения. Поэтому для проверки точности построенного численного решения было проведено его сравнение с численным решением, полученным для этой задачи с использованием линейной теории длинных волн на исходной равномерной пространственной сетке.

Известно, что генерация цунами движениями дна океана и последующее движение волны вдали от береговой линии адекватно описывается в рамках линейной теории длинных волн (ЛТДВ). Уравнения в этом приближении сводятся к неоднородному волновому уравнению относительно смещения свободной поверхности. Метод, основанный на данной модели, описан, например, в [17]. В [18] показано, что этот метод свободен от дисперсии. На рис. 1.8 приведено сравнение расчёта в рамках РУМВ и ЛТДВ. Сравнение формы возмущения на произвольный момент времени показывает поразительно хорошее совпадение решений при их сравнении вдали от береговой линии. Последнее говорит как о высокой точности решения на основе РУМВ, так и о том, что на выбранных расстояниях движения волны в РУМВ алгоритме не наблюдается дисперсии решения.

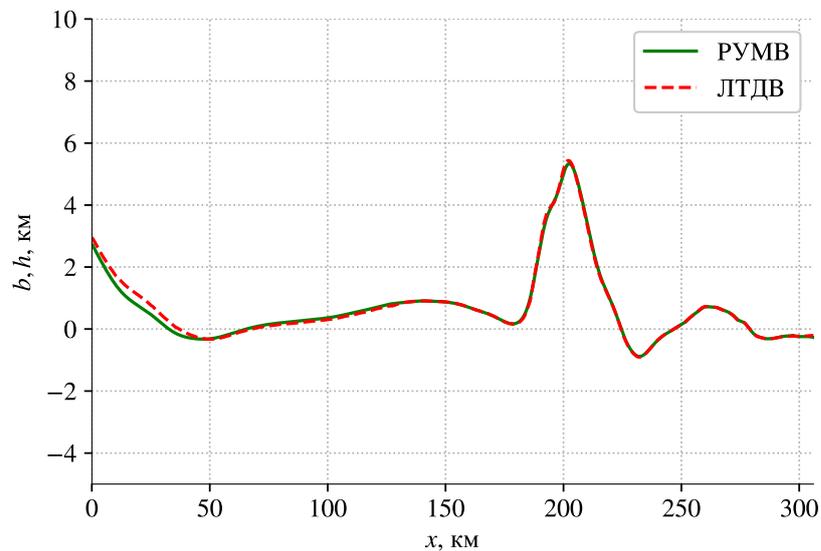


Рисунок 1.8 — Сравнение результатов РУМВ с решением в приближении ЛТДВ.
 $t = 550$ с.

1.3 Описание исследовательского программного комплекса

1.3.1 Структура комплекса программ

Все вышеперечисленные модификации алгоритмов численного решения РУМВ легли в основу исследовательского комплекса программ, разработанного для моделирования отдельных акваторий северных морей.

Исследовательский комплекс программ, реализующий алгоритм решения системы регуляризованных уравнений мелкой воды, представляет собой набор из подпрограмм, разделённых на взаимодействующие между собой модули, рис. 1.9:

- Модуль препроцессинга.
- Ядро программы (модель РУМВ).
- Модуль постпроцессинга.

Модуль препроцессинга представляет собой набор связанных программ (скриптов), реализованных на языке python и осуществляющих первичную обработку входных данных. В основе скриптов лежат алгоритмы линейной интерполяции данных на задаваемую сетку, а именно: перестроение широтно-долготной сетки в прямоугольную декартову и получение соответствующей карты батиметрии (**Bathymetry.py**), извлечение полей скорости ветра из расчётов, полученных в пакете WRF (Weather Research and Forecasting) [37] и их адаптация под заданную сетку (**WRFWind.py**), интерполяция толщины слоя воды h , а также горизонтальных компонент скорости u_x , u_y , полученных из расчёта глобальной модели динамики океана NEMO [38], формирование на основе этих данных граничных и начальных условий (**NEMOtoRSWE.py**), расчёт приливных характеристик на основе заданных величин фаз и амплитуд, полученных с помощью глобальной модели для расчёта приливов OSU TPXO Tidal Model [39] (**Tides.py**).

На следующем этапе работы программы данные, сформированные в модуле препроцессинга, являются входными данными для ядра программы – подпрограммы RSWE.exe, которая формирует и решает систему разностных регуляризованных уравнений мелкой воды с применением метода конечных объёмов. Ряд второстепенных модулей осуществляет обработку входных данных и инициализацию задачи, в том числе с учётом дополнительных параметров, таких как ве-

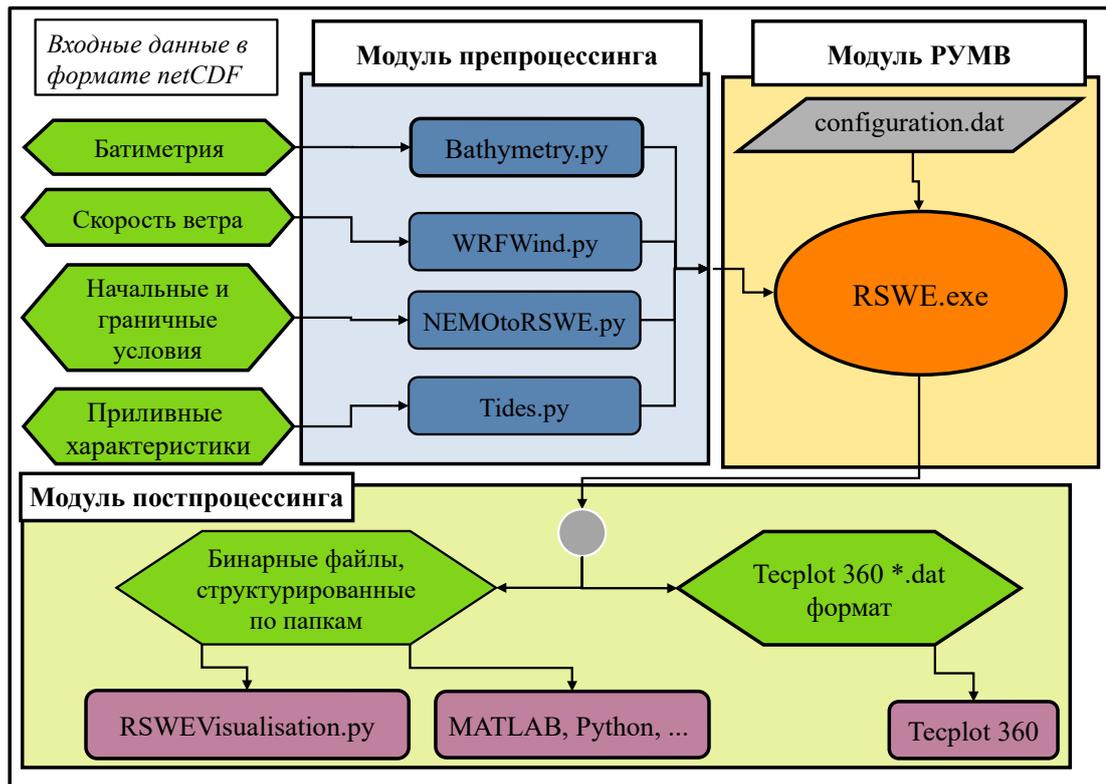


Рисунок 1.9 — Схема работы комплекса программ для моделирования мелководных течений с применением РУМВ.

личина настроечного коэффициента α , число Куранта β , параметр отсечения ε , дата и время расчёта (необходимы для корректного расчёта уровня приливов), а также различных технических параметров, которые описываются в специальном текстовом файле *configuration.dat*.

После завершения работы основного модуля в зависимости от формата вывода, заданного в конфигурационном файле, возможен запуск модуля постпроцессинга. Программа позволяет воспользоваться форматом *.szplt, используемым сторонней программой Tecplot 360 и/или авторским, который представляет собой набор директорий, расположенных в директории с названием расчётной задачи, каждая из которых соответствует времени вывода данных и содержит в себе бинарные файлы с массивами данных полей толщины слоя воды и скоростей, там же в папке Grid содержится информация по сетке. Помимо этого, в папке кейса хранится файл с параметрами задачи *caseParameters.dat* и журнал вывода работы программы *timeLog.dat* (рис. 1.10).

Такая структура хранения данных имеет ряд преимуществ, таких как возможность параллельного доступа к данным, независимость отдельных времён вывода, отсутствие необходимости хранения большого единого массива дан-

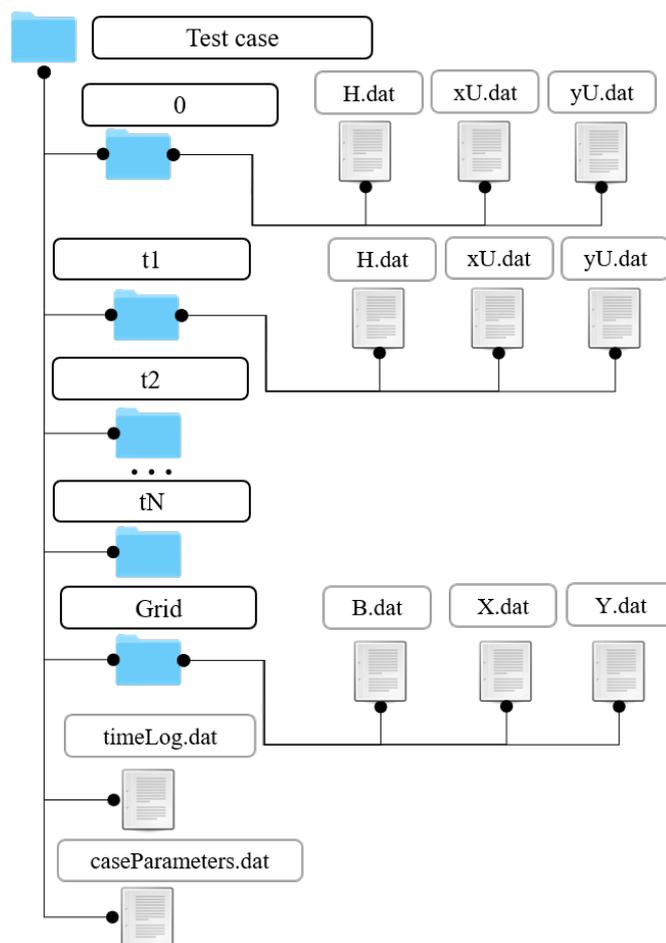


Рисунок 1.10 — Структура расположения выходных данных.

ных. Данная структура широко распространена и в других пакетах, например, в OpenFOAM.

Структура программы позволяет адаптировать её для проведения расчётов на высокопроизводительной вычислительной системе. Для увеличения эффективности проводимых расчётов, ядро программы, реализованное на языке C++, было дополнено возможностью включения распараллеливания с применением технологии распараллеливания OpenMP, за исключением операций ввода/вывода, а также некоторых технических функций.

Для демонстрации эффективности распараллеливания приведён график ускорения программы на двух 6-ядерных процессорах Intel(R) Xeon(R) CPU X5670 с тактовой частотой 2.93 GHz, таким образом максимальное число доступных ядер для ускорения было равно 12 (рис. 1.11). Тестовый расчёт выполнялся для $t = 48$ ч. Время работы последовательной программы составило 56059.3 с, время работы на 12 ядрах – 5524 с, что соответствует ускорению работы программы более чем в 10 раз. Такой результат говорит о незначительном проценте последо-

вательных вычислений в программе, тем не менее в дальнейшем рост ускорения при увеличении числа ядер будет лишь уменьшаться. Причиной тому является специфика самой технологии OpenMP. Более эффективной представляется реализация программы с совместным применением технологий распараллеливания MPI и OpenMP. Её разработка на языке C++ планируется в дальнейшей работе.

Все расчёты проводились с использованием вычислительных мощностей кластера платформы UniHUB ИСП РАН.

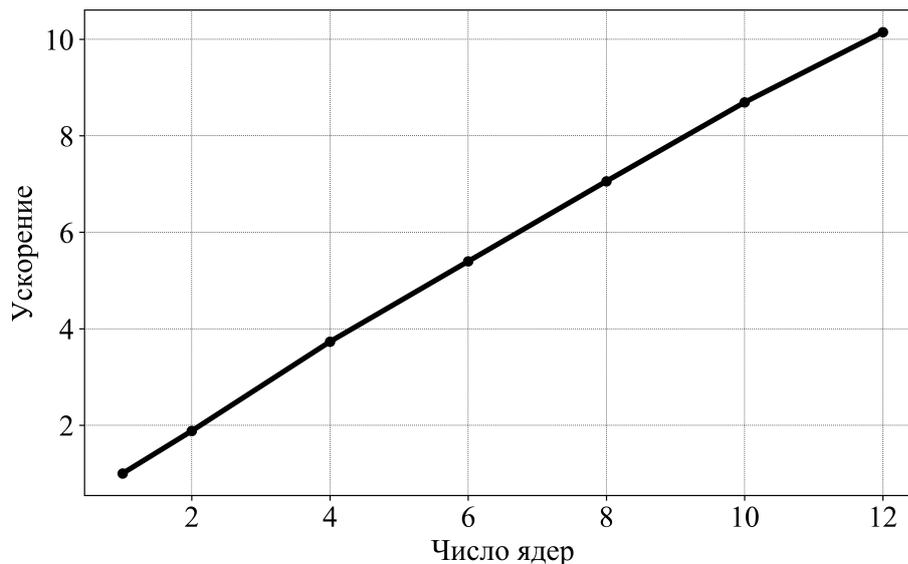


Рисунок 1.11 — График ускорения параллельной программы в зависимости от числа ядер.

1.3.2 Совмещение модели мелкой воды с глобальной моделью NEMO

Для корректного решения задачи моделирования мелководных течений для выделенных областей моря с открытой границей необходимо знать распределение толщины слоя воды и горизонтальной скорости течений в начальный момент времени, а также задать определённые граничные условия. Как правило, начальные и граничные данные интерполируются из расчётов, полученных с применением глобальных моделей, либо выбираются из неких эмпирических соображений, либо находятся из расчётов на более грубых сетках для большей замкнутой области.

В рамках данной работы начальные и граничные условия были получены из расчёта глобальной модели динамики океана NEMO (Nucleus for European Modelling of the Ocean). Математическая модель общей циркуляции океана NEMO разработана в институте Пьера Симона Лапласа (Париж) и описана во многих публикациях, см. например [38]. Данные расчёта по модели NEMO, результаты которого используются в данной работе, описываются в [40].

Модель NEMO производит выгрузку данных в суточном осреднении для всего земного шара раз в 24 часа. Объём различных переменных вычислительного пакета NEMO для описания динамики мирового океана обширен. Для построения начальных и граничных условий модели РУМВ использовались:

- ssh – распределение высоты поверхности моря.
- \hat{u}, \hat{v} – распределение скорости течения по глубинам в направлении с запада на восток и с севера на юг соответственно.

Для работы с данными глобальной модели был реализован интерфейс передачи данных, представляющий собой программу **NEMOtoRSWE.py** на языке python, которая состоит из методов, осуществляющих:

1. преобразование сетки,
2. интерполяцию величин на новую сетку,
3. визуализацию.

Для преобразования сетки использовалась открытая библиотека *pyproj*, в которой реализован метод *Proj* построения различных картографических проекций. В **NEMOtoRSWE.py** для исходной широтно-долготной сетки строится равноугольная цилиндрическая проекция Меркатора. Выбор именно этой проекции обусловлен тем, что она сохраняет углы между направлениями, то есть при преобразовании сетки нет необходимости в изменении векторов скоростей, поскольку их направления сохранятся.

Поскольку модель мелкой воды предполагает, что исходные горизонтальные скорости течения осреднены по глубине, то и для u_x, u_y брались средние арифметические значения от \hat{u} и \hat{v} соответственно.

После перестроения сетки происходит интерполяция величин билинейным методом, то есть значения исходной функции в прямоугольнике восстанавливаются по четырём её значениям в известных точках вершины прямоугольника. Пример работы программы **NEMOtoRSWE.py** проиллюстрирован на рис. 1.12.

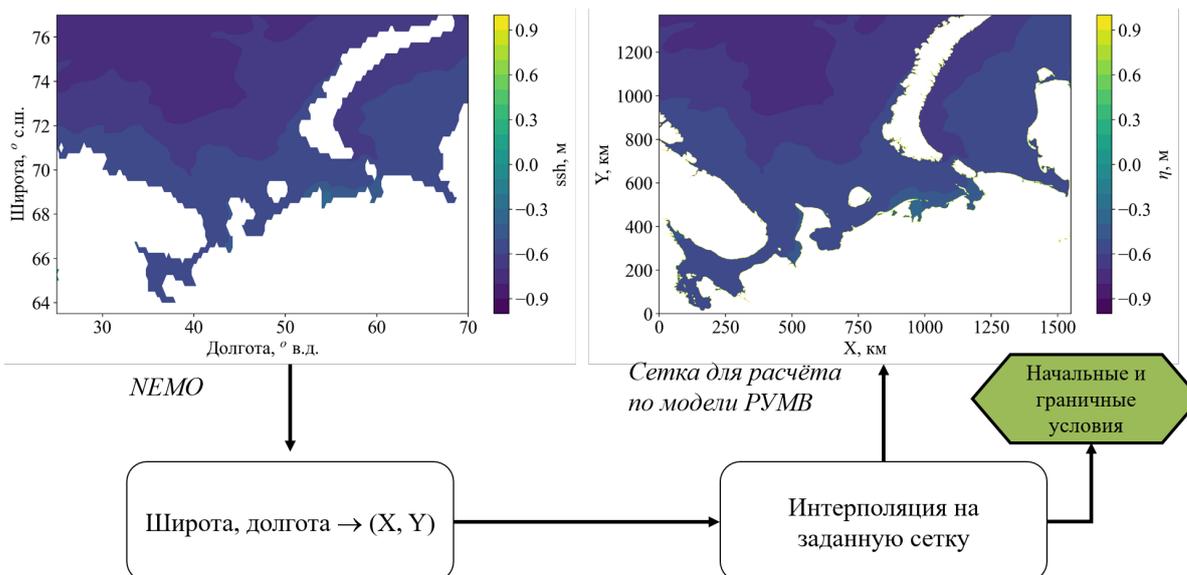


Рисунок 1.12 — Пример работы интерфейса передачи данных глобальной модели.

Результатом работы **NEMOtoRSWE.py** является набор файлов, представляющих собой начальные условия (`H_in.dat`, `xU_in.dat`, `yU_in.dat`), а также файлы граничных условий для каждой из границ, содержащих также метки по времени, которому соответствуют данные.

В ходе работы основной подпрограммы **RSWE.exe** происходит считывание соответствующих данных и их обработка: начальные условия используются для инициализации массивов толщины слоя воды и скоростей течений, а данные граничных условий задают граничные значения массивов.

Величина уровня поверхности воды рассматривается как среднесуточный уровень воды для приливных колебаний уровня, таким образом в совокупности с (1.30) имеем:

$$h \Big|_{\Gamma} = \hat{h}_{NEMO} + \sum_{i=1}^8 f_i A_i(x,y) \cos(q_i t + \psi_{0i} - g_i(x,y)), \quad (1.35)$$

где значение \hat{h}_{NEMO} предварительно линейно интерполируется по времени в заданных точках границы сетки. Приливные волны рассчитывались по гармоническим постоянным A_i и g_i , полученным с помощью глобальной модели для расчёта приливов OSU TPXO Tidal Model [39] на сферической сетке с разрешением $10 \times 10'(1/6^\circ)$.

Для обеих компонент горизонтальной скорости течения на границах ставились условия равенства нулю производной по нормали к жидкой границе:

$$\frac{\partial u_x}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial u_y}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad (1.36)$$

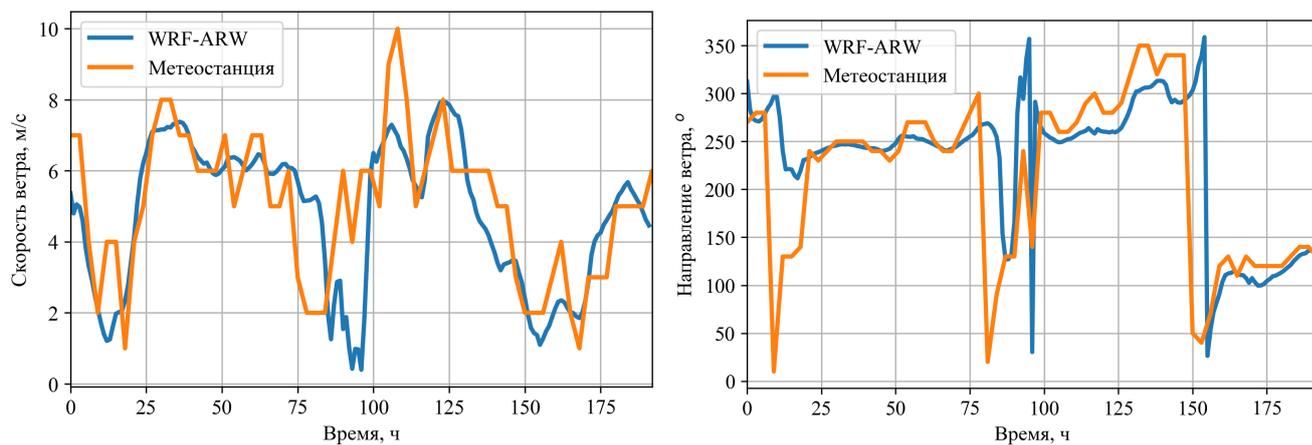
где \mathbf{n} – вектор нормали к границе.

1.3.3 Расчёт скорости ветра с использованием пакета WRF

Одним из распространённых подходов расчёта ветровой нагрузки является использование вычислительного пакета для прогноза метеорологических условий Weather Research and Forecasting (WRF) [37]. Модель WRF базируется на негидростатических уравнениях для сжимаемой жидкости, записанных в декартовых координатах по горизонтали и с использованием орографической координаты по вертикали.

Конфигурация модели WRF представляет собой параллелепипед с прямоугольником по горизонтали, стороны которого являются отрезками меридианов и параллелей, разрешение: 75×45 , $\Delta x = \Delta y = 10$ км, а центр расположен в точке с координатами 70°N , 60°E , и 41 уровнем по вертикали. Глобальные данные были взяты из базы данных реанализа [41], параметризация физики модели описана в [42].

На рис. 1.13 продемонстрировано сравнение данных расчета WRF и исторических данных, взятых с метеостанции им. Е.К. Фёдорова (индекс WMO – 20946), координаты которой $70^\circ 26'\text{N}$, $59^\circ 5'\text{E}$, а высота расположения над уровнем моря – 12 м. Можно заметить, что и скорость ветра и его направления хорошо соответствуют данным, полученным с метеостанции.



а) Скорость ветра

б) Направление ветра, указывающее азимут точки, откуда дует ветер

Рисунок 1.13 — Сравнение WRF-ARW расчёта с данными метеостанции им. Е.К. Фёдорова (индекс WMO – 20946), время указано в часах с момента начала расчета.

1.4 Постановка задачи и результаты моделирования отдельных областей северных морей

Для моделирования акватории северных морей, в которую входят Карское, Белое и Печорское море, а также Териберская, Обская и Печорская губы, выбрана базовая область, с юга и севера ограниченная параллелями 60° с.ш. и 83° с.ш., а на востоке и западе линиями меридианов 10° в.д. и 110° в.д. соответственно. Батиметрия базовой области представлена на рис. 1.14.

Численное моделирование базовой области в рамках приближения мелкой воды представляет собой сложную задачу: в местах резкого перепада глубин более плотные воды, сформировавшиеся на мелководьях, сползают по склонам подводных впадин ко дну, что требует рассмотрения двухслойной постановки задачи и учёта стратификации. Поэтому в качестве основной области из первоначальной базовой области была вырезана подобласть, представленная на рис. 1.15. Преимущество такого выбора заключается в необходимости ставить граничные условия только на двух границах (восточной и северной), в то время как западная и южная границы являются «сухими», так как граничат с сушей.

Для моделирования динамики крупномасштабных течений и динамики приливных и нагонных течений в отдельных районах, таких как: Карское море,

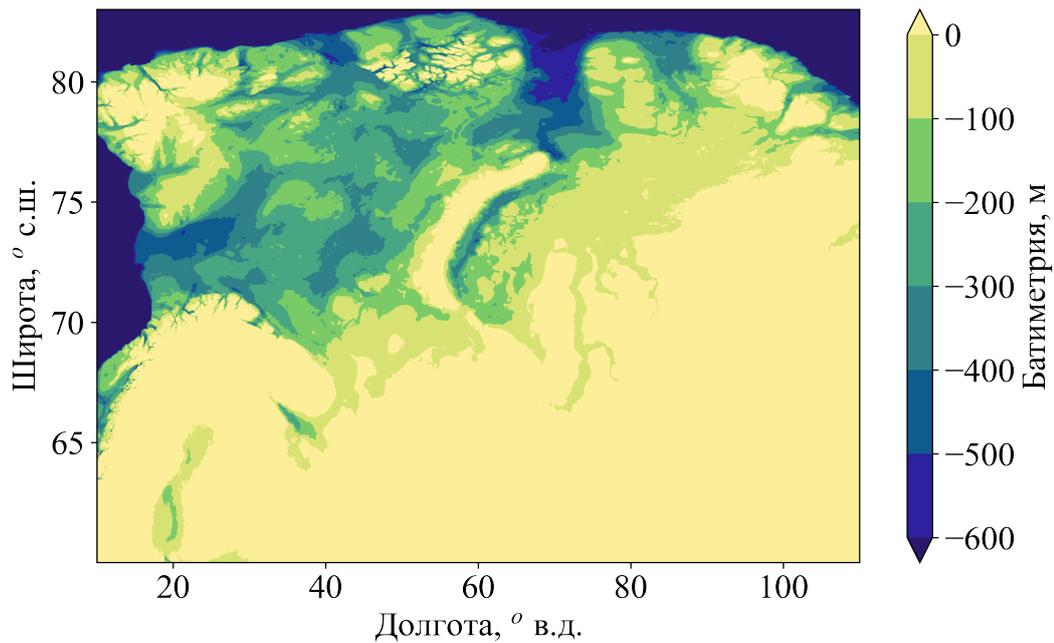


Рисунок 1.14 — Батиметрия базовой области.

а также районах Териберской, Обской и Печерской губ, внутри основной области были выделены подобласти, отмеченные на рис. 1.15. Такой подход позволяет проводить расчёты на сетках большего разрешения, т.е. точнее разрешать границу береговой линии, особенности рельефа и мелкомасштабные течения.

Первоначальный расчёт проводится по глобальной модели динамики океана NEMO, затем данные передаются в исследовательский комплекс РУМВ для расчёта гидродинамики. По окончании расчёта основной области производится пространственно-временная интерполяция всех полей: скорости ветра, скорости течений, толщины слоя воды – для задания начальных условий и граничных условий для выбранных подобластей. Далее независимо для каждой подобласти запускается численное моделирование гидродинамики в рамках РУМВ. Причём граничные условия имеют вид

$$h \Big|_{\Gamma} = \hat{h}_{Global}, \quad \frac{\partial u_x}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial u_y}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma} = 0,$$

где \hat{h}_{Global} – интерполированное значение уровня воды, рассчитанное для основной области. При этом для подобластей нет необходимости учитывать на границе приливные колебания уровня, поскольку они уже были учтены при расчёте основной области.

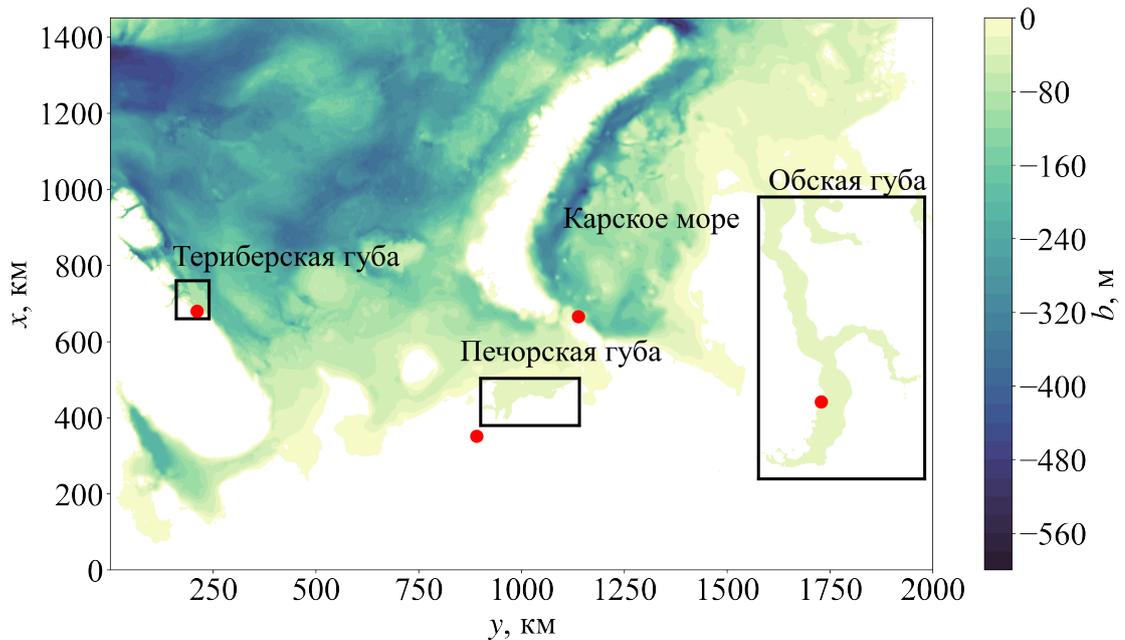


Рисунок 1.15 — Батиметрия исследуемой области, прямоугольниками отмечены подобласти, красными точками – гидрометеорологические станции.

Для верификации численных расчётов использованы данные наблюдений на гидрометеостанциях за 2013 год, [43]. Идентификаторы станций, их названия, а также координаты приведены в табл. 1.

Таблица 1 — Гидрометеорологические станции

Идентификатор	Название	Широта, ° с.ш.	Долгота, ° в.д.
70834	Нарьян-Мар (Печерская-Устьевая)	67.6	53
88014	Териберка	69.2	35.117
89002	Новый порт	67.683	72.883
89017	им. Е.К.Федорова (м.Болван.Нос)	70.45	59.083

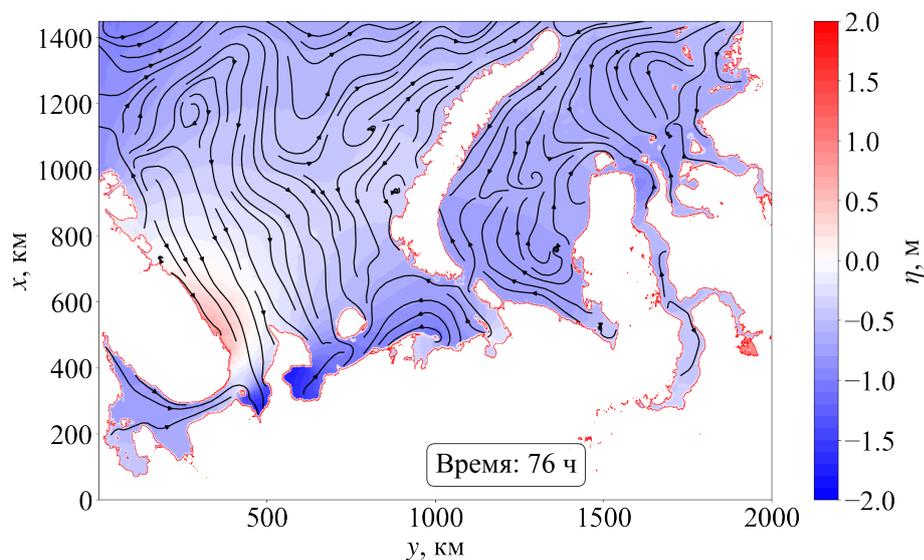
Для основной области строилась равномерная прямоугольная расчётная сетка с шагом $\Delta x_{Global} = \Delta y_{Global} = 2$ км. Для вложенных областей сетка сгущалась в 4 раза и соответствующее пространственное разрешение составляло $\Delta x_{fine} = \Delta y_{fine} = 500$ м. Параметры численного алгоритма:

$$\alpha = 0.5, \quad \beta = 0.2, \quad \varepsilon = 0.1 \text{ м.} \quad (1.37)$$

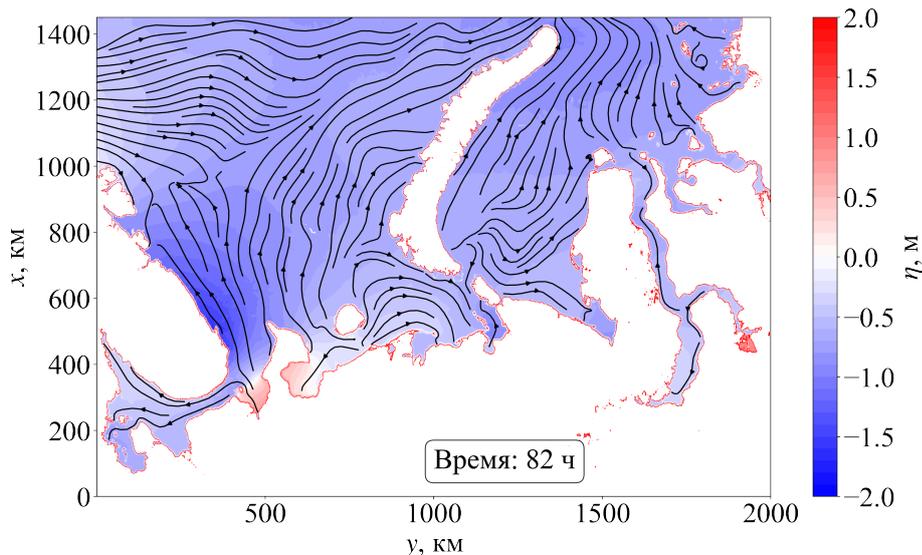
Коэффициент придонного трения $\mu^b = 2.5 \cdot 10^{-3}$, [11].

