

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ БЕЗОПАСНОГО РАЗВИТИЯ АТОМНОЙ ЭНЕРГЕТИКИ  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК (ИБРАЭ РАН)

На правах рукописи

УДК 532:536-12

ГЛОТОВ ВЯЧЕСЛАВ ЮРЬЕВИЧ

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СВОБОДНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ НА  
ОСНОВЕ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА**

Специальность: 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и  
комплексы программ»

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук

Научный руководитель:

д.ф.-м.н., проф. В.М. Головизнин

Москва – 2014

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ .....</b>	<b>4</b>
Турбулентность .....	4
Подход Рейнольдса исследования турбулентности .....	6
RANS модели турбулентности .....	7
Современные подходы к описанию турбулентности .....	11
Модели подсеточной вязкости .....	15
Квазипрямое численное моделирование .....	19
Концепция идеального LES алгоритма.....	24
Цели и структура диссертационной работы.....	25
<b>ГЛАВА 1. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ .....</b>	<b>28</b>
Схемы «КАБАРЕ» и «двухслойный крест» для одномерного уравнения переноса.....	28
Сравнение диссипативных и дисперсионных свойств схем «КАБАРЕ» и «двухслойный крест».....	31
Гибридные схемы.....	33
Нелинейная коррекция потоковых переменных.....	36
Анализ диссипативных и дисперсионных свойств нелинейных схем .....	37
Перенос профиля на неравномерной сетке .....	42
Уравнение Бюргерса .....	44
DNS моделирование затухающей «бюргюленции» .....	48
Расчет «бюргюленции» на грубых расчетных сетках.....	51
<b>ГЛАВА 2. ТУРБУЛЕНТНОСТЬ (КРАТКИЙ ОБЗОР).....</b>	<b>57</b>
Модель Навье-Стокса несжимаемой жидкости .....	57
Каскад энергии .....	61
Теория KLB (Kraichnan-Leith-Batchelor) двумерной турбулентности .....	65
Обзор результатов моделирования двумерной турбулентности .....	69
Спектры турбулентности порождаемые сингулярностями .....	82

<b>ГЛАВА 3. ДВУМЕРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ.....</b>	<b>88</b>
Схема «КАБАРЕ» в переменных «скорость-давление» .....	88
Схема «КАБАРЕ» в переменных «функция тока – завихренность» .....	98
Примеры тестовых расчетов .....	101
Моделирование затухающей однородной изотропной турбулентности .....	105
Форсинг. Моделирование обратного энергетического каскада.....	110
<b>ГЛАВА 4. ТРЕХМЕРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ .....</b>	<b>112</b>
Вихрь Рэнкина .....	112
Сферический вихрь Хилла .....	114
Вихрь Тейлора-Грина .....	115
Случайное поле скоростей .....	121
Обобщенная константа Смагоринского.....	124
Влияние форсинга .....	125
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....</b>	<b>127</b>
Защищаемые положения .....	127
Апробация работы.....	127
Публикации.....	128
<b>ЛИТЕРАТУРА .....</b>	<b>131</b>

## **ВВЕДЕНИЕ**

### ***Турбулентность***

Как известно, большинство движений жидкости и газа, встречающихся в природе и технике, являются турбулентными. Особенность таких движений заключается в возникновении т.н. турбулентных напряжений, величина которых может на много порядков превышать величину вязких напряжений, и турбулентных потоков тепла. Переход к турбулентному режиму, как правило, сопровождается ускорением процесса обмена количеством движения и энергии в пристеночных областях, в результате чего сопротивление тела и теплоотдача с поверхности возрастают. Примерами турбулентных течений могут служить течения воды в реках и каналах, течения нефти и газа в трубопроводах, следы за судами и самолетами, атмосферные движения воздуха и облаков. Турбулентность оказывает существенное влияние на протекание химических реакций, процесс горения, смешения и переноса частиц дисперсной примеси.

История исследования турбулентности насчитывает более столетия, однако до сих пор не существует общего, математически строгого подхода к описанию данного феномена. В отличие от ламинарных течений, расчет которых стал во многом рутинной процедурой, надежное предсказание характеристик турбулентных течений по ряду причин (трехмерный характер течения, стохастическая природа и широкий пространственно-временной спектр масштабов) остается, скорее, искусством, чем строгой наукой.

Дать точное определение турбулентности довольно трудно, обычно оно дается путем перечисления характерных черт, свойственных турбулентным движениям сплошных сред. В книге [1] приводится восемь основных характеристик турбулентности:

*Континуальность.* Предположение о приемлемости уравнений Навье-Стокса для интерпретации турбулентных течений и предсказания их мгновенных

характеристик. Турбулентность не распространяется на межмолекулярный уровень.

*Случайный характер* изменения характеристик потока во времени и пространстве.

*Высокие числа Рейнольдса.* Турбулентность возникает в результате неустойчивости ламинарного течения при больших числах Рейнольдса. Эта неустойчивость связана с взаимодействием вязких и нелинейных инерционных членов в уравнении изменения количества движения.

*Трехмерность.* В классическом понимании турбулентности данное явление существенно трехмерное. Это связано с трехмерной природой процесса растяжения вихрей. В двумерном случае этот процесс запрещен, однако, растяжение вихрей можно с успехом заменить на растяжение линий завихренности (ротора завихренности) с образованием филаментов (нитей с большими градиентами завихренности). В результате этого процесса возникает каскад к малым масштабам энтропии. Поэтому двумерная турбулентность имеет право на существование и может быть рассмотрена как отдельный не менее интересный объект.

*Вихревая природа.* Существование в турбулентном потоке иерархии вихрей различного масштаба, вращающихся в разных плоскостях.

*Нелинейность.* Взаимодействие возмущений разного масштаба возможно только в нелинейной системе.

*Диссипативность.* Вязкие напряжения сдвига выполняют работу деформации, которая увеличивает энергию среды за счет кинетической энергии турбулентности.

*Диффузионность.* Это свойство связано с фактом быстрого перемешивания и возрастания скорости обмена импульсом, теплом и веществом по сравнению с ламинарным режимом.

### *Подход Рейнольдса исследования турбулентности*

Основной метод исследования турбулентности был сформулирован в работе О. Рейнольдса (1885). Согласно подходу Рейнольдса мгновенные значения искомых функций (скорости, плотности, давления, температуры) представляются в виде суммы средней и пульсационной составляющих  $f = \bar{f} + f'$ . Изучение и описание поведения средних характеристик потока, сравнительно плавно меняющихся в пространстве и времени, оказывается более простой задачей, чем исследование трехмерного нестационарного и хаотического движения, каковым в действительности является турбулентное течение. Метод Рейнольдса составляет целую эпоху в теории турбулентности и до сих пор является основным методом, используемым на практике. Однако этот подход не позволяет получить решение той или иной задачи в рамках строгой математической постановки, поскольку уравнения, полученные Рейнольдсом, являются незамкнутыми. В отличие от уравнений динамики вязкой жидкости, содержащей тензор вязких напряжений, который для ньютоновских сред выражается через тензор скоростей деформаций, уравнения Рейнольдса содержат компоненты тензора конвективных (рейнольдсовых или турбулентных) напряжений, возникающих из осредненных произведений флуктуаций скорости ( $\tau_{ij} = -\overline{v'_i v'_j}$ ), природа и свойства которых определяются характеристиками пульсационного движения. Для замыкания осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса (Reynolds Average Navier-Stokes, RANS) используется совокупность полуэмпирических соотношений, в том числе и дифференциальных уравнений, называемых моделью турбулентности.

Модели турбулентности, использующиеся в инженерных приложениях в настоящее время, основаны на концепции турбулентной диффузии. Буссинеск в 1877 предположил, что турбулентные напряжения могли бы быть связаны со средней скоростью деформации посредством турбулентной вязкости. Для тензора турбулентных напряжений это дает:

$$\tau_{ij} = \nu_t \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij}, \quad (0.1)$$

где  $\nu_t$  – кинематический коэффициент турбулентной вязкости,  $k$  – кинетическая энергия турбулентных пульсаций. Данное уравнение не вводит модели турбулентности, а только характеризует структуру такой модели и указывает на сдвиговое происхождение турбулентного напряжения. При этом основной задачей является задание функции турбулентной вязкости, которая, в отличие от молекулярной вязкости, определяется состоянием турбулентного течения и не связана со свойствами жидкости. Значение  $\nu_t$  может значительно меняться во времени и в пространстве в зависимости от характера течения. Такой подход, хотя и позволяет описать широкий класс сдвиговых течений, не является универсальным и не учитывает влияния крупномасштабных вихревых структур, обладающих свойствами анизотропии и наследственности, а также предполагает скалярный характер турбулентной вязкости. В некоторых RANS моделях эти недостатки компенсируются удачным выбором эмпирических констант.

### ***RANS модели турбулентности***

Модели турбулентности классифицируют по числу дифференциальных уравнений, вводимых в дополнение к исходной системе уравнений движения и теплопереноса. Наиболее простыми моделями, определяющими турбулентную вязкость, являются алгебраические модели (модели нулевого порядка), в которых связь между турбулентной вязкостью и параметрами осредненного потока задается алгебраическими соотношениями [2]. Первая алгебраическая модель для описания распределения  $\nu_t$  впервые была предложена Прандтлем в 1925 г. и известна как модель смешения. В теории Прандтля принимается, что местное изменение средней скорости потока определяется первой производной от средней скорости по поперечной координате:

$$\nu_t = l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|, \quad (0.2)$$

где  $l_m$  – длина пути смешения, определяемая эмпирически. Для свободных сдвиговых течений длина пути смешения является константой и пропорциональна ширине слоя, однако у стенки поведение турбулентности отличается и следует использовать различные описания для длины пути смешения. Данное обстоятельство послужило для развития различных двухслойных моделей пути смешения, пригодных как для свободной, так и для пристеночной турбулентности, а также для течений с отрывами: Себеси-Смита [3], Балдвина-Ломакса [4], Джонсона-Кинга [5]. К достоинствам алгебраических моделей можно отнести скорость вычислений, простоту калибровки и модификаций с учетом специфики рассматриваемых течений. Однако очевидна узкая специализация этих моделей, поскольку они опираются на эмпирическую информацию о структуре исследуемых течений, кроме этого, алгебраические модели предполагают локальное равновесие моделируемой турбулентности. Это означает, что в каждой точке пространства наблюдается баланс генерации и диссипации турбулентной энергии, на который не влияют ни перенос из соседних точек, ни предыстория развития процесса.

Для описания локально неравновесной турбулентности были разработаны дифференциальные модели турбулентности, позволяющие учитывать влияние нелокальных эффектов путем решения дополнительных дифференциальных уравнений переноса вторых моментов, в частности, уравнения переноса кинетической энергии турбулентности и уравнений переноса компонент тензора рейнольдсовых напряжений. Примером модели с одним дифференциальным уравнением может служить модель Колмогорова-Прандтля [2]. В ней в качестве масштаба пульсаций скорости  $u_t$  выбирается величина  $\sqrt{k}$ . Для турбулентной вязкости записывается выражение  $\nu_t = C\sqrt{k}l$ , где константа  $C$  и линейный

масштаб определяются из эмпирических соображений, а для энергии турбулентных пульсаций записывается модельное уравнение переноса

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\delta_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \nu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} - C_D \frac{k^{3/2}}{l} \quad (0.3)$$

$C_D$  и  $\delta_k$  – модельные константы. Позже были предложены более сложные модели с одним дифференциальным уравнением: модели Балвина-Барта [6] и Спаларта-Аллмараса (SA) [7], включающих 7 коэффициентов. Модели с одним дифференциальным уравнением обладают большей универсальностью к описанию турбулентных течений с учетом сжимаемости, переходных явлений, кривизны и отрыва потока, однако, как и в случае алгебраических моделей, в моделях с одним дифференциальным уравнением сильна привязка к калибровочным коэффициентам.

Более универсальными моделями в инженерных расчетах турбулентных потоков являются модели с двумя дифференциальными уравнениями. Первая такая модель была предложена Колмогоровым в 1942 г. [8]. Эта модель содержит уравнение переноса кинетической энергии турбулентности  $k$  и удельной скорости диссипации турбулентной энергии  $\omega$ . Ниже приведена одна из распространенных моделей  $k - \omega$  типа, предложенная Вилкоксом [6].

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} &= \tau_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \rho \beta^* k \omega + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \sigma^* \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \\ \rho \frac{\partial \omega}{\partial t} + \rho \bar{u}_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} &= \alpha \frac{\omega}{k} \tau_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \sigma^* \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right], \quad (0.4) \\ \mu_t &= \rho \frac{k}{\omega}, \quad \tau_{ij} = -\overline{\rho u'_i u'_j} = \rho \mu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \end{aligned}$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\beta^*$ ,  $\sigma$ ,  $\sigma^*$  – модельные константы. Модель  $k - \omega$  хорошо описывает пристеночные течения с отрывом пограничного слоя.

Наиболее популярной моделью с двумя дифференциальными уравнениями является модель  $k - \varepsilon$ , предложенная Чоу в 1945г. [9] и получившая дальнейшее развитие в исследованиях Лаундера-Джонса (1972):

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} &= \tau_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \rho \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \\ \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho \bar{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} &= c_{\varepsilon 1} \tau_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - c_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] \quad (0.5) \\ \mu_t &= \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \end{aligned}$$

где  $c_{\varepsilon 1}$ ,  $c_{\varepsilon 2}$ ,  $C_\mu$ ,  $\sigma_k$ ,  $\sigma_\varepsilon$  – модельные константы. Простота, хорошая сходимость и неплохая точность  $k - \varepsilon$  модели позволяют ей на данный момент оставаться наиболее используемой моделью для моделирования широкого спектра турбулентных течений. Несмотря на все достоинства, стандартная модель  $k - \varepsilon$  плохо описывает течения с сильной кривизной потока, закрученные потоки, течения с отрывом, вторичные течения, пристеночные течения. В последующие годы были даны некоторые улучшенные модификации  $k - \varepsilon$  модели: модель Като-Лаундера [10], RNG модель [11], реалистичная модель [12]. В двухслойной модели Ментера (1993) [13] записывается суперпозиция моделей  $k - \omega$  и  $k - \varepsilon$  с плавным переходом от первой модели у пристеночной области ко второй вдали от стенки. Таким образом, модель Ментера сочетает в себе сильные стороны обеих моделей.

Помимо описанных моделей с двумя дифференциальными уравнениями есть ещё целый ряд аналогичных моделей со своими настроечными параметрами и своей областью применимости, а также нелинейные модели (в которых предположение Буссинеска не выполняется) и модели второго порядка (в которых решается семь дополнительных уравнений переноса рейнольдсовых напряжений). Сложные RANS модели второго порядка, хотя и позволяют учитывать большинство эффектов, присущих турбулентному течению, имеют существенные

недостатки – повышенные требования к компьютерным ресурсам и проблемы, связанные со сходимостью решения.

В настоящее время наиболее высокий рейтинг имеют две модели турбулентности: модель Спаларта-Аллмараса (SA) и модель Ментнера ( $k - \omega$  Shear Stress Transport или SST модель). Однако, следует отметить, что для некоторых течений ни та, ни другая модель не позволяют получить результаты, удовлетворяющие современным требованиям к точности расчета. Критика ограниченности возможностей метода Рейнольдса сосредоточена на процедуре осреднения, трактуемой как осреднение по всем масштабам. Решение осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса, замкнутых при помощи той или иной полуэмпирической модели турбулентности, оказываются неэффективными при моделировании турбулентных течений с нестационарными крупномасштабными вихревыми структурами, свойства которых зависят от конкретных граничных условий и геометрических характеристик течения. Хотя возможности по усовершенствованию полуэмпирических моделей турбулентности ещё до конца не исчерпаны, существенный прогресс в этой области представляется сомнительным. Надежда на создание универсальной модели турбулентности постепенно заменяется растущей уверенностью в том, что формулировка соответствующей теории требует значительно лучшего понимания физики турбулентных течений.

### ***Современные подходы к описанию турбулентности***

Рост ресурсов вычислительной техники и неудовлетворенность результатами, полученными на основе подхода Рейнольдса, обозначили интерес к методам прямого численного моделирования (Direct Numerical Simulation, DNS) полных уравнений Навье-Стокса. Единственное допущение, на котором базируется DNS, состоит в том, что уравнения Навье-Стокса адекватно описывают не только ламинарные, но и турбулентные течения. DNS метод

полностью свободен от эмпиризма, не зависит от типа течения, полностью разрешает все пространственно-временные масштабы турбулентности.

Характерной особенностью течений, исследуемых в рамках DNS, является их пространственная ограниченность (течения в каналах и пограничных слоях) и сравнительно небольшие числа Рейнольдса. Применение DNS к течениям с геофизическими масштабами препятствует высокая стоимость расчетов. Как известно, отношение максимального  $L$  и минимального  $\lambda$  линейных масштабов турбулентности пропорционально числу Рейнольдса в степени  $3/4$ ,  $L / \lambda \sim Re^{3/4}$ , в результате чего размер пространственной сетки, необходимой для проведения расчетов с помощью DNS, растет с увеличением числа Рейнольдса как  $Re^{9/4}$ . Наряду с этим, с ростом числа Рейнольдса увеличивается также и отношение интегрального  $\tau_I$  и минимального (соответствующего колмогоровским вихрям) временных масштабов  $\tau_\lambda = (\nu / \varepsilon)^{1/2}$ , определяющее число шагов по времени, необходимое для проведения расчета:  $\tau_I / \tau_\lambda \sim Re^{1/2}$ . В итоге, суммарные затраты на проведение DNS растут с ростом числа Рейнольдса как  $Re^{11/4}$ . Именно эти оценки и определяют данные о числе узлов сетки и числе временных шагов, необходимых для проведения DNS расчета реальных течений. Согласно прогнозу Ф. Спаларта использование DNS для решения прикладных задач (например, для расчета обтекания самолета) станет возможным только к 2080 г. (при сохранении современных темпов роста суперкомпьютерных технологий).

Ограниченность DNS послужила стимулом для развития другого направления – метода моделирования крупных вихрей (Large Eddy Simulation, LES), сформировавшегося в 80-х годах прошлого века. Основная идея LES заключается в формальном математическом разделении крупных и мелких вихревых структур по средством той или иной операции, например, операции фильтрации. В качестве среднего значения функции в точке берется среднее значение этой функции по объему ячейки расчетной сетки. Чем больше шаг сетки или ширина фильтра, тем больше теряется информации о процессах подсеточного

переноса. Таким образом глобальное осреднение реального турбулентного течения по времени в RANS, заменяется на локальную пространственную фильтрацию от коротковолновых неоднородностей в LES. Отфильтрованные уравнения, как и уравнения Рейнольдса, оказываются незамкнутыми. Подсеточные модели, используемые в LES для замыкания уравнений, являются более универсальными по сравнению с одноточечными моделями замыкания, используемые в подходе Рейнольдса, поскольку мелкомасштабная турбулентность по своей природе представляется более универсальной, чем крупномасштабная турбулентность. Однако удовлетворительная точность схем замыкания в подсеточных моделях (sub grid scale, sgs) достигается лишь тогда, когда разделение течения на мелкомасштабную и крупномасштабную составляющие не оказывает заметного влияния на эволюцию крупномасштабных вихревых структур. При этом подсеточные модели не оказывают критического влияния на результаты в целом. Статистика крупных вихрей обычно не чувствительна к подсеточному моделированию за исключением пристеночной области. Решение, полученное с помощью LES, содержит более богатую информацию по сравнению с решением на основе уравнений Рейнольдса. Так, например, получаются не только характеристики среднего течения и распределение рейнольдсовых напряжений, но также и спектральные характеристики (спектры пульсаций скорости и давления), двухточечные моменты (пространственные и пространственно-временные корреляции пульсаций скорости и давления). Многие из этих характеристик имеют важное значение для инженерных приложений, например, пульсации плотности и давления – для акустики, пульсации температуры – для расчета химически реагирующих течений. Пульсации давления во многих случаях являются причиной усталостных повреждений элементов конструкции. На основе LES представляется возможным рассчитывать когерентные вихревые структуры, которые контролируют дисперсию примеси.