Для описанных областей проводился расчёт на период с 1 по 7 июля 2013 года. Такая дата выбрана в связи с тем, что в данный период кромка льда практически отсутствует в указанных районах, что позволяет пренебречь влиянием ледового покрытия, которое не учитывается в описываемом комплексе.

В результате моделирования приливных и нагонных течений в глобальной области были получены картины течений и изменения уровня, которые качественно согласуются с данными наблюдений, рис. 1.16. Можно заметить, что изменение уровня моря происходит с периодом в 12 часов, что соответствует реальной картине приливных колебаний.



а) $t = 76$ ч.



б) $t = 82$ ч.

Рисунок 1.16 — Отклонение уровня моря и линии тока течений.

В каждой из подобластей проведено сравнение отклонения уровня моря от нулевой отметки данных наблюдений, расчётов программного комплекса РУМВ и данных глобальной модели динамики океана NEMO. Здесь приведём примеры для Териберской губы, рис. 1.17 и Карского моря, рис. 1.18.

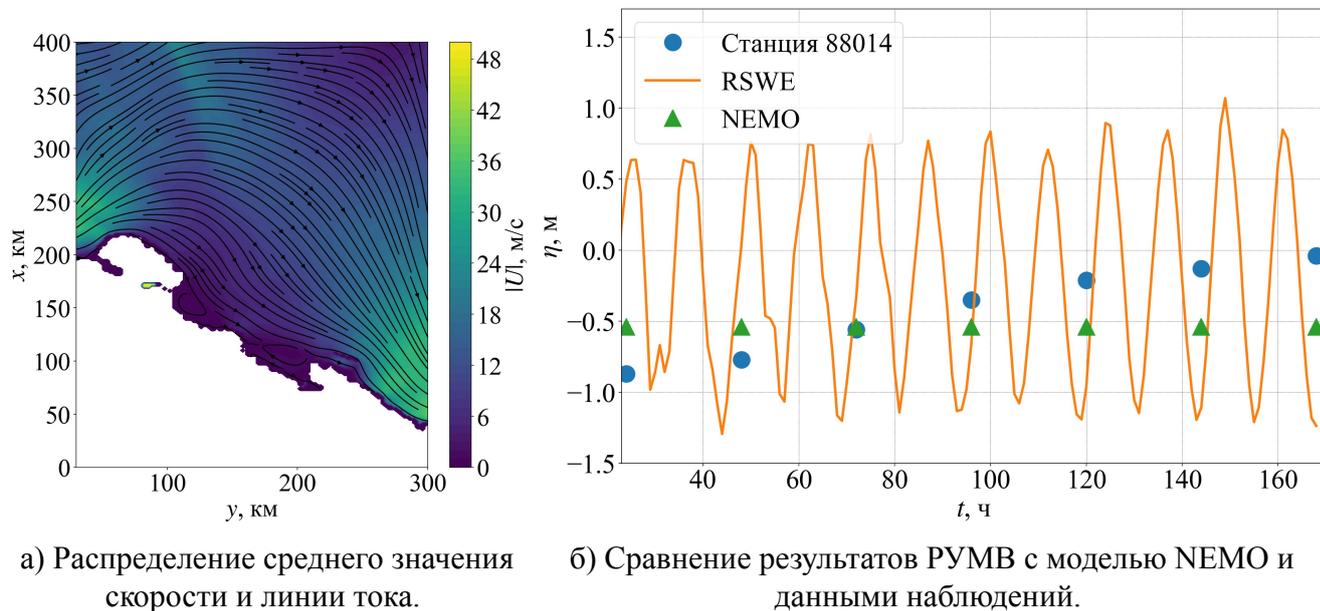


Рисунок 1.17 — Результаты расчёта для Териберской губы.

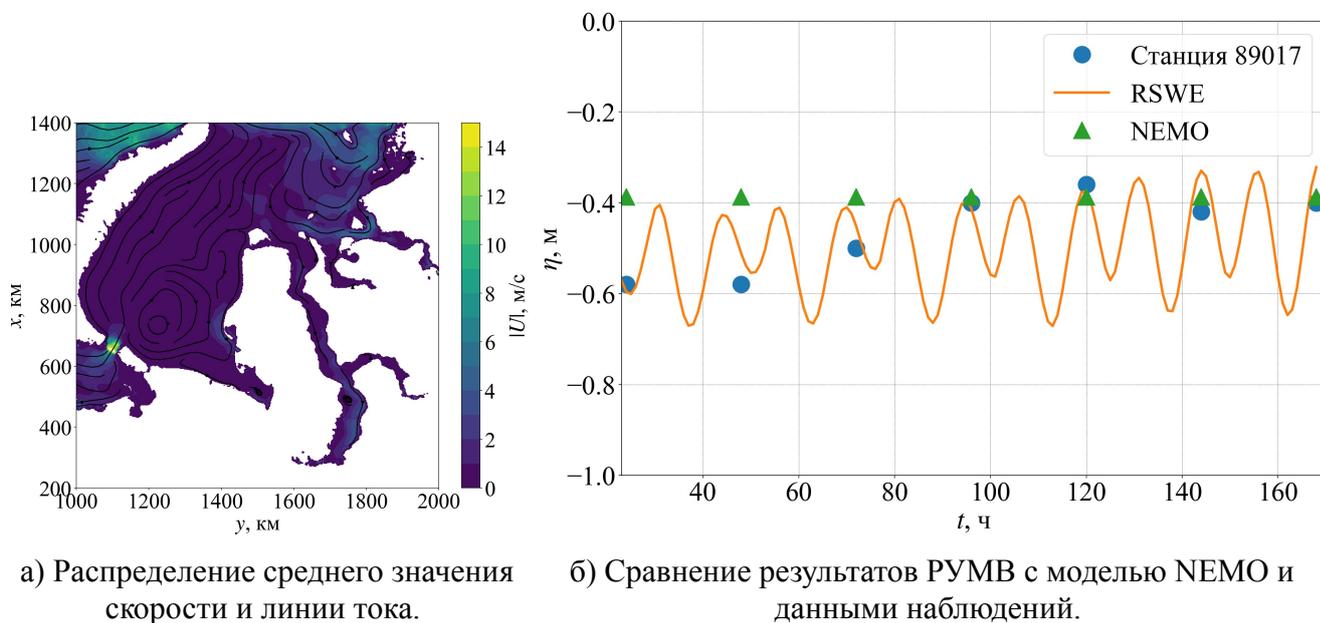


Рисунок 1.18 — Результаты расчёта для Карского моря.

Можно заметить, что результаты расчётов демонстрируют хорошую согласованность с результатами наблюдений, несмотря на имеющиеся отличия в глобальной модели NEMO. Полученные результаты хорошо описывают приливно-отливные явления в исследуемой области.

Глава 2. Моделирование неоднородных течений в приближении мелкой воды

Проблема численного моделирования неоднородных течений представляет собой актуальное направление исследований, обнаруживающее широкое применение в различных прикладных областях. Существенная доля этих задач связана с анализом динамики смеси двух компонент, таких как распространение примеси в водных средах, течения с различной плотностью (в том числе солёности или температуры), а также селевые потоки и прочие явления. В основе моделирования неоднородных течений, как правило, лежит гидродинамическая модель. В рамках данной работы в роли модели гидродинамики выступает модель мелкой воды и рассматриваются два направления это: моделирование двухкомпонентных течений несжимаемых жидкостей – модель двухслойной мелкой воды, и перенос примеси течением – модель переноса пассивного скаляра в мелкой воде.

2.1 Моделирование неоднородных течений с применением модели двухслойной мелкой воды

2.1.1 Сглаженные уравнения двухслойной мелкой воды

По аналогии с уравнениями мелкой воды, т.е. с однослойным вариантом, уравнения двухслойной мелкой воды (УДМВ) могут быть получены из уравнений Эйлера [44] и представляют собой систему из четырёх уравнений [45—54]:

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} + \nabla \cdot (h_1 \mathbf{u}_1) = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial t} + \nabla \cdot (h_2 \mathbf{u}_2) = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial (h_1 \mathbf{u}_1)}{\partial t} + \nabla \cdot (h_1 \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_1) + \nabla \frac{gh_1^2}{2} + gh_1 \nabla (rh_2 + b) = 0, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial (h_2 \mathbf{u}_2)}{\partial t} + \nabla \cdot (h_2 \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_2) + \nabla \frac{gh_2^2}{2} + gh_2 \nabla (h_1 + b) = 0, \quad (2.4)$$

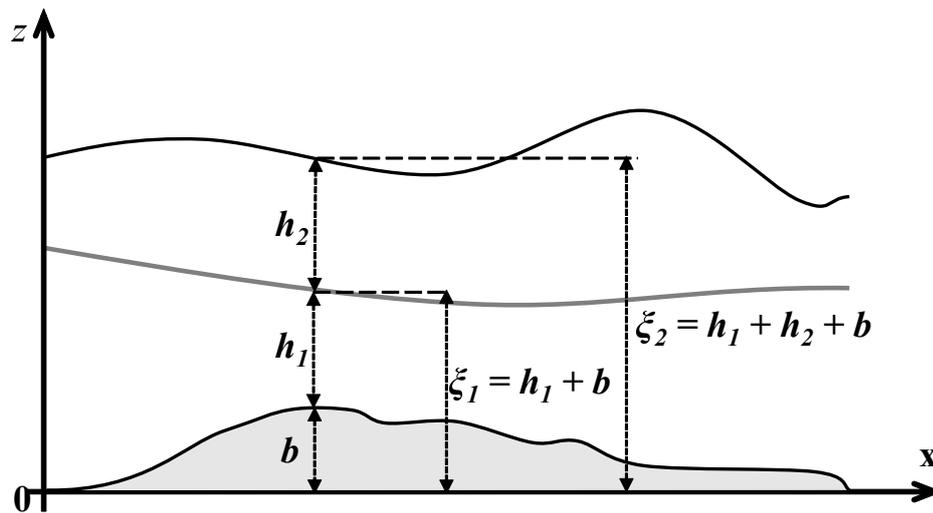


Рисунок 2.1 — Иллюстрация обозначений для уравнений двухслойной мелкой ВОДЫ.

где слои нумеруются, начиная с нижнего, $h_k(\mathbf{x}, t)$ — толщина k -го слоя, $\mathbf{u}_k(\mathbf{x}, t)$ — вектор горизонтальной скорости течения для k -го слоя, $b(\mathbf{x})$ — функция батиметрии, а $g = |\mathbf{g}|$ — модуль ускорения силы тяжести. Определим также функции поверхности $\xi_k(x, t)$, $k = 1, 2$ для каждого из слоёв, использованные обозначения пояснены на рис. 2.1:

$$\xi_1(\mathbf{x}, t) = h_1(\mathbf{x}, t) + b(\mathbf{x}), \quad (2.5)$$

$$\xi_2(\mathbf{x}, t) = h_2(\mathbf{x}, t) + h_1(\mathbf{x}, t) + b(\mathbf{x}). \quad (2.6)$$

Число $r = \rho_2/\rho_1 \leq 1$ — отношение плотности верхнего слоя к плотности нижнего. Ограничение $r \leq 1$ вытекает исходя из того, что данное приближение пренебрегает эффектами смешивания слоев, а при $r > 1$, т.е. более плотном верхнем слое и более лёгком нижнем, в системе может формироваться неустойчивость Кельвина-Гельмгольца, вследствие чего возникают вертикальные течения, что противоречит предположению о малости вертикальной компоненты скорости. Система уравнений (2.1)–(2.4) выписана без учёта внешних сил (например, силы ветра или сил Кориолиса) и без учёта сил вязкого трения, включая трение между слоями.

Система уравнений (2.1)–(2.4) состоит из двух связанных между собой подсистем, описывающих поведение отдельного слоя. Межслойное взаимодействие посредством гидростатического давления выражается в нелинейных перекрёстных слагаемых вида $h_i \nabla h_j$, $i, j = 1, 2, i \neq j$. Эти слагаемые имеют неконсерва-

тивный вид, что вносит дополнительные неустойчивости в численное решение, в отличие от классических уравнений мелкой воды.

Важно отметить, что система (2.1)–(2.4) имеет недивергентный вид. Это приводит к тому, что разностная схема, построенная на её основе, будет неконсервативной, а предельные разрывные решения в общем случае будут зависеть от метода задания схемной вязкости [52]. Обсуждение проблемы консервативности системы УДМВ и записи полной системы базисных законов сохранения приведено в статье [53]. Позже эта тема получила развитие во многих работах, обзор которых описан в статье [55]. В частности, в [56] была предложена система базисных законов сохранения, в которую вошли законы сохранения массы в слоях, закон сохранения полного импульса и закон сохранения скачка скорости на границе раздела слоёв. Детальный анализ разрывных решений, допускаемых такой базисной системой законов сохранения, в том числе, и в двумерном случае, приведён в [57].

Методам численного решения системы (2.1)–(2.4) посвящено множество работ. В частности, в работе [45] был применён подход расщепления по времени, в исследованиях [47—49] использовались кинетические алгоритмы, а в [46] между двумя слоями вводился третий слой исчезающе малой толщины, что позволило добиться устойчивости численного решения. Подробный обзор численных методов решения УДМВ можно найти в работах [45—51] и приведённых в них ссылках.

Ещё одним подходом решения системы УДМВ является введение дополнительных слагаемых в правые части уравнений импульса каждого из слоёв, которые вносят искусственную вязкость в систему, в результате чего сглаживаются разрывы численного решения. Полученная в таком случае явно-неявная схема является почти консервативной, поскольку она консервативным образом аппроксимирует законы сохранения массы и импульса в слоях, подробнее об этом написано, например, в работе Остапенко В.В. [51].

В рамках данной работы для решения системы (2.1)–(2.4), по аналогии с однослойной мелкой водой, используется метод регуляризации уравнений. Такой подход может быть рассмотрен как одна из разновидностей метода введения искусственной вязкости, вид которой согласован с особенностями исходной системы уравнений и её точными решениями. К таким методам относится, например, способ введения искусственной вязкости, аппроксимирующей физическую вяз-

кость в уравнениях гидродинамики при построении полностью консервативных схем для уравнений газовой динамики [58]. Кинетически-согласованные схемы [1; 2] и квазигазодинамические уравнения [3; 6] также можно отнести к такому классу моделей с дополнительной диссипацией.

Регуляризованная система уравнений (2.1) – (2.4) имеет вид

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_1 = 0; \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_2 = 0; \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (h_1 \mathbf{u}_1)}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{j}_1 \otimes \mathbf{u}_1) + \nabla \frac{gh_1^2}{2} + g(h_1 - \tau_1 \nabla \cdot (h_1 \mathbf{u}_1)) \nabla (rh_2 + b) - \\ - rgh_1 \nabla (\tau_2 \nabla \cdot (h_2 \mathbf{u}_2)) = \nabla \cdot \Pi_1; \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (h_2 \mathbf{u}_2)}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{j}_2 \otimes \mathbf{u}_2) + \nabla \frac{gh_2^2}{2} + g(h_2 - \tau_2 \nabla \cdot (h_2 \mathbf{u}_2)) \nabla (h_1 + b) - \\ - gh_2 \nabla (\tau_1 \nabla \cdot (h_1 \mathbf{u}_1)) = \nabla \cdot \Pi_2; \end{aligned} \quad (2.10)$$

где:

$$\mathbf{j}_1 = h_1 (\mathbf{u}_1 - \mathbf{w}_1); \quad (2.11)$$

$$\mathbf{w}_1 = \frac{\tau_1}{h_1} [\nabla \cdot (h_1 \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_1) + gh_1 \nabla (b + h_1 + rh_2)]; \quad (2.12)$$

$$\mathbf{j}_2 = h_2 (\mathbf{u}_2 - \mathbf{w}_2); \quad (2.13)$$

$$\mathbf{w}_2 = \frac{\tau_2}{h_2} [\nabla \cdot (h_2 \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_2) + gh_2 \nabla (b + h_1 + h_2)]; \quad (2.14)$$

$$\Pi_1 = \Pi_{NS_1} + \tau_1 \mathbf{u}_1 \otimes [h_1 (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla) \mathbf{u}_1 + gh_1 \nabla (b + h_1 + rh_2)] + \tau_1 I [gh_1 \nabla \cdot (h_1 \mathbf{u}_1)]; \quad (2.15)$$

$$\Pi_2 = \Pi_{NS_2} + \tau_2 \mathbf{u}_2 \otimes [h_2 (\mathbf{u}_2 \cdot \nabla) \mathbf{u}_2 + gh_2 \nabla (b + h_1 + h_2)] + \tau_2 I [gh_2 \nabla \cdot (h_2 \mathbf{u}_2)]. \quad (2.16)$$

Здесь также используется дополнительный регуляризатор – тензор вязких напряжений Навье–Стокса Π_{NS_k} , [6; 7]:

$$\Pi_{NS_k} = \tau_k gh_k \frac{h_k}{2} [(\nabla \otimes \mathbf{u}_k) + (\nabla \otimes \mathbf{u}_k)^T], \quad k = 1, 2. \quad (2.17)$$

Приведённые уравнения основаны на недивергентном виде исходной системы (2.1)–(2.4) и являются обобщением КГД-регуляризации классической системы УМВ [6; 7; 10; 59; 60].

Приведём феноменологический вывод системы регуляризованных уравнений двухслойной мелкой воды (РУДМВ) для одномерного случая. Выпишем одномерные уравнения двухслойной мелкой воды:

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (h_1 u_1) = 0, \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (h_2 u_2) = 0, \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial (h_1 u_1)}{\partial t} + \frac{\partial (h_1 u_1^2)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{gh_1^2}{2} \right) + gh_1 \frac{\partial (rh_2 + b)}{\partial x} = 0, \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial (h_2 u_2)}{\partial t} + \frac{\partial (h_2 u_2^2)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{gh_2^2}{2} \right) + gh_2 \frac{\partial (h_1 + b)}{\partial x} = 0. \quad (2.21)$$

По аналогии с построением регуляризованных уравнений газовой динамики и регуляризованных уравнений мелкой воды осредним исходную систему (2.18)–(2.21) по некоторому малому промежутку времени Δt и малому пространственному промежутку Δx . Покажем это на примере уравнения неразрывности для нижнего слоя:

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_x^{x+\Delta x} \frac{\partial h_1}{\partial t'} dx' dt' + \int_t^{t+\Delta t} \int_x^{x+\Delta x} \frac{\partial}{\partial x} (h_1 u_1) dx' dt' = 0.$$

Применим формулу среднего значения и получим

$$\frac{\widehat{h}_1 - h_1}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x} (h_1^* u_1^*) = 0,$$

где $\widehat{h}_1 = h_1(x, t + \Delta t)$, а h_1^*, u_1^* – это толщина и скорость первого слоя, взятые в некоторый момент времени $t^* : t < t^* < t + \Delta t$.

Предположим, что рассматриваемый интервал времени Δt достаточно мал, причём изменения параметров $h_k, u_k, k = 1, 2$ по времени имеет линейный характер, тогда можно представить h_1^*, u_1^* как разложение по малому параметру

$\tau = t^* - t$, оставив только первый порядок малости:

$$u_1^* = u_1 + \tau \frac{\partial u_1}{\partial t} + \mathcal{O}(\tau^2), \quad h_1^* = h_1 + \tau \frac{\partial h_1}{\partial t} + \mathcal{O}(\tau^2). \quad (2.22)$$

Используя (2.22), распишем $h_1^* u_1^*$, оставив только слагаемые с первым порядком по τ :

$$h_1^* u_1^* = \left(h_1 + \tau \frac{\partial h_1}{\partial t} \right) \left(u_1 + \tau \frac{\partial u_1}{\partial t} \right) = h_1 u_1 + \tau \frac{\partial (h_1 u_1)}{\partial t} + \mathcal{O}(\tau^2).$$

Производную по времени выразим из уравнения импульса (2.20)

$$\frac{\partial (h_1 u_1)}{\partial t} = - \frac{\partial (h_1 u_1^2)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{gh_1^2}{2} \right) - rgh_1 \frac{\partial h_2}{\partial x} - gh_1 \frac{\partial b}{\partial x}.$$

Введём обозначение

$$j_1 = h_1 (u_1 - w_1), \quad w_1 = \frac{\tau}{h_1} \left[\frac{\partial (h_1 u_1^2)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{gh_1^2}{2} \right) + rgh_1 \frac{\partial h_2}{\partial x} + gh_1 \frac{\partial b}{\partial x} \right].$$

Тогда, устремив $\Delta x \rightarrow 0$ и учитывая, что при достаточно малых значениях Δt можно перейти от $\frac{\hat{h}_1 - h_1}{\Delta t}$ к производной по времени, получим:

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial j_1}{\partial x} = 0.$$

Таким же образом, осредняя уравнение импульса (2.20), получим

$$\frac{\hat{h}_1 \hat{u}_1 - h_1 u_1}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x} h_1^* (u_1^*)^2 + \frac{1}{\Delta x} \frac{g (h_1^*)^2}{2} + \int_x^{x+\Delta x} gh_1^* \frac{\partial b}{\partial x} dx' + \int_x^{x+\Delta x} gh_1^* r \left(\frac{\partial h_2}{\partial x} \right)^* dx' = 0.$$

Раскроем каждое из слагаемых, используя (2.22):

$$\begin{aligned} h_1^* (u_1^*)^2 &= \left(h_1 + \tau \frac{\partial h_1}{\partial t} \right) \left(u_1 + \tau \frac{\partial u_1}{\partial t} \right)^2 = \\ &= u_1 \left(h_1 u_1 + \tau \frac{\partial (h_1 u_1)}{\partial t} \right) + u_1 h_1 \tau \frac{\partial u_1}{\partial t} + \mathcal{O}(\tau^2) = u_1 j_1 + u_1 h_1 \tau \frac{\partial u_1}{\partial t} + \mathcal{O}(\tau^2). \end{aligned}$$

Производную скорости u_1 по времени выразим из (2.20):

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = - \left[u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + g \frac{\partial h_1}{\partial x} + rg \frac{\partial h_2}{\partial x} + g \frac{\partial b}{\partial x} \right].$$

Распишем следующее слагаемое, используя (2.18):

$$\frac{1}{2}g(h_1^*)^2 = \frac{1}{2}g \left(h_1 + \tau \frac{\partial h_1}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2}gh_1^2 + gh_1\tau \left[-h_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} - u_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} \right] + O(\tau^2).$$

Учитывая предыдущие выкладки, введём обозначение:

$$\Pi_1 = \tau u_1 h_1 \left[u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + g \frac{\partial h_1}{\partial x} + rg \frac{\partial h_2}{\partial x} + g \frac{\partial b}{\partial x} \right] + \tau gh_1 \left[h_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} \right].$$

Оставшиеся слагаемые содержат h_1^* вне производной и будут записаны в виде:

$$h_1^* = \left(h_1 - \tau_1 \frac{\partial(h_1 u_1)}{\partial x} \right).$$

Последним шагом является преобразование производной $(\partial h_2 / \partial x)^*$:

$$\left(\frac{\partial h_2}{\partial x} \right)^* = \frac{\partial \left(h_2 - \tau \frac{\partial(h_2 u_2)}{\partial x} \right)}{\partial x} = \frac{\partial h_2}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\tau \frac{\partial(h_2 u_2)}{\partial x} \right).$$

Перейдя к $\Delta x \rightarrow 0$ аналогично для достаточно малого Δt , для уравнения (2.20) получим:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(h_1 u_1)}{\partial t} + \frac{\partial(u_1 j_1)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{gh_1^2}{2} \right) + \\ & + g \left(h_1 - \tau \frac{\partial(h_1 u_1)}{\partial x} \right) \left[\frac{\partial h_2}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\tau \frac{\partial(h_2 u_2)}{\partial x} \right) + \frac{\partial b}{\partial x} \right] = \frac{\partial \Pi_1}{\partial x}, \end{aligned}$$

причём величина:

$$g\tau \frac{\partial(h_1 u_1)}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\tau \frac{\partial(h_2 u_2)}{\partial x} \right) \sim O(\tau^2),$$

имеет второй порядок малости по τ и потому ею можно пренебречь.

Повторив те же действия для уравнения (2.21) и упростив выражения, получим систему сглаженных уравнений для второго слоя.

Отметим, что поскольку параметр τ – время осреднения – по смыслу есть время, которое необходимо малому возмущению для преодоления некоторого малого объёма, то несмотря на малость величины τ для слоёв время будет различаться. Поэтому введём параметры τ_1, τ_2 для нижнего и верхнего слоёв соответственно. В таком случае, построенная система регуляризованных система для УДМВ в одномерном случае имеет вид

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial j_1}{\partial x} = 0; \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial t} + \frac{\partial j_2}{\partial x} = 0; \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (h_1 u_1)}{\partial t} + \frac{\partial (u_1 j_1)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{gh_1^2}{2} \right) + g \left(h_1 - \tau_1 \frac{\partial (h_1 u_1)}{\partial x} \right) \left[r \frac{\partial h_2}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial x} \right] - \\ - rgh_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\tau_2 \frac{\partial (h_2 u_2)}{\partial x} \right) = \frac{\partial \Pi_1}{\partial x}; \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (h_2 u_2)}{\partial t} + \frac{\partial (u_2 j_2)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{gh_2^2}{2} \right) + g \left(h_2 - \tau_2 \frac{\partial (h_2 u_2)}{\partial x} \right) \left[\frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial x} \right] - \\ - gh_2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\tau_1 \frac{\partial (h_1 u_1)}{\partial x} \right) = \frac{\partial \Pi_2}{\partial x}; \end{aligned} \quad (2.26)$$

где:

$$j_1 = h_1 (u_1 - w_1); \quad (2.27)$$

$$w_1 = \frac{\tau_1}{h_1} \left[\frac{\partial (h_1 u_1^2)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{gh_1^2}{2} \right) + gh_1 \frac{\partial}{\partial x} (rh_2 + b) \right]; \quad (2.28)$$

$$j_2 = h_2 (u_2 - w_2); \quad (2.29)$$

$$w_2 = \frac{\tau_2}{h_2} \left[\frac{\partial (h_2 u_2^2)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{gh_2^2}{2} \right) + gh_2 \frac{\partial}{\partial x} (h_1 + b) \right]; \quad (2.30)$$

$$\Pi_1 = u_1 h_1 \tau_1 \left[u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + g \frac{\partial}{\partial x} (h_1 + rh_2 + b) \right] + gh_1 \tau_1 \frac{\partial (h_1 u_1)}{\partial x}; \quad (2.31)$$

$$\Pi_2 = u_2 h_2 \tau_2 \left[u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + g \frac{\partial}{\partial x} (h_1 + h_2 + b) \right] + g h_2 \tau_2 \frac{\partial (h_2 u_2)}{\partial x}. \quad (2.32)$$

2.1.2 Алгоритм численного решения регуляризованных уравнений двухслойной мелкой воды

Аппроксимация одномерных уравнений

Аналогично методу аппроксимации РУМВ [7; 10], для численного решения регуляризованных уравнений двухслойной мелкой воды в одномерном случае (2.23)–(2.32) воспользуемся методом конечных объёмов и явной схемой по времени.

В узлах пространственной сетки i заданы величины толщины слоя $h_k(x, t)$ и скорости течения слоя $u_k(x, t)$, где $k = 1, 2$. Скорость и толщину слоёв в момент времени t в точке x_i будем обозначать без индекса ячейки $h_k, u_k, k = 1, 2$, в момент времени $t + \Delta t$ символом $\hat{\cdot} : \hat{h}_k, \hat{u}_k, k = 1, 2$, а значения на границах между ячейками в точках $i \pm 1/2$ определим как полусумму значений в ячейках:

$$b_{i+1/2} = \frac{b_i + b_{i+1}}{2}, \quad (\tau_k)_{i+1/2} = \frac{(\tau_k)_i + (\tau_k)_{i+1}}{2}$$

$$(h_k)_{i+1/2} = \frac{(h_k)_i + (h_k)_{i+1}}{2}, \quad (u_k)_{i+1/2} = \frac{(u_k)_i + (u_k)_{i+1}}{2}, \quad k = 1, 2.$$

Тогда на равномерной сетке с шагом по времени Δt и пространственным шагом Δx получим выражения для потоковых величин:

$$(j_1)_{i+1/2} = (h_1)_{i+1/2} \left((u_1)_{i+1/2} - (w_1)_{i+1/2} \right), \quad (2.33)$$

$$(j_2)_{i+1/2} = (h_2)_{i+1/2} \left((u_2)_{i+1/2} - (w_2)_{i+1/2} \right). \quad (2.34)$$

$$(w_1)_{i+1/2} = \frac{(\tau_1)_{i+1/2}}{(h_1)_{i+1/2}} \left(\frac{(h_1 u_1^2)_{i+1} - (h_1 u_1^2)_i}{\Delta x} + g \frac{(h_1^2)_{i+1} - (h_1^2)_i}{2\Delta x} + g(h_1)_{i+1/2} \frac{r(h_2)_{i+1} + b_{i+1} - r(h_2)_i - b_i}{\Delta x} \right); \quad (2.35)$$

$$(w_2)_{i+1/2} = \frac{(\tau_2)_{i+1/2}}{(h_2)_{i+1/2}} \left(\frac{(h_2 u_2^2)_{i+1} - (h_2 u_2^2)_i}{\Delta x} + g \frac{(h_2^2)_{i+1} - (h_2^2)_i}{2\Delta x} + g(h_2)_{i+1/2} \frac{(h_1)_{i+1} + b_{i+1} - (h_1)_i - b_i}{\Delta x} \right). \quad (2.36)$$

$$(\Pi_1)_{i+1/2} = (\tau_1)_{i+1/2} (u_1)_{i+1/2} (h_1)_{i+1/2} \left((u_1)_{i+1/2} \frac{(u_1)_{i+1} - (u_1)_i}{\Delta x} + g \frac{(h_1^2)_{i+1} - (h_1^2)_i}{2\Delta x} + g \frac{r(h_2)_{i+1} + b_{i+1} - r(h_2)_i - b_i}{\Delta x} \right) + g(h_1)_{i+1/2} (\tau_1)_{i+1/2} \frac{(h_1)_{i+1} (u_1)_{i+1} - (h_1)_i (u_1)_i}{\Delta x}; \quad (2.37)$$

$$(\Pi_2)_{i+1/2} = (\tau_2)_{i+1/2} (u_2)_{i+1/2} (h_2)_{i+1/2} \left((u_2)_{i+1/2} \frac{(u_2)_{i+1} - (u_2)_i}{\Delta x} + g \frac{(h_2^2)_{i+1} - (h_2^2)_i}{2\Delta x} + g \frac{(h_1)_{i+1} + b_{i+1} - (h_1)_i - b_i}{\Delta x} \right) + g(h_2)_{i+1/2} (\tau_2)_{i+1/2} \frac{(h_2)_{i+1} (u_2)_{i+1} - (h_2)_i (u_2)_i}{\Delta x}. \quad (2.38)$$

Тогда аппроксимация уравнений неразрывности (2.23), (2.24) имеет вид

$$\frac{\widehat{h}_1 - h_1}{\Delta t} + \frac{(j_1)_{i+1/2} - (j_1)_{i-1/2}}{\Delta x} = 0; \quad (2.39)$$

$$\frac{\widehat{h}_2 - h_2}{\Delta t} + \frac{(j_2)_{i+1/2} - (j_2)_{i-1/2}}{\Delta x} = 0. \quad (2.40)$$

Введём также аппроксимацию производных от потоков, обозначив $s_k = \frac{\partial(h_k u_k)}{\partial x}$.

$$(s_1)_{i+1/2} = \frac{(h_1)_{i+1} (u_1)_{i+1} - (h_1)_i (u_1)_i}{\Delta x}, \quad (2.41)$$

$$(s_2)_{i+1/2} = \frac{(h_2)_{i+1}(u_2)_{i+1} - (h_2)_i(u_2)_i}{\Delta x}. \quad (2.42)$$

Тогда аппроксимация уравнений импульса (2.25), (2.26) имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{\widehat{h}_1 \widehat{u}_1 - h_1 u_1}{\Delta t} + \frac{(u_1)_{i+1/2}(j_1)_{i+1/2} - (u_1)_{i-1/2}(j_1)_{i-1/2}}{\Delta x} + \\ & + g \frac{(h_1^2)_{i+1/2} - (h_1^2)_{i-1/2}}{2\Delta x} + rg(h_1^*)_i \frac{(h_2)_{i+1/2} - (h_2)_{i-1/2}}{\Delta x} - \\ & - rg(h_1^{**})_i \frac{(s_2)_{i+1/2}(\tau_2)_{i+1/2} - (s_2)_{i-1/2}(\tau_2)_{i-1/2}}{\Delta x} + \\ & + g(h_1^*)_i \frac{b_{i+1/2} - b_{i-1/2}}{\Delta x} = \frac{(\Pi_1)_{i+1/2} - (\Pi_1)_{i-1/2}}{\Delta x}; \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\widehat{h}_2 \widehat{u}_2 - h_2 u_2}{\Delta t} + \frac{(u_2)_{i+1/2}(j_2)_{i+1/2} - (u_2)_{i-1/2}(j_2)_{i-1/2}}{\Delta x} + \\ & + g \frac{(h_2^2)_{i+1/2} - (h_2^2)_{i-1/2}}{2\Delta x} + g(h_2^*)_i \frac{(h_1)_{i+1/2} - (h_1)_{i-1/2}}{\Delta x} - \\ & - g(h_2^{**})_i \frac{(s_1)_{i+1/2}(\tau_1)_{i+1/2} - (s_1)_{i-1/2}(\tau_1)_{i-1/2}}{\Delta x} + \\ & + g(h_2^*)_i \frac{b_{i+1/2} - b_{i-1/2}}{\Delta x} = \frac{(\Pi_2)_{i+1/2} - (\Pi_2)_{i-1/2}}{\Delta x}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Здесь подразумевается, что:

$$(h_k^*)_i = (h_k^{**})_i - (\tau_k)_i \frac{(h_k)_{i+1/2}(u_k)_{i+1/2} - (h_k)_{i-1/2}(u_k)_{i-1/2}}{\Delta x}, \quad k = 1, 2. \quad (2.45)$$

Аппроксимацию h_1^{**} и h_2^{**} в выражении (2.45) можно определить различными способами, что отразится на точности выполнения условий «хорошей балансировки». Подробнее это описано в следующем разделе.

Слагаемые, содержащие коэффициенты регуляризации τ_1 и τ_2 обеспечивают устойчивость численного алгоритма. Для плоских течений их можно определить по аналогии с регуляризованными уравнениями мелкой воды как

$$\tau_1 = \alpha_1 \frac{\Delta x}{c_1 + |\mathbf{u}_1|}, \quad c_1 = \sqrt{gh_1}; \quad (2.46)$$

$$\tau_2 = \alpha_2 \frac{\Delta x}{c_2 + |\mathbf{u}_2|}, \quad c_2 = \sqrt{gh_2}. \quad (2.47)$$

Величина τ_k пропорциональна шагу пространственной сетки Δx с коэффициентом α_k , где $0 < \alpha_k < 1$ – число, выбираемое из условий точности и устойчивости счёта. Далее везде при совпадении значений коэффициентов $\alpha_1 = \alpha_2$ они будут указываться без индекса: $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$.

Полученная схема, по аналогии с РУМВ является условно-устойчивой. Условие устойчивости Куранта для неё имеет вид

$$\Delta t = \beta \left(\frac{\Delta x}{c_k} \right)_{min}, \quad k = 1, 2, \quad (2.48)$$

причём во всех расчётах использовалось значение коэффициента $\beta = 0.1$

Отметим, что границы расчётной области располагаются в полуцелых точках. В разностном виде граничные условия ставятся с использованием фиктивных узлов и аппроксимации второго порядка точности.

Условия гидростатического равновесия

Аналогично РУМВ для двухслойной мелкой воды можно определить условия «хорошей балансировки» или условия гидростатического равновесия, которые выражаются в том, что покоящаяся двухслойная жидкость при отсутствии внешнего воздействия и внутренних течений будет оставаться в покое с течением времени, вне зависимости от формы поверхности дна. Для обеспечения выполнения условия используются сложные и трудоёмкие методы, например [45], [46].

Используя введённые обозначения (2.5) и (2.6) запишем условие балансировки:

$$\xi_k(x, t) = \xi_k(x, t = 0) = const, \quad u_k(x, t) = u_k(x, t = 0) = 0, \quad k = 1, 2.$$

Причём в отличие от однослойной мелкой воды, в двухслойной модели это можно свести к условию

$$h_1 + b = const, \quad h_2 = const, \quad u_1 = u_2 = 0.$$

Особенностью описываемого подхода является то, что благодаря специального вида аппроксимации слагаемых, содержащих $(h_k^{**})_i$ можно добиться точного выполнения условия на сеточном уровне.

Приведём для сравнения два метода аппроксимации:

Метод 1:

$$(h_k^{**})_i = \frac{(h_k)_{i+1/2} + (h_k)_{i-1/2}}{2}, \quad k = 1, 2. \quad (2.49)$$

Метод 2:

$$(h_k^{**})_i = (h_k)_i, \quad l = 1, 2. \quad (2.50)$$

Подставив аппроксимацию h_k^{**} , $k = 1, 2$ первым методом (2.49) в уравнения (2.33)–(2.44), можно убедиться, что условие балансировки выполняется точно, как и для однослойного случая, который описан в разделе 1.2.3 первой главы. При подстановке аппроксимации h_k^{**} , $k = 1, 2$ вторым методом (2.50) для удовлетворения системы (2.33)–(2.44) условию балансировки необходимо чтобы выполнялось соотношение

$$(h_k)_i = \frac{(h_k)_{i+1/2} + (h_k)_{i-1/2}}{2}, \quad k = 1, 2.$$

Пример расчёта задачи с разрывным дном приведён на рис. 2.2. Начальные условия описывают покоящуюся жидкость:

$$h_2(x, t = 0) = \text{const} = 2,$$

$$h_1(x, t = 0) + b(x) = \text{const} = 2,$$

$$u_1(x, t = 0) = u_2(x, t = 0) = 0.$$

Профиль дна «ступенька» с разрывом в точке $x = 50$:

$$b(x) = \begin{cases} 0, & x < 50, \\ 1, & x \geq 50. \end{cases}$$

Расчёт проводился при постоянных значениях коэффициентов:

$$r = 0.5, \quad \beta = 0.1, \quad \alpha = 0.3$$

и для шага сетки $\Delta x = 1$. Здесь также величина α соответствует наиболее устойчивому значению для регуляризованной системы [7], хотя очевидно, что условие

гидростатического равновесия будет выполняться при любых значениях этих коэффициентов. Время счёта: $t = 1$.

Для аппроксимации методом 1, рис. 2.2а, величину погрешности можно считать равной точности машинного вычисления $\sim 10^{-15} - 10^{-16}$. Второй же метод, рис. 2.2б, показывает, что условие балансировки выполнено приближённо. Причём, величина ошибки, не уменьшается при сгущении сетки, что отражено в табл. 2, где указаны максимальные значения ошибок.

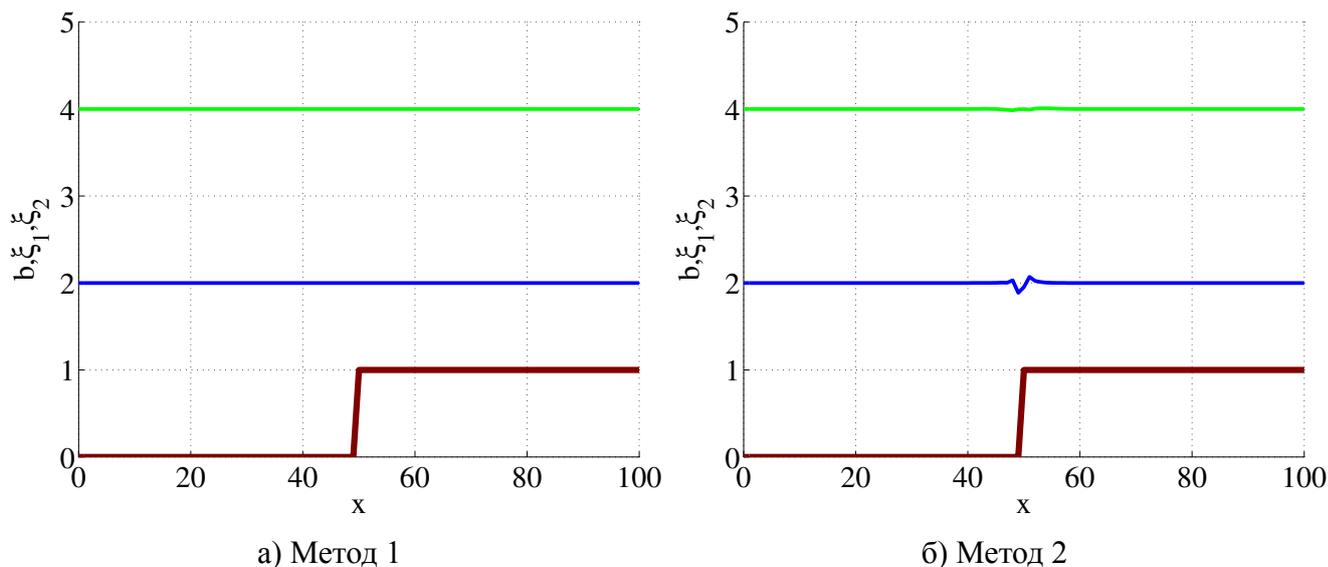


Рисунок 2.2 — Условия «хорошей балансировки». Шаг сетки $\Delta x = 1$

Таблица 2 — Ошибки в условии балансировки для различных разбиений Δx

	$\Delta x = 1$	$\Delta x = 0.5$	$\Delta x = 0.2$	$\Delta x = 0.1$
$\max_{\forall x,t} h_1(x,t) - h_1(x,0) $	0.13	0.16	0.15	0.14
$\max_{\forall x,t} h_2(x,t) - h_2(x,0) $	0.025	0.025	0.021	0.021

Отметим, что во всех дальнейших расчётах используется первый метод аппроксимации (2.49) для удовлетворения алгоритма условиям гидростатического равновесия.

2.1.3 Численное моделирование одномерных задач

Распад неподвижного разрыва

Эта задача была поставлена и описана в [45]. В области $x \in [0, 10]$ с плоским дном ($b(x) = 0$) начальные условия представляют собой разрыв, расположенный в центре, в точке $x = 5$:

$$\begin{aligned} h_1(x, t = 0) &= \begin{cases} 0.2, & x < 5, \\ 1.8, & x \geq 5, \end{cases} \\ h_2(x, t = 0) + h_1(x, t = 0) &= 2, \\ u_1(x, t = 0) = u_2(x, t = 0) &= 0. \end{aligned}$$

На обеих границах ставятся условия сноса потока

$$\left. \frac{\partial h_k}{\partial x} \right|_{x=0, x=10} = 0, \quad \left. \frac{\partial u_k}{\partial x} \right|_{x=0, x=10} = 0, \quad k = 1, 2.$$

Величина $g = 9.81$, а расчёт ведётся до момента $t = 1$. Для решения этой задачи в работе [45] применялись гидростатические солверы первого и второго порядка точности, а также кинетический солвер, который считается более точным и устойчивым.

Для отношения плотностей слоёв $r = 0.7$ результаты расчёта показаны на рис. 2.3. Полученное решение для разбиения $\Delta x = 0.02$ хорошо согласуется с результатом для схемы с применением гидростатического солвера второго порядка точности из работы [45] с таким же шагом по пространству. Аналогично [45] можно заметить три характерных плато для обоих слоёв в областях $x \in [0, 3]$; $x \in [4, 5]$; $x \in [6, 9]$. Кроме того, при сгущении сетки наблюдается сходимость решения, рис. 2.3

Также в работе [45] отмечается, что при решении этой задачи гидростатическим солвером, имеющим первый порядок точности, возникают разрывы численного решения нефизичного характера. Однако решение, полученное с применением, более точного и универсального кинетического солвера с первым порядком

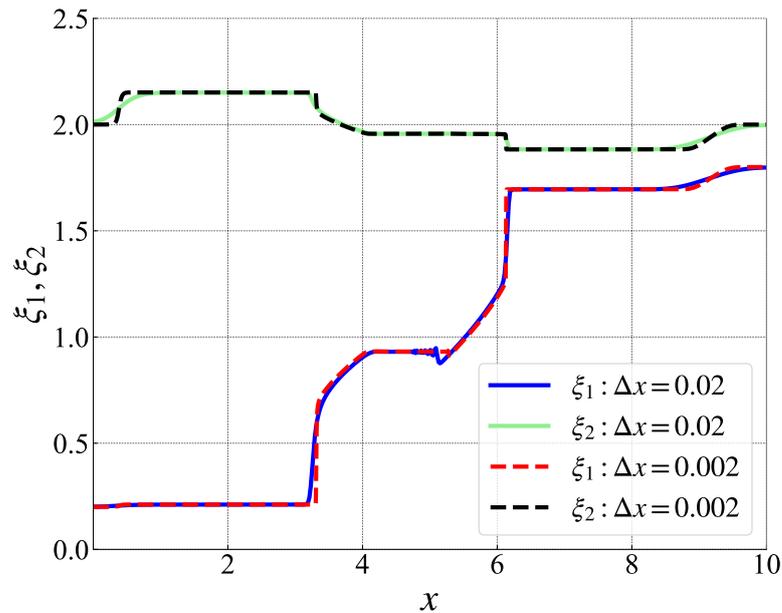


Рисунок 2.3 — Распад разрыва, распределение слоёв для различных Δx при $r = 0.7, t = 1, \alpha = 0.5, \beta = 0.1$.

точности, оказывается нефизичным и слишком сглаженным. Только с применением гидростатического или кинетического солверов второго порядка точности можно получить адекватное численное решение в рамках этой задачи.

Рассмотрим также эту задачу, но для близких по величине плотностей. На рис. 2.4а представлено решение при $r = 1$. Поскольку плотности слоёв равны, то межслойное воздействие уравнивается, ввиду чего начальное распределение не меняется и принимает устойчивый вид $\forall t$. Это соответствует покоящейся однородной несжимаемой жидкости, которая находится в равновесии. В отличие от случая $r = 1.0005$, рис. 2.4б. Небольшое увеличение плотности верхнего слоя приводит к тому, что уже в момент времени $t > 0.24$ решение разрушается, что соответствует физической неустойчивости случая с более тяжёлым верхним слоем.

Таким образом оба варианта $r = 1$ рис. 2.4а и $r > 1$ рис. 2.4б физически корректно воспроизводятся алгоритмом, с учётом ограничения модели.

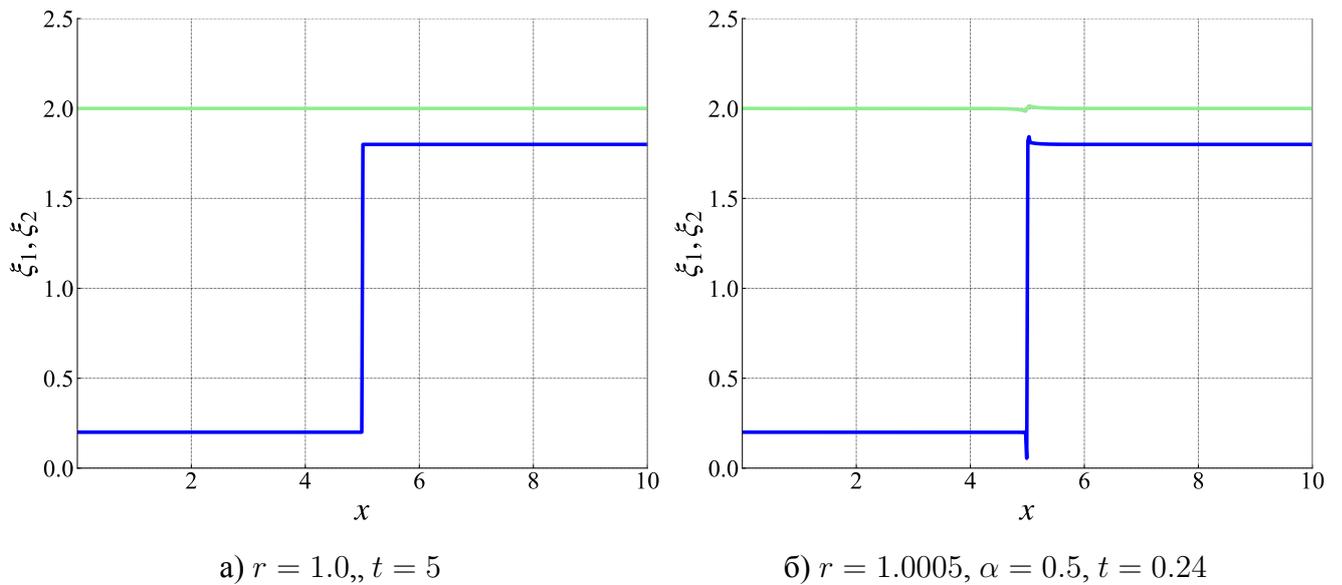


Рисунок 2.4 — Распад разрыва для $r \sim 1$. Шаг сетки $\Delta x = 0.02$, $\beta = 0.1$, $\alpha = 0.5$.

Распад разрыва вблизи наклонного берега

Постановка задачи о распаде разрыва вблизи наклонного берега взята из [45]. Рассматривается область $x \in [0, 10]$ с наклонным дном

$$b(x) = \begin{cases} 0, & x < 0.5, \\ 4(x - 2), & x \geq 0.5. \end{cases}$$

Начальное распределение толщины слоёв и скоростей течений имеет вид:

$$h_1(x, t = 0) = \begin{cases} 0.5, & x < 0.25, \\ 0, & x \geq 0.25, \end{cases}$$

$$h_2(x, t = 0) = (1 - h_1(x, t = 0) - b(x))_+,$$

$$u_1(x, t = 0) = u_2(x, t = 0) = 0.$$

Шаг сетки $\Delta x = 0.01$, $g = 9.81$, $r = 0.95$.

В данной задаче аналогично однослойной мелкой воде появляется особенность в виде сухих зон, причём для каждого слоя в отдельности. Для решения этой проблемы в [45] применялся кинетический солвер, а на левой границе $x = 0$

ставилось условие “твёрдой стенки”

$$\left. \frac{\partial h_k}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad u_k|_{x=0} = 0, \quad k = 1, 2.$$

В работе [45] отмечается, что для решения наблюдается хорошее поведение в сухих областях, кроме того с течением времени колебания слоёв затухают и при достижении $t = 50$ слои находятся в устойчивом положении равновесия благодаря выполнению условий балансировки.

Для учёта сухих зон к системе разностных уравнений (2.33)–(2.44) были добавлены условия “сухого дна”. По аналогии с РУМВ выберем некоторый уровень отсечения для нижнего и верхнего слоя ε_1 и ε_2 соответственно, однако поскольку везде будем полагать их равными, то будем обозначать $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$. Тогда условия можно записать как

$$(\tau_k)_i = \begin{cases} \alpha \frac{\Delta x}{\sqrt{g(h_k)_i + |(u_k)_i|}}, & (h_k)_i > \varepsilon, \\ 0, & (h_k)_i \leq \varepsilon, \end{cases} \quad (k = 1, 2)$$

а также:

$$\hat{u}_1 = \begin{cases} (2.43), & \hat{h}_1 > \varepsilon, \\ 0, & \hat{h}_1 \leq \varepsilon, \end{cases} \quad \hat{u}_2 = \begin{cases} (2.44), & \hat{h}_2 > \varepsilon, \\ 0, & \hat{h}_2 \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Величина параметра отсечения в этой задаче равна $\varepsilon = 10^{-3}$.

На рис. 2.5 изображено распределение слоёв для момента времени $t = 0.2$. Сравнение результатов с [45] показывает совпадение профилей движения фронта нижнего слоя при тех же разбиениях сетки. При сгущении сетки для $t = 0.2$ наблюдается сходимость решения. На рис. 2.6 представлены демонстрация набегания нижнего слоя на наклонный берег рис. 2.6а–2.6в, а также устойчивое равновесное состояние двух слоёв для $t = 50$ на рис. 2.6г, при этом положение фронта и высоты слоев хорошо совпадают с эталонными данными из [45].

По результатам моделирования двух задач о распаде разрыва можно заметить, что точность численной схемы РУДМВ соответствует гидростатическому солверу [45] второго порядка точности и, в то же время, позволяет решать задачи, для которых используется более устойчивый кинетический солвер второго порядка точности.

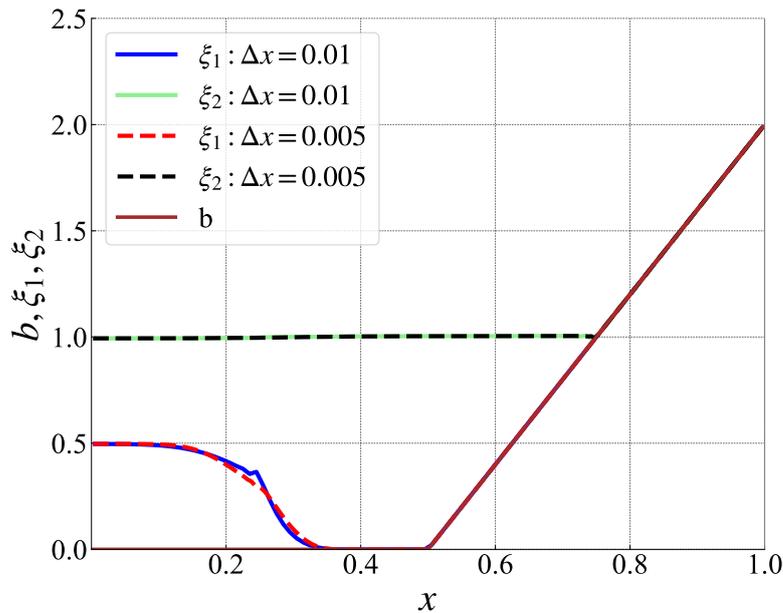


Рисунок 2.5 — Распад разрыва вблизи наклонного берега, распределение слоёв для различных Δx при $r = 0.95$, $t = 0.2$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.1$.

Задача о транскритическом течении над неровностями дна

Следующая задача взята из [46], а также исследовалась в различных работах, например в [54]. Она соответствует задаче о транскритическом течении, соединяющем два бесконечных резервуара, где наблюдается изменение числа Фруда от значений меньших единицы, до сверхкритических значений, достигающихся на гребне. В зависимости от начальных и граничных условий в решении может формироваться неподвижный разрыв – гидродинамический скачок.

Для системы уравнений двухслойной мелкой воды (2.1) – (2.4) можно выписать точное решение вида

$$\begin{cases} h_1 u_1 = Q_1, & \frac{Q_1^2}{2h_1^2} + g(h_1 + r h_2 + b) = E_1, \\ h_2 u_2 = Q_2, & \frac{Q_2^2}{2h_2^2} + g(h_1 + h_2 + b) = E_2, \end{cases} \quad (2.51)$$

где Q_1 , Q_2 , E_1 , E_2 – некоторые числовые константы.

Это решение описывает стационарное течение постоянного потока над неровным дном, а физическая интерпретация системы (2.51) – постоянство потока Q_k и энергии E_k стационарного течения во времени. Решение системы (2.51) об-

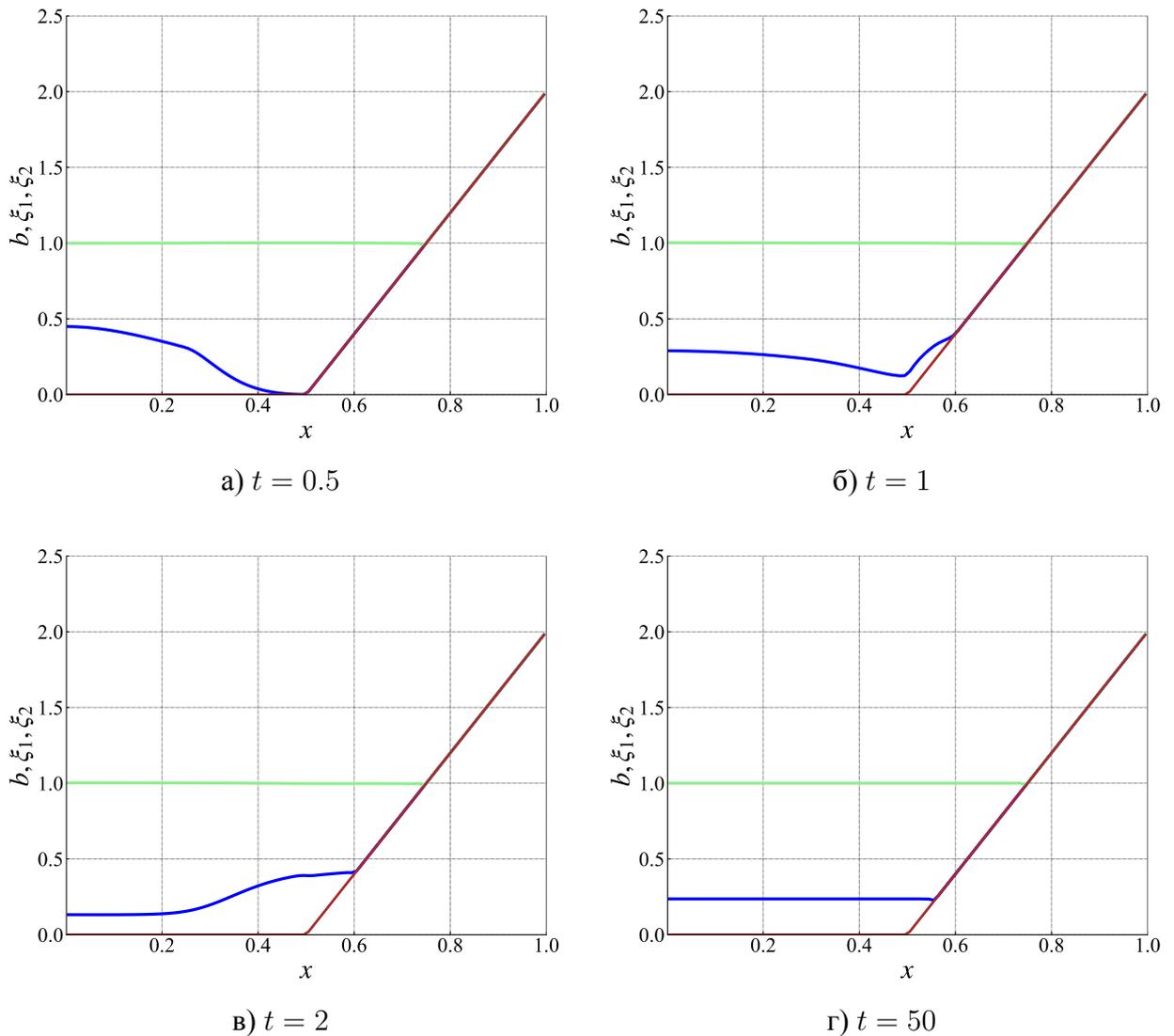


Рисунок 2.6 — Эволюция распада разрыва вблизи наклонного берега, $\Delta x = 0.01$ при $r = 0.95$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.1$.

ладает рядом особенностей. Во-первых, оно не зависит от направления течений: поскольку энергия E_k пропорциональна квадрату потока Q_k^2 , то случаи встречных и параллельных потоков идентичны. В данной работе, по аналогии с [46; 54], рассмотрим оба варианта. Во-вторых, при определённой форме батиметрии, а также граничных и начальных условий в течении образуется разрыв. Это происходит потому, что поток ускоряется от докритического (субкритического) до сверхкритического при прохождении выступа, но претерпевает гидравлический скачок, чтобы выполнялись граничные условия на правой границе. Описание условий появления разрыва приведено в [46; 54].

В центре области $x \in [-3, 3]$ располагается гладкое симметричное дно [46; 54], определяемое функцией:

$$b(x) = \begin{cases} 0.125 (\cos \frac{\pi}{2}x + 1)^2, & |x| \leq 2, \\ 0, & |x| > 2. \end{cases}$$

Соотношение плотностей слоёв жидкости $r = 0.98$, а величина $g = 10$.

Рассмотрим случай, когда течения параллельны и протекают слева направо. Слева накладывается граничное условие, определяющее втекающий постоянный поток:

$$h_k u_k \Big|_{x=-3} = (Q_k)_{in} = const, \quad \frac{\partial h_k}{\partial x} \Big|_{x=-3} = 0, \quad k = 1, 2; \quad (2.52)$$

справа – условие сноса потока:

$$\frac{\partial h_k}{\partial x} \Big|_{x=3} = 0, \quad \frac{\partial u_k}{\partial x} \Big|_{x=3} = 0, \quad k = 1, 2; \quad (2.53)$$

причём:

$$(Q_1)_{in} = (Q_2)_{in} = 0.09282893.$$

Параллельные потоки. Течение без разрыва

Для задачи без разрыва начальные условия выбирались в виде:

$$h_k(x, 0) = \begin{cases} (h_k)_{in}, & -3 < x < -2, \\ A \cos(0.25\pi(x+2)) + B, & -2 \leq x \leq 2, \\ (h_k)_{out}, & 2 < x < 3, \end{cases} \quad (2.54)$$

$$h_k(x, 0)u_k(x, 0) = Q_i(x) = (Q_k)_{in},$$

где $A = 0.5((h_k)_{in} - (h_k)_{out})$, $B = 0.5((h_k)_{in} + (h_k)_{out})$, $k = 1, 2$.

Параметры $(h_k)_{in}$ и $(h_k)_{out}$ предполагается брать произвольными, но близкими по значению к итоговому результату. В качестве примера взяты значения, близкие к точному решению:

$$(h_1)_{in} = 1.0816731, \quad (h_1)_{out} = 0.1616669;$$

$$(h_2)_{in} = 0.4311358, \quad (h_2)_{out} = 1.3338331.$$

Для определения транскритического характера течения, как и в [46; 47] используется так называемое “комбинированное” число Фруда – G :

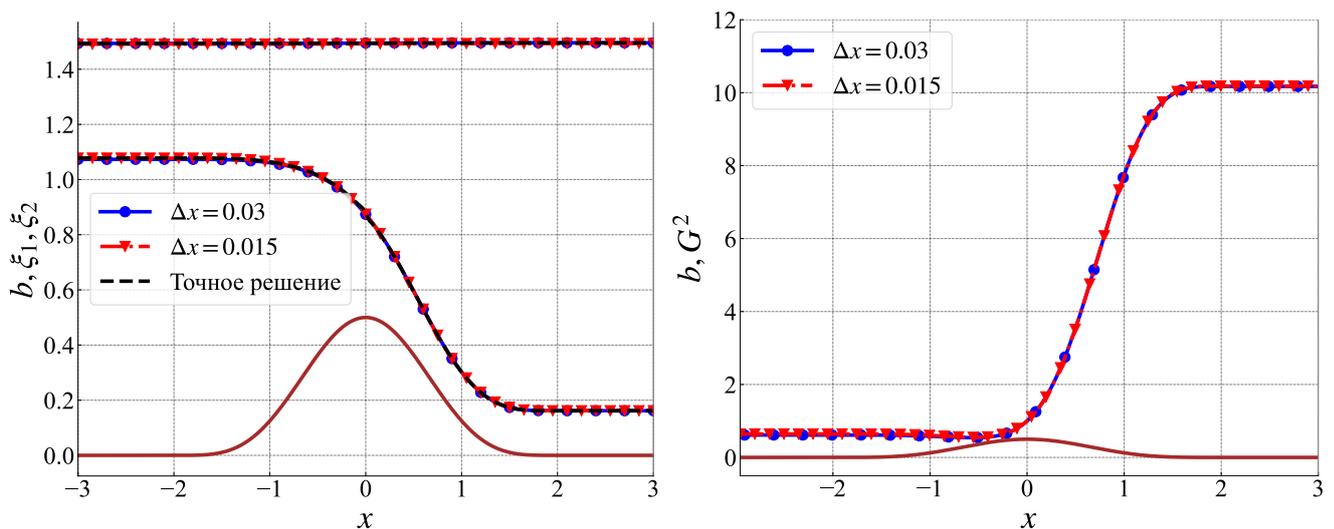
$$G^2 = Fr_1^2 + Fr_2^2 - (1 - r)Fr_1^2Fr_2^2, \quad (2.55)$$

где Fr_k , $k = 1, 2$ числа Фруда для слоёв 1 и 2, которые рассчитываются, как:

$$Fr_k^2 = \frac{u_k^2}{g'h_k}, \quad g' = (1 - r)g. \quad (2.56)$$

Можно показать, что на пиковой точке возвышения неровности дна, где $b'(x) = 0$, решение должно быть либо симметричным, либо достигать критической точки $G^2 = 1$. Таким образом, при $G^2 < 1$ мы получаем докритическое течение, а при $G^2 > 1$ – сверхкритическое.

Распределение слоёв жидкости и числа Фруда для параллельных потоков показано на рис. 2.7 при $t = 300$. Видно, что решение незначительно изменяется при сгущении сетки, что говорит о достигнутой точности, численный результат близок к точному решению. Также на рис. 2.7 виден транскритический характер течения: при переходе через холмик, который образует поверхность дна, наблюдается рост скорости, соответствующий переходу комбинированного числа Фруда через единицу.



а) Распределение слоёв, сравнение с точным решением.

б) Число Фруда G^2 со схематическим изображением рельефа дна

Рисунок 2.7 — Течение без разрыва, параллельные потоки для различных разбиений сетки, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.1$, $t = 300$.

Также стоит отметить, что решение повторяет результат источника, где итоговые граничные значения для высот были следующими:

$$h_1 \Big|_{x=-3} = 1.0816731, \quad h_1 \Big|_{x=3} = 0.1616669;$$

$$h_2 \Big|_{x=-3} = 0.4311358, \quad h_2 \Big|_{x=3} = 1.3338331.$$

Важным результатом в этой задаче является то, что величина энергии E_k , которая была рассчитана численно, для каждого из слоёв по формулам из (2.51) постоянна, рис. 2.8, что говорит о том, что численное решение имеет вид стационарного течения.

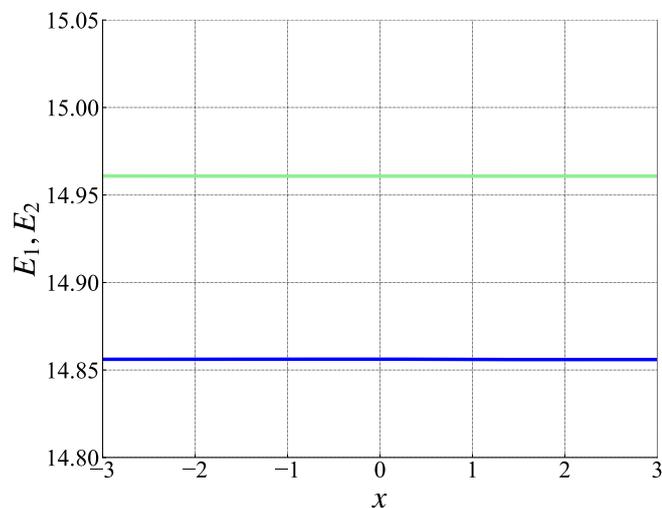


Рисунок 2.8 — Рассчитанная энергия стационарного течения E_k , $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.1$, $t = 300$.