Естественной платой за описанные преимущества LES является то, что он требует несопоставимо больших вычислительных ресурсов, чем RANS. С другой стороны, ресурсы, необходимые для реализации LES, оказываются намного меньшими, чем для DNS. Так, для расчета турбулентности вдали от стенок число ячеек сетки, необходимой для проведения LES, увеличивается с ростом числа Рейнольдса намного медленнее, чем в случае DNS: пропорционально  $Re^{0.4}$ , а не  $Re^{2.25}$ . Однако вблизи стенок все вихри малы настолько, что размеры энергосодержащих и диссипативных вихрей перекрываются, и требования для LES существенно ужесточаются и приближаются к аналогичным требованиям для DNS. Именно это обстоятельство, которое делает LES сложных пристеночных течений при представляющих практический интерес высоких числах Рейнольдса ( $\sim 10^6$ ) невозможным не только в настоящее время, но и в обозримом будущем, послужило стимулом для создания гибридных RANS-LES подходов, первым и наиболее развитым из которых является метод моделирования отсоединенных вихрей 1997 г. (Detached-Eddy Simulation, DES). В DES сочетаются достоинства RANS (высокая точность и экономичность в области присоединенного пограничного слоя) и LES (универсальность и приемлемые вычислительные затраты в отрывной области потока). Переход от RANS к LES осуществляется автоматически в зависимости от соотношения между локальным размером вычислительной сетки и характерным линейным масштабом турбулентности в рассматриваемой точке потока. Вплоть до точки отрыва пограничный слой описывается с помощью уравнений Рейнольдса (модели SA, SST). В области отрыва потока модель турбулентности переходит в дифференциальную подсеточную модель.

Одна из проблем реализации LES состоит в том, что расчетная сетка строится заранее на основе геометрических и физических особенностей конкретной задачи. Идеальный подход к реализации LES должен включать адаптивное сгущение и разрежение сетки и изменение ширины фильтра для того, чтобы гарантировать разрешение энергосодержащих вихрей. Другая проблема

касается вопроса оптимального выбора подсеточной модели. Несмотря на многочисленные расчеты, в которых опробован широкий круг подсеточных моделей, фильтров, граничных условий и конечно-разностных схем, не ясны ни оптимальный выбор sgs-модели, ни обоснование такого выбора.

### ***Модели подсеточной вязкости***

Как и модели RANS, подсеточные модели, как правило, базируются на гипотезе Буссинеска. Модели вихревой вязкости составляют наиболее представительный класс подсеточных моделей. Наиболее известной из моделей вихревой вязкости является модель Смагоринского [14], являющаяся аналогом модели пути смещения Прандтля в полуэмпирической теории турбулентности. В её основе лежит предположение о том, что подсеточная вязкость  $\nu_{sgs}$  определяется средним значением скорости диссипации энергии турбулентности  $\varepsilon$ , приходящейся на единицу объема. В этом случае из соображений размерности следует, что  $\nu_{sgs} \sim \varepsilon^{1/3} \Delta^{4/3}$ . Величина скорости диссипации  $\varepsilon$  непосредственно не известна, но в случае, когда в энергетическом спектре турбулентности имеется отчетливый инерционный интервал, она также может быть выражена с использованием соображений размерности через линейный масштаб фильтра и среднюю скорость деформации  $S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$ :  $\varepsilon \sim S^3 \Delta^2$ . Таким образом, формулировка Смагоринского имеет вид:

$$\nu_{sgs} = (C_S \Delta)^2 S, \quad (0.6)$$

где  $C_S$  – эмпирическая константа (константа Смагоринского). В отличие от турбулентной вязкости, подсеточная вязкость зависит не только от параметров отфильтрованного течения (компонент тензора скоростей деформаций), но и от размеров фильтра (от сетки). При измельчении сетки дополнительные по сравнению с уравнениями Навье-Стокса слагаемые в уравнениях LES уменьшаются, и решение LES асимптотически стремится к решению DNS. В этом состоит принципиальное отличие метода LES от метода RANS, в котором

измельчение сетки приводит лишь к получению «точных» (независящих от сетки) решений уравнений Рейнольдса.

Как правило, значение параметра Смагоринского выбирается из диапазона  $C_s=0.06-0.28$ , в частности,  $C_s=0.1$ ,  $0.15$  и  $0.18$  для течения в канале, течения в свободном слое смешения и однородной изотропной турбулентности. Однако, важной особенностью подсеточных моделей является то обстоятельство, что входящие в них эмпирические константы зависят, вообще говоря, от используемого для решения задачи численного алгоритма. Это объясняется тем, что точность разрешения крупномасштабных вихревых структур в LES зависит не только от сетки, но и от свойств метода, в частности, от присущей ему численной диссипации. Иными словами, численная диссипация метода сама по себе играет роль своеобразной подсеточной модели. Если эта диссипация велика, то константа подсеточной модели должна быть соответственным образом уменьшена, а если мала, то, наоборот, увеличена. В связи с этим, строго говоря, для каждого численного метода должна проводиться индивидуальная калибровка константы Смагоринского.

Модель Смагоринского обладает значительной диффузией и диссипацией, что позволяет стабилизировать численные расчеты. Один из способов сделать её менее диссипативной состоит в том, чтобы добавлять диссипацию только в тех областях течения, которые характеризуются существенными изменениями величины завихренности и её направления [15] (Selective Smagorinsky, SS). В другой модификации модели Смагоринского – модели структурной функции (Structure Function, SF) подсеточная вязкость вычисляется по формуле [16]:

$$\nu_{sgs} = C_F \Delta \left[ \tilde{D}_{2\Delta}(\mathbf{x}, t) \right]^{1/2}, \quad (0.7)$$

где  $\tilde{D}_{2\Delta}(\mathbf{x}, t) = \left\langle \left[ \tilde{v}_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) - \tilde{v}_i(\mathbf{x}, t) \right]^2 \right\rangle_{|\mathbf{r}|=\Delta}$  – структурная функция второго порядка.

Она играет существенную роль в теории турбулентности и связывается со спектральной плотностью кинетической энергии турбулентности. Угловые скобки

означают осреднение по точкам, для которых  $|\mathbf{r}| = \Delta$ . С вычислительной точки зрения, преимущество модели структурной функции является использование приращений скорости вместо её производных. Модель даёт более точные результаты для переходных течений, чем модель Смагоринского.

Модель Смагоринского даёт ненулевое значение подсеточной вязкости на стенке, где существует ненулевой градиент скорости. Вместе с тем, подавление флуктуаций вблизи стенки приводит к тому, что  $\nu_{sgs} \rightarrow 0$  при  $y \rightarrow 0$ . Модели WALE [17] и RNG [11] позволяют учесть влияние стенки без введения пристеночных демпфирующих функций.

В динамических моделях (Dynamic Model, DM) для оценки параметра Смагоринского используется информация, содержащаяся в разрешимых масштабах скорости. Помимо фильтрации с сеточным фильтром, используется вторичная фильтрация поля скорости с фильтром, полоса пропускания которого превышает ширину сеточного фильтра. К примеру, в динамической модели Герmano [18] параметр Смагоринского находится на каждом шаге из соотношения

$$C_D = (C_S \Delta)^2 = -\frac{1}{2} \frac{\langle L_{ij} M_{ij} \rangle}{\langle M_{kl} M_{kl} \rangle}. \quad (0.8)$$

Здесь  $L_{ij} = T_{ij} - \hat{\tau}_{ij}$  – компоненты тензора леонардовых напряжений,  $T_{ij}$  и  $\tau_{ij}$  – компоненты тензоров подсеточных напряжений, соответствующих сеточному  $\Delta$

и пробному  $\hat{\Delta}$  фильтрам,  $M_{ij} = \left(\frac{\hat{\Delta}}{\Delta}\right)^2 \left| \widehat{\tilde{S}}_{ij} \right| \widehat{\tilde{S}}_{ij} - \left| \widetilde{\widehat{S}}_{ij} \right| \widetilde{\widehat{S}}_{ij}$ . Значение параметра

Смагоринского, рассчитанное с помощью динамической процедуры, сильно колеблется в пространстве и времени. Специфическая трудность, являющаяся результатом таких колебаний, состоит в том, что вихревая вязкость может стать отрицательной. Это означает перенос энергии от подсеточных масштабов к разрешенным. В принципе, в нестационарном потоке такой процесс может иметь место, приводя обычно к вычислительной неустойчивости. Для устранения этого

недостатка на диапазон изменения модельного параметра накладываются дополнительные ограничения, самое простое из которых  $C_D \geq 0$ .

К более сложным динамическим моделям относятся: лагранжевая динамическая модель [19] (Lagrangian Dynamic Model, LDM), где осреднение модельного параметра производится вдоль траектории движения жидкой частицы, локальная динамическая модель [20] (Dynamical Localization Model, DLM), векторная динамическая модель [21] (Vector Dynamic Model, VDM) и прочие. Все эти модели довольно дороги с вычислительной точки зрения, но улучшают исходную модель Смагоринского, делают её более универсальной.

Существуют так же, как и в RANS подходе, дифференциальные подсеточные модели, которые классифицируются по числу дополнительных уравнений, решаемых в дополнение к фильтрованной по пространству системе уравнений Навье-Стокса. Наибольшее распространение получили модели с одним

уравнением, записанным для подсеточной кинетической энергии  $k_{sgs} = \frac{1}{2}(\tilde{v}^2 - \tilde{v}^2)$ ,

которая связывается с подсеточной вихревой вязкостью при помощи соотношения  $\nu_{sgs} = C_\nu k_{sgs}^{1/2} \Delta$ , где  $C_\nu = 0.067$  – эмпирический коэффициент. Уравнение для подсеточной кинетической энергии получается при помощи вычитания уравнения для мгновенной кинетической энергии из уравнения для разрешимой кинетической энергии. Формально оно совпадает с уравнением для кинетической энергии турбулентности в  $k - \varepsilon$  модели турбулентности (отличие заключается в форме записи диссипативного члена)

$$\frac{\partial k_{sgs}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{v}_i k_{sgs}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ (\nu + \nu_{sgs}) \frac{\partial k_{sgs}}{\partial x_i} \right] + P - D \quad (0.9)$$

$$P = -\tau_{ij} \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_j} = 2\nu_{sgs} |\tilde{s}|^2 - \text{производство}, \quad D = C_\varepsilon \frac{k_{sgs}^{3/2}}{\Delta} - \text{диссипация}, \quad C_\varepsilon = 0.916.$$

Дифференциальные модели позволяют учесть предысторию потока и нелокальные эффекты, а также обратный переход энергии от подсеточных к разрешенным масштабам. Иногда для преодоления вычислительной неустойчивости уравнение для кинетической энергии используется для отключения вихревой вязкости, когда кинетическая энергия падает до нуля. Во многих случаях привлечение дополнительного уравнения не приводит к более точным результатам по сравнению с алгебраическими моделями подсеточной вихревой вязкости, в связи с чем широкого распространения на практике такие модели не получили.

Существуют ещё модели подобных масштабов (Scale Similarity Model, SSM) [22], которые не используют концепцию вихревой вязкости и не требуют предположения о локальном равновесии порождения и диссипации кинетической энергии, которое используется в модели Смагоринского, а также учитывают возможность обратной передачи энергии от подсеточных к разрешенным масштабам. Недостаток моделей такого типа состоит в том, что они не обладают свойством сеточной диссипации. Недостаточная диссипативность приводит к проблемам с устойчивостью вычислительной процедуры.

В работе [23] проводится детальное сравнение характеристик различных подсеточных моделей. Сравнение результатов позволяет сделать вывод о том, что все подсеточные модели имеют приблизительно одинаковую точность, включая модель с постоянной подсеточной вязкостью, а модификации модели Смагоринского не приводят к значительному улучшению численных оценок.

### ***Квазипрямое численное моделирование***

Существуют также подходы, которые не используют подсеточные модели в явном виде. Это т.н. неявное моделирование крупных вихрей (Implicit LES, ILES). Ещё выделяют монотонное интегрирование крупных вихрей – MILES. Применяемые в ILES/MILES разностные схемы уже имеют достаточную диффузию и диссипацию, которая имитирует стабилизирующее действие

подсеточных моделей. В работе [24] показано, что численная диссипация при явном LES моделировании может быть одного порядка с диссипацией подсеточной модели, и вообще может маскировать её. Это значит, что усилия по совершенствованию вычислительных моделей турбулентности можно (может быть, даже с большим успехом) сосредоточить на разработке разностных схем для уравнений Навье-Стокса с улучшенными диссипативными и дисперсионными свойствами.

Впервые техника MILES была предложена в 1992 году группой авторов во главе с Boris J.P. [25]. Идея заключалась в следующем: так как турбулентность характеризуется высоким уровнем флуктуаций завихренности, и возникающие большие градиенты завихренности чем-то схожи с сильными разрывами в сжимаемой жидкости, то для её моделирования можно попытаться использовать т.н. схемы высокой разрешающей способности (shock-capturing schemes), использующиеся для моделирования невязких течений с ударными волнами. Одним из способов построения таких схем является использование нелинейных разностных схем, например, TVD-схем с «лимитером». Фильтрация «подсеточных» пульсаций осуществляется в них неявно при нелинейной коррекции, без введения полуэмпирических моделей. Дальнейшее развитие TVD-подхода привело к созданию популярных на данный момент схем ENO, WENO, которые способны обеспечить достаточную монотонность решения при произвольном порядке точности в областях гладкости.

Следует отметить, что несмотря на вычислительную эффективность и имеющиеся примеры использования [26], подходы ILES/MILES не имеют должного физического обоснования, а полученные результаты нуждаются в тщательной проверке. В существенной степени успех применения подхода определяется удачным выбором разностной схемы для дискретизации конвективных потоков. Например в статье [27] авторы (Eric Garnier et. al.) проводят численное моделирование свободно затухающей однородной изотропной турбулентности с использованием популярных на данный момент

эйлеровских схем высокой разрешающей способности (Jameson, MUSCL-TVD, ENO, WENO, MENO). Цель расчетов заключается в оценке возможности использования данного класса схем для моделирования крупных вихрей. По мнению авторов, схемы, пригодные для LES-моделирования должны удовлетворять одному из требований: или численная диссипация схемы должна быть на много меньше физической «подсеточной» диссипации (C1), или численная диссипация схемы способна «имитировать» «подсеточную» (sgs) модель (C2).

Для оценки диссипации схем высокой разрешающей способности свободная турбулентность моделировалась без молекулярной вязкости и явных sgs-моделей, на грубых сетках  $64^3$  и  $128^3$  (MILES). Численная диссипация интерпретировалась в терминах sgs-диссипации. Был введен эффективный эквивалент константы в модели Смагоринского – «обобщенная константа Смагоринского»  $C_{gs}$  :

$$C_{gs} = \sqrt{\varepsilon_{num} / \varepsilon_{sgs}}, \quad (0.10)$$

где  $\varepsilon_{sgs} = \langle \rho u_i \partial_j \tau_{ij}(\mathbf{u}) \rangle$  – диссипация в модели Смагоринского,  $\tau_{ij}(\mathbf{u}) = 2\nu_{sgs} S_{ij}(\mathbf{u})$  – тензор подсеточных напряжений,  $\nu_{sgs} = \Delta^2 |S(\mathbf{u})|$  – коэффициент вязкости.  $|S(\mathbf{u})|^2 = 2S_{ij}(\mathbf{u})S_{ij}(\mathbf{u})$ . Как оказалось, для всех вышеперечисленных схем вне зависимости от времени «обобщенная константа Смагоринского» значительно превосходила классическую константу Смагоринского  $C_s = 0.18 - 0.2$  (рис. 0.1, взято из статьи).

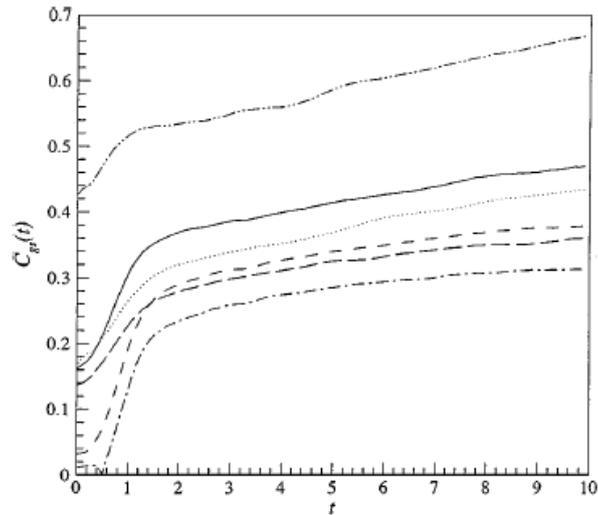


FIG. 22. Time history of  $C_{gr}$  (Case 1,  $64^3$  grid). ENO —; WENO ----; MENO .....; Jameson -.-.; MUSCL4 -----; MUSCL1 - - - -.

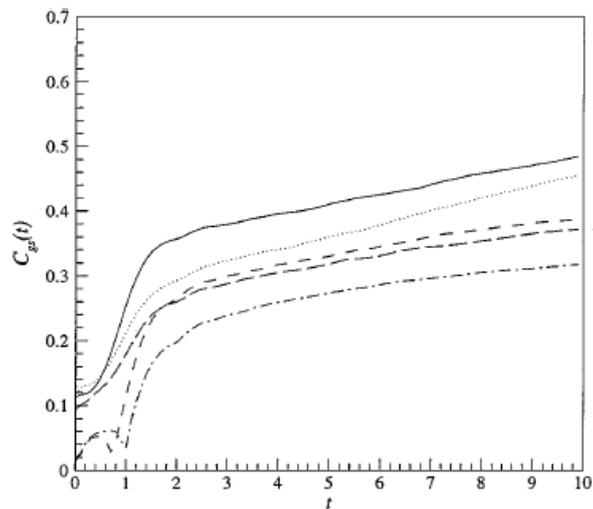


FIG. 23. Time history of  $C_{gr}$  (Case 1,  $128^3$  grid). ENO —; WENO ----; MENO .....; Jameson -.-.; MUSCL4 -----.

**Рис. 0.1.** Обобщенная константа Смагоринского в зависимости от времени в MILES моделировании однородной изотропной турбулентности на грубых сетках  $64^3$ ,  $128^3$

При дополнительном включении sgs-модели, на фоне собственной численной диссипации схем, «подсеточная» диссипация была незначительна и не оказывала существенного влияния на получаемые решения. Наличие столь сильной диссипации оказывало существенное негативное влияние на малые масштабы турбулентности. Это отражалось на энергетических спектрах (сильный загиб спектральной кривой вниз в высокочастотной области) (рис. 0.2).

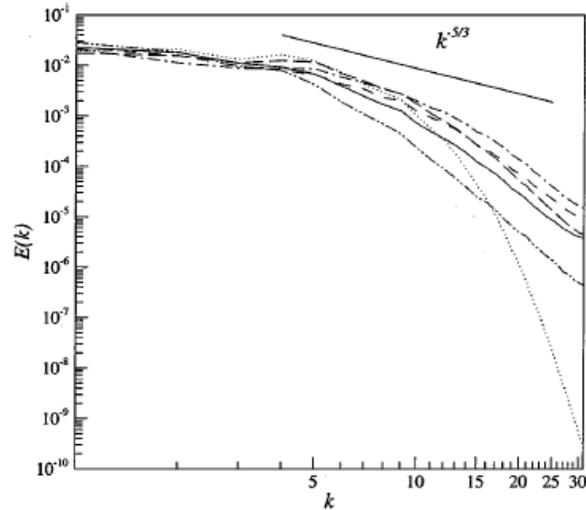


FIG. 5. Kinetic energy spectrum for test Case 1 at  $t = 10$  ( $64^3$  grid). ENO —; WENO ----; MENO .....; Jameson -.-; MUSCL4 - - - -; MUSCL1 - - - -.

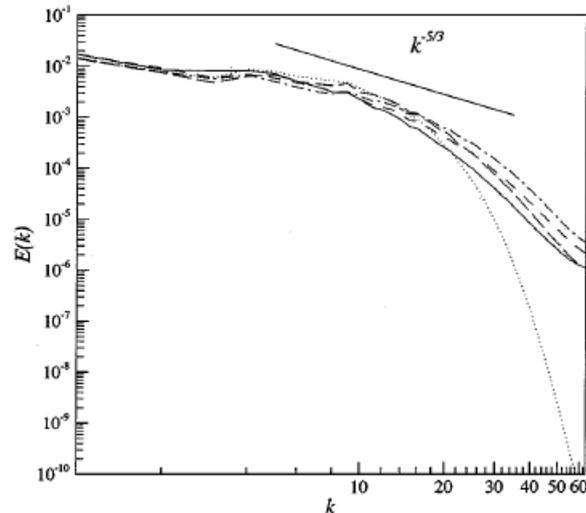


FIG. 6. Kinetic energy spectrum for test Case 1 at  $t = 10$  ( $128^3$  grid). ENO —; WENO ----; MENO .....; Jameson -.-; MUSCL4 - - - -.