Параллельные потоки. Течение с разрывом

Начальные условия: рассматриваются покоящиеся слои. Это необходимо, чтобы образовался гидродинамический скачок:

$$h_1(x,0) + b(x) = 0.9205217, \quad h_2(x,0) = 0.5794783;$$

$$u_1(x,0) = u_2(x,0) = 0.$$

Значения были взяты приближенными к итоговому результату, хотя вообще говоря они могут быть произвольными, так как главным образом сходимость к решению

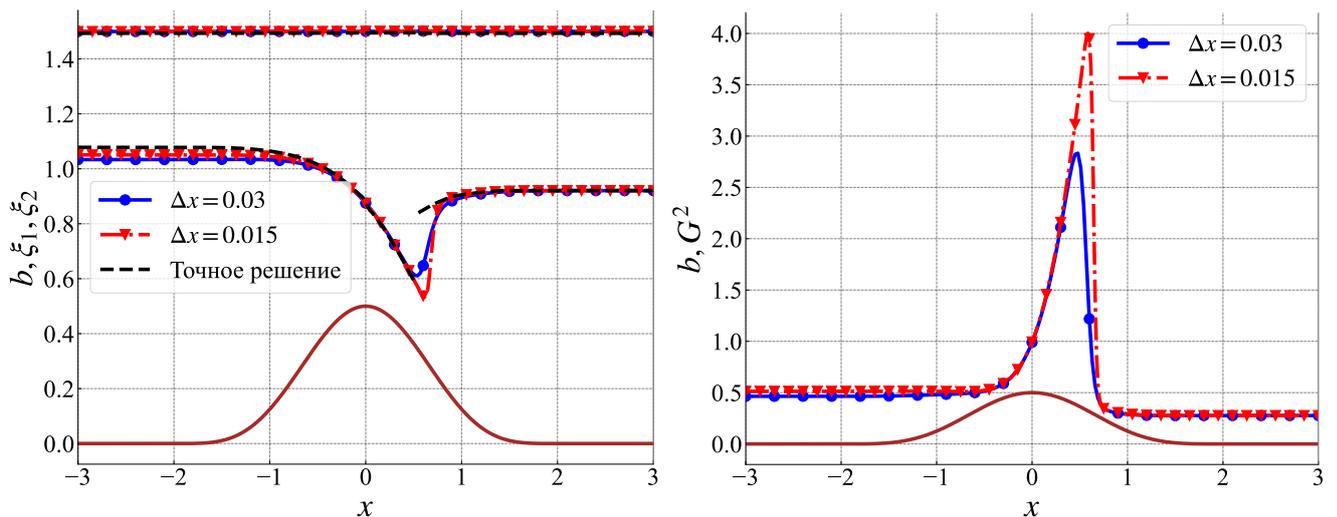
с разрывом обеспечивают граничные условия:

$$h_k u_k \Big|_{x=-3} = (Q_i)_{in} = const, \quad \frac{\partial h_k}{\partial x} \Big|_{x=-3} = 0, \quad k = 1, 2; \quad (2.57)$$

справа ставим условие закреплённой границы для высоты и сноса для скорости:

$$h_1 + b \Big|_{x=3} = 0.9205217, \quad h_2 \Big|_{x=3} = 0.5794783, \quad \frac{\partial u_k}{\partial x} \Big|_{x=3} = 0, \quad k = 1, 2. \quad (2.58)$$

Численные расчёты представлены на рис. 2.9 и 2.10 для $t = 500$. Можно заметить, что результаты, полученные на различных сетках для распределения слоёв рис. 2.9а и числа Фруда рис. 2.9б практически совпадают, а вектор потока массы $j_k, k = 1, 2$ не отличается от точного решения: $j_k = (Q_k)_{in} = const, k = 1, 2$ – рис. 2.10.



а) Распределение слоёв, сравнение с точным решением.

б) Число Фруда G^2 со схематическим изображением рельефа дна

Рисунок 2.9 — Течение с разрывом, параллельные потоки для различных разбиений сетки, $\alpha = 0.5, \beta = 0.1, t = 500$.

Результаты совпадают и с эталонными из [46; 54], где граничные значения для высот:

$$h_1 \Big|_{x=-3} = 1.0816731, \quad h_1 \Big|_{x=3} = 0.9205217;$$

$$h_2 \Big|_{x=-3} = 0.4311358, \quad h_2 \Big|_{x=3} = 0.5794783;$$

а разрыв локализован в $x = 0.48$, как и в случае РУДМВ.

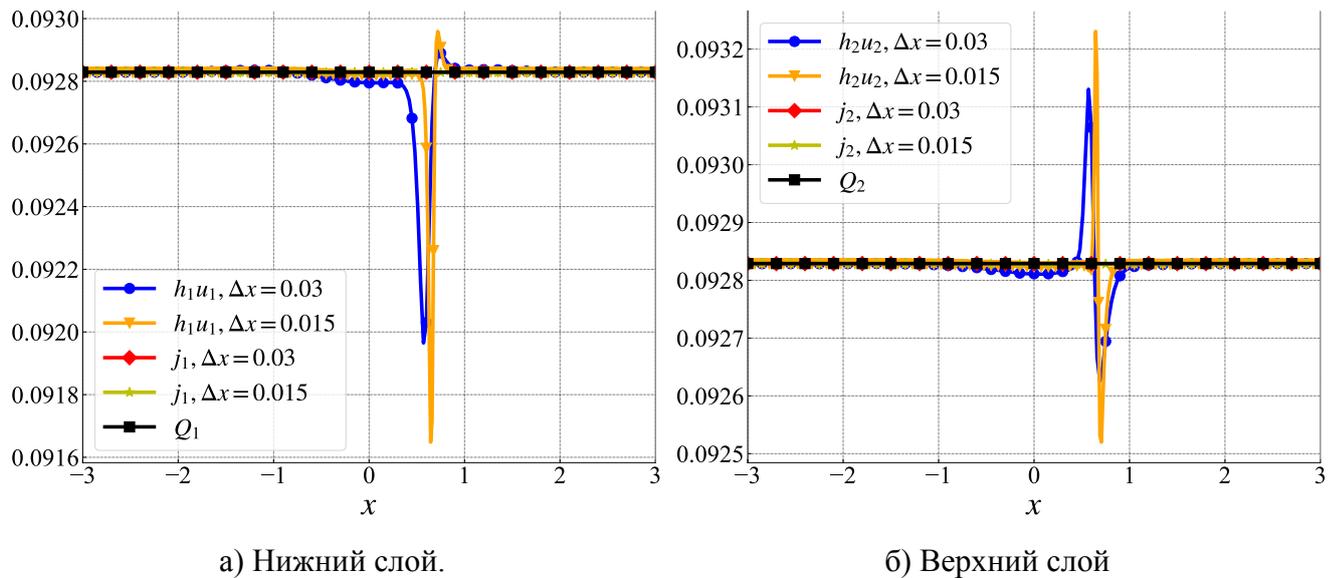


Рисунок 2.10 — Течение с разрывом, распределение потоков для различных значений Δx ; $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.1$, $t = 500$.

Встречные потоки

Задача моделирования встречных потоков отличается лишь тем, что направление течения одного из слоёв противоположно другому:

$$(Q_1)_{in} = - (Q_2)_{in} = 0.09282893.$$

Для неё используются те же начальные условия: (2.54), но пересмотрены условия на границах для верхнего слоя, справа:

$$h_2 u_2 \Big|_{x=3} = (Q_2)_{in} = const, \quad \frac{\partial h_2}{\partial x} \Big|_{x=3} = 0, \quad (2.59)$$

а слева условие сноса потока:

$$\frac{\partial h_2}{\partial x} \Big|_{x=-3} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=-3} = 0. \quad (2.60)$$

В качестве граничных условий для нижнего слоя были взяты (2.52) и (2.53) (т.е. при $k = 1$).

Распределение высот слоёв для этого случая в точности соответствует рис. 2.7, и здесь не приводится. Этот результат повторяет случай параллельных течений, поскольку точному решению (2.51) удовлетворяют обе постановки, так как оно не зависит от направления потока.

Стоит отметить, что случай встречных течений является задачей, неустойчивой по начальным данным, поэтому не всегда результат сходится к искомому решению. Возможно, что для решения таких задач необходим учёт вязкости, так как она играет важную роль во взаимодействии встречных течений.

2.2 Перенос пассивного скаляра в мелкой воде

2.2.1 Построение системы сглаженных уравнений

Для исследования переноса различных веществ, распространения температуры или солёности может быть использована модель переноса «пассивного» (от англ. «passive» – инертный) скаляра. Смысл слова «пассивный скаляр» в данном случае обозначает тот факт, что переносимая величина является скалярной и не оказывает никакого влияния на течение, которое её переносит. Чаще всего под такой величиной подразумевается температура или концентрация примеси, именно поэтому её принято обозначать как C .

Уравнение переноса пассивного скаляра может быть решено отдельно с применением методов, отличных от тех, которые использовались для решения системы уравнений гидродинамики. Кроме того и выбор гидродинамической системы может быть произвольным, в данном случае нас интересует модель мелкой воды, для которой уравнение переноса примет вид

$$\frac{\partial Ch}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}Ch) = \nabla \cdot (Dh\nabla C), \quad (2.61)$$

где D – коэффициент диффузии, $h(\mathbf{x}, t)$ – толщина слоя воды, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ – вектор горизонтальных скоростей. Таким образом система УМВ (1.1)–(1.2), рассмотренная в первой главе, совместно с (2.61) образует систему для моделирования переноса примеси в мелководных течениях.

При численном решении получившейся системы уравнений гидродинамики (1.1)–(1.2) совместно с уравнением переноса (2.61) возникает ряд трудностей. Во-первых, решения как гидродинамической системы, так и уравнения переноса могут содержать разрывы и волны разрежения. Во-вторых, распространены зада-

чи, в которых коэффициент диффузии D очень мал, что приводит к тому, что многие схемы для численного решения уравнения переноса оказываются неустойчивыми или излишне диссипативными. Для решения описанных проблем используют различные подходы. Например, одним из таких подходов является применение специализированного отдельного метода для решения уравнения переноса, что приводит к усложнению алгоритма и делает численное решение системы уравнений (1.1)–(1.2), (2.61) неоднородным. Пример применения такого подхода, где для решения УМВ использовался интегро-интерполяционный метод, а для решения уравнения переноса пассивного скаляра метод частиц, описан в статьях [61; 62]. Существуют и другие методы, например, также широко развит подход использования конечно-разностных TVD-схем (схем с невозрастанием полной вариации) [63—66], помимо этого для решения системы уравнения переноса в мелкой воде применяются кинетические алгоритмы [67; 68], схемы Годунова [69], методы типа конечного объёма [70], схемы Лакса-Фридрихса совместно с центрально-разностной аппроксимацией для уравнения переноса [71] и др.

В настоящее время тема моделирования переноса примеси в мелкой воде не теряет актуальности. Одним из часто используемых способов решения задачи переноса пассивного скаляра в мелкой воде является применение специализированного отдельного алгоритма для решения уравнения переноса. Последнее делает численное решение системы уравнений гидродинамики и уравнения переноса неоднородным. Пример такой работы: [61; 62], здесь совмещается метод частиц для расчета уравнения переноса и метод конечного объема для решения уравнений мелкой воды. Существуют и другие методы, например, также широко развит подход использования конечно-разностных TVD-схем (схем с невозрастанием полной вариации) [63—66], помимо этого для решения системы уравнения переноса в мелкой воде применяются кинетические алгоритмы [67; 68], схемы Годунова [69], метод конечного объема [70], схемы Лакса-Фридрихса совместно с центрально-разностной аппроксимацией для уравнения переноса [71] и др.

Предложим принципиально новый подход. Вместо системы УМВ рассмотрим систему регуляризованных уравнений (1.3) – (1.8), описанных в главе 1. Добавим к системе РУМВ регуляризованное уравнение переноса. Для этого осредним

уравнение (2.61) по промежутку времени Δt :

$$\frac{\widehat{C}\widehat{h} - Ch}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \nabla \cdot (\mathbf{u}Ch) dt' = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \nabla \cdot (Dh\nabla C) dt',$$

где $\widehat{C} = C(\mathbf{x}, t + \Delta t)$, $\widehat{h} = h(\mathbf{x}, t + \Delta t)$. Воспользуемся теоремой о среднем значении, тогда имеем:

$$\frac{\widehat{C}\widehat{h} - Ch}{\Delta t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}^* C^* h^*) = \nabla \cdot (Dh^* \nabla C^*). \quad (2.62)$$

Величины $h^*(\mathbf{x}, t) = h(\mathbf{x}, t^*)$, $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t^*)$ и $C^*(\mathbf{x}, t) = C(\mathbf{x}, t^*)$ определены на промежуточном слое по времени: $t < t^* < t + \Delta t$. Исходя из предположения, что за малое время Δt изменятся только величины толщины слоя воды h , скорости \mathbf{u} и концентрации C , а изменение настолько мало, что его можно представить в виде линейного приближения, получим выражения для изменённых значений величин, используя величину некоторого характерного времени $\tau \sim \Delta t$

$$h^* = h + \tau \frac{\partial h}{\partial t}, \quad \mathbf{u}^* = \mathbf{u} + \tau \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \quad C^* = C + \tau \frac{\partial C}{\partial t}.$$

Аналогично выводу РУМВ воспользуемся (2.61) и возьмём отсюда выражение для производной по времени, подставив его в 2.62. При этом, используя (1.1), получим

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla C) + \frac{1}{h} \nabla \cdot (Dh\nabla C),$$

откуда имеем:

$$C^* = C - \tau (\mathbf{u} \cdot \nabla C) + \mathcal{O}(\tau^2),$$

где слагаемое с τD пренебрежимо мало по сравнению $\mathcal{O}(\tau)$.

Значение потока $h^* \mathbf{u}^*$ известно из РУМВ и может быть получено из (1.3):

$$h^* \mathbf{u}^* = h (\mathbf{u} - \mathbf{w}) + \mathcal{O}(\tau^2).$$

Подставляя полученные выражения в (2.62) и переходя к пределу $\Delta t \rightarrow 0$, а также отбросив все слагаемые порядка $\mathcal{O}(\tau^2)$, получаем конечный вид регуляризованного уравнения переноса:

$$\frac{\partial Ch}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{j}_m C) = \nabla \cdot (Dh\nabla C + \tau \mathbf{u} h (\mathbf{u} \cdot \nabla C)). \quad (2.63)$$

Отметим, что возможен также и альтернативный способ регуляризации, при котором величина концентрации C остаётся неизменной, а в уравнение (2.61) вносятся дополнительные потоки $h(\mathbf{u} - \mathbf{w})$. Этот подход выходит за рамки данной работы и был рассмотрен в публикации автора [4]. Для такого метода величины регуляризатора оказывается недостаточно и алгоритм становится плохо устойчивым.

2.2.2 Моделирование переноса примеси в одномерном случае

Система РУМВ совместно с уравнением переноса, записанная для плоского одномерного течения без учета внешних сил, имеет следующий вид:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial j_m}{\partial x} = 0, \quad (2.64)$$

$$\frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial j_m u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{gh^2}{2} \right) + gh \frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad (2.65)$$

$$\frac{\partial Ch}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (j_m C) = \frac{\partial}{\partial x} \left(h (D + \tau u^2) \frac{\partial C}{\partial x} \right), \quad (2.66)$$

где

$$j_m = h(u - w), \quad (2.67)$$

$$w = \frac{\tau}{h} \left[\frac{\partial (hu^2)}{\partial x} + gh \frac{\partial}{\partial x} (h + b) \right], \quad (2.68)$$

$$\Pi = \tau hu \left[u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial}{\partial x} (h + b) \right] + \tau gh \frac{\partial (hu)}{\partial x}. \quad (2.69)$$

В этом разделе не используется дополнительная вязкость Π_{NS} (1.9), т.е. $\mu = 0$.

Разностная схема для решения РУМВ (2.64), (2.65) и (2.67)–(2.69) была представлена в параграфе 1.2.1, поэтому опишем здесь аппроксимацию уравнения (2.66). Аналогично, в узлах сетки x_i задаются основные величины $h(x, t)$, $u(x, t)$, $b(x)$ и $u(x, t)$, а значения в полуцелых точках $x_i \pm 1/2$ записываются как полусумма величин в соседних узлах. Аппроксимация потоков выполняется в полуцелых точках на рёбрах. Величины в момент времени t в точке x_i будем обозначать без

индекса ячейки h, u, C , в момент времени $t + \Delta t$ символом $\hat{\cdot}$: $\hat{h}, \hat{u}, \hat{C}$.

$$\begin{aligned} \frac{\hat{C}\hat{h} - Ch}{\Delta t} + \frac{j_{m,i+1/2}C_{i+1/2} - j_{m,i-1/2}C_{i-1/2}}{\Delta x} = \\ = \frac{1}{\Delta x} \left(h_{i+1/2} \frac{C_{i+1} - C_i}{\Delta x} \left(D + \tau_{i+1/2} u_{i+1/2}^2 \right) - \right. \\ \left. - h_{i-1/2} \frac{C_i - C_{i-1}}{\Delta x} \left(D + \tau_{i-1/2} u_{i-1/2}^2 \right) \right). \end{aligned} \quad (2.70)$$

Всё, что сказано об устойчивости алгоритма в параграфе 1.2.1 справедливо и для (2.70), поэтому здесь аналогично будем использовать настроечные параметры для вносимой искусственной вязкости α и условия устойчивости β . Причём значение числа Куранта, β во всех расчётных задачах далее будет принято $\beta = 0.1$ (либо это оговорено). Кроме того, во всех рассмотренных задачах коэффициент диффузии принимается равным $D = 0$. Также во всех расчётных задачах далее (за исключением задач, в которых это оговорено) используются граничные условия сноса для высоты, скорости и концентрации на левой и правой границах Γ :

$$\left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{\Gamma} = 0; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{\Gamma} = 0; \quad \left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{\Gamma} = 0.$$

В следующих разделах этого параграфа рассмотрены примеры расчёта одномерных задач на равномерных пространственных сетках с использованием вышеупомянутой разностной схемы. Все представленные величины полагаются безразмерными.

Перенос примеси над неровным дном

Постановка задачи описана в статье [61]. Рассматривается область $x \in [0, 1]$ рис. 2.11, в которой начальный момент времени поверхность воды задана на уровне $\xi(x, 0) = 1$, при этом величина потока по всей области в начальный момент времени постоянна и равна $Q(x, 0) = h(x, 0)u(x, 0) = 0.1$, величина $g = 1$, а профиль батиметрии имеет неоднородность в центре области рис. 2.11a и зада-

ётся функцией:

$$b(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} \cos(10\pi(x - 0.5)) + \frac{1}{4}, & 0.4 \leq x \leq 0.6; \\ 0, & x \notin [0.4, 0.6]. \end{cases}$$

Концентрация примеси в начальный момент времени локализована в небольшом отрезке $[0.4, 0.5]$, где равна $C(x,0) = 1$, рис. 2.11б.

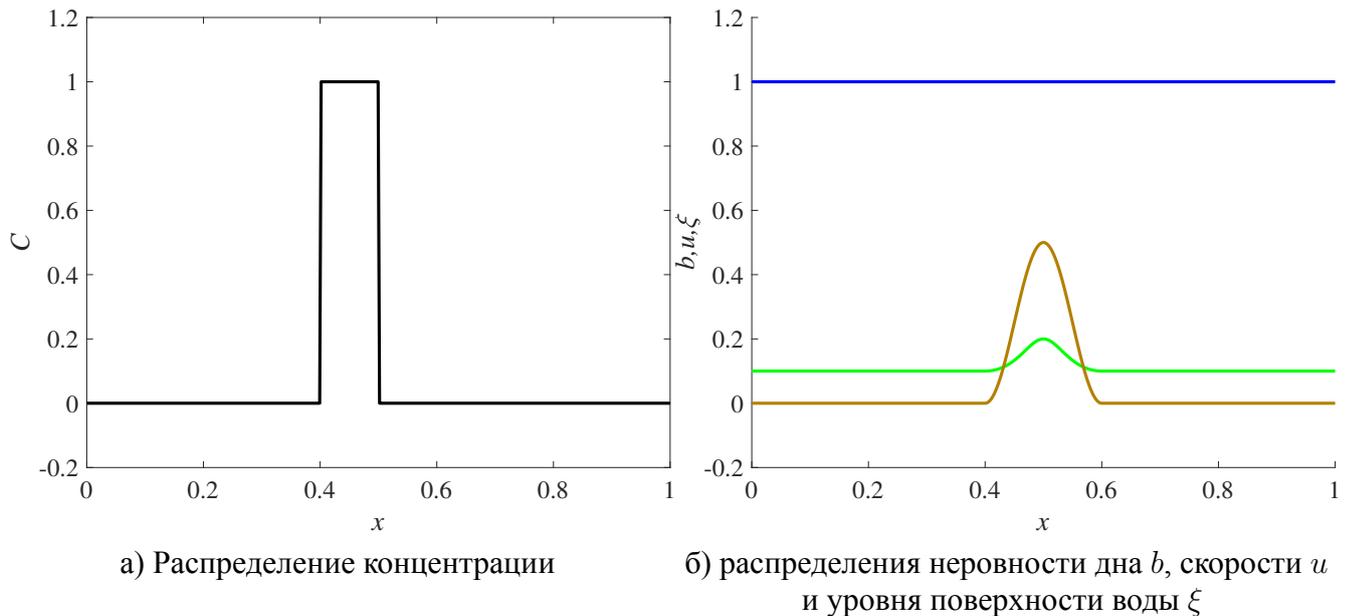


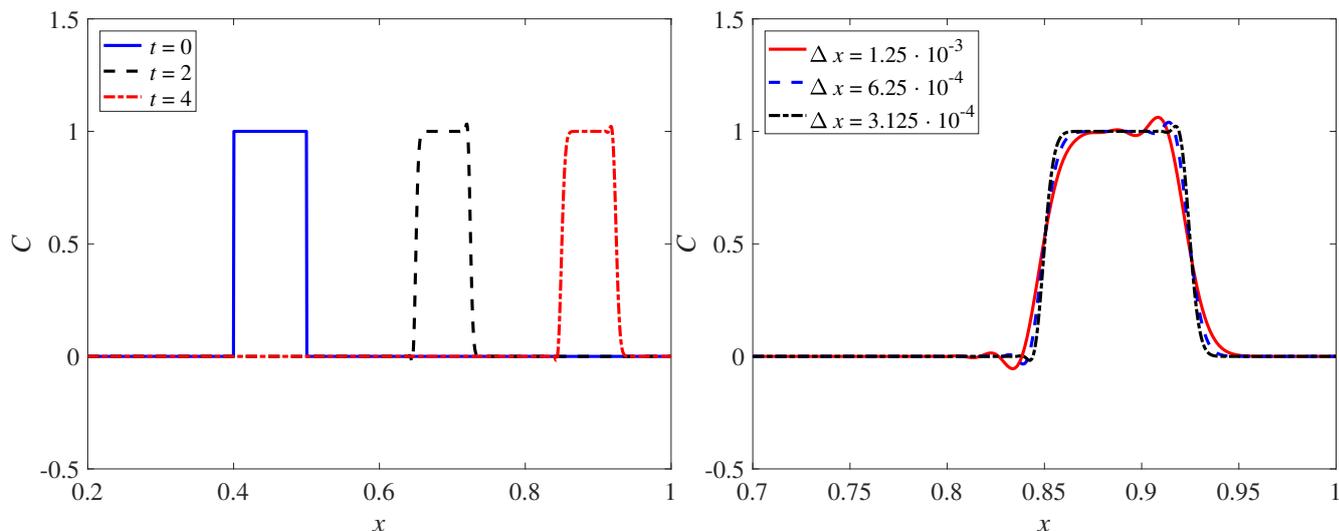
Рисунок 2.11 — Начальные условия.

Стоит обратить внимание, что дополнительное диссипативное слагаемое в уравнении (2.66) отлично от нуля только там, где величины градиента концентрации $\frac{\partial C}{\partial x}$ и скорости u также отличны от нуля.

При численном моделировании обнаружено, что грубое задание начальных условий для концентрации примеси C может приводить к появлению осцилляций численного решения, которые не разглаживаются с течением времени. Поэтому для корректного моделирования задачи требуется аккуратное задание начального возмущения для концентрации C . В данном случае для этого используется сглаживание начального возмущения по сетке, а именно, начальные значения для концентрации на границе разрыва задаются в трёх точках: левая (C_l) и правая (C_r) граница разрыва и точка между ними как полусумма граничных значений, $\frac{C_l + C_r}{2} = 0.5$.

В работе [61] отмечается, что модельным решением задачи о переносе примеси над неровным дном является перемещение начального возмущения концен-

трации по направлению потока с течением времени, при этом начальное положение максимального значения концентрации $C = 1$ сохраняется.



а) Эволюция во времени, $\Delta x = 3.125 \times 10^{-4}$

б) Различные значения Δx , $t = 4$

Рисунок 2.12 — Распределение концентрации, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.1$.

На рис. 2.12а приведены результаты для $t = 0, 2$ и 4 , $\Delta x = 3.125 \times 10^{-4}$, $\alpha = 0.5$.

В [61] приводится сравнение метода конечных объёмов (FV – Finite-Volume) и метода частиц совместно с методом конечных объёмов (FVP – Finite-Volume-Particle), где число частиц примеси было равно 20, оба метода рассчитывались на сетке $\Delta x = 0.005$ с применением центральной схемы с разностями против потока. Расчёт, полученный с применением модели РУМВ, соответствует результатам для FV и FVP модели из [61].

На рис. 2.12б приведены результаты для различных значений Δx при $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.1$. Можно увидеть, что наблюдается сходимость решения при сгущении сетки.

Прорыв плотины на плоском дне

Следующая задача рассматривалась в [68] и представляет собой классическую задачу о распаде разрыва. В области $x \in [0, 2000]$ с плоским дном $b(x) \equiv 0$ заданы величины толщины слоя воды, скорости и концентрации примеси с раз-

рывом в центре области $x = 1000$, рис. 2.13:

$$(h, u, C) = \begin{cases} (1.0, 0, 0.7), & x \leq 1000, \\ (0.5, 0, 0.5), & x > 1000. \end{cases}$$

Здесь также, как и в предыдущей задаче, величина концентрации C и толщины слоя воды h задаются в трёх точках: левая и правая граница разрыва и точка между ними как полусумма граничных значений.

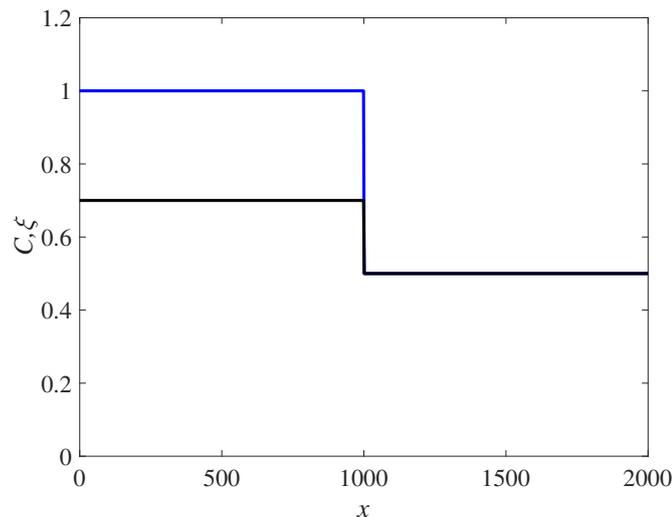


Рисунок 2.13 — Распределение концентрации C и толщины слоя воды h в начальный момент времени.

Численное решение данной задачи, рис. 2.14 для высоты уровня жидкости h можно разделить на три части: две области с постоянным уровнем воды и областью между ними. Области решения разделены при этом волной разрежения, идущей влево, и ударной волной, идущей вправо. Начальный разрыв для концентрации C переносится со скоростью решения в промежуточной области.

Зависимость численного решения для уровня воды от коэффициента регуляризации α представлена на рис. 2.15а, $\Delta x = 5$. При приближении к $\alpha = 0.1$, наблюдается появление осцилляций и последующее нарушение устойчивости численного решения. Далее $\alpha = 0.3$. На рис. 2.15б демонстрируется сходимость решения для концентрации примеси при сгущении разностной сетки.

В [68] представлены результаты с использованием двухстадийной по времени кинетической схемы, имеющей второй порядок точности, $\Delta x = 20$. Они практически совпадают с расчётами, полученным с применением РУМВ с использованием схемы первого порядка точности, рис. 2.14.

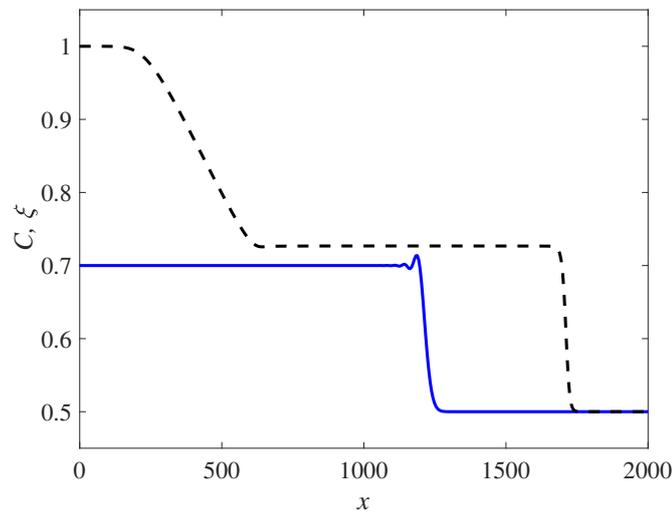
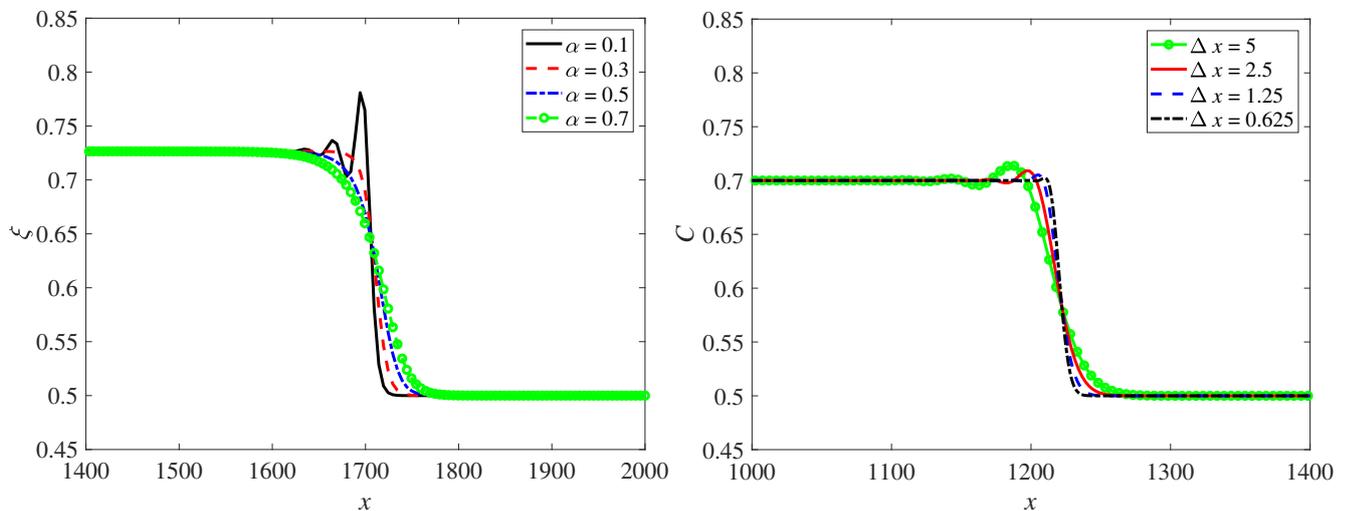


Рисунок 2.14 — Распределение концентрации и уровня поверхности жидкости для $t = 240$, $\Delta x = 5$, $\alpha = 0.3$, $\beta = 0.1$.



а) Уровень поверхности жидкости для различных значений α , $\Delta x = 5$

б) Концентрация для различных разбиений разностной сетки, $\alpha = 0.3$

Рисунок 2.15 — Результаты расчёта для $t = 240$, $\beta = 0.1$.

Задача Римана с разбегающей жидкостью

Постановка задачи взята из статьи [64]. В центре области $x \in [0, 50]$ предполагается разрыв скорости u и концентрации C при постоянной толщине слоя воды h , рис. 2.16:

$$(h, u, C) = \begin{cases} (1, -5, 1), & x \leq 25, \\ (1, 5, 0), & x > 25. \end{cases}$$

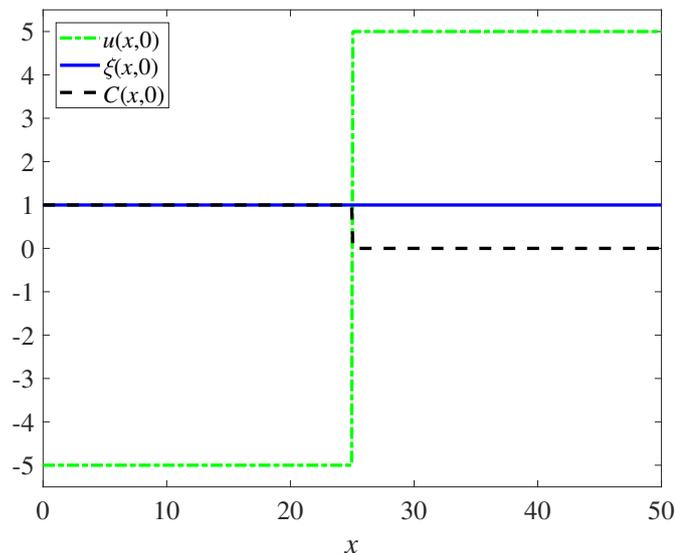


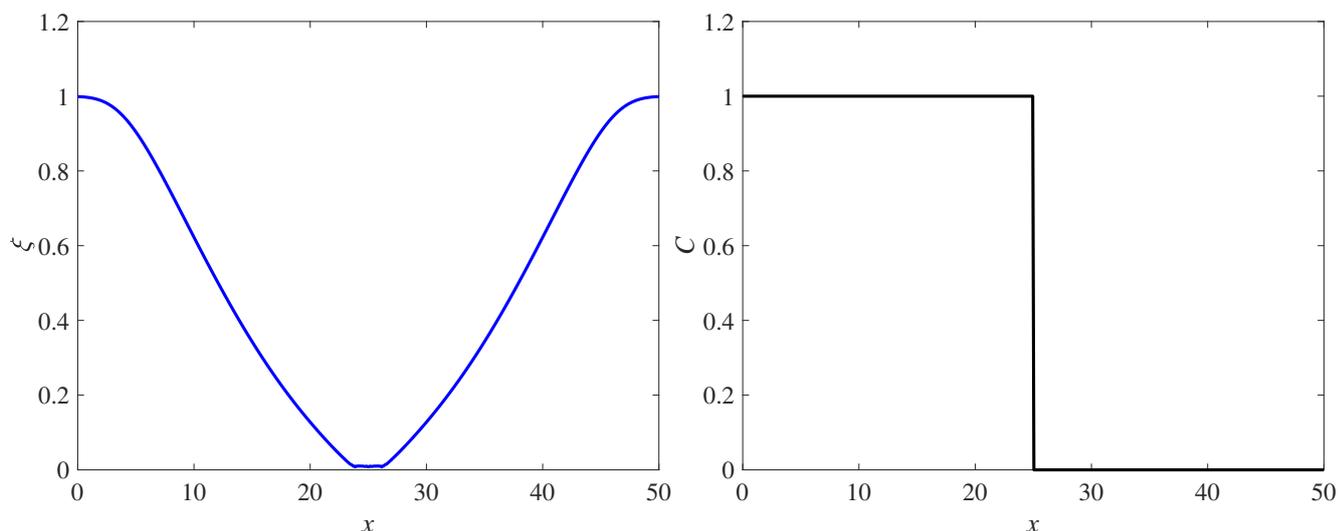
Рисунок 2.16 — Начальное распределение концентрации C , скорости u и уровня поверхности воды h .

Дно также полагается плоским $b \equiv 0$. Скорость и концентрация на границе разрыва задавались в двух точках, т.е. без промежуточного сглаживания.

В момент времени $t = 2.5$ в области разрыва $x = 25$ жидкость разбегается и образуется сухая зона. Для её описания использовался метод, описанный в параграфе 1.2.2, а величина параметра отсечения была равна $\varepsilon = 0.001$. При этом для концентрации нет необходимости как-то определять поведение в области, в которой отсутствует жидкость, поскольку это уже определено поведением величин h и u .

Как отмечается в статье [64], для задачи Римана с разбегающейся жидкостью точным решением для распределения концентрации C является стационарный разрыв, который в большинстве численных схем воспроизводится весьма трудоёмкими методами. Однако с применением РУМВ и модификацией условий сухого дна он получен без каких-либо дополнительных условий.

Результаты для распределения ξ и C на момент времени $t = 2.5$, $\Delta x = 0.1$, $\alpha = 0.3$ представлены на рис. 2.17. Стоит отметить, что использованный алгоритм позволяет воспроизвести точное решение для распределения концентрации для любых разбиений по сетке в течение всего времени расчёта.



а) Распределения уровня поверхности воды.

б) Распределение концентрации.

Рисунок 2.17 — Результаты расчёта для $t = 240$, $\beta = 0.1$.

2.2.3 Разностный алгоритм для моделирования пространственных течений и пример расчёта задачи о разрушении дамбы

Разностный алгоритм для моделирования пространственных течений строится аналогично алгоритму расчёта одномерных течений. Система уравнений (1.3)–(1.8) и (2.61) аппроксимируется с помощью метода конечных объёмов, причём все пространственные производные аппроксимируются центральными разностями со вторым порядком точности. Разностные схемы для РУМВ были неоднократно приведены в публикациях, например в [6; 7; 10]. Здесь приведём лишь аппроксимацию уравнения переноса. Отметим, что для расчёта двумерных течений регуляризатор Навье–Стокса (1.9) не отбрасывался.

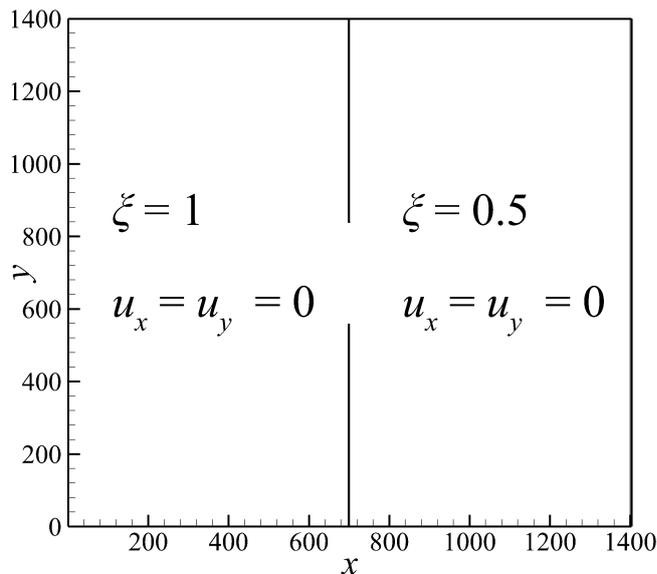
Для плоской геометрии уравнение для концентрации в системе РУМВ запишется в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial Ch}{\partial t} + \frac{\partial j_{mx}C}{\partial x} + \frac{\partial j_{my}C}{\partial y} = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left(h(D + \tau u_x^2) \frac{\partial C}{\partial x} + \tau u_x u_y h \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h(D + \tau u_y^2) \frac{\partial C}{\partial y} + \tau u_x u_y h \frac{\partial C}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (2.71)$$

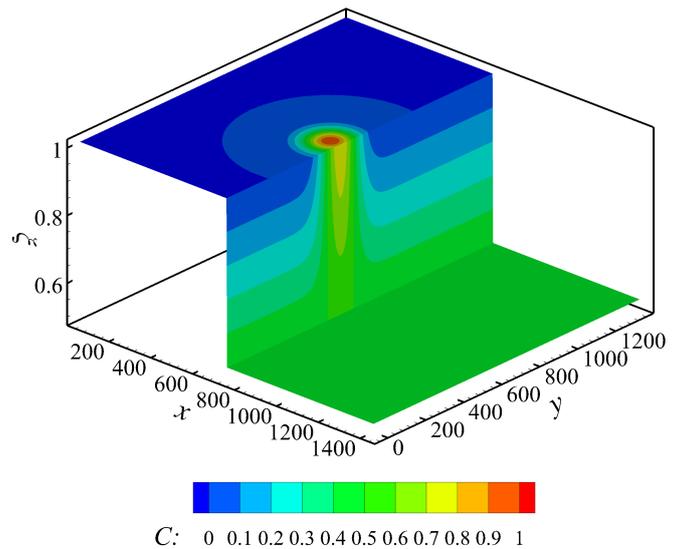
Соответствующая разностная реализация имеет вид

$$\begin{aligned}
& \widehat{Ch} = Ch - \\
& - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(j_{i+1/2,j}^x C_{i+1/2,j} - j_{i-1/2,j}^x C_{i-1/2,j} \right) - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(j_{i,j+1/2}^y C_{i,j+1/2} - j_{i,j-1/2}^y C_{i,j-1/2} \right) + \\
& + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(h_{i+1/2,j} \frac{C_{i+1,j} - C_{i,j}}{\Delta x} (D + \tau_{i+1/2,j} (u_{i+1/2,j}^x)^2) + \right. \\
& + \tau_{i+1/2,j} u_{i+1/2,j}^x u_{i+1/2,j}^y h_{i+1/2,j} \frac{C_{i+1/2,j+1/2} - C_{i+1/2,j-1/2}}{\Delta y} - \\
& - h_{i-1/2,j} \frac{C_{i,j} - C_{i-1,j}}{\Delta x} (D + \tau_{i-1/2,j} (u_{i-1/2,j}^x)^2) - \\
& \left. - \tau_{i-1/2,j} u_{i-1/2,j}^x u_{i-1/2,j}^y h_{i-1/2,j} \frac{C_{i-1/2,j+1/2} - C_{i-1/2,j-1/2}}{\Delta y} \right) + \\
& + \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(h_{i,j+1/2} \frac{C_{i,j+1} - C_{i,j}}{\Delta y} (D + \tau_{i,j+1/2} (u_{i,j+1/2}^y)^2) + \right. \\
& + \tau_{i,j+1/2} u_{i,j+1/2}^x u_{i,j+1/2}^y h_{i,j+1/2} \frac{C_{i+1/2,j+1/2} - C_{i-1/2,j+1/2}}{\Delta x} - \\
& - h_{i,j-1/2} \frac{C_{i,j} - C_{i,j-1}}{\Delta y} (D + \tau_{i,j-1/2} (u_{i,j-1/2}^y)^2) - \\
& \left. - \tau_{i,j-1/2} u_{i,j-1/2}^x u_{i,j-1/2}^y h_{i,j-1/2} \frac{C_{i+1/2,j-1/2} - C_{i-1/2,j-1/2}}{\Delta x} \right).
\end{aligned}$$

Рассмотрим задачу, на примере которой проведём валидацию алгоритма для пространственных течений. Все величины здесь, как и в одномерном случае, полагаются безразмерными. Другие тесты и детальные результаты по ним приведены в статье автора [4]. Постановка и численное моделирование данной задачи изложены в [62] и [64]. Рассматривается квадратная область $[0,1400] \times [0,1400]$, разделённая стенкой посередине. В начальный момент времени центральная секция стенки разрушается, и из-за разности уровней происходит разлив воды. На рис. 2.18 изображены начальные условия для высоты уровня жидкости, скорости 2.18а и концентрации 2.18б. Вода вытекает через область, ограниченную координатами $y = 560$ и $y = 840$; стенка располагается параллельно оси y на координате $x = 700$.



а) Область и распределение уровня поверхности воды и скорости для $t = 0$



б) Начальное распределение уровня поверхности воды с наложенной картой распределения концентрации

Рисунок 2.18 — Начальные условия для задачи разрушения симметричной дамбы на плоском дне.

Концентрация примеси C в начальный момент времени задана несимметрично относительно центральной стенки и имеет вид

$$C(x, y, t = 0) = \begin{cases} e^{-10^{-4}[(x-650)^2 + (y-600)^2]}, & x \in [0, 700], y \in [0, 1400]; \\ 0.5, & x \in [700, 1400], y \in [0, 1400]. \end{cases}$$

На левой и правой границах области $x = 0$ и $x = 1400$ поставлены условия сноса потока:

$$\left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=0, x=1400} = 0, \quad \left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{x=0, x=1400} = 0, \quad \left. \frac{\partial u_x}{\partial x} \right|_{x=0, x=1400} = 0, \quad \left. \frac{\partial u_y}{\partial x} \right|_{x=0, x=1400} = 0.$$

Верхняя и нижняя границы области $y = 0$, $y = 1400$ рассматривались как непроницаемые стенки:

$$\left. \frac{\partial h}{\partial y} \right|_{y=0, y=1400} = 0, \quad \left. \frac{\partial C}{\partial y} \right|_{y=0, y=1400} = 0, \quad \left. \frac{\partial u_x}{\partial y} \right|_{y=0, y=1400} = 0, \quad u_y|_{y=0, y=1400} = 0,$$

аналогично непроницаемыми считались и внутренние стенки, границу которых обозначим как Γ_{in}

$$\left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{\Gamma_{in}} = 0, \quad \left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{\Gamma_{in}} = 0, \quad u_x \Big|_{\Gamma_{in}} = 0, \quad \left. \frac{\partial u_y}{\partial x} \right|_{\Gamma_{in}} = 0.$$

Для расчёта использовалась равномерная прямоугольная сетка с шагами по пространству $\Delta x = \Delta y = 2.8$, аналогичная расчётная сетка использовалась в работах [62] и [64], а величина настроечных коэффициентов $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.2$. Результаты распределения толщины слоя воды h и концентрации примеси C на момент времени $t = 200$ представлены на рис. 2.19 и 2.20 соответственно.

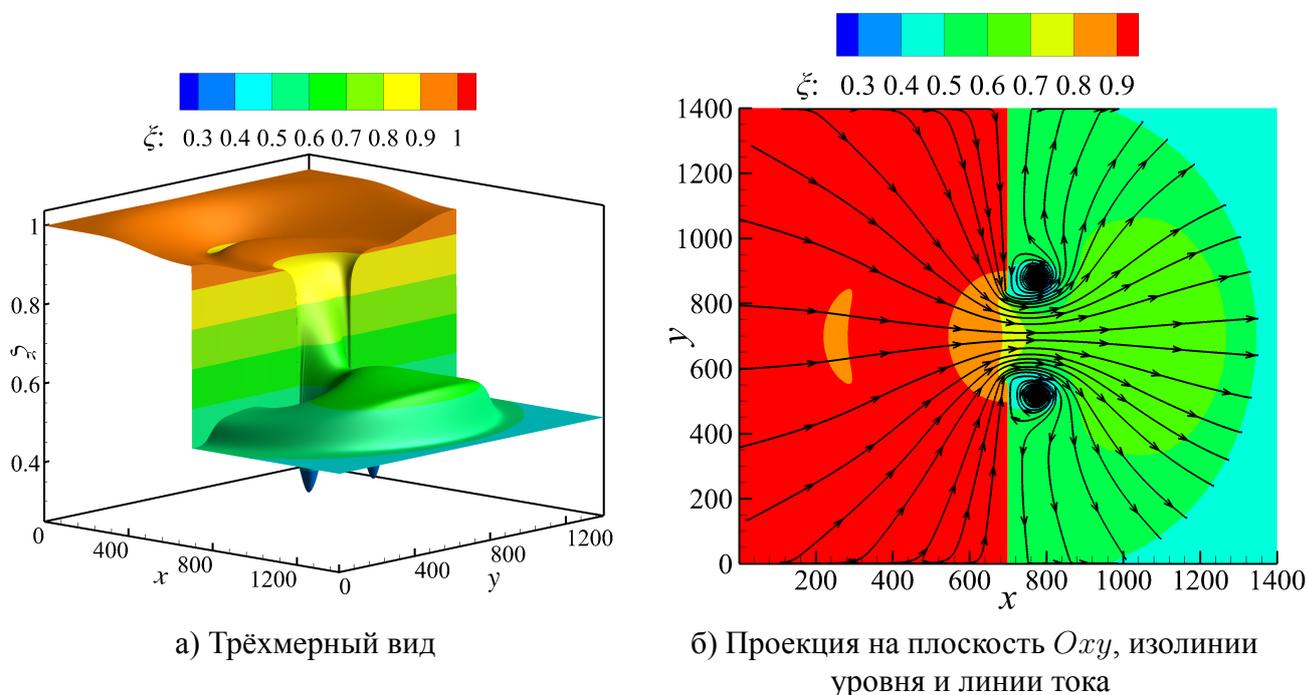


Рисунок 2.19 — Результаты расчёта для распределения уровня поверхности воды.

В [62] приводится сравнение метода конечного объема (FV – Finite-Volume) и метода частиц совместно с методом конечного объема (FVP – Finite-Volume-Particle). Поэтому далее результаты расчёта с применением РУМВ будут сравниваться с этими двумя моделями.

Расчёты, полученные с применением РУМВ, хорошо согласуются с [62] и [64]. При уменьшении α до 0.2 увеличивается амплитуда вихрей, что соответствует картине, представленной в [62], [64]. Также из рис. 2.19 видно, что решение для поверхности жидкости хорошо демонстрирует картину как кругового гидравличе-

ского скачка, так и вихрей, образованных по обе стороны от разрыва. Аналогично для концентрации – рис. 2.20 – можно наблюдать чёткое расположение фронтов и структур внутри вихрей, как и в [62].

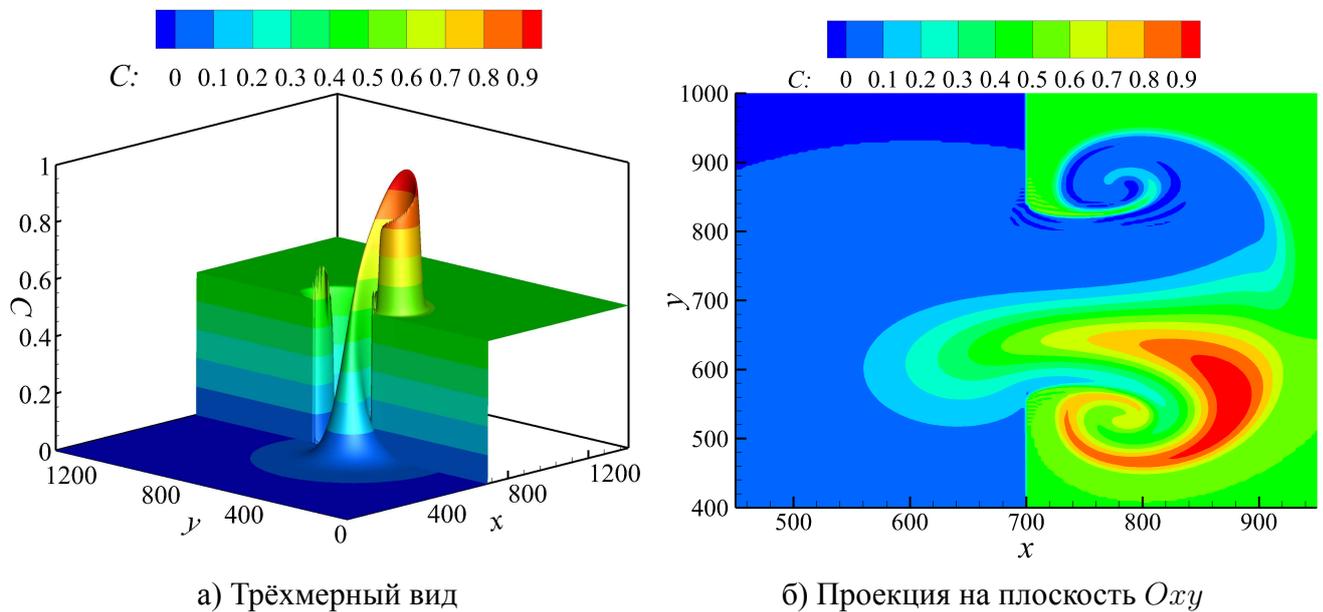


Рисунок 2.20 — Результаты расчёта для распределения концентрации примеси.

Присутствуют незначительные осцилляции концентрации примеси в малом вихре, которые, однако встречаются и в [62] для FV метода. В случае же FVP метода вихрь неестественно сглажен, что вызывает сомнения с точки зрения корректности решения из [62].

2.2.4 Разрушение дамбы над неровным дном при наличии источника

При наличии источника примеси к классической системе уравнений мелкой воды (1.1)–(1.2) добавляется источник массы S и вносится источник примеси $T_s S$ в уравнение переноса (2.61) [64; 68]. Такая система уравнений также может быть регуляризована, в результате чего получим систему РУМВ при наличии источника примеси

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_m = S, \quad (2.72)$$

$$\frac{\partial (h\mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{j}_m \otimes \mathbf{u}) + \nabla \frac{gh^2}{2} = -gh^* \nabla b + \nabla \cdot \Pi, \quad (2.73)$$

$$\frac{\partial Ch}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{j}_m C) = \nabla \cdot (Dh \nabla C + \tau \mathbf{u} [(h \mathbf{u} \cdot \nabla C) + CS - T_s S]) + T_s S, \quad (2.74)$$

где

$$h^* = h - \tau (\nabla \cdot (h \mathbf{u}) - S), \quad (2.75)$$

$$\mathbf{j}_m = h (\mathbf{u} - \mathbf{w}), \quad (2.76)$$

$$\mathbf{w} = \frac{\tau}{h} [\nabla \cdot (h \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + gh \nabla (b + h)], \quad (2.77)$$

$$\Pi = \Pi_{NS} + \tau \mathbf{u} \otimes [h (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + gh \nabla (b + h) + S \mathbf{u}] + \tau I [gh (\nabla \cdot (h \mathbf{u}) - S)], \quad (2.78)$$

где $S(\mathbf{x}, t)$ – источник массы жидкости, а T_s – концентрация примеси в источнике S .

Заметим, что источник примеси S входит в состав дополнительных диссипативных слагаемых в уравнениях (2.75)–(2.78). Однако, как показали результаты численных экспериментов, наличие источника S в регуляризаторе не оказывает влияния на результат численного решения представленной далее задачи. Тем не мене, как отмечено в [64] и [68], для системы уравнений с источником появляется необходимость выполнения нетривиальных условий баланса и законов сохранения, чего добиваются не все схемы. Для оценки влияния этого фактора на решение системы (2.72)–(2.78) возможно обобщение энергетической оценки решения из [26].

Пример расчётной задачи с источником рассматривался в статье [62]. Это задача о разрушении дамбы над неровным дном при наличии источника. В середине квадратной области $[0, 1400] \times [0, 1400]$ располагается разрыв сложной формы, значения уровня поверхности ξ и потока $h \mathbf{u} = \{hu_x, hu_y\}$ по обе стороны от разрыва изображены на рис. 2.21. При этом форма границы дамбы задана функцией $\tilde{x}(y)$:

$$\tilde{x}(y) = \begin{cases} \min \left(500 + \frac{(y-700)^2}{400}, 900 \right), & y \in [0, 700]; \\ 500, & y \in [700, 1400]. \end{cases}$$

Дно имеет форму трёх эллиптических гауссианов:

$$b(x, y) = \frac{9}{2} \left[e^{-\kappa_1(x-800)^2 - \kappa_2(y-700)^2} + e^{-\kappa_2(x-600)^2 - \kappa_1(y-600)^2} + e^{-\kappa_2(x-1000)^2 - \kappa_1(y-700)^2} \right],$$

где $\kappa_1 = 10^{-4}$, $\kappa_2 = 10^{-3}$.

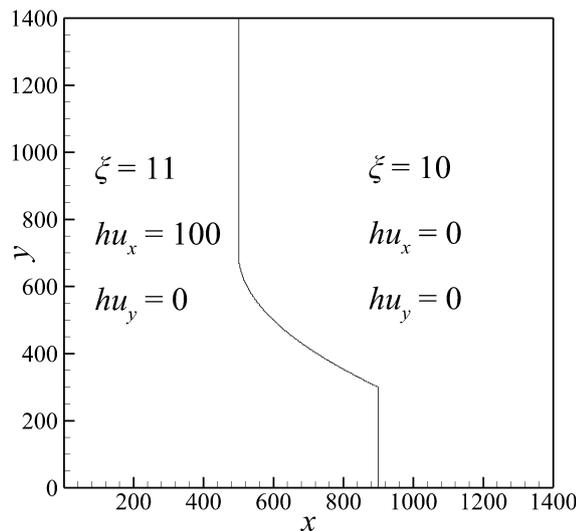


Рисунок 2.21 — Начальное распределение уровня поверхности воды и потоков.

В начальный момент времени примесь в области отсутствует $C \equiv 0$, но имеется источник массы, определяемый функцией

$$S(x, y, t) = \frac{1}{2} e^{-0.5(t-8)^2 - 10^{-5}(x+y-1300)^2 - 5 \cdot 10^{-4}(x-y-100)^2},$$

концентрация примеси в котором $T_s = 25$.

На всех внешних границах области ставились условия сноса потока:

$$\frac{\partial h}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \frac{\partial u_n}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \frac{\partial u_\tau}{\partial \mathbf{n}} = 0,$$

здесь индексы n и τ соответствуют нормальным и тангенциальным направлениям к границе области, соответственно.

Моделирование проводилось на равномерной прямоугольной сетке с шагом $\Delta x = \Delta y = 2.8$ и настроечными параметрами $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.2$. В [62] приводится сравнение метода конечного объема (FV – Finite-Volume) и метода частиц совместно с методом конечного объема (FVP – Finite-Volume-Particle) для такого же разбиения по сетке $\Delta x = \Delta y = 2.8$. Поэтому результаты расчёта с применением РУМВ будут сравниваться с этими двумя моделями.

Результат моделирования уровня поверхности жидкости для момента времени $t = 30$ представлен на рис. 2.22. Можно заметить, что столкновение искривлённой ударной волны начального распределения с неровностями дна приводит к довольно сложным волновым структурам. Полученное распределение соответствует расчёту, приведённому в [62].

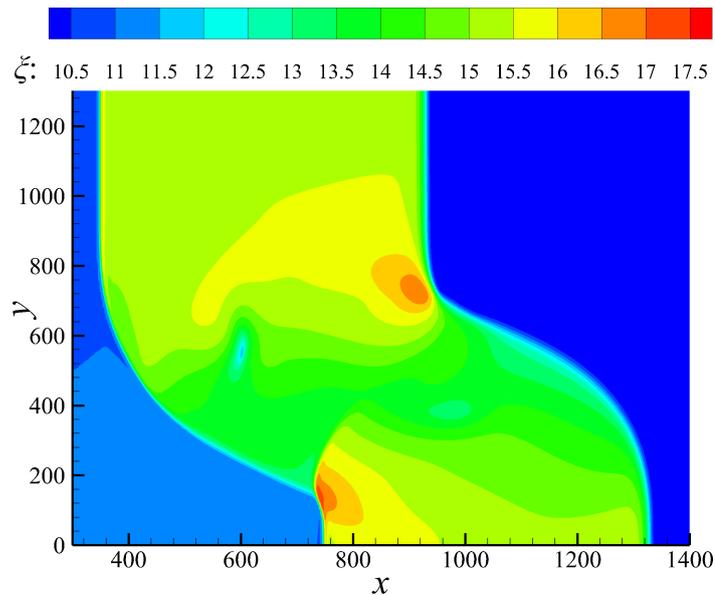


Рисунок 2.22 — Результаты расчёта изолиний для уровня поверхности жидкости, $t = 30$.

На рис. 2.23 представлено сравнение результатов расчётов для концентрации в двумерной проекции на оси (C, y) , т.е. $C(y) = \max_{x \in [0, 1400]} C(x, y)$, выполненное путём наложения изображений. Как видно, результат полученный с помощью модели РУМВ ($\beta = 0.2, \alpha = 0.5$) находится между методами FV и FVP работы [62]. Как и в приведённом выше расчёте задачи о разрушении дамбы, метод FVP из [62] представляется излишне сглаженным.

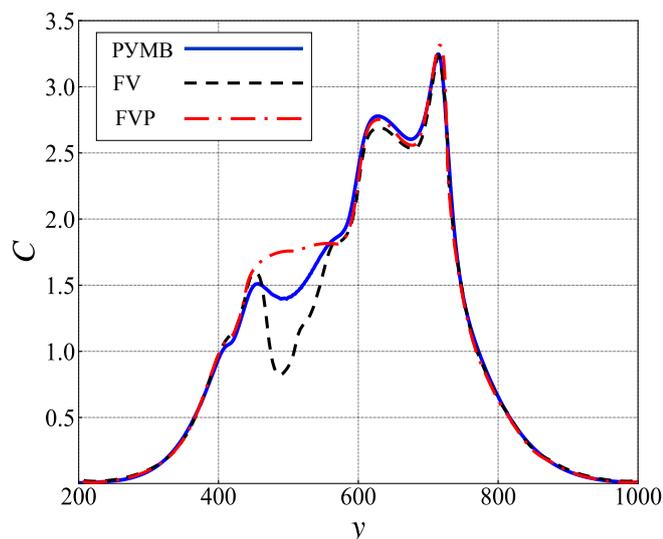


Рисунок 2.23 — Сравнение результатов для проекции концентрации примеси $(C(y))$ в момент времени $t = 30$ для РУМВ ($\beta = 0.2, \alpha = 0.5$), FV и FVP из [62].

На рис. 2.24 представлена эволюция распространения концентрации C во времени для моментов времени $t = 7.5, 15, 22.5$ и 30 , аналогично статье [62]. Ви-

зуальное сопоставление результатов РУМВ и [62] показывает их близкое соответствие, причём расчёты выполнены одинаковых пространственных сетках, однако метод РУМВ имеет первый порядок точности по пространству, а метод из [62] — как минимум второй.

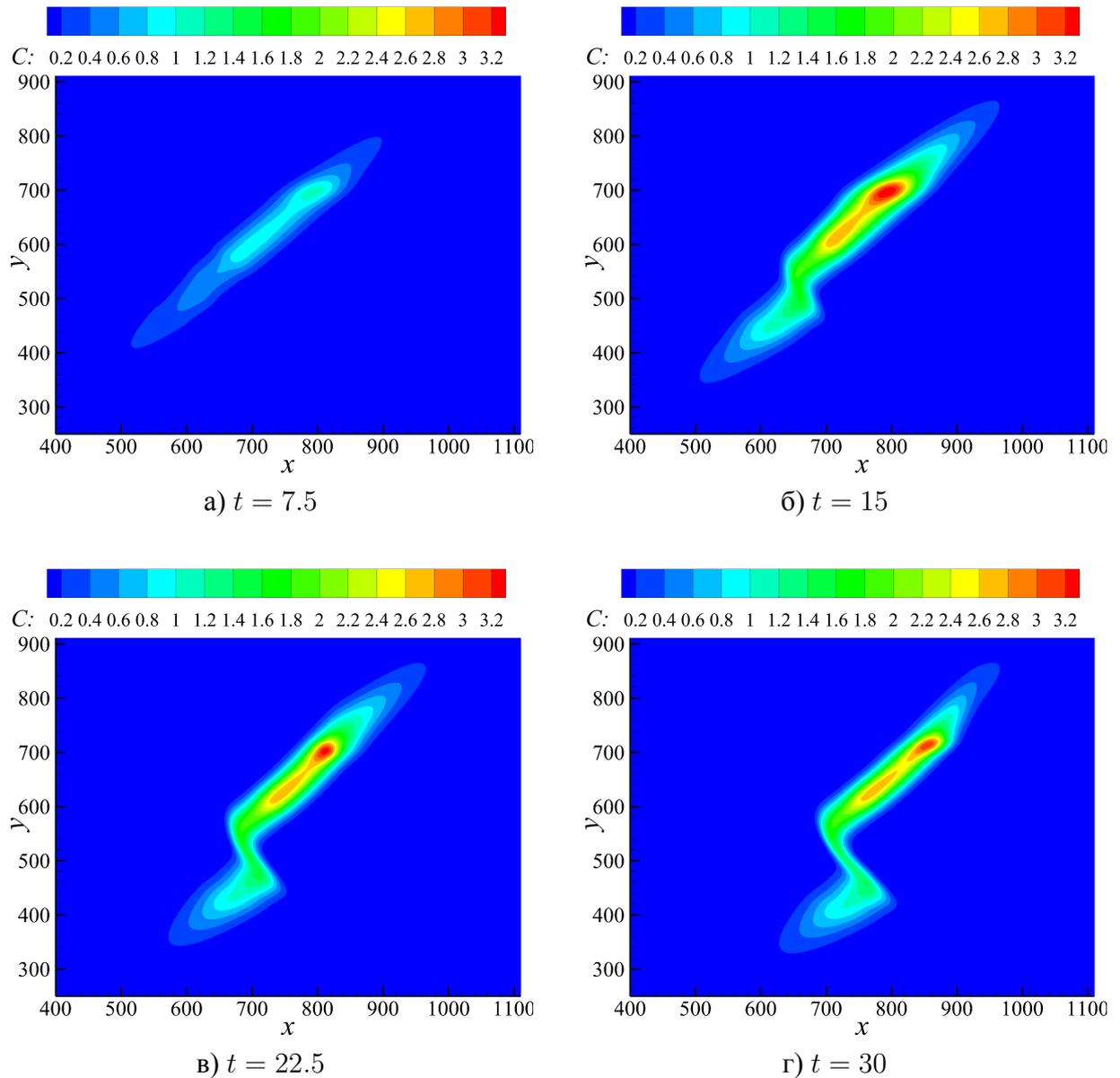
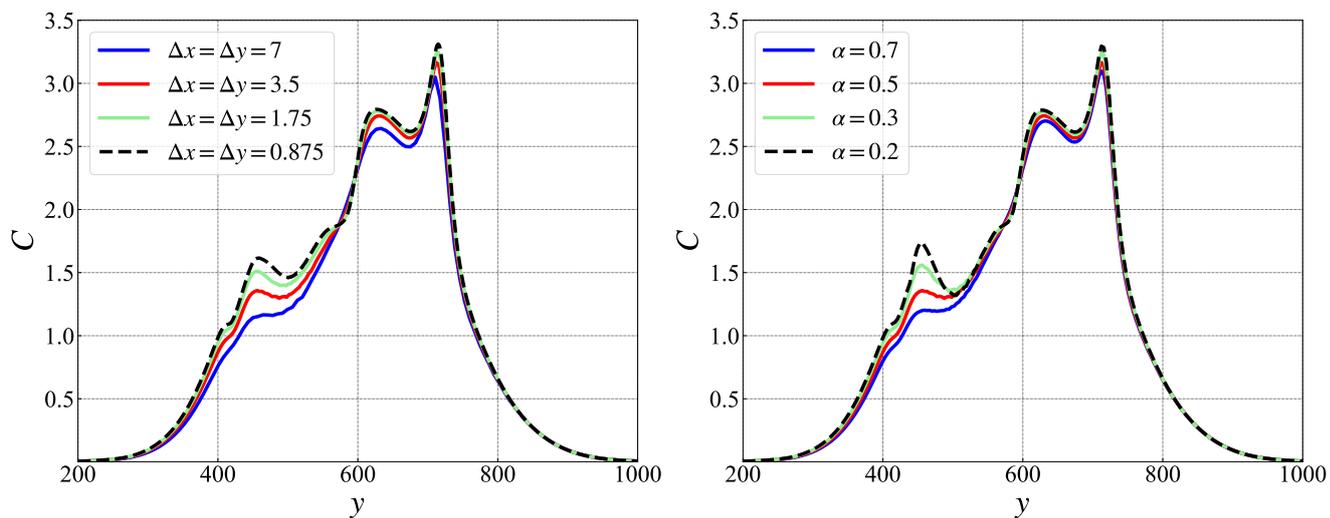


Рисунок 2.24 — Эволюция распространения концентрации примеси C .

Также на рис. 2.25 приводится зависимость численного решения от сгущения сетки ($\beta = 0.2$, $\alpha = 0.5$) и изменения параметра α ($\Delta x = \Delta y = 3.5$, $\beta = 0.2$). Из приведённых результатов ясно видна сходимость численного решения при сгущении пространственной сетки рис. 2.25а и улучшение разрешения особенностей распределения концентрации при уменьшении параметра регуляризации α рис. 2.25б.



а) Различные разбиения сетки, $\alpha = 0.5$.

б) Различные значения α , $\Delta x = \Delta y = 3.5$.