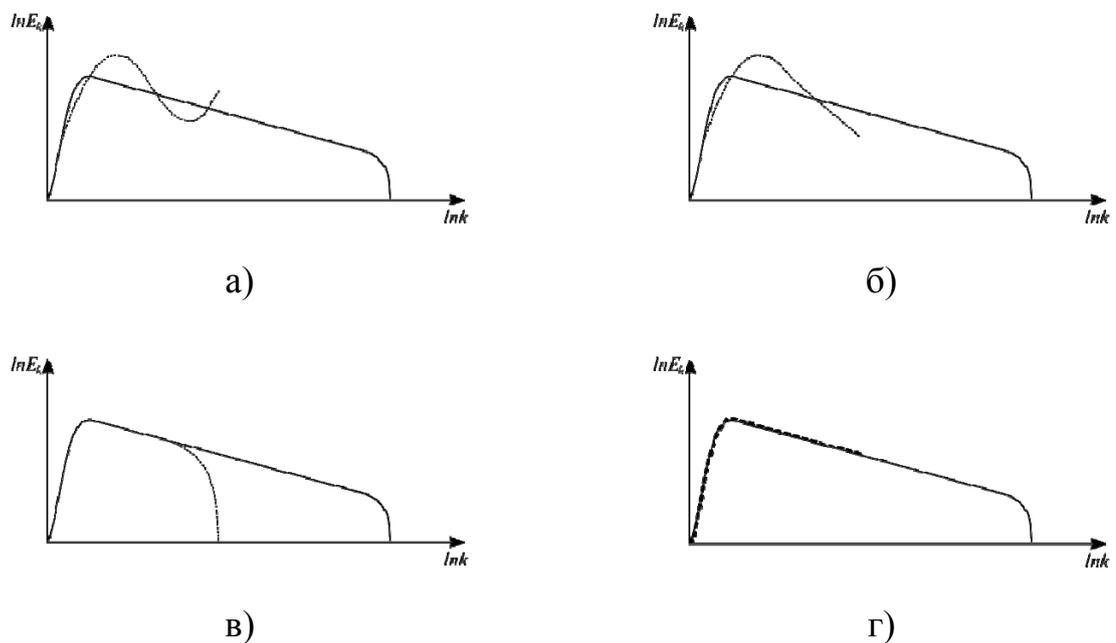
**Рис. 0.2.** Энергетические спектры в MILES моделировании однородной изотропной турбулентности на грубых сетках  $64^3$ ,  $128^3$

Проанализировав результаты, авторы пришли к выводу: для эйлеровых схем высокой разрешающей способности не выполняется ни первое требование  $C1$  ( $\varepsilon_{num} \ll \varepsilon_{sgs}$ ), ни второе  $C2$  ( $\varepsilon_{num}$  не имитирует  $\varepsilon_{sgs}$ ). Подход MILES, с использованием вышеперечисленных схем высокой разрешающей способности, способен воспроизвести лишь некоторые аспекты турбулентности: «червеобразную» вихревую структуру и колмогоровский наклон  $k^{-5/3}$  на некотором участке спектра при достаточном разрешении сетки. Однако значительная часть течения испытывает сильное численное демпфирование.

Особенно это сказывается на малых структурах, определенных менее чем на 5 узлах сетки, для всех схем без исключения.

### **Концепция идеального LES алгоритма**

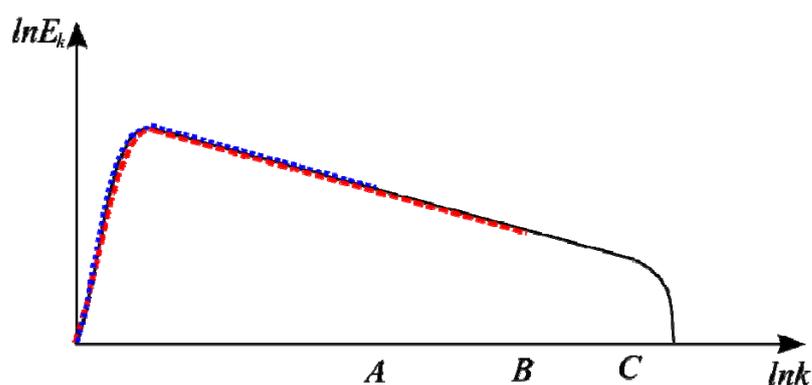
Таким образом, диссипативно-устойчивые разностные схемы могут достаточно хорошо описывать крупные вихри и ослаблять или полностью гасить ненужные мелкомасштабные возмущения. Вместе с тем, возможна ситуация, когда для данного масштаба  $l$  диссипация так велика, что вихрь сам гасится схемой. Поэтому схемы с большой диссипацией требуют аккуратного выбора сеток. На рисунке 0.3 представлены возможные виды спектров турбулентности в методах LES/ILES в сравнении с DNS, которые можно получить при использовании схем с большой диссипацией (в), с недостаточной диссипацией (а), с оптимальной диссипацией (г). Также можно вообще не получить правильный наклон инерционного интервала (б).



**Рис. 0.3.** Возможные виды энергетических спектров турбулентности

В случае г) диссипация оптимальна в том смысле, что каскад энергии, направленный от структур с большими размерами к структурам с меньшими размерами, уводится на подсеточный уровень наиболее правильно, без

чрезмерной диссипации и без накопления энергии в коротковолновой части. Если при измельчении расчетных сеток, такой алгоритм, поэтапно включая новые гармоники, будет сохранять это свойство (рис. 0.4), то можно говорить о некоем идеальном LES (Perfect LES, PLES) методе.



**Рис. 0.4.** Спектры турбулентности на последовательности сеток при моделировании с помощью идеального LES алгоритма

Степень близости к идеальному LES была бы неплохим критерием при построении модели турбулентности. В данной работе этот критерий взят за основу.

### ***Цели и структура диссертационной работы***

Основной целью данной диссертационной работы является разработка математической модели, относящейся к классу Implicit LES, для расчета течений со свободной турбулентностью. Исходной точкой для построения математической модели стал выбор базового вычислительного алгоритма (разностной схемы). Основным требованием к исходному алгоритму стала его минимальная внутренняя (схемная) диссипация и максимально компактный вычислительный шаблон.

Диссипативность в схеме может достигаться, например, при использовании ориентированных разностей в соответствии с направлением потока, как в схеме Годунова, без введения явных членов с искусственной вязкостью. В симметричных схемах диссипация отсутствует, а вместе с ней отсутствует и

механизм ослабления вредных для описания крупных вихрей коротковолновых ошибок. В данной работе исследуется оба способа аппроксимации конвективных членов. Направленная аппроксимация используется в схеме «КАБАРЕ» [28-30] («*Upwind Leapfrog*»), а центральная в схеме «двухслойный крест» [31, 32] («*Central Leapfrog*»). Схема «двухслойный крест», является балансно-характеристическим представлением классической схемы «Крест» с разнесенными консервативными и потоковыми переменными, как в схеме «КАБАРЕ». Преимущество такой модификации схемы «Крест» заключается в компактности её шаблона и в возможности введения коррекции потоков. Обе схемы обладают вторым порядком аппроксимации на неравномерных пространственно-временных сетках и являются явными, максимально компактными, консервативными, бездиссипативными и обратимыми по времени. Помимо схем «КАБАРЕ» и «двухслойного креста» в работе исследуются схемы, полученные линейной гибридизацией схем «КАБАРЕ» и «Крест», с параметром гибридизации  $0 \leq \alpha \leq 1$  ( $\alpha = 0$  – «КАБАРЕ»,  $\alpha = 1$  – «Крест»), изменяя который можно регулировать диссипацию и дисперсию в схеме.

Далее, нужно было сконструировать сеточный диссипативный механизм, который сохранял бы статистические характеристики турбулентных течений в инерционном интервале для вихрей всех размеров, представимых на заданной расчетной сетке. Исходным было предположение, что таким механизмом может оказаться нелинейная коррекция потоков на основе принципа максимума [29], предложенная ранее для схемы КАБАРЕ для обеспечения монотонности газодинамических течений. И оно в полной мере подтвердилось.

Диссертация состоит из введения, четырёх глав и заключения.

Первая глава содержит результаты спектрально анализа исследуемых схем в линейном и нелинейном случаях на примере простейшего одномерного уравнения переноса. В линейном случае (без коррекции) анализ диссипативных и дисперсионных ошибок проводился аналитически, а при наличии коррекции в качестве оценки использовался численный метод. Далее рассматривается

нелинейное уравнение Бюргерса и задача об одномерной турбулентности (бюргюленции). Результаты моделирования на грубых сетках по схемам «КАБАРЕ», «двухслойный крест» и их гибридам сравниваются с DNS расчетом и с результатами по другими схемами («WENO-5» (MILES) и «S2-SMA» (LES)).

Вторая глава носит обзорный характер существующей теории двумерной и трехмерной турбулентности, результатов её численного моделирования и экспериментальных данных. Большой упор делается именно на двумерной турбулентности, т.к. в этом случае есть некоторая неопределённость с теорией энстрофийного каскада (существуют несколько конкурирующих теорий: KLB, Саффмана, Моффата, Полякова и т.д.).

В третьей главе проводится обобщение схемы «КАБАРЕ» для моделирования течений в несжимаемой жидкости, подробно описан алгоритм схемы. Далее приводятся результаты численного моделирования локализованных вихрей и двумерной турбулентности, свободно затухающей и при наличии форсинга.

Четвертая глава посвящена трехмерным вихревым течениям. Рассматриваются устойчивый колоннообразный вихрь Рэнкина и неустойчивые вихри Хилла и Тейлора-Грина. Результаты моделирования вихря Тейлора-Грина по всем рассматриваемым схемам сравниваются с DNS расчетом Брэчета (1991). Далее рассмотрен тест со случайным полем завихренности, строятся спектры, структурные функции, зависимости скорости диссипации от времени.

Данная работа выполнена под руководством профессора, доктора физико-математических наук Головизнина Василия Михайловича, которому автор выражает искреннюю благодарность.

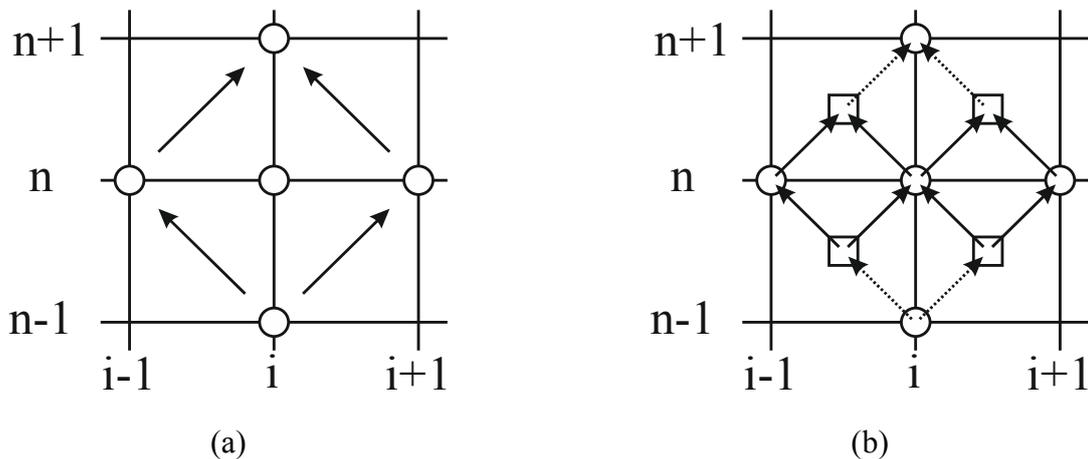
## Глава 1. Спектральный анализ

### Схемы «КАБАРЕ» и «двухслойный крест» для одномерного уравнения переноса

Пусть задана одномерная область  $G = \{x : x \in [0; L]\}$ , покрытая равномерной сеткой  $\Omega_h = \{x_i : i = 1, \dots, N\}$ , где  $x_i$  – координаты узлов сетки. Одномерное уравнение переноса  $\partial_t \varphi + c \partial_x \varphi = 0$ ,  $c > 0$ , можно аппроксимировать с помощью центральных разностей по времени и пространству

$$\frac{\varphi_i^{n+1} - \varphi_i^{n-1}}{2\tau} + c \frac{\varphi_{i+1}^n - \varphi_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad (1.1)$$

Эта схема, известная как схема «Крест» (в иностранной литературе схема *Leapfrog* [32]), имеет второй порядок аппроксимации по пространству и времени в силу симметричной структуры её шаблона (рис. 1.1. (a)). При числе Куранта  $CFL \leq 1$  схема устойчива и бездиссипативна.



**Рис. 1.1.** Шаблон схемы «крест» (a) – классический, (b) – с введением дополнительных переменных в центрах ячеек

Одним из недостатков схемы «крест» является отсутствие компактности её шаблона (схема трехслойная по времени и определена на двух пространственных ячейках). Для устранения этого недостатка в работе [31] была предложена двухслойная консервативная модификация схемы «Крест».

Введем новые переменные  $\psi$  в центрах пространственно-временных ячеек (рис. 1.1. (b)) и аппроксимируем уравнение переноса так:

$$\frac{\psi_{i+1/2}^{n+1/2} - \psi_{i+1/2}^{n-1/2}}{\tau} + c \frac{\varphi_{i+1}^n - \varphi_i^n}{h} = 0, \quad (1.2)$$

$$\frac{\psi_{i-1/2}^{n+1/2} - \psi_{i-1/2}^{n-1/2}}{\tau} + c \frac{\varphi_i^n - \varphi_{i-1}^n}{h} = 0. \quad (1.3)$$

Если сложить (1.2) и (1.3)

$$\frac{(\psi_{i+1/2}^{n+1/2} + \psi_{i-1/2}^{n+1/2}) - (\psi_{i+1/2}^{n-1/2} + \psi_{i-1/2}^{n-1/2})}{2\tau} + c \frac{\varphi_{i+1}^n - \varphi_{i-1}^n}{2h} = 0, \quad (1.4)$$

и потребовать выполнение дополнительного соотношения, связующего переменные  $\psi$  и  $\varphi$  между собой

$$\varphi_i^{n+1} = \psi_{i+1/2}^{n+1/2} + \psi_{i-1/2}^{n+1/2} - \varphi_i^n, \quad (1.5)$$

то получим классический трехслойный «Крест» (1.1).

В форме (1.2)-(1.5) схема «Крест» похожа на линейный балансно-характеристический алгоритм [30], с разнесенными консервативными переменными  $\psi$ , отвечающими за выполнение законов сохранения, и потоковыми  $\varphi$ , определяющими перенос между соседними ячейками. Потоковые переменные имеют вспомогательный характер и находятся с помощью линейной экстраполяции, обеспечивающей второй порядок аппроксимации на гладких решениях. Однако экстраполяция в схеме «двухслойный крест» не направленная, как в балансно-характеристических схемах, а центральная.

На неравномерных пространственных сетках процедура экстраполяции (1.5) дает только первый порядок аппроксимации. Для сохранения второго порядка необходимо подправить её следующим образом:

$$\varphi_i^{n+1} = \frac{2h_{i-1/2}}{h_{i-1/2} + h_{i+1/2}} \psi_{i+1/2}^{n+1/2} + \frac{2h_{i+1/2}}{h_{i-1/2} + h_{i+1/2}} \psi_{i-1/2}^{n+1/2} - \varphi_i^n \quad (1.6)$$

Чтобы использовать такую схему на неравномерных временных сетках, введем ещё одни дополнительные переменные в центрах ячеек на целых временных слоях  $\psi_{i+1/2}^n$  и перепишем «двухслойный крест» в трехэтапной форме:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Фаза1: } \frac{\psi_{i+1/2}^{n+1/2} - \psi_{i+1/2}^n}{\tau^{n+1/2} / 2} + c \cdot \frac{\varphi_{i+1}^n - \varphi_i^n}{h_{i+1/2}} = 0; \\ \text{Фаза2: } \varphi_i^{n+1} = \frac{2h_{i-1/2}}{h_{i+1/2} + h_{i-1/2}} \psi_{i+1/2}^{n+1/2} + \frac{2h_{i+1/2}}{h_{i+1/2} + h_{i-1/2}} \psi_{i-1/2}^{n+1/2} - \varphi_i^n; \\ \text{Фаза3: } \frac{\psi_{i+1/2}^{n+1} - \psi_{i+1/2}^{n+1/2}}{\tau^{n+1/2} / 2} + c \cdot \frac{\varphi_{i+1}^{n+1} - \varphi_i^{n+1}}{h_{i+1/2}} = 0. \end{array} \right. \quad (1.7)$$

Если сложить первое и третье уравнение системы (1.7), то мы получим консервативную аппроксимацию уравнения переноса с симметричным шаблоном в пределах одной пространственно-временной ячейки (рис 1.2):

$$\frac{\psi_{i+1/2}^{n+1} - \psi_{i+1/2}^n}{\tau^{n+1/2}} + c \frac{\bar{\varphi}_{i+1} - \bar{\varphi}_i}{h_{i+1/2}} = 0, \quad (1.8)$$

где  $\bar{\varphi} = (\varphi^{n+1} + \varphi^n) / 2$ .

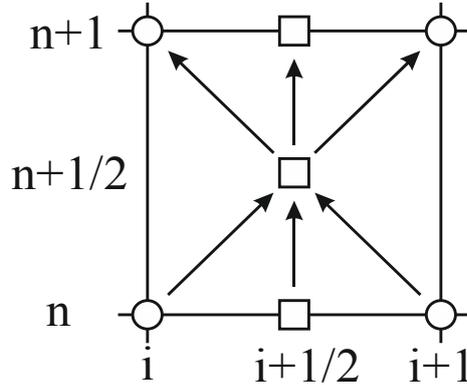


Рис. 1.2. Шаблон схемы «двухслойный крест»

Отличие схемы «двухслойный крест» от схемы «КАБАРЕ» [28, 29, 33] возникает только во второй фазе алгоритма. Если в схеме «двухслойный крест» экстраполяция во второй фазе центральная (Central Leapfrog) (1.6), то в схеме «КАБАРЕ» направленная (Upwind Leapfrog):

$$\begin{aligned}\varphi_i^{n+1} &= 2\psi_{i-1/2}^{n+1/2} - \varphi_{i-1}^n, & c > 0 \\ \varphi_i^{n+1} &= 2\psi_{i+1/2}^{n+1/2} - \varphi_{i+1}^n, & c < 0\end{aligned}\quad (1.9)$$

**Сравнение диссипативных и дисперсионных свойств схем «КАБАРЕ» и «двухслойный крест»**

Проанализируем диссипативные и дисперсионные свойства схемы (1.7). Для этого представим решение в виде бегущих волн (для равномерной сетки):

$$\begin{aligned}\psi_{j+1/2}^n &= A \cdot \exp\{i \cdot [\omega \cdot \tau \cdot n - k \cdot h \cdot (j + 1/2)]\}; \\ \varphi_j^n &= B \cdot \exp\{i \cdot [\omega \cdot \tau n - k \cdot h \cdot j]\}; \\ \psi_{j+1/2}^{n+1/2} &= D \cdot \exp\{i \cdot [\omega \cdot \tau \cdot (n + 1/2) - k \cdot h \cdot (j + 1/2)]\}.\end{aligned}\quad (1.10)$$

где  $A$ ,  $B$  и  $C$  – произвольные амплитуды.

Подставляя частное решение (1.10) в (1.7), приходим к системе уравнений:

$$\begin{aligned}\sqrt{q} \cdot D - A - i \cdot r \cdot \sin(kh/2) \cdot B &= 0 \\ (q + 1) \cdot B - \sqrt{q} \cdot 2 \cdot \cos(kh/2) \cdot D &= 0 \\ q \cdot A - \sqrt{q} \cdot D - i \cdot r \cdot q \cdot \sin(kh/2) \cdot B &= 0\end{aligned}\quad (1.11)$$

где  $q = \exp(i \cdot \omega \cdot \tau)$ ;  $r = c \cdot \tau / h$ .

Для того чтобы эта система имела решение при любых амплитудах  $A$ ,  $B$ ,  $D$  нужно, чтобы ее определитель был равен нулю:

$$\begin{vmatrix} -1 & -i \cdot r \cdot \sin\left(\frac{kh}{2}\right) & \sqrt{q} \\ 0 & (q + 1) & -2 \cdot \sqrt{q} \cdot \cos\left(\frac{kh}{2}\right) \\ q & -q \cdot i \cdot r \cdot \sin\left(\frac{kh}{2}\right) & -\sqrt{q} \end{vmatrix} = \sqrt{q} \cdot [q^2 - q \cdot 2 \cdot i \cdot r \cdot \sin(kh) - 1] = 0\quad (1.12)$$

Решая полученное уравнение, получаем:

$$\begin{aligned}
 q_1 &= i \cdot r \cdot \sin(kh) + \sqrt{1 - r^2 \cdot \sin^2(kh)} \\
 q_2 &= i \cdot r \cdot \sin(kh) - \sqrt{1 - r^2 \cdot \sin^2(kh)} \\
 q_3 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{1.13}$$

Если подкоренные выражения неотрицательны, то легко видеть, что

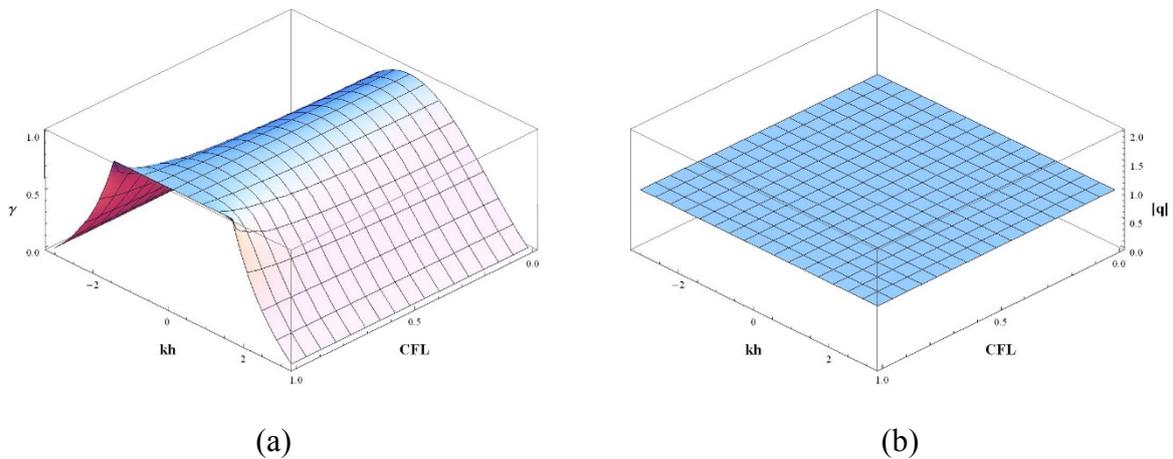
$$|q_1| = |q_2| \equiv 1 \tag{1.14}$$

Получим условие не отрицательности подкоренного выражения:

$$r^2 \cdot \sin^2(kh) \leq 1 \quad \Rightarrow \quad |r| \cdot |\sin(kh)| \leq 1. \tag{1.15}$$

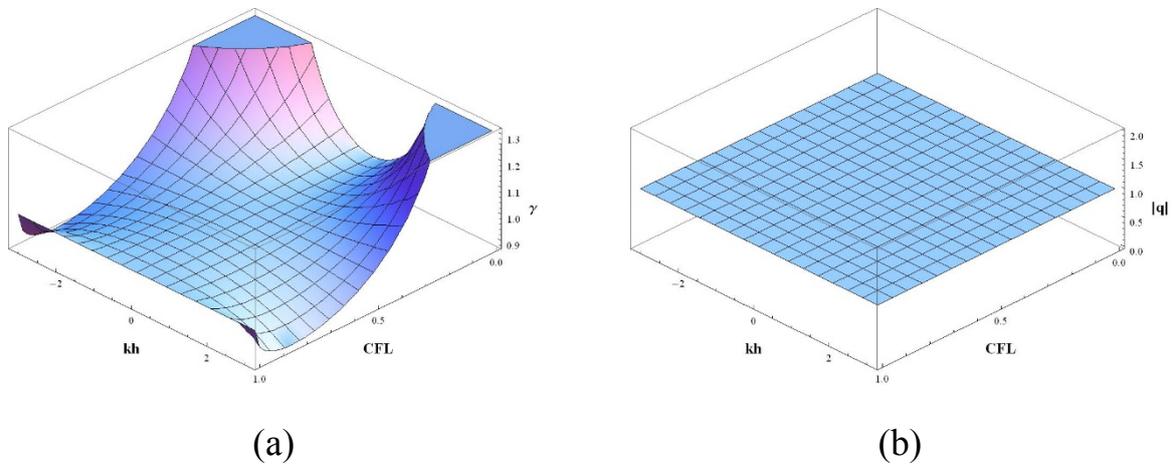
Т.к.  $\max|\sin(kh)| = 1$ , то подкоренное выражение будет не отрицательным при  $r \leq 1$ . Т.о. при числах Куранта  $CFL \leq 1$  схема «двухслойный крест», как и схема классический «Крест», устойчива и бездиссипативна, что, очевидно, учитывая, что новая схема это всего лишь компактная форма записи схемы «Крест».

На рисунке 1.3 приведены дисперсионная  $\gamma = \omega / (kc)$  и диссипативная  $|q|$  поверхности схемы «двухслойный крест» для модуля перехода  $q_1$ . Второй корень  $q_2$  имеет «паразитный» характер и проявляет себя только при несогласованном задании начальных данных  $\psi^0$  и  $\varphi^0$ .



**Рис. 1.3.** Дисперсионная (a) и диссипативная (b) поверхности схемы «двухслойный крест»

Аналогичные результаты для схемы «КАБАРЕ» [33] приведены на рисунке 1.4.



**Рис. 1.4.** Дисперсионная (a) и диссипативная (b) поверхности схемы «КАБАРЕ»

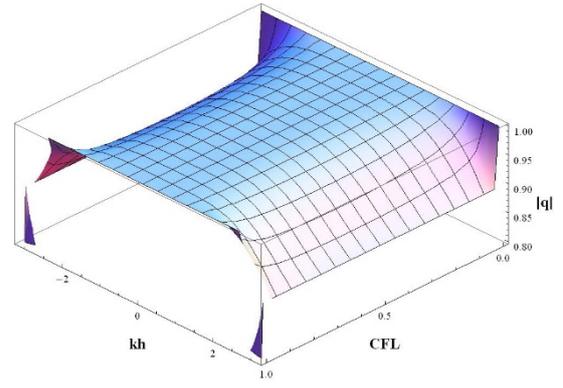
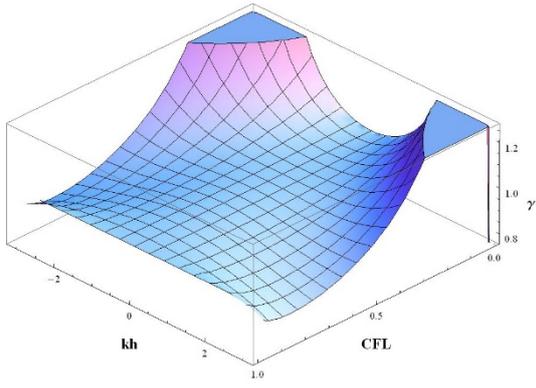
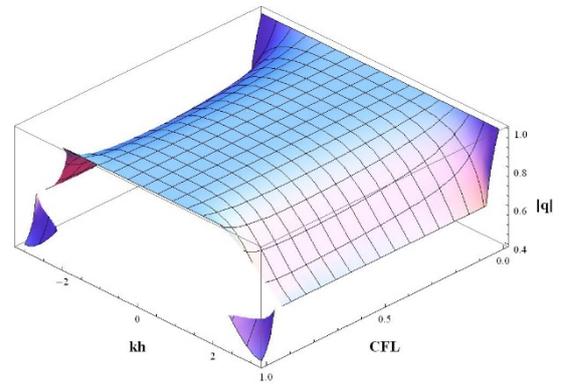
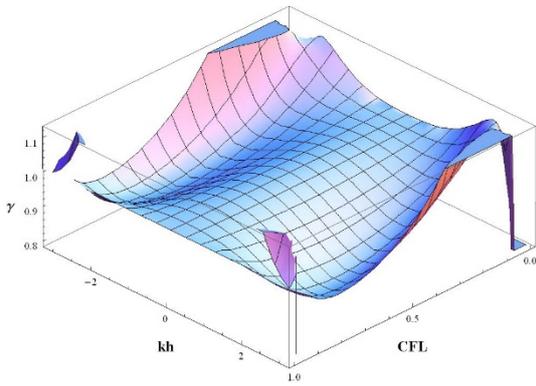
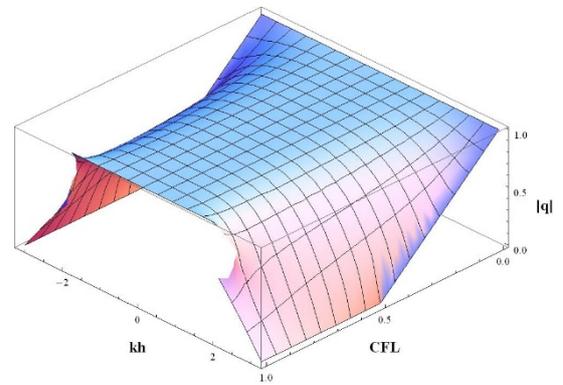
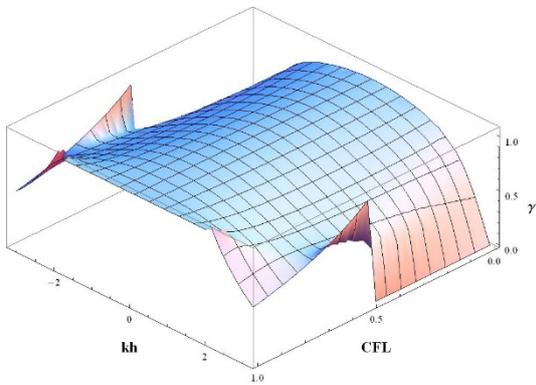
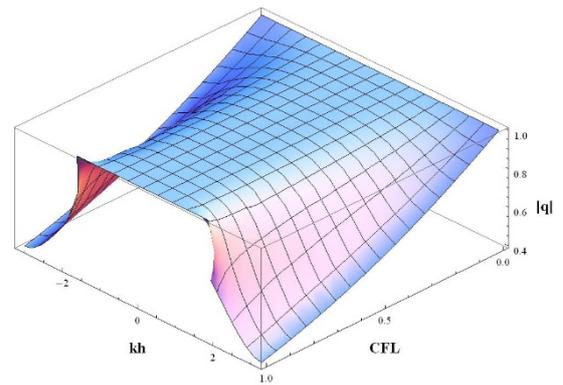
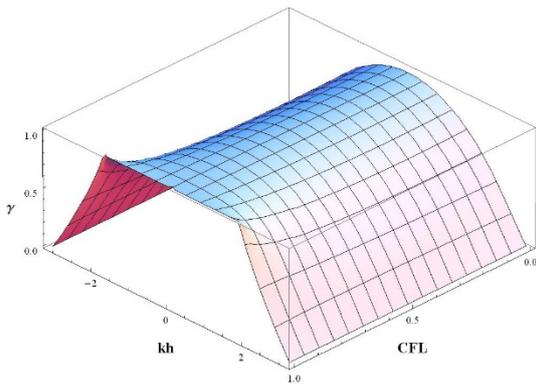
В схеме «КАБАРЕ» дисперсионная поверхность имеет особенности при числе Куранта  $CFL = 0$ . Дисперсионная поверхность схемы «двухслойный крест» особенностей не имеет, однако, фазовая скорость высоких гармоник близка к нулю. Т.е. высокие гармоники в схеме «двухслойный крест» практически «стоят» на месте. Попытки оптимизировать дисперсионные свойства расчетной схемы естественным образом привели к построению гибридных схем как линейной комбинации схем, использующих центральную («Крест») и направленную («КАБАРЕ») процедуру экстраполяции при вычислении потоковых переменных.

### **Гибридные схемы**

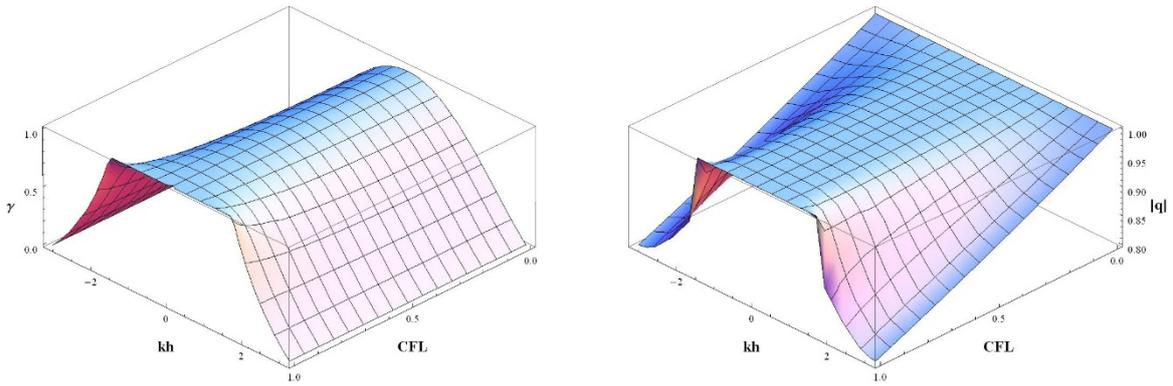
Введем дополнительный параметр  $0 \leq \alpha \leq 1$  – параметр гибридизации. Вторую фазу гибридной схемы будем вычислять как линейную комбинацию центральной и направленной экстраполяций:

$$\varphi_i^{n+1} = (1 - \alpha) \cdot (2\psi_{i-1/2}^{n+1/2} - \varphi_{i-1}^n) + \alpha \cdot (\psi_{i+1/2}^{n+1/2} + \psi_{i-1/2}^{n+1/2} - \varphi_i^n) \quad (1.16)$$

Построим дисперсионные и диссипативные поверхности схемы при разных значениях параметра гибридизации (рис. 1.5).

 $\alpha = 0.1$  $\alpha = 0.3$  $\alpha = 0.5$ 

$\alpha = 0.7$

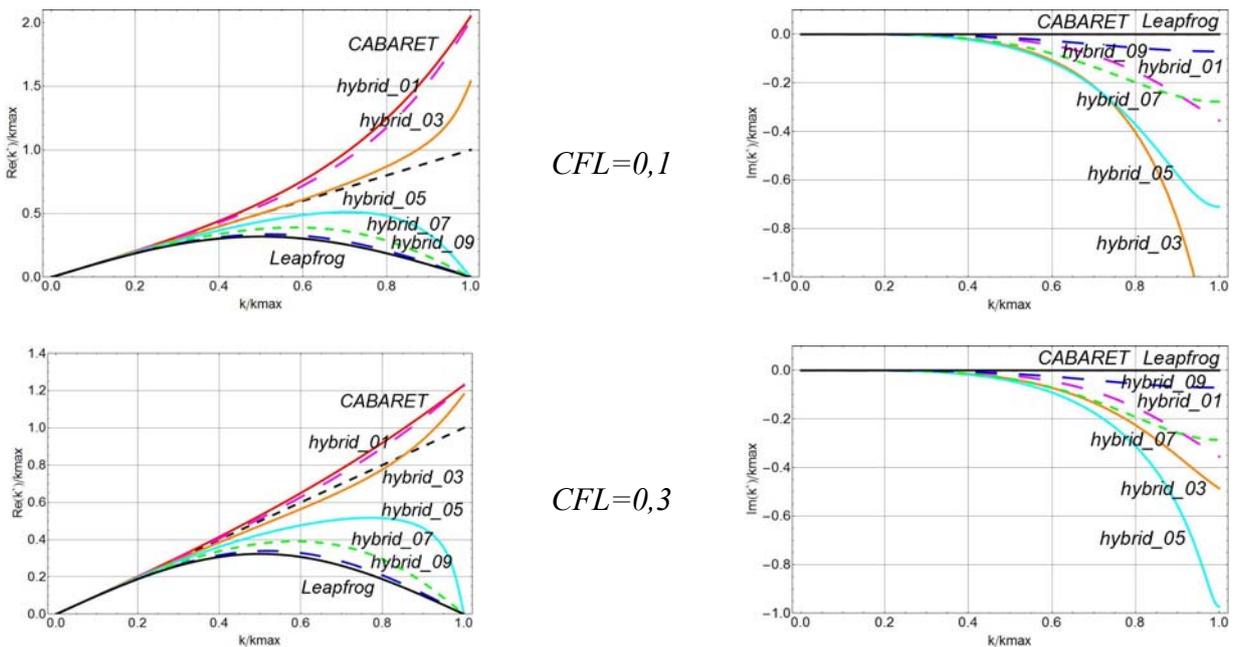


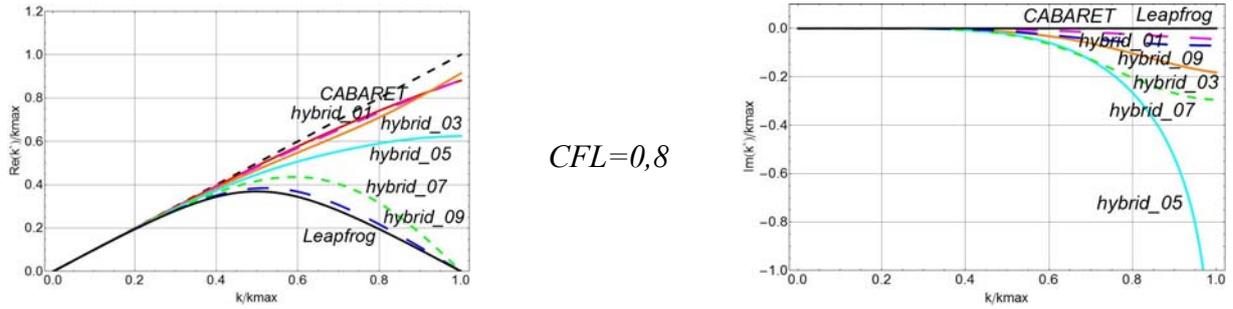
$\alpha = 0.9$

**Рис. 1.5.** Дисперсионные (слева) и диссипационные (справа) поверхности гибридной схемы

Гибридные схемы при  $0 < \alpha < 1$  устойчивы при числах Куранта  $CFL \leq 1$ , однако они уже не являются бездиссипативными, как схемы «КАБАРЕ» и «Крест». Максимум схемной диссипации достигается при  $\alpha = 0.5$ .

При  $\alpha > 0$  особенность в дисперсионной поверхности, присущая схеме «КАБАРЕ», пропадает. На рисунке 1.6 приведено сравнение профилей дисперсионных и диссипативных поверхностей по схемам «КАБАРЕ», «двухслойный крест», «hybrid\_01», «hybrid\_03», «hybrid\_05», «hybrid\_07» и «hybrid\_09» для трех чисел Куранта  $CFL = 0.1$ ,  $CFL = 0.3$  и  $CFL = 0.8$ .





**Рис. 1.6.** Дисперсионные (слева) и диссипационные (справа) кривые для схем «КАБАРЕ», «двухслойный крест» и гибридных схем

### **Нелинейная коррекция потоковых переменных**

Согласно теореме Годунова [34] среди линейных разностных схем для уравнения переноса с порядком аппроксимации выше первого нет монотонных. Для улучшения монотонности решений можно ввести дополнительную процедуру коррекции потоковых переменных как в схемах высокой разрешающей способности. Это могут быть различные TVD-лимитеры, фильтры высоких частот, или, как введенная для балансно-характеристических схем, нелинейная коррекция потоковых переменных  $\varphi$  на основе принципа максимума [28, 35].

$$\varphi_i^{n+1} = \begin{cases} \varphi_i^{n+1} & \text{if } \min(\varphi)_i^n \leq \varphi_i^{n+1} \leq \max(\varphi)_i^n \\ \min(\varphi)_i^n & \text{if } \varphi_i^{n+1} < \min(\varphi)_i^n \\ \max(\varphi)_i^n & \text{if } \varphi_i^{n+1} > \max(\varphi)_i^n \end{cases} \quad (1.17)$$

где минимальное и максимальное значения определяются по той расчетной ячейки, со стороны которой приходит характеристика.

Для  $c > 0$ :

$$\begin{aligned} \min(\varphi)_i^n &= \min\{\varphi_{i-1}^n, \psi_{i-1/2}^n, \varphi_i^n\} \\ \max(\varphi)_i^n &= \max\{\varphi_{i-1}^n, \psi_{i-1/2}^n, \varphi_i^n\} \end{aligned} \quad (1.18)$$

Для  $c < 0$ :

$$\begin{aligned} \min(\varphi)_i^n &= \min\{\varphi_i^n, \psi_{i+1/2}^n, \varphi_{i+1}^n\} \\ \max(\varphi)_i^n &= \max\{\varphi_i^n, \psi_{i+1/2}^n, \varphi_{i+1}^n\} \end{aligned} \quad (1.19)$$

### *Анализ диссипативных и дисперсионных свойств нелинейных схем*

В статьях [36, 37] был развит метод для изучения дисперсионных и диссипативных свойств нелинейных схем высокой разрешающей способности (TVD, WENO и т.п.). Воспользуемся данным методом для оценки реальной диссипации в схемах при наличии коррекции по принципу максимума.