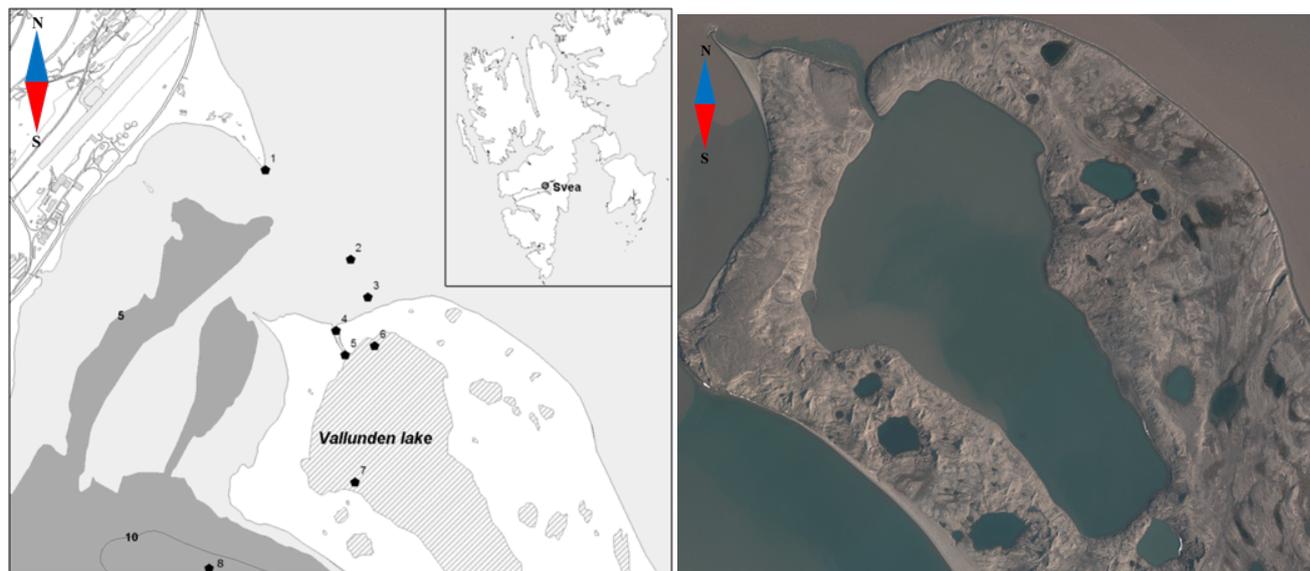
Рисунок 2.25 — Проекция концентрации примеси ($C(y)$), $\beta = 0.2$.

2.2.5 Расчёт циркуляции озера Валунден

Эта задача была поставлена совместно с институтом океанологии им. П.П. Ширшова РАН, а именно с Е.Г. Морозовым. Предметом изучения исследовательской группы Евгения Георгиевича являлось озеро Валунден, которое располагается в Шпицбергене, $77^{\circ}53'$ с.ш., $16^{\circ}46'$ в.д. Это неглубокое озеро размерами 1300 на 700 м² сообщается с морским заливом – фиордом – через узкий канал глубиной около 1 м и обладает достаточно плоским дном с крутыми берегами, вследствие чего его глубина равна 10 - 12 м практически по всей площади водоёма, рис. 2.26. При исследовании о. Валунден обнаружилась следующая интересная проблема: ввиду наличия сильных приливов, которые сопровождаются колебаниями уровня воды во фиорде, достигающим 2 м, в канале, соединяющем фьорд и озеро, возникает нестационарное течение со скоростями до 1 м/с. Температура втекающего потока ниже, чем температура воды в озере, вследствие чего при достаточно низких температурах воздуха озеро покрывается льдом, а вблизи канала образуется более толстая наледь, [15; 72].

Основной задачей данного численного эксперимента является проверка гипотезы о том, что втекающая холодная вода из канала влияет на распределение толщины льда, кроме того, было необходимо построить картину течений, которая образуется в озере в описанном приливно-отливном режиме.

Поскольку описанная задача является практической, то все величины будут указаны в единицах СИ, кроме концентрации примеси.



а) Схема расположения озера, взятая из [72]

б) Снимок со спутника, взятый из сети Интернет

Рисунок 2.26 — Озеро Валунден, Шпицберген.

Построим упрощённую модель описанного процесса. Поскольку размеры озера много больше его глубины, для описания гидродинамических процессов в озере можно воспользоваться приближением мелкой воды. Распространение холодной воды опишем уравнением температуропроводности, которым является уравнение переноса пассивного скаляра, при этом саму величину C будем рассматривать как безразмерный показатель температуры.

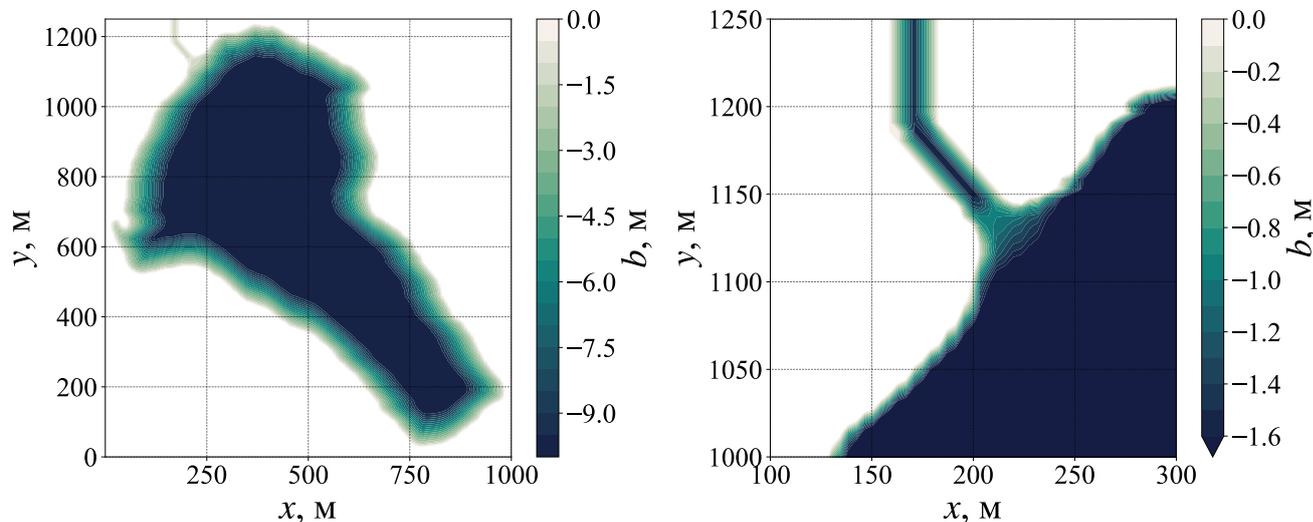
В качестве внешней силы в правую часть уравнения импульса входит сила Кориолиса:

$$f_x = f^c u_y, \quad f_y = -f^c u_x,$$

где параметр Кориолиса $f^c = 2\Omega \sin \phi$, а $\Omega = 7.2921 \cdot 10^{-5} \text{c}^{-1}$ – угловая скорость вращения Земли, был взят константой для всей области на географической широте $\phi = 77.866667^\circ$.

Поскольку точные данные батиметрии озера Валлунден не получены, разработана приближенная модель батиметри, согласующаяся с наблюдениями, рис. 2.27. В расчётной области $[0,1000] \times [0,1250] \text{ м}^2$ форма озера была воспроизведена путём преобразования спутникового изображения, а также использовано предположение о том, что дно глубиной 10 м является плоским с крутыми склонами у берегов, рис. 2.27а. В северной части имеется канал притока, глубина ко-

того составляет 1.5 м, но в конце канала, где глубина достигает 1 м, имеется каменный вал, рис. 2.276. Ширина канала около 10–15 м, длина порядка 100 м. Высота берегов над озером 3–5 м.



а) Глубина озера.

б) Канал притока в озеро.

Рисунок 2.27 — Модель батиметрии озера.

Поскольку ось y совпадает с направлением нормали к границе вычислительной области, то для моделирования притока холодной воды в озеро, на границе канала ($y = 1250$ м, рис. 2.276) были заданы граничные условия, описывающие периодическое изменение прилива/отлива, причём амплитуда скорости входного потока устанавливалась через 6 ч после начала расчёта, профиль нормальной компоненты скорости на границе канала продемонстрирован на рис. 2.28а:

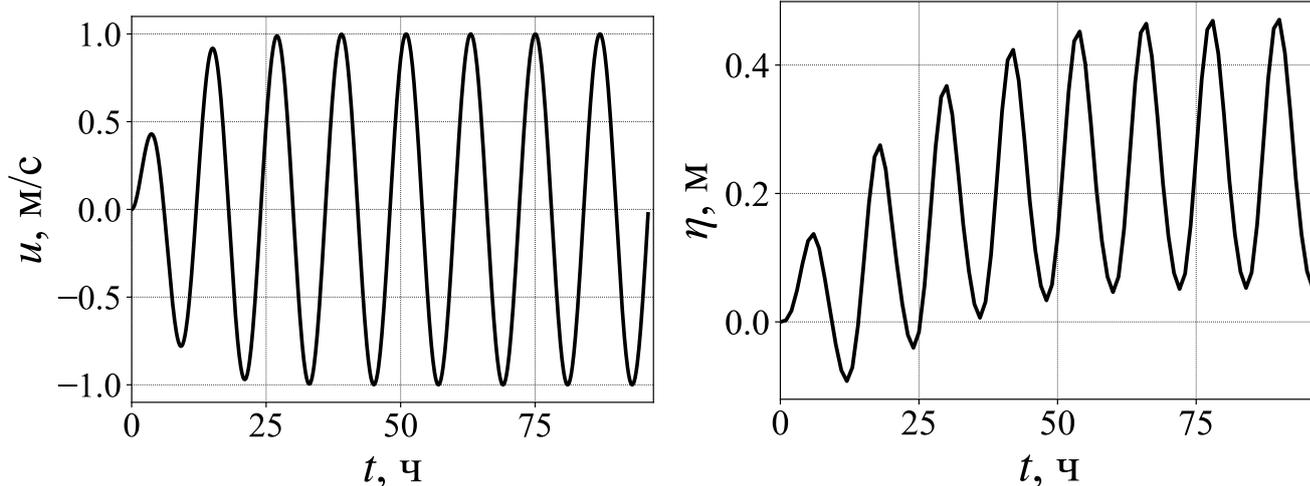
$$\left. \frac{\partial h}{\partial y} \right|_{y=1250} = 0, \quad \left. u_y \right|_{y=1250} = -\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) (1 - \exp -t/6) \text{ м/с}, \quad \left. u_x \right|_{y=1250} = 0 \text{ м/с},$$

а также постоянное значение температуры C на границе:

$$C \Big|_{y=1250} = 1,$$

где время t указано в часах. Другие границы озера определялись условием “сухого дна”: (1.16), (1.17), см. параграф 1.2.2.

Коэффициент температуропроводности воды D (или коэффициент диффузии “примеси”), очень мал (для 0°C $D \sim 13.2 \times 10^{-8} \text{ м}^2/\text{с}$), поэтому им можно пренебречь. Скорости течений в озере небольшие – порядка 10 см/с, следовательно регуляризатора в правой части уравнения (2.2.3), представленного диссипатив-



а) Значение скорости $u_n = -u_y$ на границе втекающего канала.

б) Колебания поверхности озера η в точке $y = 406.5$ м, $x = 804.7$ м.

Рисунок 2.28 — Изменение скорости и уровня озера.

ным членом порядка $\sim \tau h u^2$ может быть недостаточно для сглаживания образующихся осцилляций решения, поэтому для расчёта циркуляции помимо дополнительного регуляризатора типа Навье–Стокса (1.9) в уравнении (1.8), к коэффициенту D в (2.63) была внесена искусственная добавка $\delta\mu$, где δ – безразмерный коэффициент, выбираемый из условий устойчивости и точности расчёта, а μ – коэффициент вязкости, взятый из (1.9):

$$D \rightarrow D + \delta\mu, \quad \mu = \tau g h.$$

В области построена прямоугольная равномерная расчётная сетка:

$$\Delta x \simeq 4.1 \text{ м}; \quad \Delta y \simeq 5.4 \text{ м};$$

величина настроечных параметров $\alpha = 0.3$, $\beta = 0.2$, $\delta = 0.1$, $\varepsilon = 0.01$.

В начальный момент времени озеро находится в состоянии покоя. Скорость притока, рис. 2.28а, задаётся для постепенного установления циркуляции воды в озере. Тем не менее, периодические изменения скорости притока вызывают колебания уровня воды в озере, которые устанавливаются лишь в $t = 40$ ч рис. 2.28б, а средний уровень воды увеличивается примерно до 20 см. Это можно объяснить многими факторами. Во-первых, следует отметить, что в озере нет стоков, а его склоны очень крутые. Узкий и неглубокий канал не позволяет воде полностью вытекать из озера во время отлива. Часть воды остаётся в водоёме, благодаря че-

му общий уровень воды постепенно увеличивается в течение первых $t = 50\text{--}60$ ч. Кроме того, в ходе численных экспериментов выяснилось, что важную роль также играют форма и глубина канала. При моделировании рассматривались различные варианты модельных аппроксимаций канала, например, при увеличении ширины глубоководной части притока уровень воды в озере менялся с амплитудой 1 м. Вид канала, использованный в финальных расчётах, рис. 2.276, хорошо согласуется со спутниковыми снимками и экспериментальными наблюдениями и обеспечивает амплитуду изменения уровня воды в озере, равную $\pm 20\text{ см}$, что согласуется с экспериментальными наблюдениями [15; 72].

В результате нескольких численных экспериментов было установлено, что изменение среднего уровня воды практически не оказало никакого влияния на циркуляцию в озере. Распределение концентрации наиболее холодной воды повторяется с периодичностью 12 ч, что соответствует периоду изменения граничных условий. Пример распространения холодной воды показан на рис. 2.29а. Можно заметить, что величина концентрации C падает вдвое в радиусе 100 м от притока, при этом холодная вода образует пятно радиусом около 300 м.

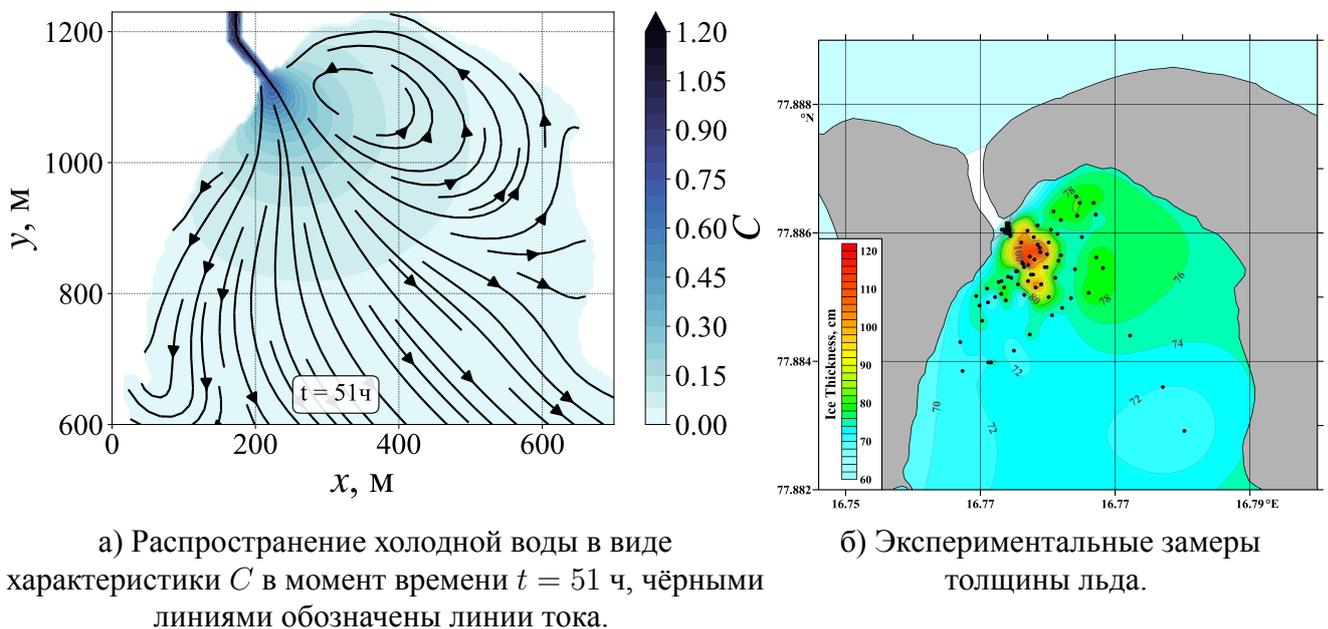


Рисунок 2.29 — Циркуляция, образованная на озере, а также линии уровня модуля скорости $|u|$.

На рис. 2.30 изображена картина течения и линии уровня модуля скорости $|u| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$ для притока рис. 2.30а и оттока рис. 2.30б воды из озера. Распределение величины скорости – порядка нескольких сантиметров в секунду вдали от канала – согласуется с экспериментальными наблюдениями [15]. Также можно

заметить отчётливую картину образования кругового вихря диаметром 200-300 м, что соответствует экспериментальным наблюдениям.

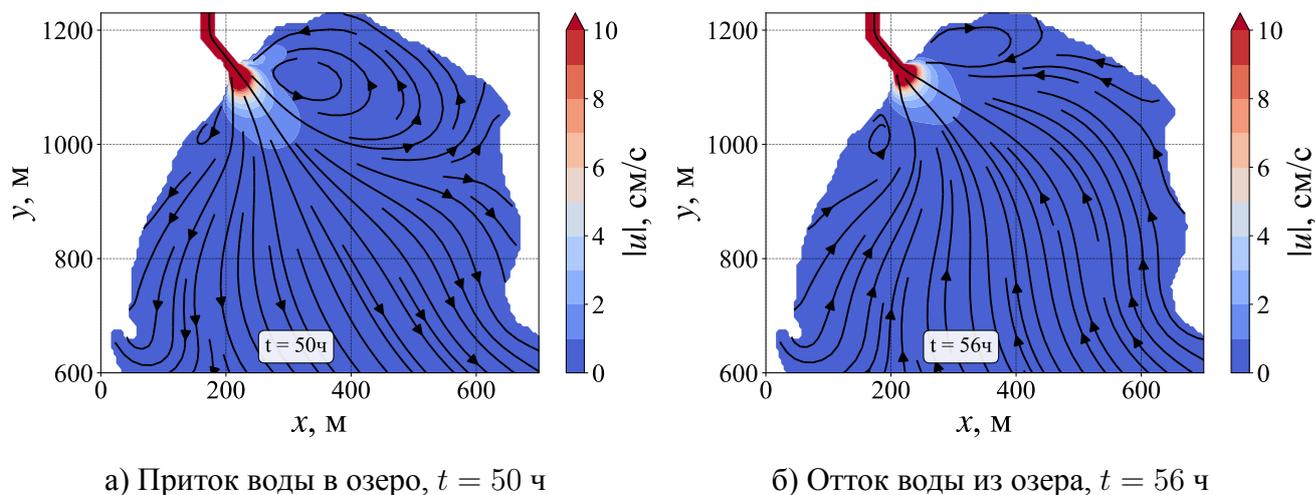


Рисунок 2.30 — Циркуляция, образованная на озере, а также линии уровня модуля скорости $|u|$.

Результаты моделирования показывают образование вихря, рис. 2.29а, однако его форма и расположение относительно канала зависят от небольших изменений положения канала и батиметрии вблизи него, но они практически не влияют на размер вихря. Численные эксперименты показали, что наличие силы Кориолиса не влияет на формирование циркуляции, т.е. циркуляция обусловлена исключительно формой озера и положением притока. Малое влияние силы Кориолиса объясняется малым пространственным масштабом явления. Влияние вращения Земли ощутимо, когда временные масштабы движения сравнимы с периодом инерции. Размер вихря в озере порядка ~ 100 м, а масштаб скорости движения в озере порядка ~ 0.1 м/с. Следовательно, временной масштаб $\sim 10^4$ с, что значительно меньше периода инерции на широте 78° с.ш. (~ 12 ч).

Концентрация втекающей холодной воды определяет формирование и распределение толщины льда при замерзании озера. Холодная вода концентрируется вблизи притока в озеро, рис. 2.29а. Это соответствует реальной картине распределения толщины льда: в районе вихря вблизи канала лёд значительно толще. На рис. 2.29 приведено сравнение концентрации C , полученной из численных расчётов рис. 2.29а и карты замеров толщины льда рис. 2.29б. Можно заметить, что в результатах расчётов величина концентрации C вблизи канала в 2 раза превышает концентрацию холодной воды в другой части озера, что согласуется с реальными замерами, где толщина льда в озере в 2 раза меньше, чем в области притока.

Глава 3. Реализация решателя на базе регуляризованных уравнений мелкой воды в открытом программном комплексе OpenFOAM

3.1 Особенности реализации численного алгоритма в OpenFOAM

3.1.1 Конечно-объёмная аппроксимация уравнений мелкой воды

В данной работе используется OpenFOAM v2012, [73]. Платформа OpenFOAM предоставляет возможность использования двух численных методов моделирования:

- класс методов fvm (англ. finite volume method) – метод конечных объёмов, наиболее развит и распространён в рамках платформы;
- класс методов fam (англ. finite area method) – метод конечных площадей, также используется во многих решателях, но менее популярен.

Поскольку большая часть решателей разработана с использованием fvm-методов и стандартизирована для них, решатель RSWEFoam также реализован с использованием метода конечных объёмов, поэтому опишем процесс перехода от плоской задачи к пространственной постановке.

Предположим, что исследуемая область расчёта покрыта некоторой пространственной неструктурированной сеткой, рис. 3.1. В качестве примера рассмотрим сетку, состоящую из пятиугольников. Для перехода от конечно-площадного к конечно-объёмному подходу необходимо растянуть двумерную пространственную сетку, расположенную в плоскости XOY, рис. 3.1, в перпендикулярном плоскости XOY направлении, т.е. вдоль оси z, рис. 3.2. При таком переходе толщина сетки постоянна, обозначим её как Δz , площади элементов S_P заменяются на их объёмы $V_P = S_P \Delta z$, центры ячеек смещаются на $\Delta z/2$ вдоль оси z, а нормаль \mathbf{L}_e к ребру e переходит в нормаль \mathbf{S}_f к грани f , длина которой совпадает с площадью грани, рис. 3.2.

Рассмотрим элемент конечного объёма V_P , центр которого находится в точке P , а одна из граней f соединяет его с элементом конечного объёма V_N с центром в точке N соответственно, рис. 3.2. Тогда обозначим вектор, соединяющий центры элементов как \mathbf{d} , а нормаль к грани f – \mathbf{S}_f , причём длина нормали совпадает с пло-

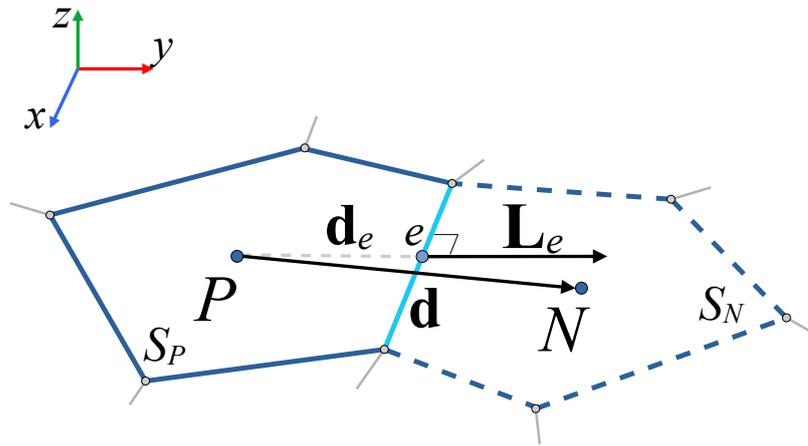


Рисунок 3.1 — Схематическое изображение элемента конечной площади.

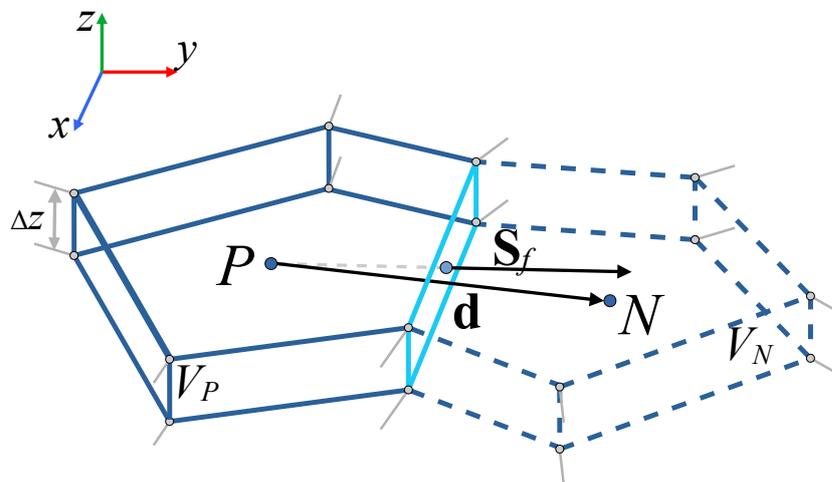


Рисунок 3.2 — Схематическое изображение элемента конечного объёма.

щадью грани f . Запишем для элемента V_P аппроксимацию уравнений (1.3)–(1.4) в потоковом представлении с использованием метода конечных объёмов, рассмотрим случай отсутствия внешних сил $\mathbf{f}^v = \mathbf{0}$ и $\mathbf{f}^s = \mathbf{0}$:

$$\widehat{h}_P = h_P - \frac{\Delta t}{V_P} \sum_f \Phi_f, \quad (3.1)$$

$$(\widehat{h\mathbf{u}})_P = (h\mathbf{u})_P - \frac{\Delta t}{V_P} \sum_f \mathbf{F}_f, \quad (3.2)$$

где Φ_f – поток массы, а \mathbf{F}_f – поток импульса через грань f , а суммирование происходит по потокам через все грани конечного объёма V_P .

Запишем выражения для потоков Φ_f и \mathbf{F}_f :

$$\Phi_f = (h\mathbf{u})_f \cdot \mathbf{S}_f - \tau_f \left([\nabla \cdot (h\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})]_f + gh_f [\nabla (b + h)]_f \right) \cdot \mathbf{S}_f, \quad (3.3)$$

$$\mathbf{F}_f = \Phi_f \mathbf{u}_f + \frac{g(h_f)^2}{2} \mathbf{S}_f - \mathbf{S}_f \cdot \mathbf{\Pi}_f + g \left(\tilde{h}_f - \tau_f [\nabla \cdot (h\mathbf{u})]_f \right) b_f \mathbf{S}_f, \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi}_f = \mathbf{\Pi}_{NSf} + \tau_f \mathbf{u}_f \otimes \left((h\mathbf{u})_f \cdot [\nabla \mathbf{u}]_f + gh_f [\nabla (b + h)]_f \right) + \\ + \tau_f \mathbf{I} \left(gh_f [\nabla \cdot (h\mathbf{u})]_f \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\mathbf{\Pi}_{NSf} = \tau_f g \frac{h_f^2}{2} [(\nabla \otimes \mathbf{u}) + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T]_f. \quad (3.6)$$

Величины, значения которых взяты на грани f ячейки, обозначены нижним индексом f , а скобки $[\cdot]_f$ говорят о том, что оператор, заключённый в скобках, берётся в центре ребра f . Определение величины \tilde{h}_f в уравнении 3.4, от аппроксимации которой зависит выполнение условий “хорошей балансировки” (см. параграф 1.2.3), будет дано в следующем разделе.

Величину τ , используя формулы (1.13) или (1.14), в центре ячейки можно определить по-разному. Рассмотрим ячейку с центром в точке P , рис 3.2. Выпишем расстояние между ячейками с поправкой на ортогональность сетки

$$\delta_f = \delta_{PN} = \frac{|\mathbf{d}|^2}{(\mathbf{d} \cdot \mathbf{n}_f)}.$$

Тогда величину τ_P можно определить, используя средневзвешенное расстояние между центром ячейки P и всех соседних ячеек C_δ

$$\tau_P = \frac{\alpha C_\delta}{\sqrt{gh_P + |\mathbf{u}_P|}}, \quad C_\delta = \frac{\sum_f \delta_f |S_f|}{\sum_f |S_f|}. \quad (3.7)$$

Заметим, что для аппроксимации потоков требуется вычисление частных производных на гранях f вычислительной ячейки. В то время как нормальный к поверхности грани компонент дифференциальных операторов может быть аппроксимирован с помощью линейной интерполяции значений в центрах ячеек со смежными гранями, компоненты тангенциального направления требуют дополнительного рассмотрения. Для этого воспользуемся подходами, предложенными

для аппроксимации τ -слагаемых в случае регуляризованных уравнений для моделирования несжимаемой жидкости:

1. расчёт значений в центрах ячеек с линейной интерполяцией их на грани;
2. редуцированный метод, при котором используется только нормальная к поверхности компонента производной, а тангенциальные компоненты не учитываются [74];
3. метод наименьших квадратов, который использует разложение Тейлора для получения дискретных выражений для частных производных [74];
4. применение метода Гаусса к фиктивному контрольному объёму, определённому вокруг рассматриваемой грани f [75]. В рамках этого метода расчетный шаблон включает вершины, грани и точки в ячейках, прилегающих к грани (см. рис. 3.3). Например, выражение для производной по x скалярного поля C на четырёхугольной грани выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial C}{\partial x} \approx \frac{1}{V_f} \sum_{m=1}^8 n_{m,x} C_m,$$

где V_f – объем фиктивной восьмигранной ячейки, построенной вокруг грани f , m – индекс грани фиктивной ячейки, C_m – среднее значение скалярного поля C на грани m , $n_{m,x}$ – x -компонента нормали к грани m .

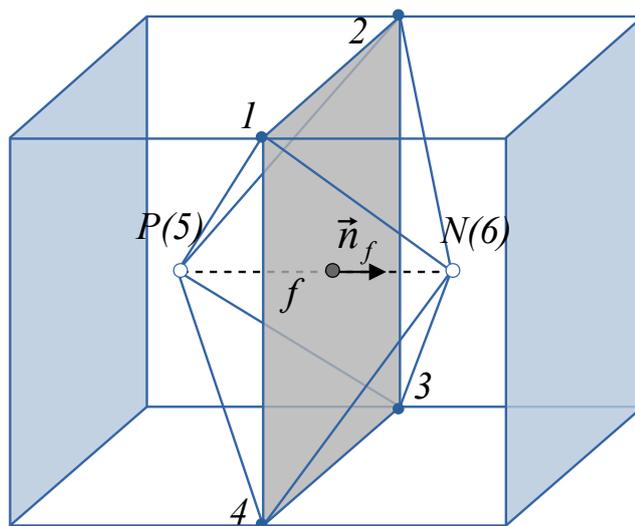


Рисунок 3.3 — Схема шаблона для вычисления частных производных на грани f конечного объема: P – центр ячейки с нормалью от f , направленной наружу, N обозначает центр ячейки, к которой нормаль от f направлена внутрь

Для аппроксимации пространственных производных в решателе использовался метод наименьших квадратов, [74].

В OpenFOAM отсутствует готовая библиотека для аппроксимации производных на гранях ячеек, поэтому она была реализована в рамках QGDSolver – фреймворка, разработанного лабораторией свободного программного обеспечения цифрового моделирования технических систем (ЛСПО ЦМТС) ИСП РАН совместно с ИПМ им. М.В. Келдыша, на основе OpenFOAM, предназначенного для моделирования течений жидкости с использованием регуляризованных уравнений (квазигазодинамического и квазигидродинамического подходов). Фреймворк содержит библиотеку для аппроксимации частных производных в центрах граней ячеек и набор решателей для широкого спектра задач. Он является открытым и доступен для скачивания [76]. В работах [77; 78] описаны особенности библиотеки, а также основные решатели фреймворка QGDSolver – QHDFoam и QGDFoam.

3.1.2 Условия хорошей балансировки и сухого дна

Об удовлетворении алгоритма условиям “хорошей балансировки” говорилось в параграфе 1.2.3, а применение условий сухого дна для расчёта сухих областей описано в параграфе 1.2.2. Оба этих условия чрезвычайно важны при решении задач в приближении мелкой воды, поскольку они обеспечивают устойчивость численного алгоритма и позволяют корректно решать практические задачи, в особенности в прибрежных зонах. Как уже было сказано, описанный метод удовлетворяет этим условиям, однако важно убедиться, что это справедливо и для реализации алгоритма в рамках OpenFOAM решателя RSWEFoam.

Напомним ещё раз что представляют собой условия “well-balanced”: они требуют от вычислительного алгоритма, чтобы в отсутствии внешних воздействий и внутренних течений замкнутый водоём в спокойном состоянии оставался таковым с течением времени, и могут быть записаны в виде

$$\begin{cases} h(\mathbf{x}, t) = h(\mathbf{x}, t = 0) \Rightarrow \xi(\mathbf{x}, t) = h(\mathbf{x}, t) + b(\mathbf{x}) = const; \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t = 0) = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (3.8)$$

С учётом (3.8) для того, чтобы алгоритм удовлетворял условиям хорошей балансировки, необходимо, чтобы суммарные потоки массы и импульса через грань вычислительной ячейки равнялись нулю: $\sum_f \Phi_f = 0$ и $\sum_f \mathbf{F}_f = \mathbf{0}$. Для проверки этого выпишем величины потоков (3.3), (3.4), подставив необходимые выражения и убрав слагаемые, тождественно равные 0:

$$\sum_f \Phi_f = \sum_f \left(g\tau_f h_f [\nabla (b+h)]_f \right) \cdot \mathbf{S}_f = \sum_f \left(g\tau_f h_f [\nabla (\xi)]_f \right) \cdot \mathbf{S}_f \equiv 0. \quad (3.9)$$

$$\sum_f \mathbf{F}_f = \sum_f \left(\frac{g(h_f)^2}{2} \mathbf{S}_f + g\tilde{h}_f b_f \mathbf{S}_f \right). \quad (3.10)$$

Исходя из построения потока Φ_f и условия покоящейся жидкости (3.8) требование для выполнения условия “хорошей балансировки” для аппроксимации уравнения неразрывности (3.9) выполняется автоматически, однако для уравнения импульса это не так. Чтобы это исправить, определим \tilde{h}_f таким образом, чтобы выполнялось равенство

$$\sum_f g\mathbf{S}_f \left(\frac{(h_f)^2}{2} - \tilde{h}_f h_f \right) = 0.$$

Поскольку по построению все грани вычислительной сетки параллельны оси z , рис. 3.2, то выражение для \tilde{h}_f можно записать покомпонентно:

$$\tilde{h}_f = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sum_f (h_f)^2 S_f^x}{\sum_f h_f S_f^x}, \frac{\sum_f (h_f)^2 S_f^y}{\sum_f h_f S_f^y}, 0 \right\}, \quad (3.11)$$

где S_f^x, S_f^y – компоненты вектора нормали к грани.