Для проведения анализа, рассмотрим одномерное распространение малого возмущения в неограниченной области, управляемое линейным уравнением переноса с монохроматическим гармоническим начальным условием:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad u(x, 0) = \hat{u}_0 e^{iwx} \quad (1.20)$$

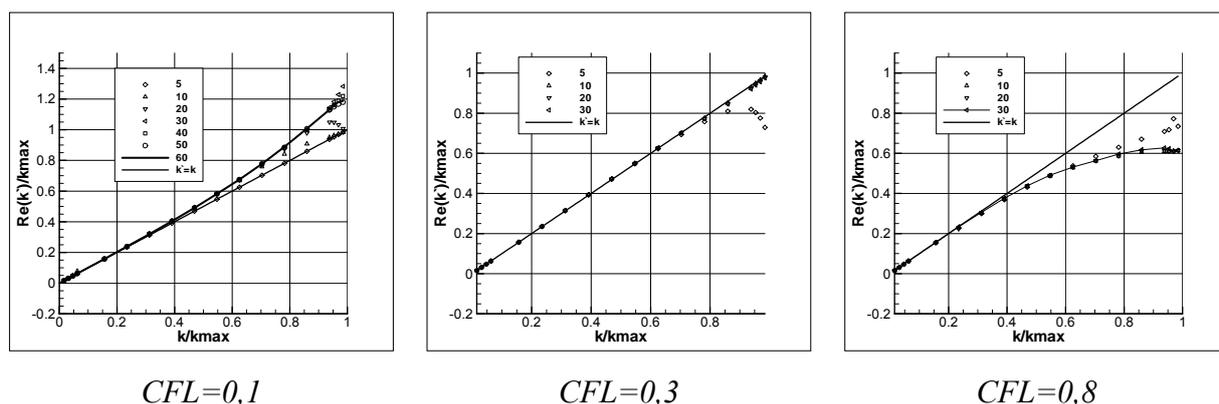
где  $u$  – переменная,  $\varphi = c \cdot u$  – поток,  $c > 0$ . Решением задачи (1.20) будет являться  $u(x, t) = u_0(x - c \cdot t)$ . Тогда разложение в ряд Фурье дает способ нахождения модифицированного волнового числа  $k'$ :

$$\begin{aligned} \hat{u}(k, t) &= C \cdot \int_x u(x, t) \exp(-ikx) dx = \\ &= C \cdot \int_x u_0(x - ct) \exp(-ikx) dx = \exp(-ikct) \cdot \hat{u}_0(k, 0) \end{aligned} \quad (1.21)$$

$$k'(k, t) = \frac{i}{ct} \ln \left( \frac{\hat{u}'(k, t)}{\hat{u}_0(k)} \right) \equiv \frac{i}{ct} \ln \left( \left| \frac{\hat{u}'(k, t)}{\hat{u}_0(k)} \right| \right) - \frac{\phi'(k, t) - \phi_0(k)}{ct} \quad (1.22)$$

Где  $u'$  – численное решение,  $\phi'$  – фаза решения. Для спектральных схем  $k' = k$ . Следовательно, отклонение  $(k' - k)$  можно интерпретировать как меру диссипативных и дисперсионных ошибок, связанных с конечно-разностной дискретизацией схемы.

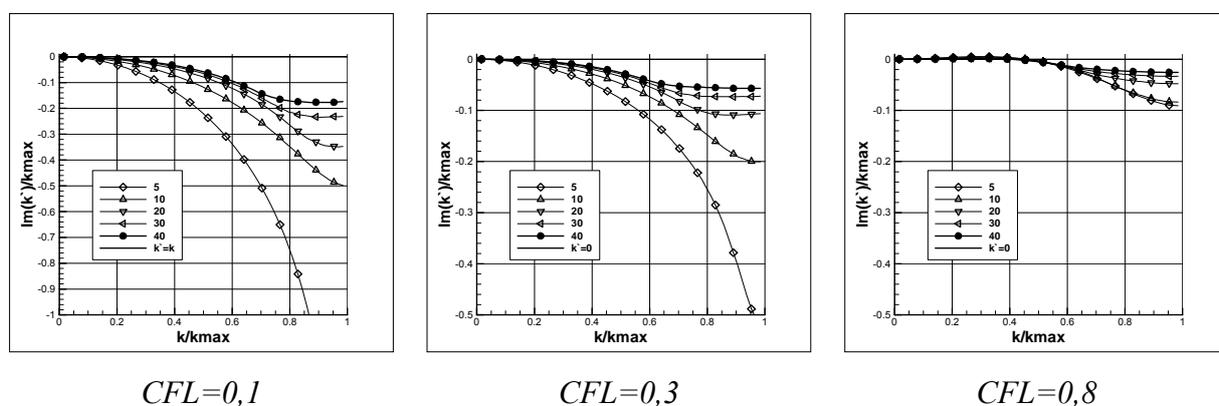
На серии рисунков 1.7 показаны зависимости действительной части модифицированного волнового числа (дисперсионные характеристики) для чисел Куранта 0.1, 0.3 и 0.8. А также проведено исследование на сходимость при увеличении количества шагов по времени  $nt = 5, 10, 20\dots$



**Рис. 1.7.** Дисперсионные кривые для схемы КАБАРЕ с коррекцией по принципу максимума

При числах Куранта меньших  $CFL < 0.5$  для линейной схемы «КАБАРЕ» характерно наличие аномальной дисперсии (фазовые скорости гармоник превышают скорость распространения возмущений  $c$ ). В нелинейном случае аномальная дисперсия также возникает при малых числах Куранта  $CFL < 0.3$  (рис. 1.7). При числах Куранта  $CFL \sim 0.3$  все расчетные точки с высокой точностью ложатся на прямую  $k' = k$ . При больших значениях чисел Куранта схема «КАБАРЕ» дает нормальную дисперсию.

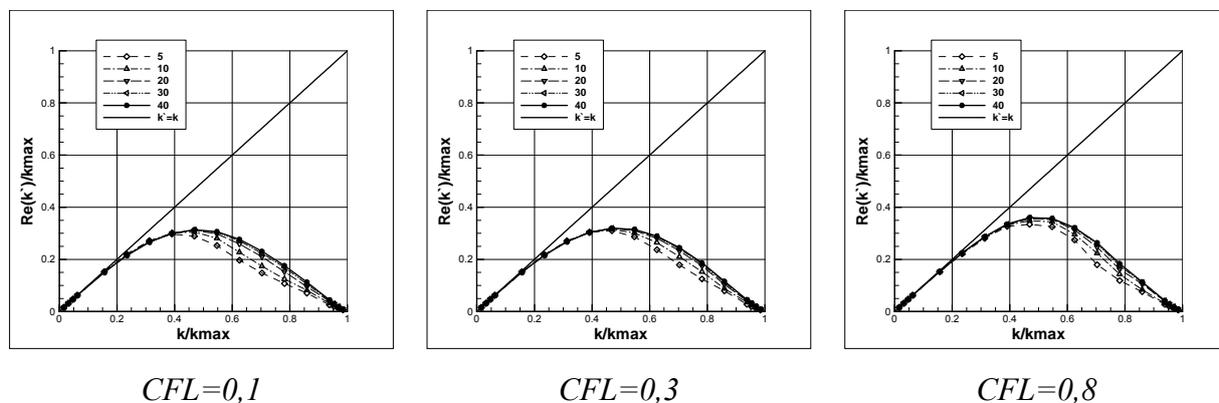
На серии рисунков 1.8 показаны зависимости мнимой части модифицированного волнового числа (диссипативные характеристики) для чисел Куранта 0.1, 0.3 и 0.8. А также проведено исследование на сходимость при увеличении количества шагов по времени.



**Рис. 1.8.** Диссипативные кривые для схемы КАБАРЕ с коррекцией по принципу максимума

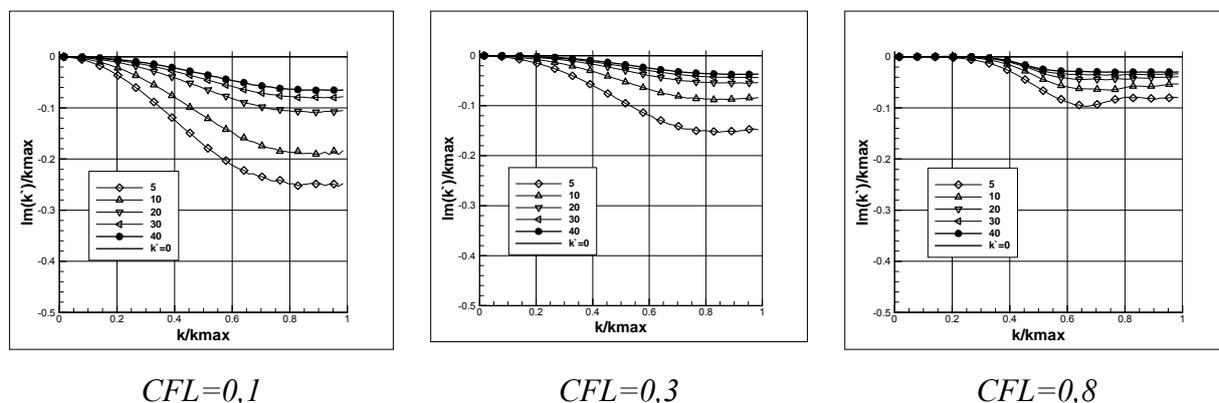
Наибольшая диссипация, обусловленная действием принципа максимума, соответствует высокочастотным гармоникам и малым числам Куранта.

Аналогичные результаты для схемы «двухслойный крест» с коррекцией приведены на рисунках 1.9-1.10.



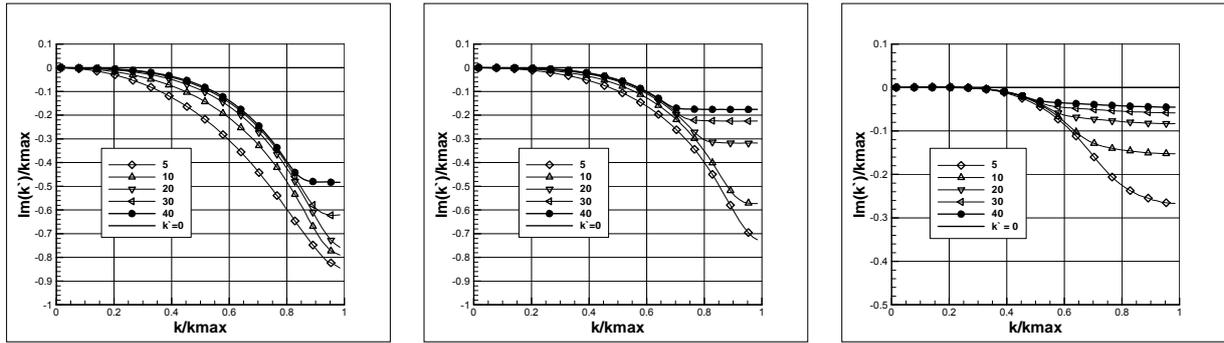
**Рис. 1.9.** Дисперсионные кривые для схемы «двухслойный крест» с коррекцией по принципу максимума

Дисперсия в схеме «двухслойный крест» слабо зависит от числа Куранта. И является нормальной (фазовая скорость меньше скорости распространения возмущений).



**Рис. 1.10.** Диссипативные кривые для схемы «двухслойный крест» с коррекцией по принципу максимума

Т.к. коррекция по принципу максимума слабо влияет на дисперсию схемы, то для гибридной схемы будем строить только диссипативные характеристики. На рисунке 1.11 приведены диссипативные характеристики для схемы «*hybrid\_05*».



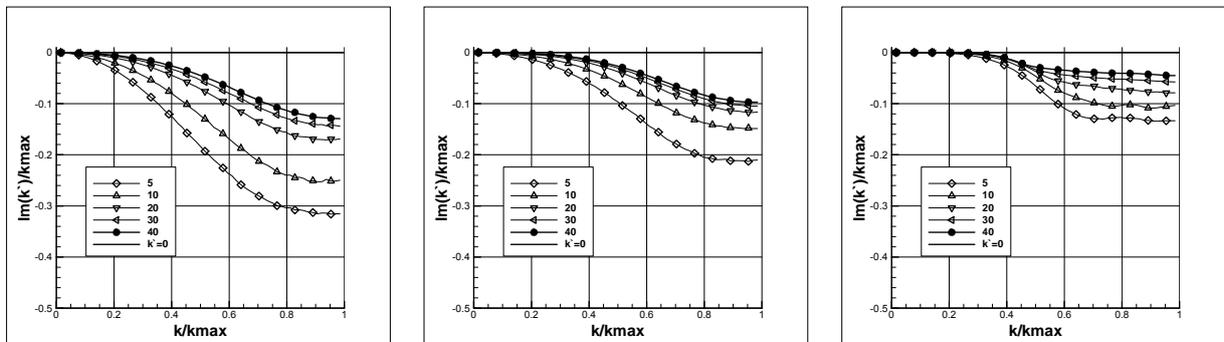
$CFL=0,1$

$CFL=0,3$

$CFL=0,8$

**Рис. 1.11.** Диссипативные кривые для схемы «*hybrid\_05*» с коррекцией по принципу максимума

На рисунке 1.12 приведены результаты для схемы «*hybrid\_09*».



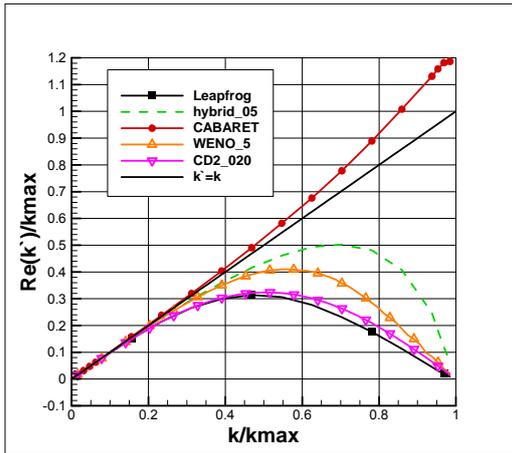
$CFL=0,1$

$CFL=0,3$

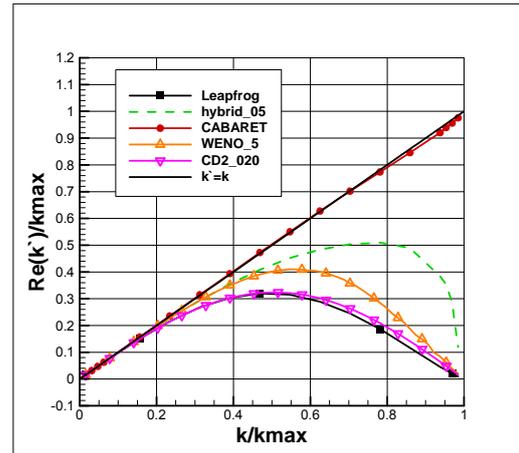
$CFL=0,8$

**Рис. 1.12.** Диссипативные кривые для схемы «*hybrid\_09*» с коррекцией по принципу максимума

Сравним результаты расчетов для  $nt = 40$  между собой, а также со схемой «*WENO5-LF-RK3*» [38, 39], являющийся очень популярной в настоящее время схемой высокой разрешающей способности, и со схемой «центральная разность» второго порядка «*CD2\_020*» с вязкостью фон Неймана-Рихтмайера [40]. Коэффициент вязкости взят равным 0.2, как в модели Смагоринского для расчета однородной-изотропной турбулентности [1, 14]. На рисунке 1.13 приводятся результаты расчета дисперсии с числами Куранта  $CFL=0,1$  и  $CFL=0,3$ .



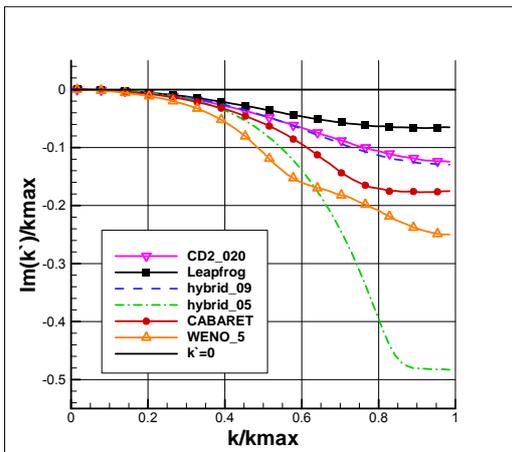
$CFL=0,1$



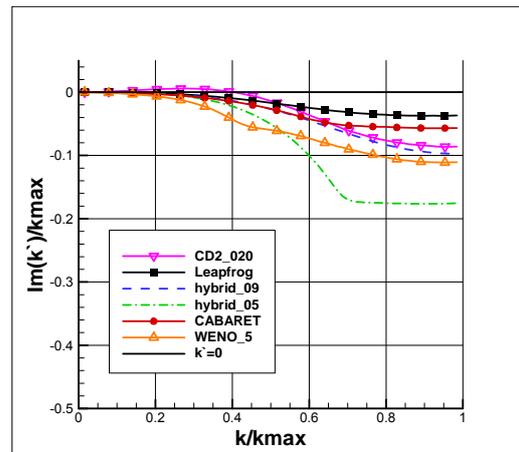
$CFL=0,3$

**Рис. 1.13.** Сравнение дисперсионных кривых по схемам «КАБАРЕ», «двухслойный крест», «hybrid\_05», «WENO5\_LF\_RK3», «CD2\_020». Число Куранта  $CFL=0.1$  (слева) и  $CFL=0.3$  (справа)

На рисунке 1.14 приводятся результаты расчета диссипации с числом Куранта  $CFL=0,1$  и  $CFL=0,3$ .



$CFL=0,1$



$CFL=0,3$

**Рис. 1.14.** Сравнение диссипативных кривых по схемам «КАБАРЕ», «двухслойный крест», «hybrid\_05», «hybrid\_09», «WENO5\_LF\_RK3», «CD2\_020». Число Куранта  $CFL=0.1$  (слева) и  $CFL=0.3$  (справа)

Таким образом, можно сделать вывод:

- для длинных и средних волн  $k < 0.6 \cdot k_{\max}$  (3-4 узла сетки на длину волны) наиболее диссипативна схема «WENO5-LF-RK3», а для высоких частот гибридная схема «hybrid\_05». Наименее диссипативна схема «двухслойный крест». Если сравнить её диссипацию с вязкой диссипацией в LES-модели Смагоринского («CD2\_020»), то она примерно вдвое меньше. Подбирая

параметр гибридизации, можно добиться того, чтобы диссипация в гибридной схеме была бы примерно равна диссипации LES-модели Смагоринского. Это выполняется в схеме «*hybrid\_09*» (рис. 1.14);

- дисперсия меньше всего в схеме «КАБАРЕ», а самая большая, наоборот, в схеме «двухслойный крест». Дисперсия в схеме «*hybrid\_09*» примерно совпадает с дисперсией «*CD2\_020*».

### ***Перенос профиля на неравномерной сетке***

Для исследования транспортных свойств рассматриваемых схем на неравномерных пространственных сетках зададимся степенью неравномерности, равной  $\delta = 1/4$ , и сгенерируем случайную, распределенную по нормальному закону, последовательность отрезков  $h_i = \frac{L}{N-1} (1 + \delta \cdot G(0,1))$ ,  $i = \overline{1, N-1}$ , где  $L$  – размер области,  $N$  – число узлов. Координаты узлов будем определять из соотношений  $\tilde{x}_1 = 0$ ,  $\tilde{x}_{i+1} = \tilde{x}_i + h_i$ ,  $i = \overline{1, N-1}$ . Чтобы выполнялось соотношение  $x_N = L$ , необходимо координаты узлов перенормировать  $x_i = \tilde{x}_i \cdot L / \tilde{x}_N$ . На определенной таким образом расчетной сетке (рис. 1.15) будем решать задачу Коши с периодическими граничными условиями. Начальный профиль переносимой функции определим следующим образом [33]:

$$u(x) = \exp\left[-\left(\frac{x-x_1}{\sigma}\right)^2\right] + \exp\left[-\left(\frac{x-x_2}{\sigma}\right)^2\right] \quad (1.23)$$

$$x_1 = \frac{15}{40}L, \quad x_2 = \frac{25}{40}L, \quad \sigma = \frac{L}{12.6}$$

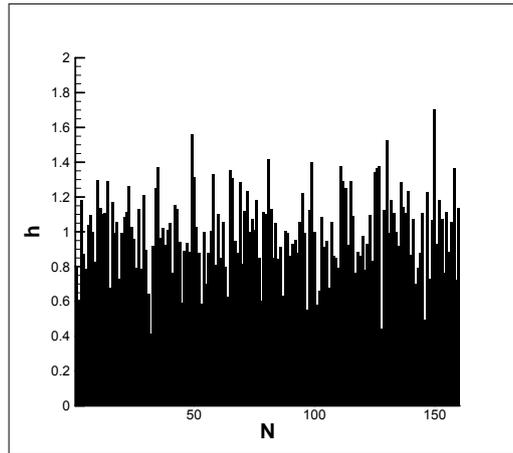
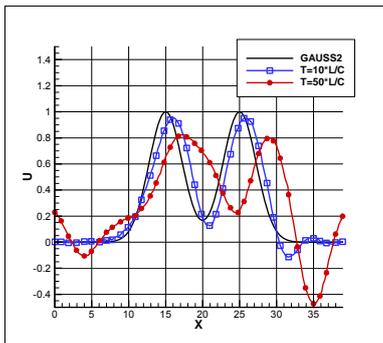
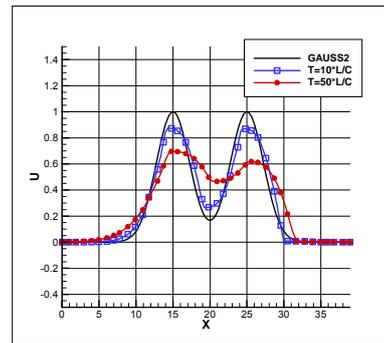


Рис. 1.15. Гистограмма шага неравномерной сетки

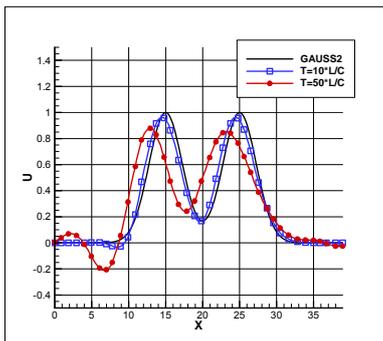
На серии рисунков 1.16 приведены результаты расчетов переноса начального профиля для числа Куранта  $CFL=0,1$  через 10 и 50 пролетов.



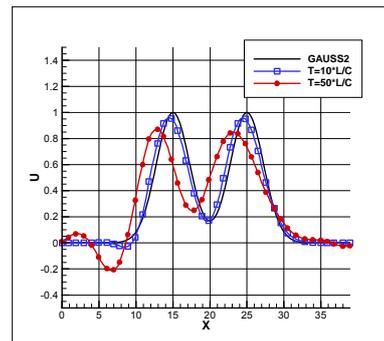
«CABARET» no corr.



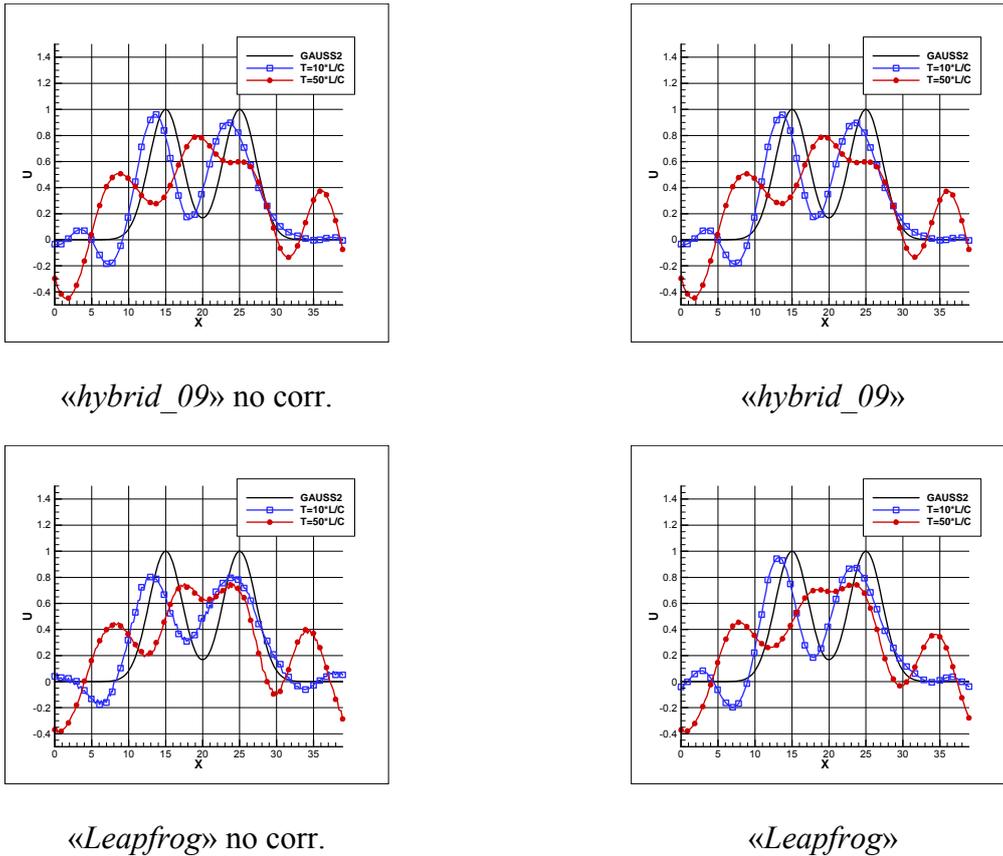
«CABARET»



«hybrid\_05» no corr.



«hybrid\_05»



**Рис. 1.16.** Перенос начального профиля на неравномерной сетке для числа Куранта  $CFL=0.1$  без коррекции (слева) и с коррекцией (справа)

Анализируя полученные результаты можно отметить:

- наименьшие амплитудные ошибки получаются по схеме «*hybrid\_05*», причем коррекция заметного влияния не оказывает, а наименьшие фазовые ошибки в схеме «*КАБАРЕ*»;
- коррекция по принципу максимума не делает решения монотонными для гибридных схем и схемы «двухслойный крест»;

### Уравнение Бюргерса

Широко распространено мнение, что одномерным аналогом уравнений Навье-Стокса является уравнение Бюргерса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial u^2}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f \quad (1.24)$$

Действительно, их роднит квадратичная нелинейность в адвективном слагаемом и линейная вязкость в правой части. Что касается свойств решений, то они

совершенно разные. У уравнения Бюргера, при коэффициенте вязкости  $\mu$ , стремящемся к нулю, формируются как сильные (ударные волны), так и слабые разрывы, в то время как решения уравнений Навье-Стокса такими особенностями не обладают. Уравнение (1.24) с помощью преобразования Хопфа сводится к линейному уравнению параболического типа, что позволяет проанализировать все особенности решения при произвольных начальных данных. Отсюда, в частности, следует, что все стохастические свойства ансамбля решений полностью определяются стохастическими свойствами начальных данных.

Тем не менее, уравнение Бюргера является объектом пристального внимания исследователей, изучающих свойства турбулентности [41-43]. Задача, обычно ставится следующим образом: на отрезке  $x \in [0, 2\pi]$  задаются случайные начальные данные с заданными статистическими свойствами, и решается нестационарное уравнение (1.24) с периодическими граничными условиями и заданной случайной функцией  $f$ .

Начальные данные задаются рядом Фурье с заданными коэффициентами  $c_k$  и случайными фазами  $\theta_k$ , равномерно распределенными на отрезке  $[0, 2\pi]$ :

$$u(x, t_0) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot \exp[i(kx + \theta_k)]. \quad (1.25)$$

Коэффициенты  $c_k$  вычисляются как:

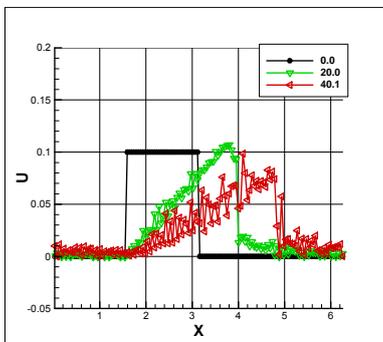
$$c_k = A \cdot k^\alpha \cdot \exp\left(-\frac{\alpha}{2} \left(\frac{k}{k_0}\right)^2\right) \quad (1.26)$$

где  $A$  – нормировочный множитель,  $\alpha$ ,  $k_0$  – заданные константы.

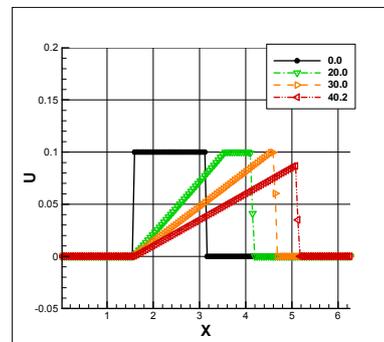
Целью расчетов является изучение поведения во времени некоторых средних по ансамблю величин, например, полной кинетической энергии, спектральных функций этих величин и т.н. структурных функций случайного поля скоростей. Если внешняя случайная сила  $f = 0$ , то говорится, что

исследуется затухание однородной «бюргуленции», в противном случае – влияние «форсинга» (от англ. forcing) на статистически установившееся состояние. Известно, что коэффициент наклона спектральной кривой на логарифмической плоскости в одномерном случае равен не « $-5/3$ », как в трехмерном случае, а « $-2$ ». Это обстоятельство обычно используется для тестирования трехмерных LES алгоритмов.

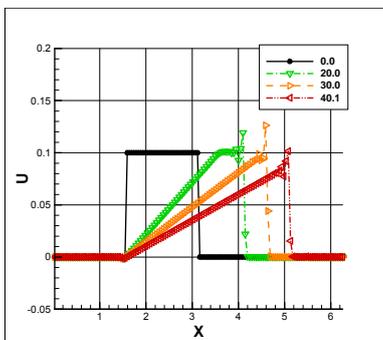
Прежде чем переходить к моделированию «бюргуленции», рассмотрим задачу Коши для закона сохранения  $\partial_t \mu + \partial_x (u^2 / 2) = 0$  с периодическими граничными условиями и начальным профилем в виде прямоугольника («ступенька»). Точное решение состоит из ударной волны распространяющейся направо и линейной волны разрежения с левой стороны «ступеньки». Схема «КАБАРЕ» и гибридные схемы легко обобщаются на случай переменной скорости переноса [28]. На рисунке 1.17 приведены результаты расчета по всем схемам для числа Куранта  $CFL = 0.3$ .



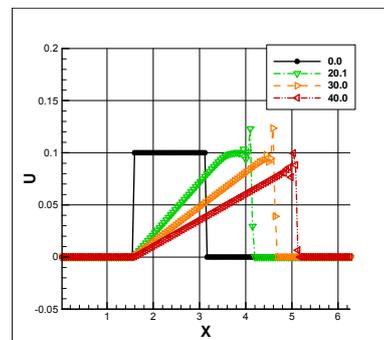
«CABARET» no corr.



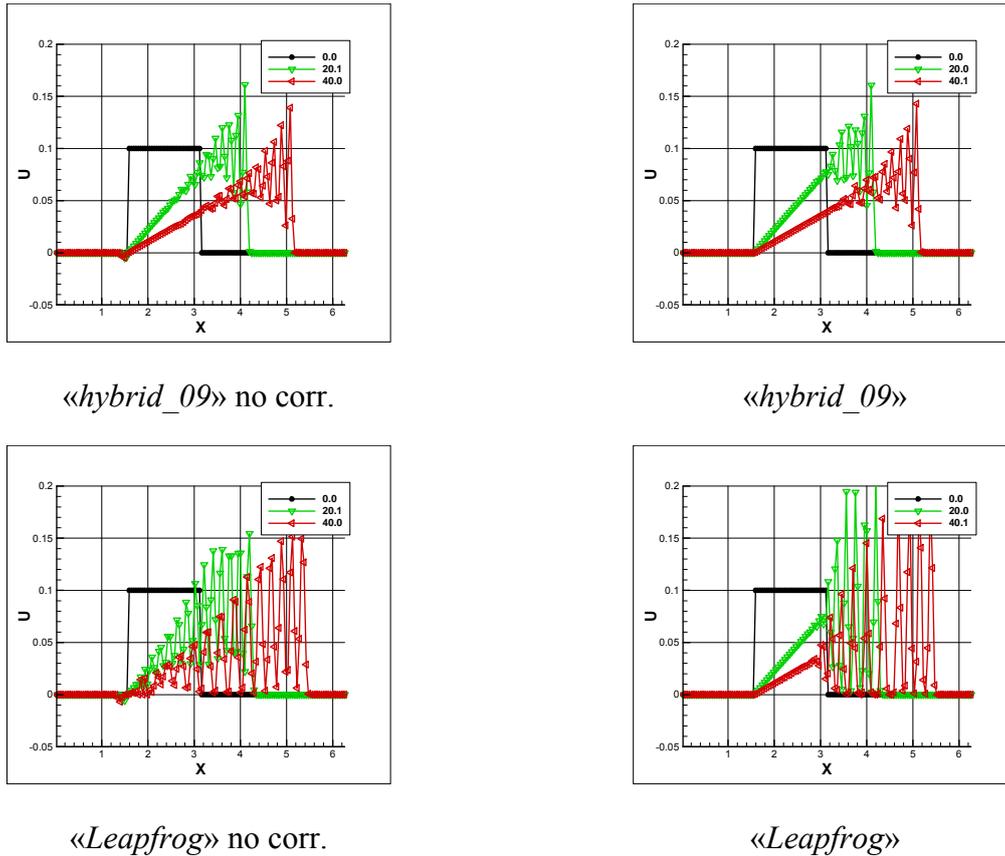
«CABARET»



«hybrid\_05» no corr.



«hybrid\_05»



**Рис. 1.17.** Расчет «ступеньки» для числа Куранта  $CFL=0.3$  без коррекции (слева) и с коррекцией (справа)

Анализируя полученные результаты, можно сделать следующие выводы:

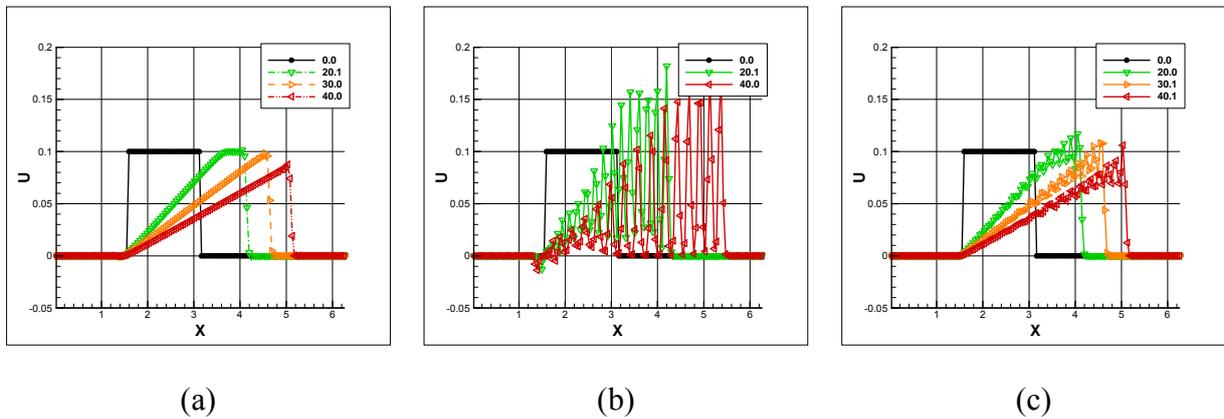
- схема «КАБАРЕ» с коррекцией монотонна и размывает фронт ударной волны на 1 ячейку;
- коррекция не делает решения гибридных схем монотонными, и лишь незначительно уменьшает кол-во новых максимумов за фронтом волны.

Для сравнения приведем результаты по схемам «WENO5-LF-RK3» (рис. 1.18 (а)) и полностью консервативной кососимметричной центральной схеме второго порядка «S2» [44]. Схема «S2» сохраняет не только полный импульс, но и полную энергию системы, и поэтому является устойчивой без введения искусственной вязкости. Разностная аппроксимация уравнения Бюргера в схеме «S2» выглядит следующим образом:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + \frac{1}{\Delta x} (f_{i+1/2}^{n+1/2} - f_{i-1/2}^{n+1/2}) = 0, \quad i = \overline{1, N}, \quad n = \overline{1, Nt} \quad (1.27)$$

$$f_{i+1/2}(u) = \frac{1}{6} (u_{i+1}^2 + u_{i+1}u_i + u_i^2), \quad f^{n+1/2} = f(u^{n+1/2}), \quad u^{n+1/2} = (u^{n+1} + u^n) / 2$$

Пространственная аппроксимация схемы «S2» в линейном случае, совпадает с обычными центральными разностями, поэтому спектральный анализ диссипативных и дисперсионных свойств схемы «S2» будет совпадать со схемой «CD2». Т.к. схема второго порядка, то она не монотонна (рис. 1.18 (b)), поэтому введём на нижнем временном слое вязкость фон Неймана-Рихтмайера с коэффициентом 0.2 (как в модели Смагоринского) «S2-020» (рис. 1.18 (c)).



**Рис. 1.18.** Расчет «ступеньки» для числа Куранта  $CFL=0.3$  по схеме «WENO5-LF-RK3» (a), «S2» (b) и «S2-020» (c)

### **DNS моделирование затухающей «бюргюленции»**

Перейдём теперь к рассмотрению задачи о затухающей «бюргюленции» (1.24)-(1.25). Прямое численное моделирование подразумевает, что сеткой разрешаются все масштабы, включая колмогоровский масштаб  $l$ . Оценим коэффициент колмогоровской вязкости для проведения DNS-расчета. В одномерном случае роль диссипации энергии играет скорость диссипации максимальной вариации скорости:

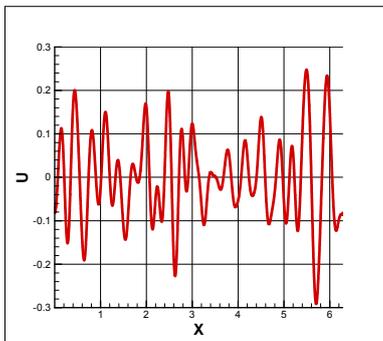
$$\varepsilon = \frac{d}{dt} \left\{ \max_{x_1, x_2 \in [0, L]} (|u(x_1) - u(x_2)|) \right\}, \quad (1.28)$$

имеющая размерность  $\text{м/с}^2$ . Будем считать скорость диссипации константой, не зависящей ни от времени, ни координаты. Кинематическая вязкость  $\mu$  имеет размерность  $\text{м}^2/\text{с}$ , следовательно колмогоровский масштаб из размерностных соображений равен  $l = \varepsilon^{-1/3} \mu^{2/3}$ . Пусть начальная вариация скорости равна  $u_0$ . Характерный масштаб времени  $T = L / u_0$ . Тогда оценка для скорости диссипации  $\varepsilon = u_0^2 / L$ . Таким образом, коэффициент кинематической вязкости:

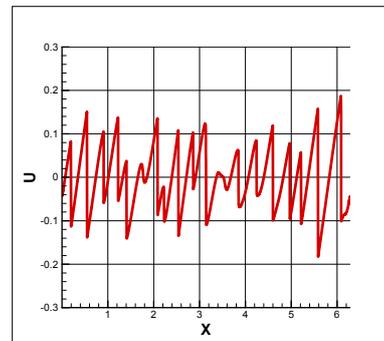
$$\mu = \text{const} \cdot u_0 \cdot L \cdot \left( \frac{l}{L} \right)^{3/2}, \quad (1.29)$$

где константа порядка единицы.