Нетрудно заметить, что, подставив выражение (3.11) в (3.10), получим $\sum_f \mathbf{F}_f \equiv \mathbf{0}$. Отметим, что для упрощения вычислений можно использовать $\tilde{h}_f = h_f$, например, для задач с плоским дном или задач, в которых эффект неровности дна не так значителен.

Для того чтобы корректно рассчитывать течения вблизи берега, необходимо учитывать условия сухого дна [29; 79]. Как уже было сказано, в рамках этих условий вводится параметр отсечения ε , который определяет минимально воз-

можное значение толщины слоя воды. Запишем условия сухого дна применительно к конечно-объёмной формулировке. Для центра ячейки P условие имеет вид

$$\text{если } h_p < \varepsilon : \quad \mathbf{u}_P = \mathbf{0}, \quad \tau_P = 0, \quad (3.12)$$

а в случае грани f :

$$\text{если } h_f < \varepsilon : \quad \tau_f = 0, \quad \Phi_f^{out} = 0, \quad (3.13)$$

где Φ_f^{out} – исходящий поток массы (3.5) через грань f , это дополнение необходимо для исключения потока массы из сухой ячейки для строгого соблюдения закона сохранения массы.

Напомним, что для ε существует ограничение снизу, накладываемое исходя из геометрических соображений, см. [10], выражение для уровня отсечения в ячейке P :

$$\varepsilon_P \leq \max_{N \in \{N_i\}} (|b_P - b_N|, \varepsilon_0),$$

где $\{N_i\}$ – центры ячеек, смежных с ячейкой P , ε_0 – минимальное значение параметра.

3.1.3 Реализация решателя RSWEFoam и основы работы с ним

На данный момент решатель доступен для скачивания в репозитории лаборатории ЛСПО ЦМТС ИСП РАН [76]. В ветке <https://github.com/unicfdlab/QGDSolver/tree/digitef-dev-v2012> в папке `app`, в которой располагаются все решатели библиотеки, находится одноимённая папка `RSWEFoam` с исходным кодом решателя. А в папке `tutorials/RSWEFoam` располагаются описанные в данной работе вычислительные кейсы: `dryDamBreak` – задача распада разрыва над сухим дном, `asymDam` – разрушение несимметричной дамбы, `3Cones` – задача о затоплении поверхности с тремя конусами.

Благодаря структуре фреймворка QGDSolver [76] решатель RSWEFoam реализуется и интегрируется в него естественным образом, рис. 3.4а. Основные библиотеки, которые необходимо использовать для реализации решателя – библио-

тека для аппроксимации пространственных производных на гранях ячеек `fvsc`, которая реализована в рамках фреймворка, и библиотека для расчёта параметра τ .

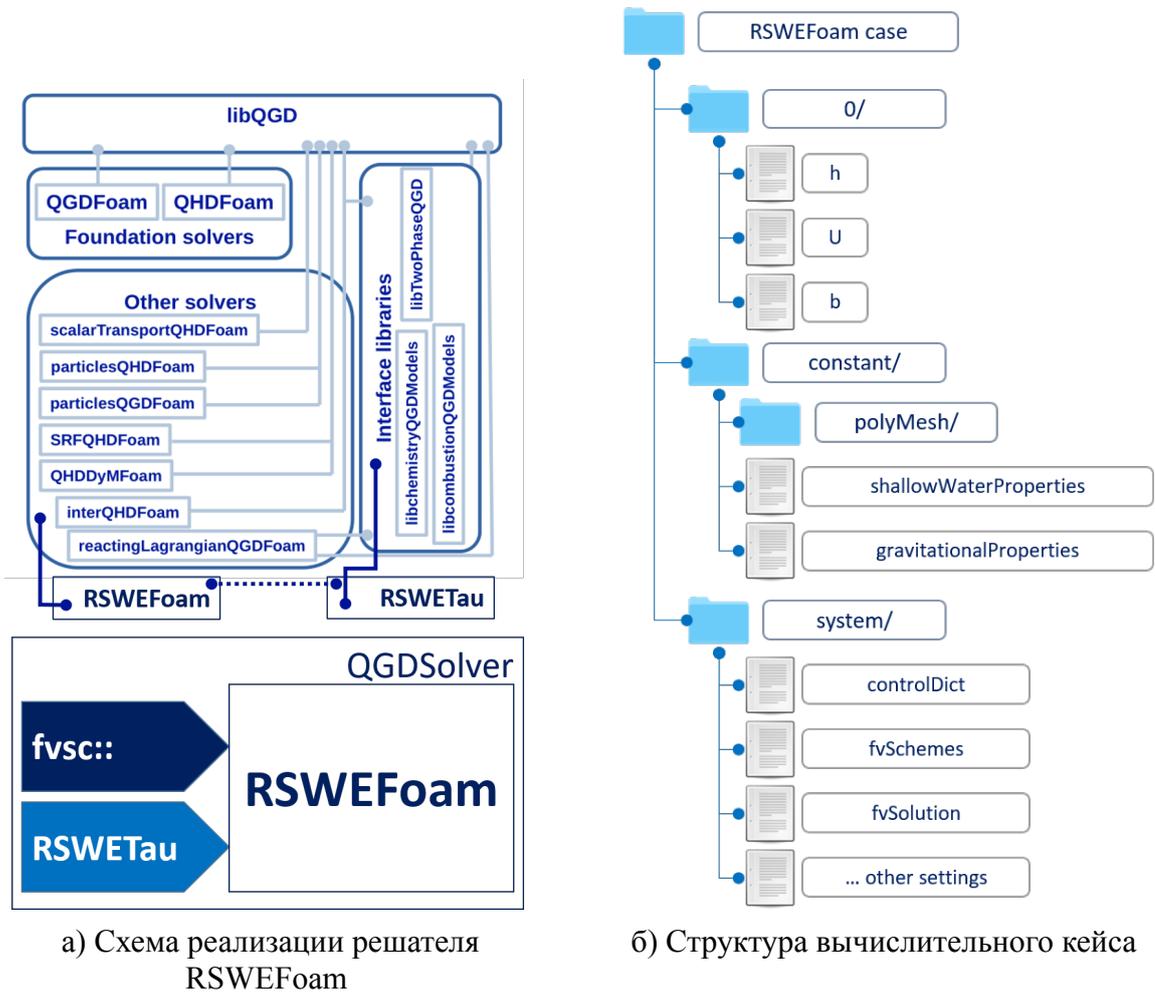


Рисунок 3.4 — Особенности решателя RSWEFoam.

Для запуска расчёта решателя RSWEFoam необходимо подготовить вычислительный кейс рис. 3.4б, т.е. построить сетку и определить начальные и граничные условия, как и для любого другого решателя OpenFOAM, а кроме того задать параметры задачи. Параметры, относящиеся к методу РУМВ, располагаются в файле `shallowWaterProperties`:

Листинг 3.1 Файл `shallowWaterProperties`

```

QGD
{
    QGDCoeffs    RSWEFoam;
}

alpha          0.2;
wellBalancedScheme    true;

```

```

dryZoneCondition  true;
10| eps0      1e-6;
   | tauU     1.0;
   | NS      1.0;

```

Здесь строки 1 – 4 – обязательные для решателя, в них указывается, что для расчета параметра τ используется конкретная библиотека RSWETau.

Все остальные параметры являются необязательными, если они не указаны, будут заданы их стандартные значения (укажем их в скобках):

- alpha – коэффициент α (стандартное значение 0.5);
- wellBalancedScheme – булевый параметр, определяющий, использовать ли схему “хорошей балансировки” для \tilde{h}_f (3.11) или использовать $\tilde{h}_f = h_f$ (стандартное значение false, т.е. $\tilde{h}_f = h_f$);
- dryZoneCondition – булевый параметр, определяющий, использовать ли условия сухого дна (стандартное значение false);
- eps0 – параметр отсечения ε_0 (стандартное значение 10^{-6} м);
- tauU – вещественный коэффициент, указывающий, в каком соотношении использовать величину модуля скорости $|\mathbf{u}|$ в выражении для параметра τ , т.е. $\tau_P = \alpha C_\delta / \sqrt{gh_P + \text{tauU}|\mathbf{u}_P|}$, при tauU = 0 это формула (1.13), а при tauU = 1 – формула (1.14) (стандартное значение 0);
- NS – вещественный коэффициент, указывающий, в каком соотношении использовать тензор вязких напряжений $\mathbf{\Pi}_{NS}$ в выражении для $\mathbf{\Pi}$, т.е. при NS = 0 $\mathbf{\Pi}_{NS}$ не используется, а при NS = 1 – формула (1.8) (стандартное значение 1);

Для запуска решателя используются стандартные OpenFOAM команды:

Листинг 3.2 Запуск решателя

```

> blockMesh
> RSWEFoam

```

3.2 Расчётные задачи

Отметим для краткости, что во всех задачах, описанных ниже, используется схема для выполнения условия “хорошей балансировки”, а также в Π входит тензор вязких напряжений Π_{NS} .

3.2.1 Одномерная задача распада разрыва над сухим дном

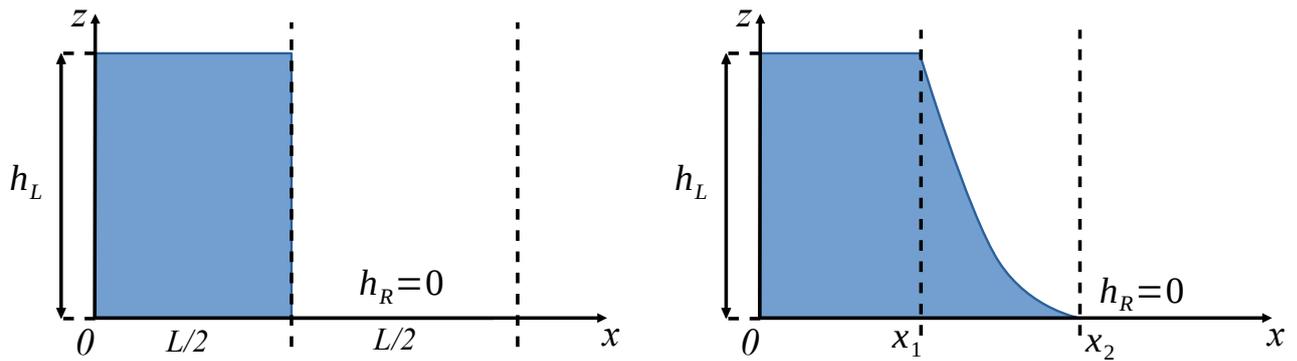
Одномерная задача распада разрыва – задача Римана – является классическим тестом для проверки численных методов решения уравнений мелкой воды. Постановка задачи состоит в том, что в начальный момент времени одномерная область с ровным дном $b \equiv 0$ разделена пополам разрывом. По обе стороны от разрыва уровни жидкости различны: h_L – слева, h_R – справа. Для задачи можно построить аналитическое решение, которое зависит от соотношения уровней h_R , h_L .

Для апробации решателя RSWEFoam интересен частный случай задачи, при котором $h_R = 0$, т.е. когда справа от разрыва располагается сухая зона. Это позволит проверить сразу несколько параметров алгоритма.

В качестве примера рассмотрим область длиной $L = 50\text{м}$, в центре которой в начальный момент времени локализован разрыв толщины слоя воды, жидкость при этом покоится $u(x, t = 0) = 0$. Задача была разобрана в [27]. Величина ускорения свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$. Уровень воды слева от разрыва $h_L = 1\text{м}$, а справа от него вода отсутствует $h_R = 0\text{м}$, рис. 3.5а. Аналитическое решение задачи в общем виде, [27]:

$$h(x, t), u(x, t) = \begin{cases} h = h_L, & u = 0, & \text{если } x \leq x_1 = -t\sqrt{gh_L}; \\ h = \frac{1}{9g} \left(2\sqrt{gh_L} - \frac{x}{t}\right)^2 h_L, & u = \frac{2}{3} \left(\sqrt{gh_L} + \frac{x}{t}\right), \\ \text{если } x_1 < x \leq x_2 = -t\sqrt{gh_L}; \\ h = 0, & u = 0, & \text{если } x_2 < x. \end{cases} \quad (3.14)$$

Расчёт ведётся до момента времени $t = 3\text{с}$.



а) Распределение жидкости в начальный момент времени. б) Распределение жидкости в момент времени $t > 0$, точки x_1, x_2 движутся в противоположных направлениях от начального положения разрыва.

Рисунок 3.5 — Схема разрушения столба жидкости.

При распаде образуются две точки движения разрыва x_1 и x_2 , рис. 3.5б, при этом отметим, что положение точки x_2 в расчёте определяется условиями сухого дна.

На рис. 3.6 приведено сравнение двух подходов для определения параметра τ с аналитическим решением на сетке $\Delta x = 0.05\text{м}$, величина настроечных параметров

$$\alpha = 0.2, \quad \beta = 0.1, \quad \varepsilon = 10^{-4}.$$

Можно заметить, что решение для скорости при использовании формулы (1.14) ближе к аналитическому, а для (1.13) решение сильно сглаживается, что объясняется быстрым ростом τ вблизи сухого дна, который компенсируется скоростью распространяющегося разрыва в первом случае. В случае с решением для толщины слоя воды h , рис. 3.6б, подходы практически не отличаются.

Для исследования сходимости решения по сетке рассматривается более близкий к аналитическому подход определения τ по формуле (1.14), рис. 3.7. Численное решение совпадает с аналитическим и отличается только на границе с сухим дном. Из рис. 3.7 можно заметить, что уменьшение шага сетки сдвигает эту границу. Кроме того, значительное влияние на расположение сухой точки для численного решения оказывает величина параметра отсечения ε . Отметим, что при значении $\varepsilon < 10^{-6}\text{м}$ для обеспечения устойчивости численного алгоритма необходимо уменьшать шаг по времени.

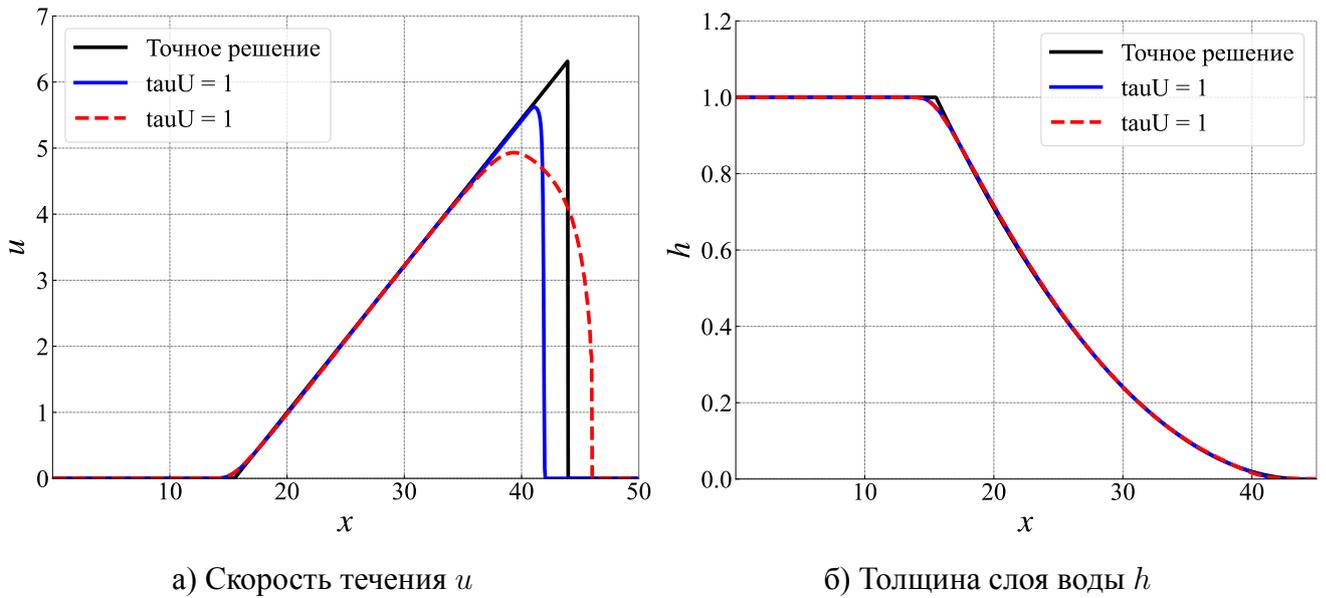


Рисунок 3.6 — Сравнение подходов для вычисления τ для момента времени $t = 3\text{с}$, $\varepsilon = 10^{-4}\text{м}$, $\alpha = 0.2$, $\beta = 0.1$.

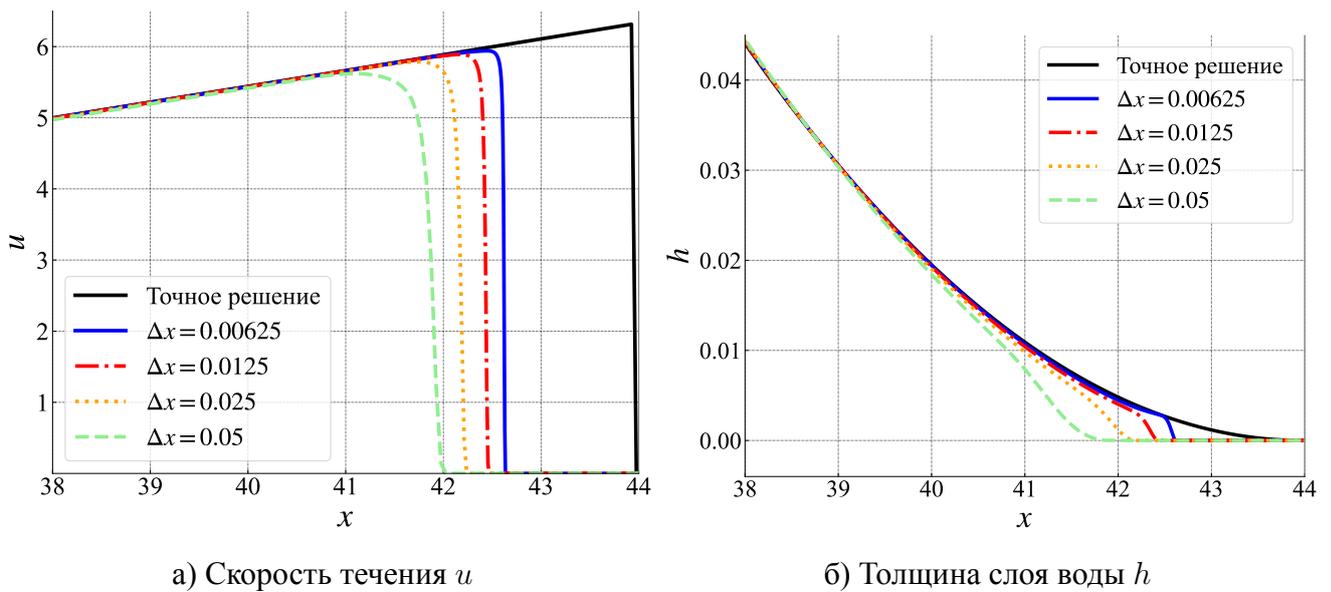


Рисунок 3.7 — Сходимость численного решения по сетке в момент времени $t = 3\text{с}$. Фрагменты численного решения, параметр τ рассчитан по формуле (1.14), $\varepsilon = 10^{-6}\text{м}$, $\alpha = 0.2$, $\beta = 0.1$.

3.2.2 Разрушение несимметричной дамбы

Возможности работы алгоритма для двумерных задач иллюстрируются примером расчёта нестационарного течения, возникающего при разрушении несим-

метричной дамбы. Эта задача является известным тестом, см., например, [79]. С помощью индивидуального кода РУМВ эта задача моделировалась в [7].

В соответствии с [79] рассматривается задача о течении, возникающем при мгновенном разрушении дамбы, разделяющей два бассейна с водой в квадратной области с ровным дном $b(x,y) = 0$. Высота уровня воды в левом бассейне составляет 10 м, в правом 5 м. Длина разрыва равна 75 м, начало разрыва расположено в точке с координатой $y = 95$ м, рис. 3.8. Толщина стенки дамбы равна 10 м, и её левая сторона расположена в точке с координатой $x = 95$ м. Величина ускорения свободного падения $g = 9.81$ м/с². На всех внутренних Γ_{in} и внешних Γ_{out} границах дамбы ставятся условия непроницаемой стенки

$$\left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Gamma_{in}, \Gamma_{out}} = 0, \quad \left. u_n \right|_{\Gamma_{in}, \Gamma_{out}} = 0, \quad \left. \frac{\partial u_\tau}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Gamma_{in}, \Gamma_{out}} = 0.$$

Линии уровня для распределения толщины слоя воды на момент времени $t = 7.2$ с представлены на рис. 3.8. Расчёты проведены на равномерной прямоугольной сетке с шагами $\Delta x = \Delta y = 1$ м и с заданными значениями настроечных параметров $\alpha = 0.2$, $\beta = 0.2$. На рис. 3.8 можно заметить, что в решении проявляются характерные особенности возникающего к указанному моменту времени течения, а именно: сглаженный немонотонный профиль слева от разрыва и резкий, но монотонный профиль в правой части области, а также отражение волны от верхней стенки бассейна. В статье [79] задача о разрушении несимметричной дамбы решается с использованием неструктурированной пространственной треугольной сетки с помощью двух численных алгоритмов высокого порядка точности, результаты которых оказываются близкими. Результаты расчётов на основе алгоритма с регуляризацией для $\Delta x = \Delta y = 1$ м хорошо совпадают с решением [79], полученным на сетке с шагами порядка 2 м.

В модели мелкой воды аналогом числа Маха в газовой динамике $Ma = |u|/c_S$, где $c_S = \sqrt{\gamma RT}$ скорость звука в газе, является число Фруда $Fr = |u|/c$. При этом скорость распространения малых возмущений вычисляется как $c = \sqrt{gh}$.

На рис. 3.9 представлены распределения уровня воды и числа Фруда вдоль линии $y = 160$ м, параллельной оси ОХ в момент времени $t = 7.2$ с и с параметрами $\alpha = 0.2$, $\beta = 0.2$ для различных пространственных шагов $\Delta x = \Delta y = 1$ м, $\Delta x = \Delta y = 0.5$ м и $\Delta x = \Delta y = 0.25$ м. Видна сходимость решения при сгу-

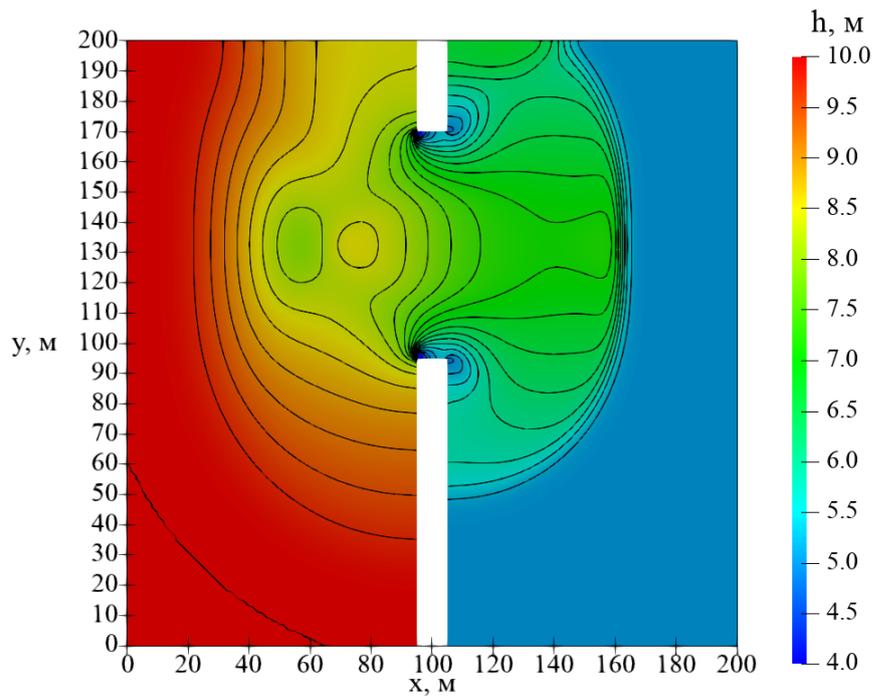


Рисунок 3.8 — Разрушение несимметричной плотины. Толщина слоя жидкости и линии уровня, $t = 7.2\text{с}$, $\Delta x = \Delta y = 1\text{м}$, $\alpha = 0.2$, $\beta = 0.2$.

щении сетки как для h , так и для Fr . Профили численного решения для уровня воды и числа Фруда соответствуют результатам [79] и приближаются к нему при уменьшении шага сетки.

3.2.3 Задача о затоплении поверхности с тремя конусами

Задача о разрушении плотины и затоплении поверхности с тремя конусами, освещённая в различных работах, например [29; 80], приведена здесь для демонстрации применения условий сухого дна, записанных в рамках OpenFOAM, к пространственным задачам. Впервые в рамках РУМВ эта задача была изучена с помощью индивидуального кода на структурированных треугольных сетках в [27].

Рассматривается канал прямоугольной формы длиной 75 м и шириной 30 м. Начальный разрыв расположен на линии $x = 16$ м, уровень воды слева от разрыва составляет $h = 1.875$ м, а остальная область полагается сухой ($h = 0$). Канал со всех сторон ограждён непроницаемыми стенками Γ_{wall} , на которых ставятся

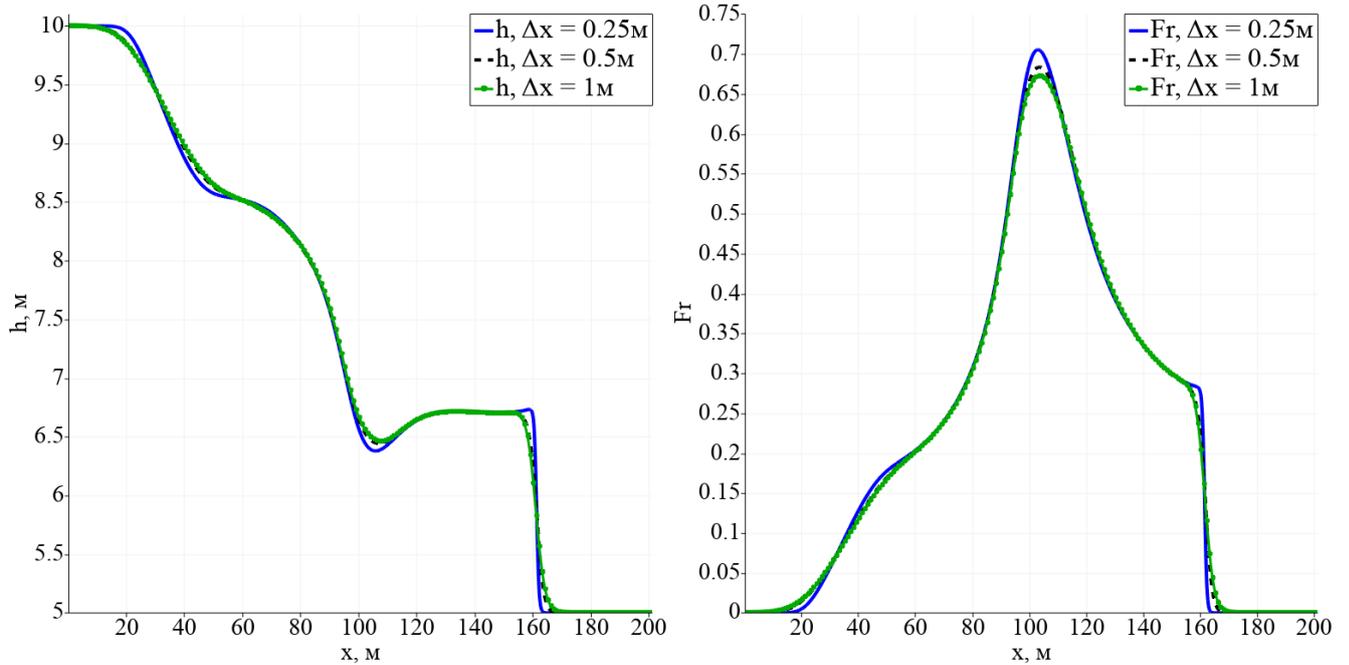
а) Уровень воды $h(x) = h(x, y = 160)$ б) Число Фруда $Fr(x) = Fr(x, y = 160)$

Рисунок 3.9 — Разрушение несимметричной плотины, срез вдоль линии $y = 160$ м. Сходимость численного решения по сетке в момент времени $t = 7.2$ с, $\alpha = 0.2$, $\beta = 0.2$.

условия отражения

$$\left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Gamma_{wall}} = 0, \quad \left. u_n \right|_{\Gamma_{wall}} = 0, \quad \left. \frac{\partial u_\tau}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Gamma_{wall}} = 0.$$

Обтекаемые препятствия представляют собой три конуса разных размеров. Основание первого конуса высотой $h_1 = 3$ м расположено в центре с координатами $x_1 = 47.5$ м, $y_1 = 15$ м, радиус основания $r_1 = 10$ м. Два других конуса имеют одинаковую высоту $h_2 = 1$ м и радиус $r_2 = 8$ м. Центр одного из малых конусов расположен в точке $x_2 = 30$ м, $y_2 = 6$ м, а центр другого малого конуса в точке $x_3 = 30$ м, $y_3 = 24$ м. Таким образом, батиметрию в задаче можно задать, используя функцию

$$b(x, y) = \max \left[0, 3 - \frac{3}{10} \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}, 1 - \frac{1}{8} \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}, 1 - \frac{1}{8} \sqrt{(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2} \right].$$

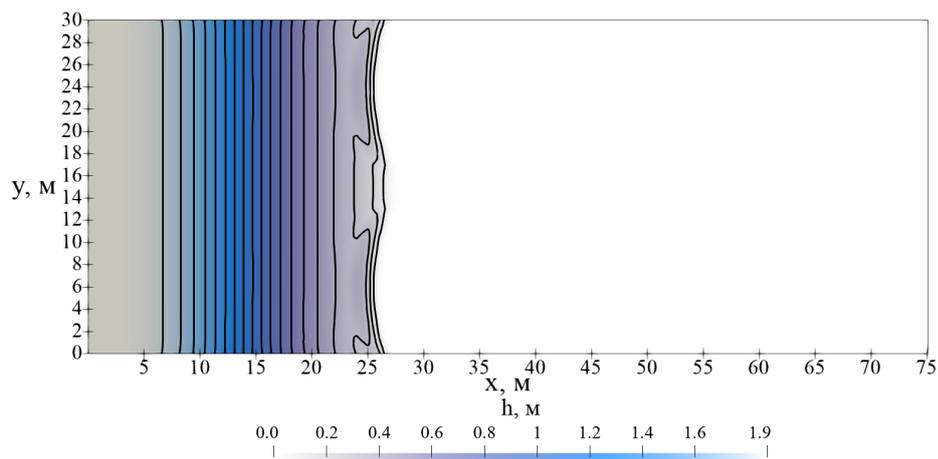
Для приближения результатов численного моделирования к реальным вводится сила трения о дно, которая имеет вид

$$\mathbf{f} = -\frac{gn^2}{h^{4/3}}\mathbf{u}|\mathbf{u}|, \quad (3.15)$$

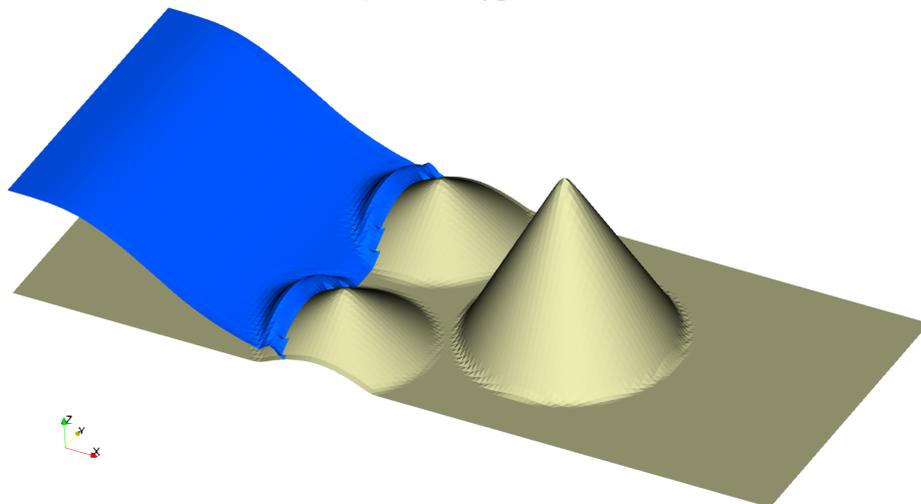
где n – коэффициент Маннинга, который зависит от материала подстилающей поверхности. В задаче полагается $n = 0.018 \text{ с/м}^{1/3}$.

Численное решение проводилось на равномерной прямоугольной сетке с шагами по пространству $\Delta x = \Delta y = 0.5 \text{ м}$. Параметр регуляризации $\alpha = 0.2$, число Куранта $\beta = 0.1$, а минимальное значение параметра отсечения $\varepsilon_0 = 10^{-3} \text{ м}$. Расчёт проводился до момента затухания колебаний воды в канале $t = 300 \text{ с}$.