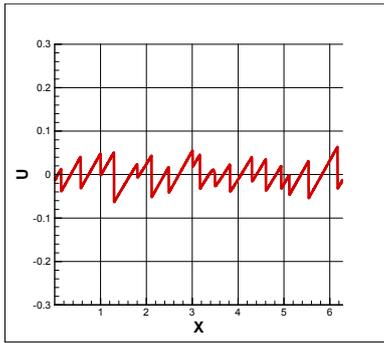
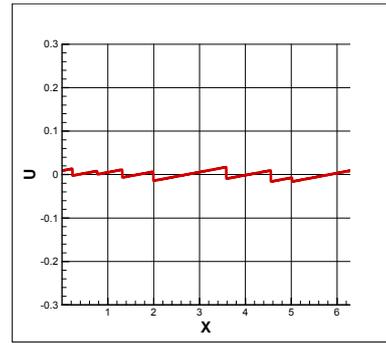
Возьмем расчетную сетку из 4096 ячеек. Пусть колмогоровский масштаб разрешен на 4-ёх ячейках сетки:  $l = L / 1024$ . Константы в начальном спектральном распределении (1.26) положим равными  $\alpha = 4$  и  $k_0 = 15$ . Нормировочный множитель определится из условия нормировки на энергию  $\sum_k E_k = \frac{1}{2} u_0^2 \cdot 4096$ , где  $u_0$  – среднеквадратичная величина пульсаций скорости начального распределения. Пусть  $u_0 = 0.1$ . Заданному начальному спектру энергии (1.25)-(1.26) удовлетворяет бесконечное множество различных распределений пульсаций скорости. Пример одного случайного распределения пульсаций с заданным спектром и его эволюция с течением времени представлена на рисунке 1.19.



$T = 0$

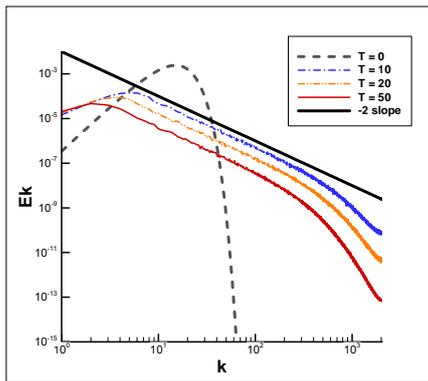


$T = 1$

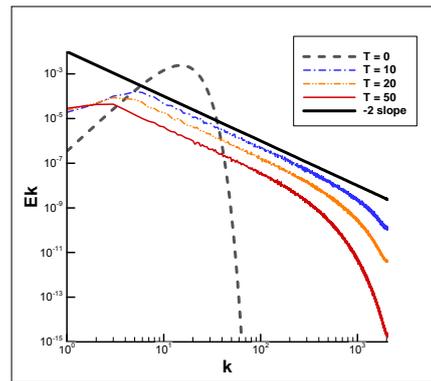

 $T = 5$ 

 $T = 50$ 

**Рис. 1.19.** Эволюция поля скорости в задаче о моделировании «бюргюленции». Схема «КАБАРЕ». Число Куранта  $CFL=0,3$ . Сетка  $N = 4096$ .

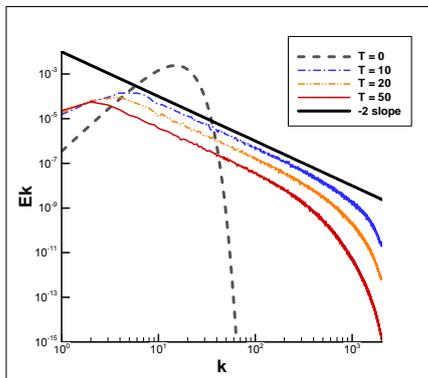
Энергетические спектры турбулентных пульсаций для DNS-расчета по схемам «КАБАРЕ», «двухслойный крест», «hybrid\_05», «S2», «WENO5-LF-RK3», осредненный по 100 реализациям, приводится на рисунке 1.20.



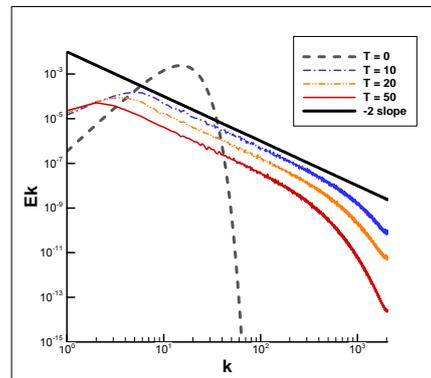
«CABARET»



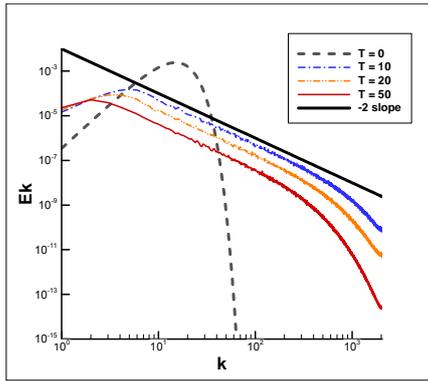
«Leapfrog»



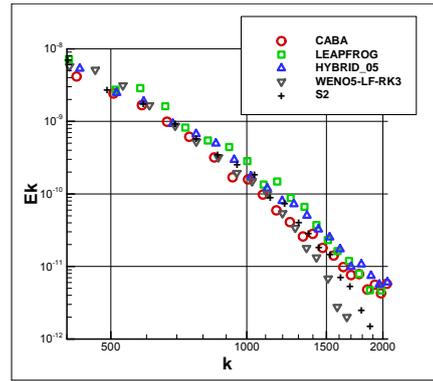
«S2»



«WENO5-LF-RK3»



«hybrid\_05»



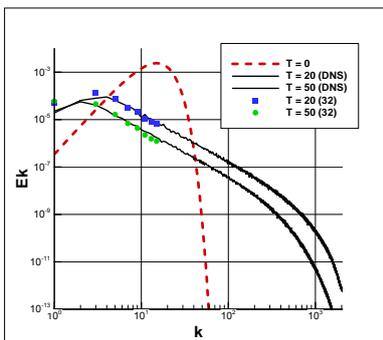
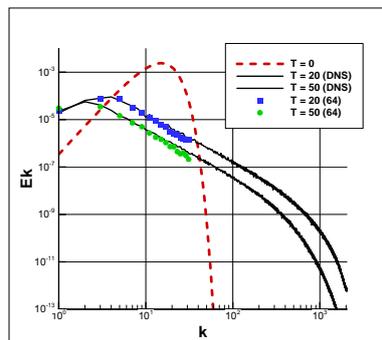
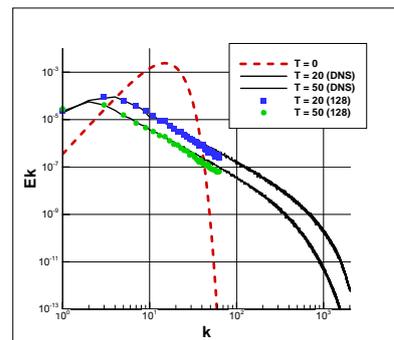
all schemes (T=20)

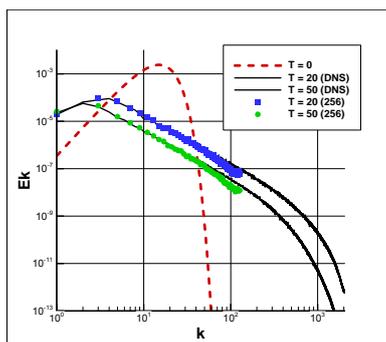
**Рис. 1.20.** Энергетический спектр «бюргюленции» по всем рассматриваемым схемам

Спектральная кривая сохраняет наклон «-2» в инерционном интервале частот  $k < 400$  (примерно 10 точек на волну). При частотах  $k > 400$  спектр попадает в диссипативный интервал и загибается вниз. Различие между схемами проявляется только на высоких гармониках при  $k > 500$  (рис. 1.20 последний график). Наиболее диссипативна схема «WENO5-LF-RK3», наименее – схема «двухслойный крест». Далее, в качестве «эталонного» DNS будем использовать расчет по схеме «S2».

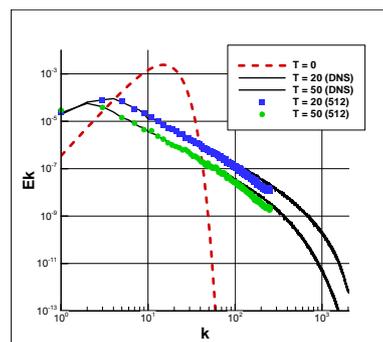
### Расчет «бюргюленции» на грубых расчетных сетках

На рисунке 1.21 приведены расчеты «бюргюленции» на грубых сетках, не разрешающих колмогоровский масштаб ( $N = 32, 64, 128, 256, 512$ ).

 $N=32$  $N=64$  $N=128$



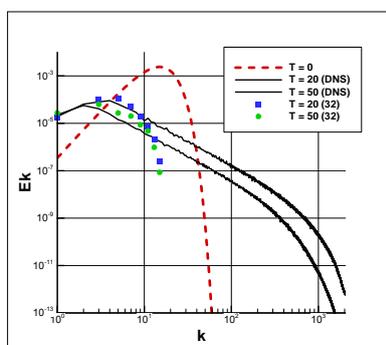
$N=256$



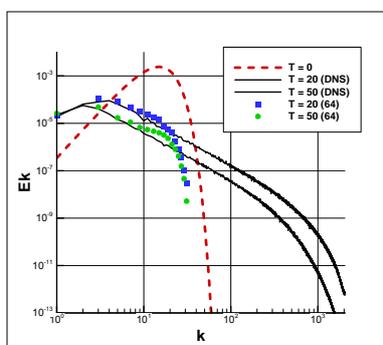
$N=512$

**Рис. 1.21.** Энергетический спектр «бюргюленции» на последовательности грубых сеток по схеме «КАБАРЕ»

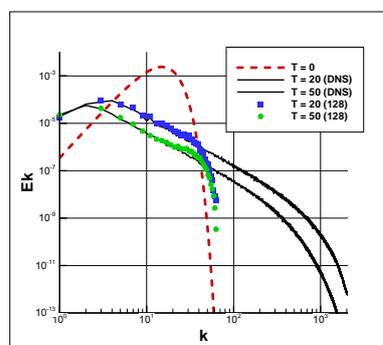
Результаты по схеме «WENO5-LF-RK3» приведены на рисунке 1.22.



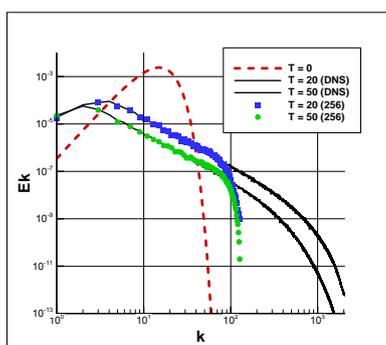
$N=32$



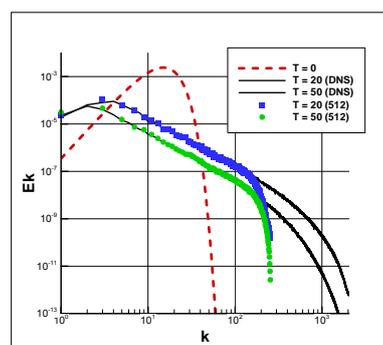
$N=64$



$N=128$



$N=256$



$N=512$

**Рис. 1.22.** Энергетический спектр «бюргюленции» на последовательности грубых сеток по схеме «WENO5-LF-RK3»

Результаты по схеме «S2-020» приведены на рис. 1.23.

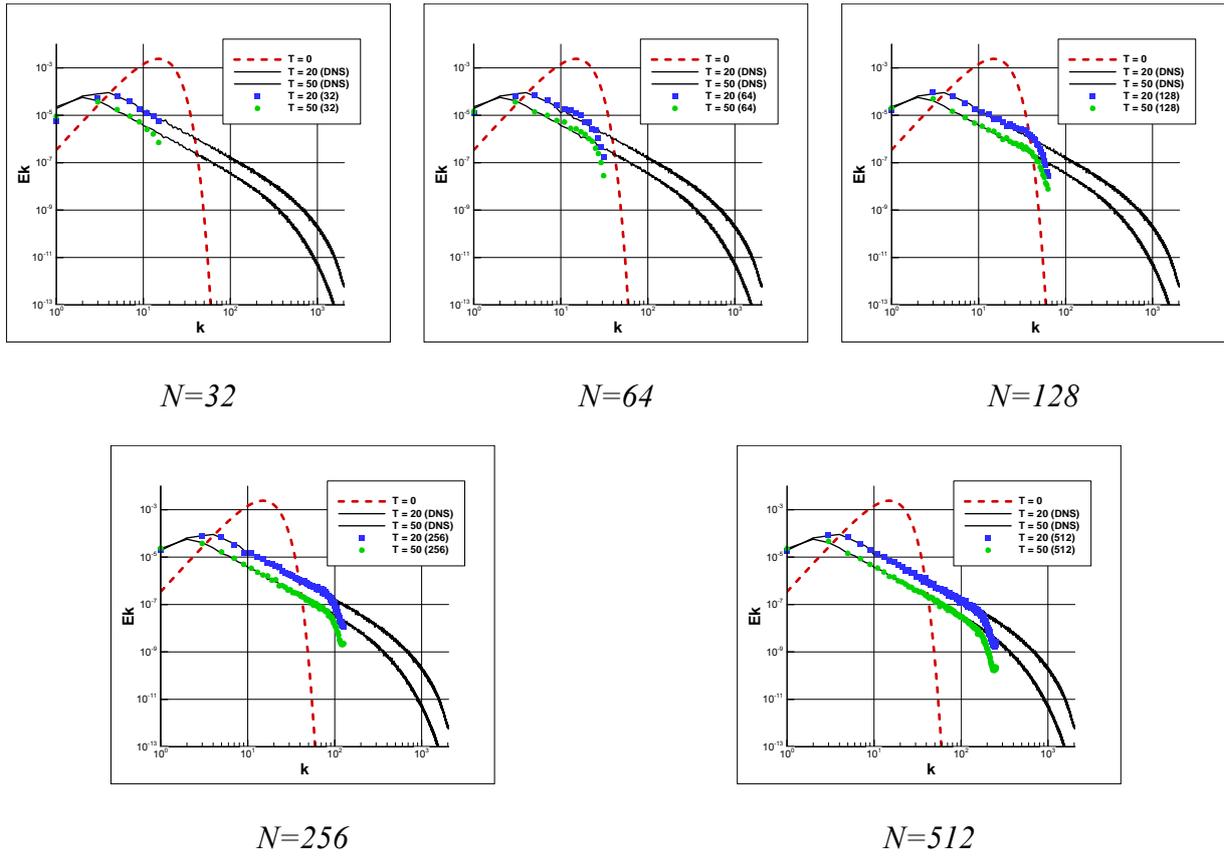
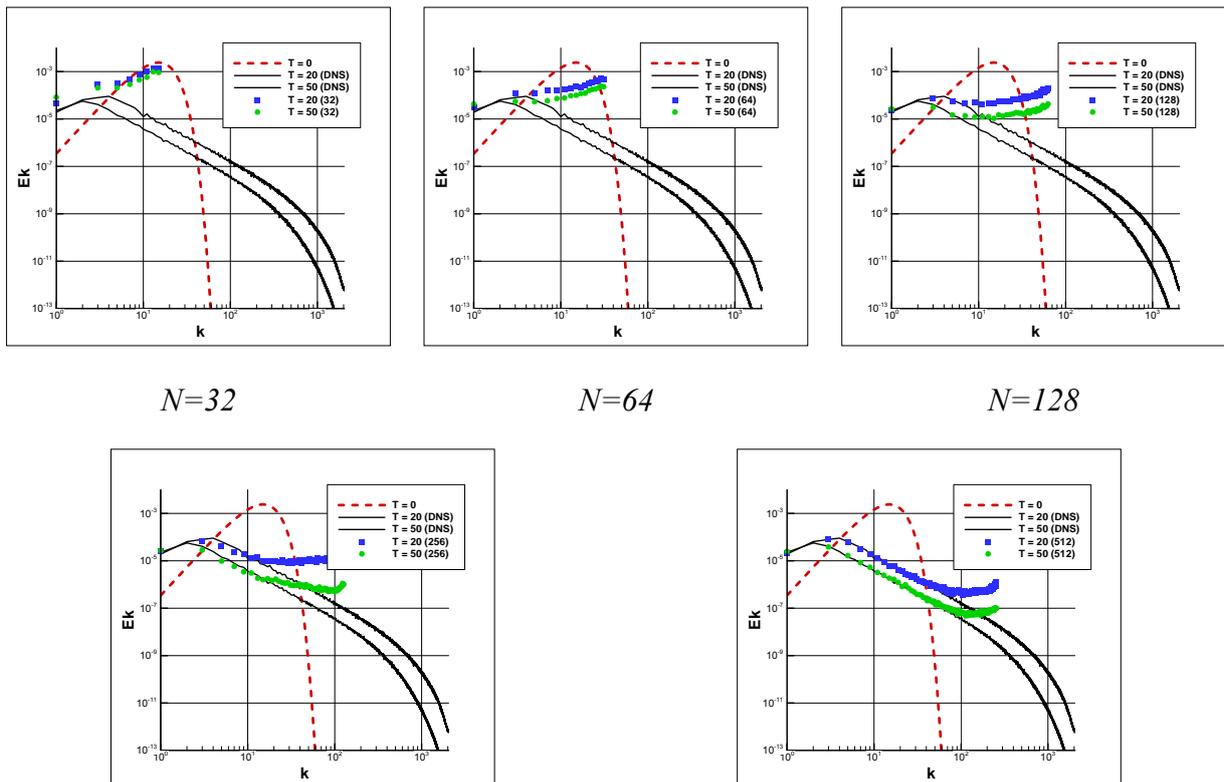


Рис. 1.23. Энергетический спектр «бюргюленции» на последовательности грубых сеток по схеме «S2-020»

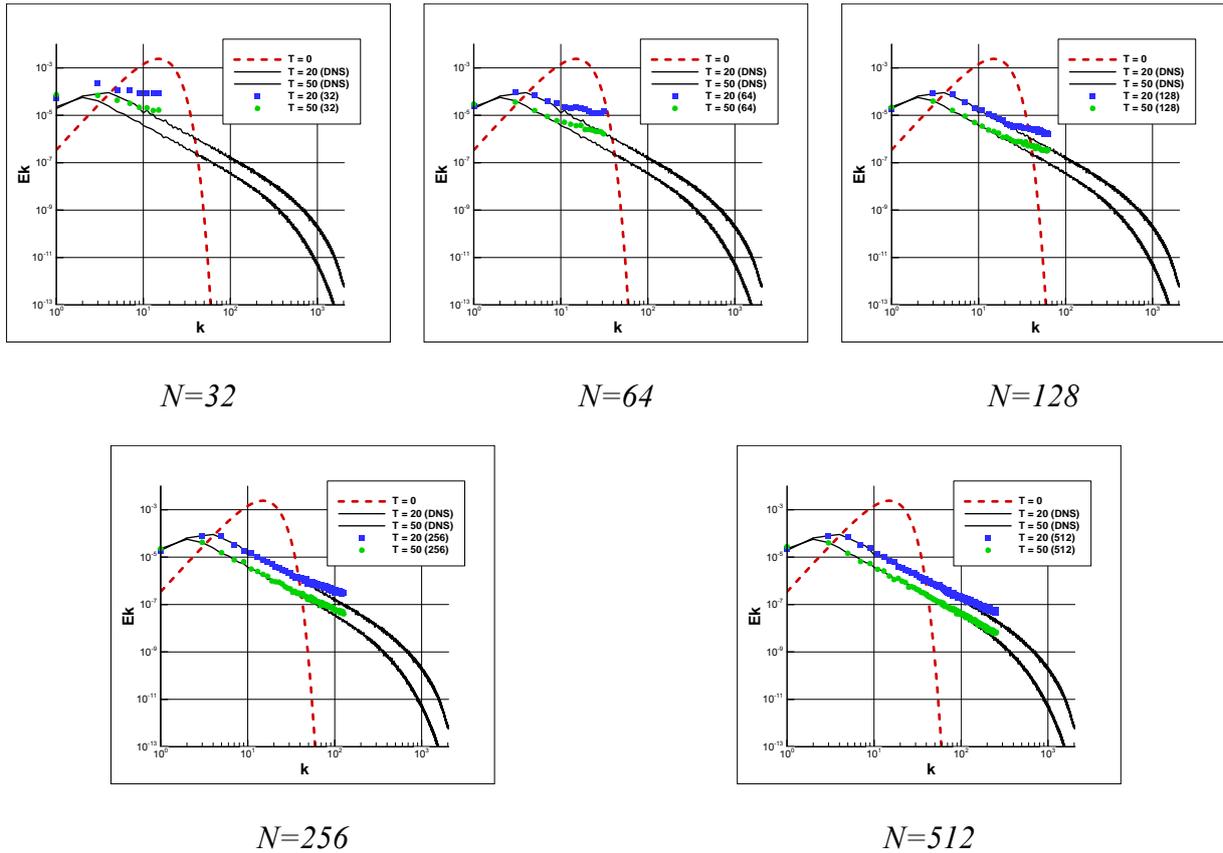
Результаты по схеме «двухслойный крест» приведены на рисунке 1.24.