На рис. 3.10–3.13 представлены результаты расчёта распределения уровня воды в моменты времени $t = 2 \text{ с}$, $t = 6 \text{ с}$, $t = 12 \text{ с}$ и $t = 30 \text{ с}$ соответственно.



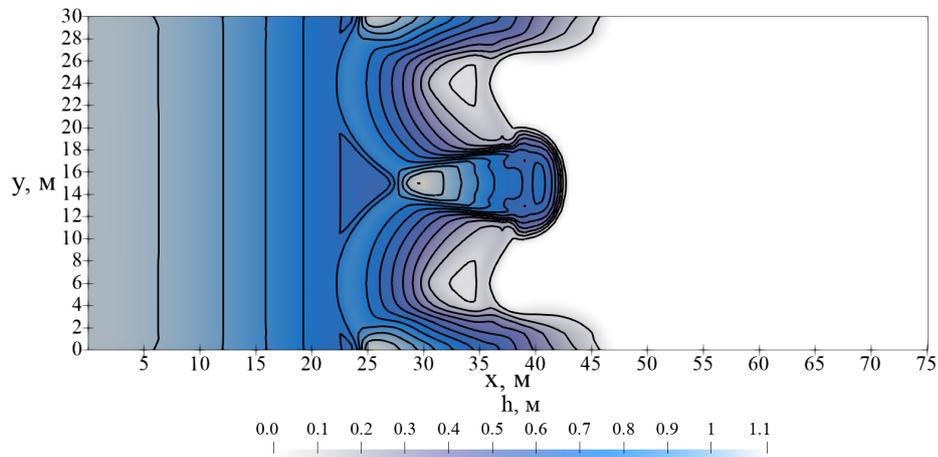
а) Линии уровня



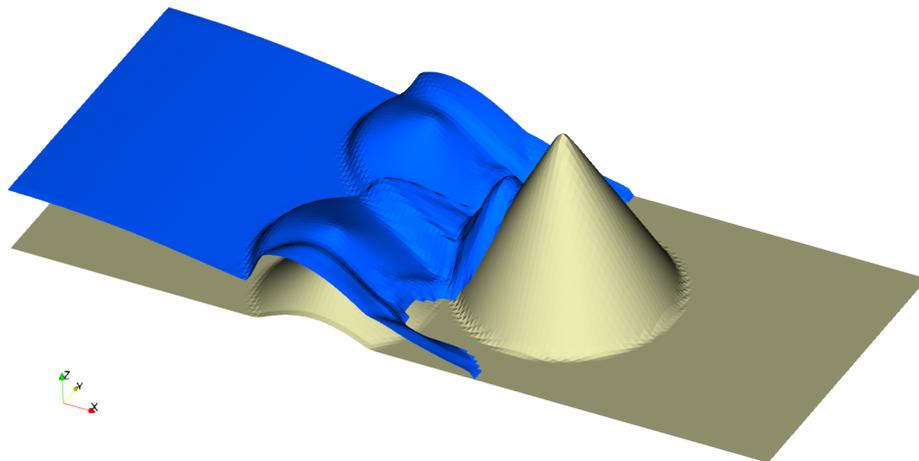
б) Трёхмерный вид.

Рисунок 3.10 — Уровень воды для момента $t = 2 \text{ с}$.

Каждый рисунок состоит из распределения уровня воды и изолиний (а), а также из трёхмерного вида задачи (б). Отметим, что любой сколь угодно малый слой воды прорисовывается на трёхмерном виде задачи, поэтому на нём не всегда корректно отображается область сухого дна.



а) Линии уровня

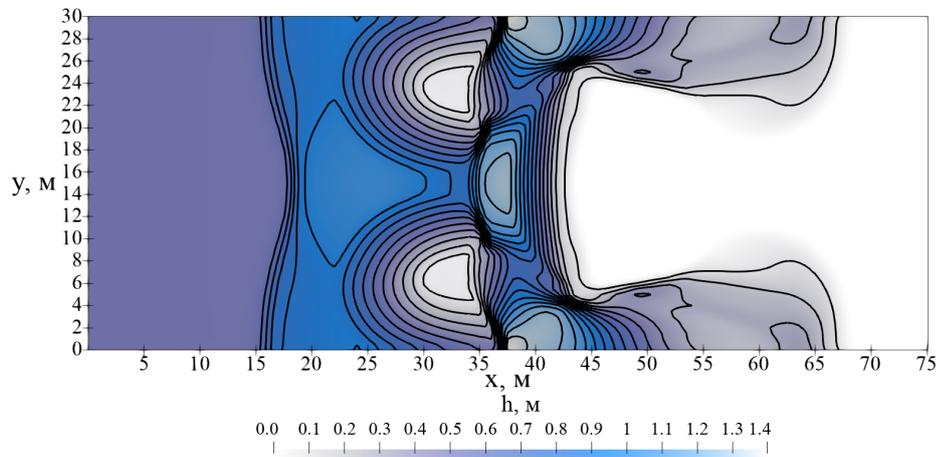


б) Трёхмерный вид.

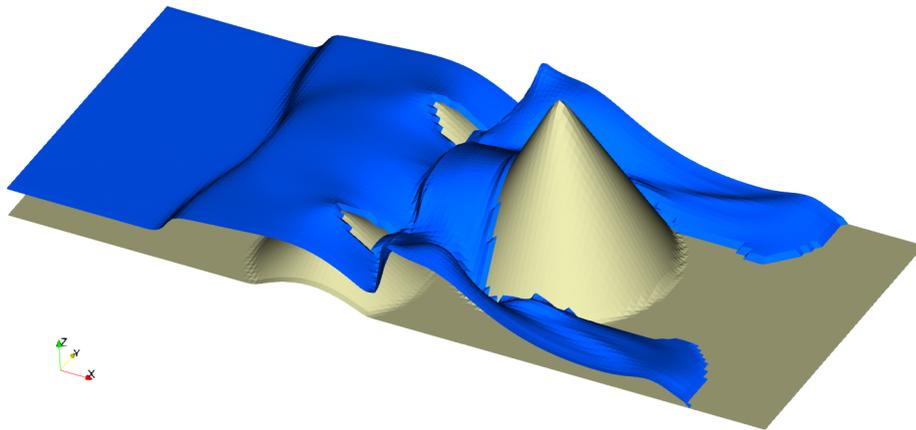
Рисунок 3.11 — Уровень воды для момента $t = 6$ с.

На рисунках можно заметить, как жидкость обтекает два маленьких холмика, рис. 3.10, т.е. как происходит процесс набегания волны на наклонную поверхность. На рис. 3.11 также виден процесс столкновения набегающей волны с самым высоким конусом, вершина которого всегда остаётся сухой. Затем вокруг маленьких холмиков образуется область с сухим дном, рис. 3.12а, при этом в расчёте в этой области наблюдается тонкий слой воды, который отображается в трёхмерном виде задачи, рис. 3.12б. Распространяющиеся волны по обе стороны от большого конуса приобретают округлую форму благодаря наличию силы трения (3.15). На финальном рис. 3.13 можно заметить, как отражённая волна натекает

на большой конус. Приведённые результаты (рис. 3.10–3.13) хорошо соответствуют численным результатам, полученным с применением адаптивных сеток [80] и неструктурированных сеток [29], где для расчёта использовался метод Годунова, модифицированный специальным образом для решения задач с сухим дном.

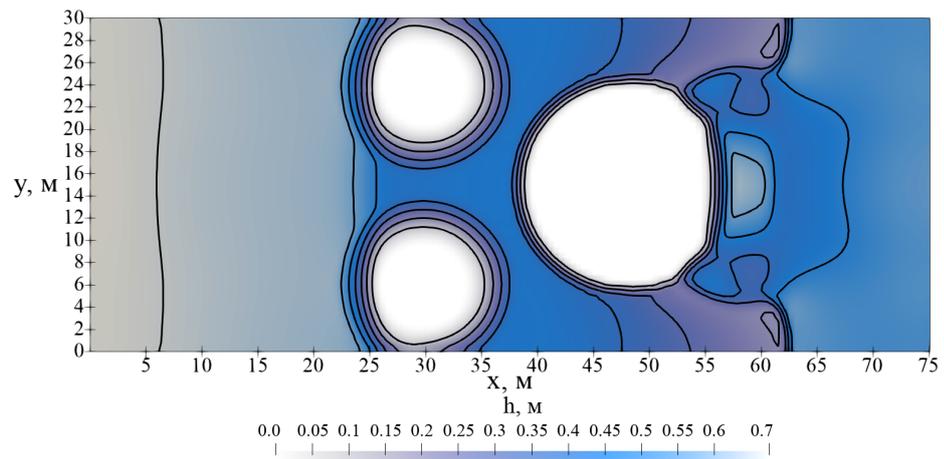


а) Линии уровня

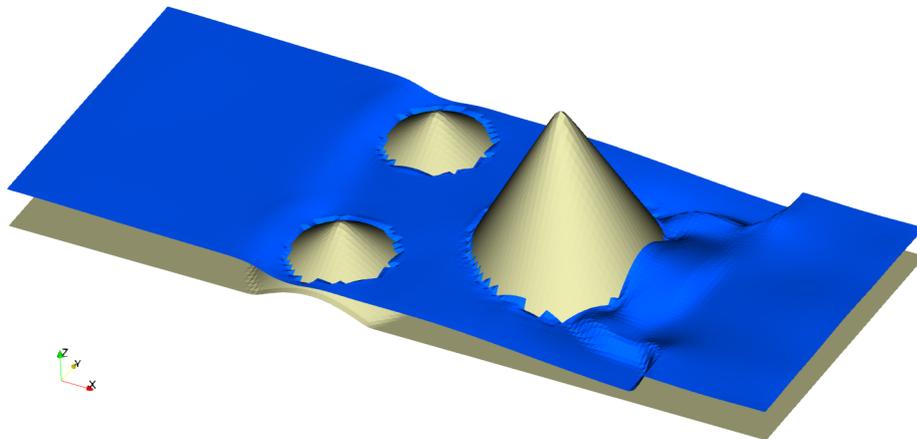


б) Трёхмерный вид.

Рисунок 3.12 — Уровень воды для момента $t = 12$ с.



а) Линии уровня



б) Трёхмерный вид.

Рисунок 3.13 — Уровень воды для момента $t = 30$ с.

Основные результаты

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Разработаны усовершенствованные алгоритмы численного решения регуляризованных уравнений мелкой воды для расчёта сухих зон, выполнения условий «хорошей балансировки» и учёта внешних сил и приливных воздействий. На базе усовершенствованных алгоритмов создан исследовательский комплекс программ для моделирования прикладных задач. С его помощью выполнено моделирование прибрежной акватории Карского, Печорского и части Баренцева морей.
2. На основе квазигазодинамического подхода построена система регуляризованных уравнений двухслойной мелкой воды и создан алгоритм их численного решения. Выполнена валидация алгоритма на характерных модельных задачах.
3. Предложена модификация регуляризованной системы уравнений мелкой воды, включающая в себя уравнение переноса пассивного скаляра. Разработан и программно реализован численный алгоритм решения полученной системы уравнений. С его помощью проведено моделирование циркуляции озера Валунден (о. Шпицберген). В численном эксперименте получены распределения температур и скоростей, что позволило теоретически обосновать наблюдаемые толщины слоя льда на поверхности озера.
4. На базе усовершенствованных и доработанных алгоритмов решения регуляризованных уравнений мелкой воды создан новый решатель RSWEFoam в рамках открытого пакета программ OpenFOAM. Проведена апробация решателя на модельных задачах.

Дальнейшее развитие представленной работы может заключаться в расширении функционала представленного решателя и дополнении его возможностью работы с внешними силами (силой Кориолиса, донного трения и силы трения ветра), граничными условиями, описывающими реальные водоёмы (это необходимо, например, для моделирования приливов или сложных течений на границе), а также рассмотреть водоёмы с батиметрией более сложной формы, для которых появится необходимость в использовании неструктурированных сеток. Кроме то-

го, аналогично вышеописанному подходу может быть реализован и решатель для двухслойной мелкой воды, а также модуль, описывающий перенос примеси.

Автор выражает благодарность: своему научному руководителю, Елизаровой Татьяне Геннадьевне, за помощь, оказываемую на протяжении всей работы, тесное сотрудничество, участие в подготовке докладов и работ, а также за советы, внимание и обмен драгоценным опытом, Крапошину Матвею Викторовичу за помощь при работе с OpenFOAM и реализации решателя, плодотворное сотрудничество и обмен опытом и идеями.

Публикации автора по теме работы

1. *Елизарова Т. Г., Иванов А. В.* Квазигазодинамический алгоритм численного решения двухслойных уравнений мелкой воды // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. — 2016. — № 69. — С. 1—27. — DOI: [10.20948/prepr-2016-69](https://doi.org/10.20948/prepr-2016-69).
2. *Елизарова Т. Г., Иванов А. В.* Регуляризованные уравнения для численного моделирования течений в приближении двухслойной мелкой воды // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2018. — № 5. — С. 741—761. — DOI: [10.7868/s004446691805006x](https://doi.org/10.7868/s004446691805006x).
3. *Елизарова Т. Г., Иванов А. В.* Об однородном алгоритме численного моделирования волны цунами // Учен. зап. физ. фак-/-та Моск. ун-/-та. — 2018. — № 3. — С. 1830103–1—1830103–6. — URL: <http://uzmu.phys.msu.ru/abstract/2018/3/1830103>.
4. *Елизарова Т. Г., Иванов А. В.* Метод регуляризации для численного моделирования переноса примеси в мелкой воде // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. — 2019. — № 27. — С. 1—28.
5. *Елизарова Т. Г., Иванов А. В.* Численное моделирование переноса пассивного скаляра в мелкой воде с использованием квазигазодинамического подхода // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2020. — Т. 60, № 7. — С. 1248—1267. — DOI: [10.31857/s0044466920070066](https://doi.org/10.31857/s0044466920070066).
6. *Иванов А. В.* Вычислительный комплекс для моделирования морских течений с применением регуляризованных уравнений мелкой воды // Математическое моделирование. — 2021. — Т. 33, № 10. — С. 109—128. — DOI: [10.20948/mm-2021-10-08](https://doi.org/10.20948/mm-2021-10-08).
7. *Иванов А. В., Крапошин М. В., Елизарова Т. Г.* О новом методе регуляризации уравнений двухфазной несжимаемой среды // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. — 2021. — № 61. — С. 1—27. — DOI: [10.20948/prepr-2021-61](https://doi.org/10.20948/prepr-2021-61).
8. *Иванов А. В.* О реализации модели мелкой воды на базе квазигазодинамического подхода в открытом программном комплексе OpenFOAM // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. — 2023. — № 28. — С. 1—27. — DOI: [10.20948/prepr-2023-28](https://doi.org/10.20948/prepr-2023-28).
9. *Elizarova T. G., Ivanov A. V.* Numerical simulation of coastal flows with passive pollutant by regularized hydrodynamic equations in shallow water approxima/-

- tion // GISTAM 2019 5th International Conference on Geographical Information Systems Theory, Applications and Management. — Heraklion, Crete, Greece, 2019. — P. 358–365. — DOI: [10.5220/0007877203580365](https://doi.org/10.5220/0007877203580365).
10. *Elizarova T. G., Ivanov A. V., Kuleshov A. A.* Mathematical modeling of russian northern coastal waters in the shallow water approximation // *Journal of Physics: Conference Series*. — 2021. — P.012017–012017. — DOI: [10.1088/1742-6596/1715/1/012017](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1715/1/012017).
 11. *Ivanov A. V.* A software package for flows simulation in the coastal regions of the Kara and Barents seas using shallow water approximation // *Proceedings of the 2021 Ivannikov Ispras Open Conference*. — 2021. — P. 165–169. — DOI: [10.1109/ispras53967.2021.00029](https://doi.org/10.1109/ispras53967.2021.00029).
 12. Freezing of tidal flow in lake Vallunden (Spitsbergen) / A. V. Marchenko [et al.] // *Proceedings of the 26th International Conference on Port and Ocean Engineering under Arctic Conditions*. — 2021. — P. 1–10.
 13. Ice thickening caused by freezing of tidal jet / A. V. Marchenko [et al.] // *Russian Journal of Earth Sciences*. — 2021. — Vol. 21, no. 2. — P. 1–8. — DOI: [10.2205/2021es000761](https://doi.org/10.2205/2021es000761).

Список литературы

1. *Четверушкин Б. Н.* Кинетически-согласованные схемы в газовой динамике: новая модель вязкого газа, алгоритмы, параллельная реализация, приложения. — Москва : Изд-во МГУ, 1999. — С. 226.
2. *Четверушкин Б. Н.* Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. — Москва : Макс Пресс, 2004. — С. 332.
3. *Елизарова Т. Г.* Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. — Москва : Научный мир, 2007. — 351 с.
4. *Шеретов Ю. В.* Математическое моделирование течений жидкости и газа на основе квазигидродинамических и квазигазодинамических уравнений. — Тверь : Тверской государственный университет, 2000. — С. 235.
5. *Шеретов Ю. В.* Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении. — Издательство «РХД», 2009. — С. 400.
6. *Шеретов Ю. В.* Регуляризованные уравнения гидродинамики. — Тверь : Тверской государственный университет, 2016. — 222 с.
7. *Елизарова Т. Г., Булатов О. В.* Регуляризованные уравнения мелкой воды и эффективный метод численного моделирования течений в неглубоких водоемах // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2011. — Т. 51, № 1. — С. 170—184.
8. *Елизарова Т. Г., Сабурин Д. С.* Численное моделирование колебаний жидкости в топливных баках // Математическое моделирование. — 2013. — Т. 25, № 3. — С. 75—88.
9. *Елизарова Т. Г., Сабурин Д. С.* Применение регуляризованных уравнений мелкой воды к моделированию сейшевых колебаний уровня Азовского моря // Математическое моделирование. — 2017. — Т. 29, № 1. — С. 45—62.
10. *Елизарова Т. Г., Булатов О. В.* Регуляризованные уравнения мелкой воды для численного моделирования течений с подвижной береговой линией // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2016. — Т. 56, № 4. — С. 158—177.

11. Прилив в оперативной модели краткосрочного прогноза уровня моря и скорости течений в Белом и Баренцевом морях / С. К. Попов [и др.] // Метеорология и гидрология. — 2013. — № 6. — С. 68—82.
12. *Дианский Н. А.* Моделирование циркуляции океана и исследование его реакции на короткопериодные и долгопериодные атмосферные воздействия. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2013.
13. *Попов С. К.* Влияние морского льда на приливные колебания уровня моря и скорости течений в Баренцевом и Белом морях // Труды Гидрометцентра РФ, Гидрометеорологические исследования и прогнозы. — 2018. — Т. 370, № 4. — С. 137—155.
14. *Дианский Н. А., Панасенкова И. И., Фомин В. В.* Исследование отклика верхнего слоя Баренцева моря на прохождение интенсивного полярного циклона в начале января 1975 года // Морской гидрофизический журнал. — 2019. — Т. 35, № 6. — С. 530—548. — DOI: [10.22449/0233-7584-2019-6-530-548](https://doi.org/10.22449/0233-7584-2019-6-530-548).
15. Bottom circulation in the Norwegian Sea / E. G. Morozov [et al.] // Russian Journal of Earth Sciences. — 2019. — Vol. 19, no. 2. — P. 1–6. — DOI: [10.2205/2019ES000655](https://doi.org/10.2205/2019ES000655).
16. *Носов М. А.* Адаптация расчетной сетки при моделировании волн цунами // Математическое Моделирование. — 2017. — Т. 29, № 12. — С. 63—76.
17. *Nosov M. A., Moshenceva A. V., Kolesov S. V.* Horizontal motions of water in the vicinity of a tsunami source // Pure Appl. Geophys. — 2012. — Vol. 170, no. 9/10. — P. 1647–1660. — DOI: [10.1007/s00024-012-0605-2](https://doi.org/10.1007/s00024-012-0605-2).
18. *Levin B. W., Nosov M. A.* Physics of Tsunamis, second Edition. — Switzerland : pringer International Publishing AG, 2016. — 388 p.
19. Предсказательное моделирование прибрежных гидрофизических процессов на многопроцессорной системе с использованием явных схем / А. И. Сухинов [и др.] // Математическое моделирование. — 2018. — Т. 30, № 3. — С. 83—100.
20. *Васильев В. С., Сухинов А. И.* Прецизионные двумерные модели мелких водоемов // Математическое моделирование. — 2003. — Т. 15, № 10. — С. 17—34.

21. Метод и технология прогноза штормовых нагонов в Амурском лимане и Сахалинском заливе / Ю. В. Любицкий [и др.] // Труды ГУ Дальневосточный региональный научно-исследовательский гидрометеорологический институт. — 2010. — № 1. — С. 57—73.
22. *Марчук Г. И.* Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. — Москва : Наука, 1982. — 320 с.
23. *Самарский А. А., Вабищевич П. Н.* Нелинейные монотонные схемы для уравнения переноса // Доклады АН СССР. — 1998. — Т. 361, № 1. — С. 21—23.
24. *Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. — Москва : Физматлит, 2001.
25. *Злотник А. А.* Энергетические равенства и оценки для баротропных квазигазо- и квазигидродинамических систем уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2010. — Т. 50, № 2. — С. 325—337. — URL: <http://mi.mathnet.ru/zvmmf4831>.
26. *Злотник А. А.* О построении квазигазодинамических систем уравнений и баротропной системы с потенциальной массовой силой // Математическое моделирование. — 2012. — Т. 24, № 4. — С. 65—79.
27. *Булатов О. В.* Численное моделирование течений в приближении мелкой воды на основе регуляризованных уравнений : дис. ... канд. / Булатов О. В. — М. : МГУ им. М.В. Ломоносова, 2014. — 155 с.
28. *Brufau P., Garcia-Navarros P., Vázquez-Cendón E.* Zero mass error using unsteady wetting–drying conditions in shallow flows over dry topography // International Journal for Numerical Methods in Fluids. — 2004. — Vol. 45. — P. 1047–1082. — DOI: [10.1002/fld.729](https://doi.org/10.1002/fld.729).
29. *Huang Y., Zhuang N., Pei Y.* Well-Balanced Finite Volume Scheme for Shallow Water Flooding and Drying Over Arbitrary Topography // Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics. — 2013. — Vol. 7. — P. 40–54. — DOI: [10.1080/19942060.2013.11015452](https://doi.org/10.1080/19942060.2013.11015452).
30. *Мельхиор П.* Земные приливы. Перевод с английского. — Москва : Мир, 1968.

31. Океанология. Физика океана. Том 2. Гидродинамика океана / под ред. В. М. Каменкович, А. С. Монин. — Москва : Наука, 1978.
32. *Марчук Г. И., Каган Б. А.* Океанические приливы. — Ленинград : Гидрометеиздат, 1977.
33. MarScaper. Ephemeris – Simple C++ library allowing to compute planet coordinates (equatorial and horizontal) with an Arduino Mega. The code is also compatible with PC. — <https://github.com/MarScaper/ephemeris>.
34. *Дуванин А. И.* Приливы в море. — Ленинград : Гидрометеорологическое издательство, 1960.
35. *Meeus J.* Astronomical formulae for calculators. — Richmond, Virginia, USA : Willmann-Bell, Inc, 1988.
36. *Glen N. C.* The admiralty method of tidal prediction, N. P. 159. — Monaco : International Hydrographie Review, 1977.
37. A Description of the Advanced Research WRF Model Version 4 / W. C. Skamarock [et al.]. — 2019. — DOI: [10.5065/1DFH-6P97](https://doi.org/10.5065/1DFH-6P97).
38. *Madec G.* NEMO ocean engine. — Note du Pôle de modélisation, Institut Pierre-Simon Laplace (IPSL), France, No 27, ISSN No 1288-1619, 2008.
39. *Egbert G. D., Erofeeva S. Y.* Efficient Inverse Modeling of Barotropic Ocean Tides // Journal of Atmospheric and Oceanic Technology. — 2002. — Vol. 19, no. 2. — P. 183–204. — DOI: [10.1175/1520-0426\(2002\)019<0183:EIMOBO>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0426(2002)019<0183:EIMOBO>2.0.CO;2).
40. *Belyaev K., Kuleshov A., Smirnov I.* Data Assimilation Method for the Ocean Circulation Model NEMO and Its Application for the Calculation of Ocean Characteristics in the Arctic Zone of Russia // 2019 Ivannikov Ispras Open Conference (ISPRAS). — 2019. — P. 87–91.
41. NCEP FNL Operational Model Global Tropospheric Analyses, continuing from July 1999. — 2000. — DOI: [10.5065/D6M043C6](https://doi.org/10.5065/D6M043C6). — URL: <https://rda.ucar.edu/datasets/ds083.2/>.
42. *Иванов А. В., Стрижак С. В., Захаров М. И.* Моделирование метеоусловий в районе порта и в прибрежной зоне залива Тикси // Труды ИСП РАН. — 2019. — Т. 31, № 6. — С. 163—176.

43. ЦОД. Центр Океанографических Данных (ЦОД). Ежегодные и многолетние данные о режиме и качестве вод морей и морских устьев рек. — URL: <http://nodc.meteo.ru/?q=en/content/emdm> ; дата обращения: 27.11.2021.
44. *Vreugdenhil G. B.* Numerical method for shallow-water flow. — Dordrecht, The Netherlands : Kluwer, 1994.
45. *Bouchut F., Morales de Lun T.* An entropy satisfying scheme for two-layer shallow water equations with uncoupled treatment // ESAIM: M2AN. — 2008. — Vol. 42, no. 4. — P. 638–698. — DOI: [10.1051/m2an:2008019](https://doi.org/10.1051/m2an:2008019).
46. *Abgrall R., Karni S.* Two-layer shallow water system: a relaxation approach // SIAM Journal on Scientific Computing. — 2009. — Vol. 31, no. 3. — P. 1603–1627.
47. *Castro M. J., Macias J., Pares C.* A Q-scheme for a class of systems of coupled conservation laws with source term. Application to a two-layer 1-D shallow water system // ESAIM: M2AN. — 2001. — Vol. 35, no. 1. — P. 107–127. — DOI: [10.1051/m2an:2001108](https://doi.org/10.1051/m2an:2001108).
48. Numerical simulation of two-layer shallow water flows through channels with irregular geometry / M. J. Castro [et al.] // Journal of Computational Physics. — 2004. — Vol. 195, no. 1. — P. 202–235. — DOI: [10.1016/j.jcp.2003.08.035](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2003.08.035).
49. On some fast well-balanced first order solvers for nonconservative systems / M. J. Castro [et al.] // Mathematics of Computation. — 2009. — Vol. 79, no. 271. — P. 1427–1472. — DOI: [10.1090/s0025-5718-09-02317-5](https://doi.org/10.1090/s0025-5718-09-02317-5).
50. Three-layer approximation of two-layer shallow water equations / A. Chertock [et al.] // ESAIM: M2AN. — 2013. — Vol. 18, no. 5. — P. 675–693.
51. *Остапенко В. В.* Численное моделирование волновых течений, вызванных сходом берегового оползня // ПМТФ. — 1999. — Т. 40, № 4. — С. 109—117.
52. *Остапенко В. В.* Метод теоретической оценки дисбалансов неконсервативных разностных схем на ударной волне // Докл. АН СССР. — 1987. — Т. 295, № 2. — С. 292—297.
53. *Овсянников Л. В.* Модели двухслойной мелкой воды // ПМТФ. — 1979. — № 2. — С. 3—13.

54. *Swastika P. V., Pudjaprasetya S. R.* The Momentum Conserving Scheme for Two-Layer Shallow Flows // *Fluids*. — 2021. — Vol. 6, no. 10. — P. 346. — DOI: [10.3390/fluids6100346](https://doi.org/10.3390/fluids6100346). — URL: <http://dx.doi.org/10.3390/fluids6100346>.
55. *Ляпидевский В. Ю., Теукуев В. М.* Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости. — Новосибирск : Издательство СО РАН, 2000.
56. *Остапенко В. В.* Полные системы законов сохранения для моделей двухслойной мелкой воды // *ПМТФ*. — 1999. — Т. 40, № 5. — С. 23—32.
57. *Остапенко В. В.* Устойчивые ударные волны в двухслойной мелкой воде // *ПМТФ*. — 2001. — Т. 65, № 1. — С. 94—113.
58. *Самарский А. А., Попов В. М.* Разностные методы решения задач газовой динамики. — Москва : Наука, 1986.
59. *Булатов О. В.* Аналитические и численные решения уравнений Сен-Венана для некоторых задач о распаде разрыва над уступом и ступенькой дна // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. — 2014. — Т. 54, № 1. — С. 149—163. — DOI: [10.7868/s0044466914010049](https://doi.org/10.7868/s0044466914010049).
60. *Злотник А. А.* О консервативных пространственных дискретизациях баротропной квазигазодинамической системы уравнений с потенциальной массовой силой // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. — 2016. — Т. 56, № 2. — С. 301—317. — DOI: [10.7868 / s0044466916020186](https://doi.org/10.7868/s0044466916020186).
61. *Chertock A., Kurganov A., Petrova G.* Finite-volume-particle methods for models of transport of pollutant in shallow water // *Journal of Scientific Computing*. — 2006. — Vol. 27, no. 1–3. — P. 189–199. — DOI: [10.1007/s10915-005-9060-x](https://doi.org/10.1007/s10915-005-9060-x).
62. *Chertock A., Kurganov A.* On a hybrid finite-volume-particle method // *ESAIM: M2AN*. — 2004. — Vol. 38, no. 6. — P. 1071–1091.
63. Численный расчет течений и дальнего переноса примеси в равнинных речных водохранилищах / В. И. Квон [и др.] // *ПМТФ*. — 2003. — Т. 44, № 6. — С. 158—163.
64. *Delis A. I., Katsaounis T.* A generalized relaxation method for transport and diffusion of pollutant models in shallow water. // *Computational Methods in Applied Mathematics*. — 2004. — Vol. 4, no. 4. — P. 410–430.

65. *Benkhaldoun F., Elmahi I., Seaid M.* Well-balanced finite volume schemes for pollutant transport on unstructured meshes // *Journal of Computational Physics*. — 2007. — Vol. 226. — P. 180–203.
66. Well balanced adaptive simulation of pollutant transport by shallow water flows: application to the bay of Tangier / E. M. Chaabelasri [et al.] // *International Journal of Hydraulic Engineering*. — 2014. — Vol. 3, no. 1. — P. 10–23.
67. *Bristeau M.-O., Perthame B.* Transport of pollutant in shallow water using kinetic schemes // *ESAIM: Proc.* — 2001. — Vol. 10. — P. 9–21. — DOI: [10.1051/proc:2001002](https://doi.org/10.1051/proc:2001002).
68. *Audusse E., Bristeau M.-O.* Transport of pollutant in shallow water a two time steps kinetic method // *ESAIM: M2AN*. — 2003. — Vol. 37, no. 2. — P. 389–416.
69. *Fernandez-Nieto E. D., Narbona-Reina G.* Extension of WAF type methods to non-homogeneous shallow water equations with pollutant // *Journal of Scientific Computing*. — 2008. — Vol. 36. — P. 193–217.
70. *Чуруксаева В. В., Михайлов М. Д.* Численное моделирование потока жидкости над рельефом дна // *Вестн Том. гос. ун-та. Математика и механика*. — 2014. — 1(27). — С. 51—60.
71. Numerical solution of advection diffusion reaction equation coupled with shallow water equation / E. M. Chaabelasri [et al.] // *International Journal of Scientific & Engineering Research*. — 2017. — Vol. 8. — P. 256–262.
72. *Marchenko A. V., Morozov E. G.* Asymmetric tide in Lake Vallunden (Spitsbergen) // *Nonlinear Processes in Geophysics*. — 2013. — Vol. 20, no. 6. — P. 935–944. — DOI: [10.5194/npg-20-935-2013](https://doi.org/10.5194/npg-20-935-2013).
73. A tensorial approach to computational continuum mechanics using object-oriented techniques / H. G. Weller [et al.]. — 1998. — DOI: [10.1063/1.168744](https://doi.org/10.1063/1.168744). — URL: <https://www.openfoam.com>.
74. Development of OpenFOAM Solver for Compressible Viscous Flows Simulation Using Quasi-Gas Dynamic Equations / К. М. В. [и др.] // 2017 Ivannikov ISPRAS Open Conference (ISPRAS). — IEEE, 2017. — DOI: [10.1109/ISPRAS.2017.00026](https://doi.org/10.1109/ISPRAS.2017.00026).

75. *Истомина М. А., Шильников Е. В.* Об аппроксимации потоковых величин на пространственных сетках нерегулярной структуры // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. — Москва, 2019. — № 86. — С. 1—22. — DOI: [10.20948/prepr-2019-86](https://doi.org/10.20948/prepr-2019-86).
76. Фреймворк QGDsolver / М. В. Крапошин [и др.]. — URL: <https://github.com/unicfdlab/QGDsolver>.
77. Development of a new OpenFOAM solver using regularized gas dynamic equations / M. V. Kraposhin [et al.] // Computers & Fluids. — 2018. — Vol. 166. — P. 163–175. — DOI: [10.1016/j.compfluid.2018.02.010](https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2018.02.010).
78. *Kraposhin M. V., Ryazanov D. A., Elizarova T. G.* Numerical algorithm based on regularized equations for incompressible flow modeling and its implementation in OpenFOAM // Computer Physics Communications. — 2022. — Vol. 271. — P. 108216. — DOI: [10.1016/j.cpc.2021.108216](https://doi.org/10.1016/j.cpc.2021.108216).
79. *Ricchiuto M., Abgrall R., Deconinck H.* Application of conservative residual distribution schemes to the solution of the shallow water equations on unstructured meshes // Journal of Computational Physics. — 2007. — Vol. 222, no. 1. — P. 287–331. — DOI: [10.1016/j.jcp.2006.06.024](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2006.06.024).
80. *Liang Q., Borthwick A. G. L.* Adaptive quadtree simulation of shallow flows with wet–dry fronts over complex topography // Computers & Fluids. — 2009. — Vol. 38, no. 2. — P. 221–234. — DOI: [10.1016/j.compfluid.2008.02.008](https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2008.02.008).