$N=256$  $N=512$ 

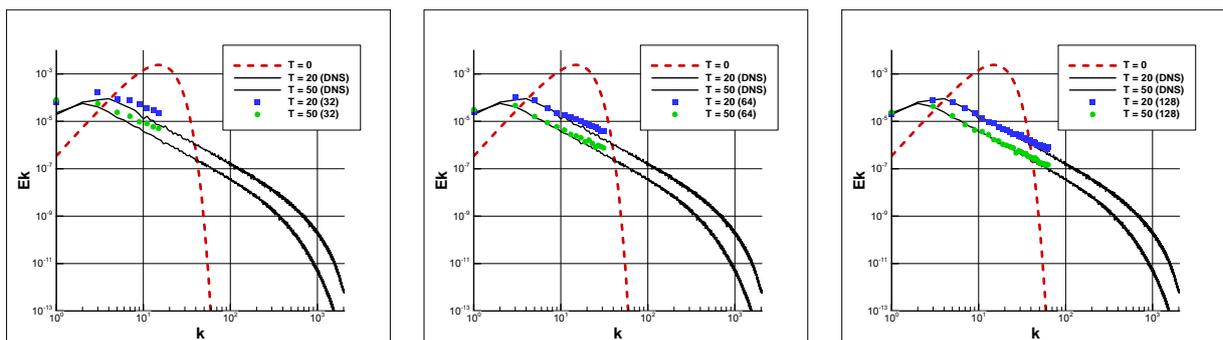
**Рис. 1.24.** Энергетический спектр «бюргюленции» на последовательности грубых сеток по схеме «двухслойный крест»

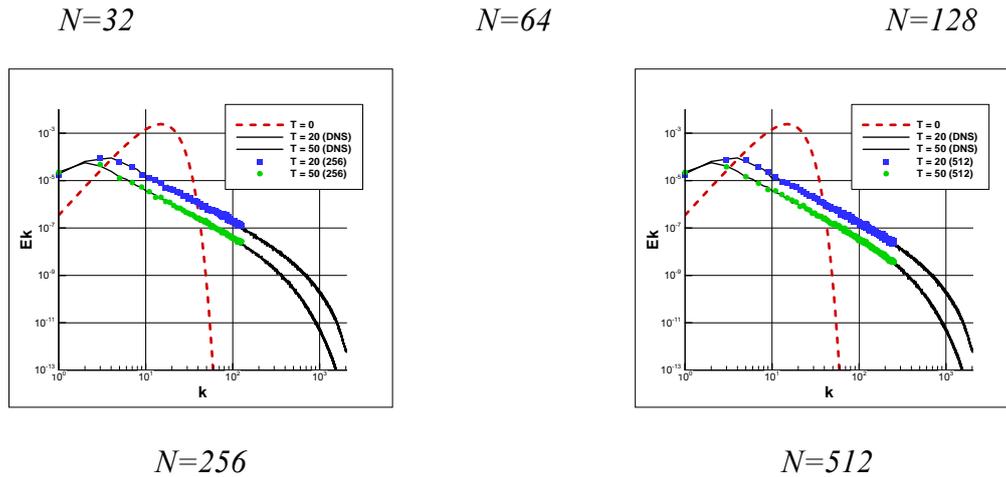
Из рисунков видно, что вязкости в схеме «двухслойный крест» не хватает для отвода на подсеточный уровень турбулентных пульсаций. Гибридные схемы более диссипативны. Приведём пример для схемы «*hybrid\_05*» (рис. 1.25).



**Рис. 1.25.** Энергетический спектр «бюргюленции» на последовательности грубых сеток по схеме «*hybrid\_05*»

Для гибридной схемы «*hybrid\_03*» результаты максимально приближены к DNS (рис. 1.26).



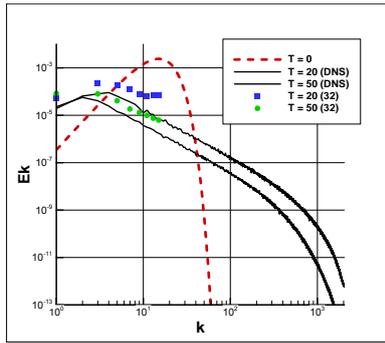


**Рис. 1.26.** Энергетический спектр «бюргюленции» на последовательности грубых сеток по схеме «*hybrid\_03*»

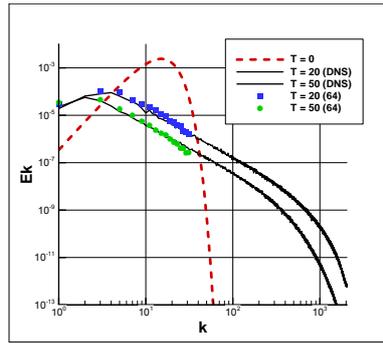
Таким образом, на грубых сетках, диссипация в схеме «КАБАРЕ», основанная на действии принципа максимума, позволяет отводить на подсеточный уровень ровно столько энергии, сколько её приходит с более низких гармоник, как это и должно происходить в инерционном интервале спектра. Как в PLES алгоритме, нет ни накопления энергии на высоких частотах в окрестности частоты Найквиста, ни чрезмерного подавления высоких гармоник.

Схема «КАБАРЕ» и некоторые её гибридные модификации не уникальные в этом плане. Например, если в схеме «WENO» проводить интерполяцию из центров ячеек в узлы не функции потока ( $f = 0.5u^2$ ), а сами скорости ( $u$ ), а потом восстанавливать по скоростям поток, то можно получить спектры, практически такие же, как и по схеме «КАБАРЕ» (рис. 1.27). Назовём эту схему «WENO5-G-RK3», где  $G$  означает, что при решении частичной задачи Римана использовался поток Годунова [45], а не поток Лакса-Фридрихса, как в оригинальных статьях разработчиков схемы «WENO». Т.е. можно утверждать, что множество PLES не пусто.

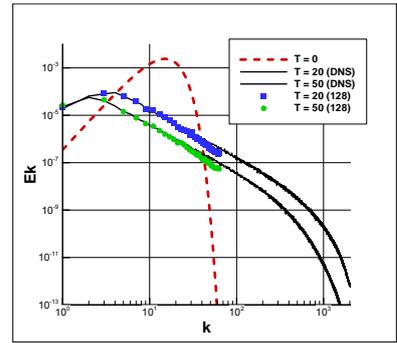
Полученные результаты говорят в пользу дальнейшего построения математической модели свободной турбулентности на базе разностной схемы «КАБАРЕ» в двумерном и трехмерном случаях.



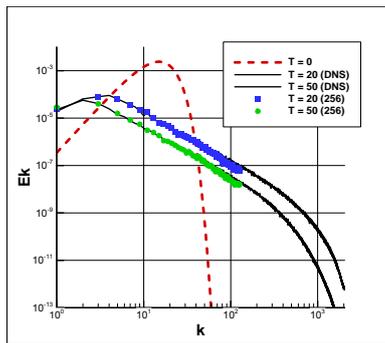
$N=32$



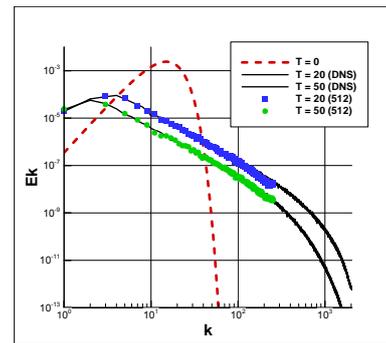
$N=64$



$N=128$



$N=256$



$N=512$

**Рис. 1.30.** Энергетический спектр «бюргюленции» на последовательности грубых сеток по схеме «WENO5-G-RK3»

## Глава 2. Турбулентность (краткий обзор)

### *Модель Навье-Стокса несжимаемой жидкости*

Опыт показывает, что в довольно широком классе течений многих жидкостей даже большие изменения давления не приводит к существенному изменению плотности. Поэтому в таком классе плотность можно считать константой. Давление перестает быть термодинамическим параметром состояния, поскольку перестает участвовать в основном термодинамическом тождестве:  $\rho = const \rightarrow V = 1/\rho = const \rightarrow dV = 0$ , и слагаемое  $pdV$  исчезает. Поэтому, основное термодинамическое тождество принимает вид  $dU = TdS$ , свидетельствующий о том, что приток тепла в среду идет только на увеличение ее внутренней энергии. Следовательно, тепловые потоки в среде не влияют на движение среды и могут быть найдены уже после нахождения  $\vec{u}$  и  $p$ . Это позволяет выделить уравнение притока тепла из модели и решать его независимо. Если в задаче не требуется находить тепловые характеристики, то его можно отбросить. Далее, так как  $\rho = const$ , уравнение неразрывности принимает вид  $div(\vec{u}) = 0$ , поэтому объемная вязкость  $\zeta$  перестает играть какую-либо роль в модели. Таким образом, остается только сдвиговая вязкость  $\nu$ . В общем случае коэффициент кинематической вязкости может довольно сильно зависеть от температуры  $\nu = \nu(T)$  (например, в магматических расплавах вязкость в зависимости от температуры может отличаться на несколько порядков). Однако в простейшей модели, рассматриваемой нами, мы будем считать, что  $\nu = const$ . Такое ограничение оставляет класс описываемых жидкостей достаточно широким.

Уравнение неразрывности и уравнение сохранения импульса составляют *математическую модель вязкой несжимаемой жидкости*:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\vec{u}) = 0 \\ \partial_t u_i + \operatorname{div}(u_i \vec{u}) + \frac{1}{\rho} \nabla_i p = \nu \Delta u_i, \quad i = 1, 3 \end{cases} \quad (2.1)$$

Эта система уравнений называется *системой уравнений Навье–Стокса* и представляет собой систему из четырех скалярных уравнений для четырех скалярных неизвестных  $\vec{u}$  и  $p$ . Модель Навье–Стокса – одна из наиболее широко применяющихся моделей жидкости. Нахождение общего аналитического решения системы уравнений Навье–Стокса осложняется тем, что оно нелинейное и сильно зависит от граничных и начальных данных. В настоящее время решения найдены лишь в некоторых частных случаях с простой геометрией (течение Пуазейля, течение Куэтта, солитоны, звуковые колебания). В остальных случаях используется численное моделирование.

Остановимся теперь на интегралах движения [46], т.е. величинах, сохраняемых уравнениями при невязкой эволюции. Уравнение движения (2.1) перепишем в переменных Лагранжа:

$$d_t \vec{u} = -\rho^{-1} \vec{\nabla} p + \nu \Delta \vec{u} \quad (2.2)$$

Умножим уравнение (2.2) скалярно на  $\vec{u}$  и проинтегрируем по объему.

$$d_t \int_V \frac{|\vec{u}|^2}{2} dV = -\rho^{-1} \int_V (\vec{\nabla} p, \vec{u}) dV + \nu \int_V (\Delta \vec{u}, \vec{u}) dV \quad (2.3)$$

С учетом уравнения неразрывности  $\operatorname{div}(\vec{u}) = 0$ , первый интеграл в правой части равен нулю:

$$\int_V (\vec{\nabla} p, \vec{u}) dV = \int_V [\operatorname{div}(p\vec{u}) - p\operatorname{div}(\vec{u})] dV = \int_V \operatorname{div}(p\vec{u}) dV = 0 \quad (2.4)$$

Второй интеграл преобразуем так:

$$\begin{aligned} \nu \int_V (\vec{u}, \Delta \vec{u}) dV &= -\nu \int_V (\vec{u}, \operatorname{rot} \operatorname{rot}(\vec{u})) dV = -\nu \int_V (\vec{u}, \operatorname{rot}(\vec{\omega})) dV = \\ &= \nu \int_V \operatorname{div}([\vec{u}, \vec{\omega}]) dV - \nu \int_V (\operatorname{rot}(\vec{u}), \vec{\omega}) dV = -\nu \int_V |\vec{\omega}|^2 dV \end{aligned} \quad (2.5)$$

где  $\vec{\omega} = \text{rot}(\vec{u})$  – завихренность. Обозначим за  $E_k = \int_V \frac{|\vec{u}|^2}{2} dV$  суммарную кинетическую энергию движения жидкости, а за  $\Omega = \int_V \frac{|\vec{\omega}|^2}{2} dV$  суммарную энстрофию (интеграл от квадрата завихренности по всему объёму). Тогда закон сохранения кинетической энергии примет вид:

$$d_t E_k = -2\nu\Omega \quad (2.6)$$

Т.о., скорость диссипации кинетической энергии определяется произведением вязкости на энстрофию.

Выпишем теперь уравнение, описывающее эволюцию энстрофии. Если

учесть векторное тождество  $(\vec{u}, \vec{\nabla})\vec{u} = \vec{\nabla} \left( \frac{|\vec{u}|^2}{2} \right) + \vec{\omega} \times \vec{u}$  и подействовать оператором

$\text{rot}$  на уравнение движения, то получим:

$$\partial_t \vec{\omega} + \text{rot}([\vec{\omega} \times \vec{u}]) = \nu \Delta \vec{\omega}. \quad (2.7)$$

Раскрывая двойное векторное произведение по формуле Лагранжа

$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b})$ , приходим к т.н. уравнению Гельмгольца:

$$d_t \vec{\omega} = (\vec{\omega}, \vec{\nabla})\vec{u} + \nu \Delta \vec{\omega} \quad (2.8)$$

При отсутствии вязкости в уравнении (2.8) завихренность как бы *вморожена* в жидкость, перемещаясь и деформируясь вместе с ней. Это следует из аналогии уравнения (2.8) и уравнения описывающее расстояние между двумя соседними бесконечно близкими точками в жидкости  $d_t \delta \vec{l} = (\delta \vec{l}, \vec{\nabla})\vec{u}$ . Можно переписать правую часть (2.8) в виде:

$$\begin{aligned}\omega_i \nabla_i u_j &= \omega_i \cdot \left( \frac{1}{2} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i) + \frac{1}{2} (\nabla_i u_j - \nabla_j u_i) \right) = \omega_i S_{ij} + \omega_i \Omega_{ij} = \\ &= \omega_i S_{ij} + \omega_i \left( -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \omega_k \right) = \omega_i S_{ij} + \frac{1}{2} \varepsilon_{jik} \omega_i \omega_k\end{aligned}\quad (2.9)$$

Или в векторном виде  $(\vec{\omega}, \vec{\nabla})\vec{u} = \mathbf{S}\vec{\omega} + \frac{1}{2}[\vec{\omega} \times \vec{\omega}] = \mathbf{S}\vec{\omega}$ . Здесь  $S_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i)$  – симметричный тензор скоростей деформации, а  $\Omega_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i u_j - \nabla_j u_i)$  – антисимметричный тензор вращения. Подставляя полученное выражение в (2.8):

$$d_t \vec{\omega} = \mathbf{S}\vec{\omega} + \nu \Delta \vec{\omega}. \quad (2.10)$$

Умножим уравнение (2.10) на завихренность  $\vec{\omega}$  и проинтегрируем по объёму:

$$d_t \Omega = \int_V (\vec{\omega}, \mathbf{S}\vec{\omega}) dV - 2\nu \Pi, \quad (2.11)$$

где величина  $\Pi = \int_V \frac{|\text{rot}(\vec{\omega})|^2}{2} dV$  называется палинстрофией. Как видно из уравнения (2.11), энстрофия не является сохраняющейся величиной. Более того, она не является убывающей функцией времени. Она может значительно возрасти, что приводит к увеличению скорости диссипации кинетической энергии. В случае плоскопараллельного движения жидкости первое слагаемое, очевидно, исчезает. Следовательно, в двумерном течении энстрофия является вторым инвариантом движения.

В трехмерных уравнениях Навье-Стокса имеется еще один инвариант – *спиральность*, введенный Моффатом в 1969 году [47]:

$$H = \int_V (\vec{u}, \vec{\omega}) dV \quad (2.12)$$

Спиральность характеризует степень связности вихревых линий в потоке [48]. Данная величина является псевдоскаляром, т.е. меняет знак при отражении одной из координатных осей, и отлична от нуля в случае, если в течении существуют

спиральные вихри и количество спиралей с правой закруткой больше, чем с левой (или наоборот). Эта величина становится существенной только в некоторых специальных течениях, как правило, анизотропных. К таким течениям относятся многие гео- и астрофизические течения. Особо важную роль спиральность играет в задачах возбуждения магнитных полей в течениях проводящей жидкости. Умножая (2.8) на скорость  $\vec{u}$ , не трудно получить уравнение баланса для спиральности:

$$d_t H = -\nu \int_V (\vec{\omega}, \text{rot}(\vec{\omega})) dV \quad (2.13)$$

### *Каскад энергии*

Для описания баланса энергии в одном отдельно взятом масштабе, нужно записать уравнение Навье-Стокса в пространстве Фурье. Пусть течение занимает ограниченное пространство, затухая на бесконечности, и все входящие в уравнение Навье-Стокса величины допускают представление в виде интеграла Фурье [46]:

$$f(\vec{r}, t) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\vec{k}, t) e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k} \quad (2.14)$$

где

$$f(\vec{k}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{r}, t) e^{-i\vec{k}\vec{r}} d\vec{r} \quad (2.15)$$

Выразим величины в уравнении (2.1) через Фурье образы:

$$\begin{aligned} & \partial_t \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}_i(\vec{k}', t) e^{i\vec{k}'\vec{r}} d\vec{k}' + \frac{i}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{u}(\vec{k}'', t), \vec{k}''') \cdot \hat{u}_i(\vec{k}''', t) e^{i(\vec{k}'\vec{r} + \vec{k}'''\vec{r})} d\vec{k}'' d\vec{k}''' = \\ & = -\frac{i}{\rho} \int_{-\infty}^{\infty} k'_i \hat{p}(\vec{k}', t) e^{i\vec{k}'\vec{r}} d\vec{k}' - \nu \int_{-\infty}^{\infty} k'^2 \hat{u}_i(\vec{k}', t) e^{i\vec{k}'\vec{r}} d\vec{k}' + \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_i(\vec{k}', t) e^{i\vec{k}'\vec{r}} d\vec{k}' \end{aligned} \quad (2.16)$$

Уравнение (2.16) умножается на  $e^{-i\vec{k}\vec{r}}$  и интегрируется по  $d\vec{r}$ . Учитывая, что  $2\pi \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\vec{k}'-\vec{k})\vec{r}} d\vec{r} = \delta(\vec{k}'-\vec{k})$ , и обозначая  $\vec{k}'' = \vec{q}$ , получим

$$\partial_i \hat{u}_i(\vec{k}) + \frac{i}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{u}(\vec{q}), \vec{k} - \vec{q}) \cdot \hat{u}_i(\vec{k} - \vec{q}) d\vec{q} = -i\rho^{-1} \vec{k} \hat{p}(\vec{k}) - \nu k^2 \hat{u}_i(\vec{k}) + \hat{f}(\vec{k}). \quad (2.17)$$

Уравнение неразрывности в пространстве Фурье имеет простой вид

$$(\vec{k}, \hat{u}(\vec{k})) = 0 \quad (2.18)$$

и может быть использовано для исключения из уравнения (2.17) члена с давлением. После простых преобразований приходим к уравнению

$$\partial_i \hat{u}_i(\vec{k}) + \frac{i}{8\pi^3} \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{u}(\vec{q}), \vec{k} - \vec{q}) \cdot \hat{u}_j(\vec{k} - \vec{q}) d\vec{q} = -\nu k^2 \hat{u}_i(\vec{k}) + \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \hat{f}_j(\vec{k}) \quad (2.19)$$

Далее, умножим уравнение (2.19) на  $\hat{u}(\vec{k})$ :

$$\frac{1}{2} \partial_i \left| \hat{u}(\vec{k}) \right|^2 + \int_{-\infty}^{\infty} T(\vec{k}, \vec{k} - \vec{q}, \vec{q}) d\vec{q} = -\nu k^2 \left| \hat{u}(\vec{k}) \right|^2 + F(\vec{k}), \quad (2.20)$$

где  $T(\vec{k}, \vec{k} - \vec{q}, \vec{q}) = \frac{i}{8\pi^3} \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) k_k \hat{u}_i(\vec{k}) \hat{u}_j(\vec{k} - \vec{q}) \hat{u}_k(\vec{q})$  – нелинейный член, описывающий взаимодействие трех волн, волновые векторы которых образуют треугольник.

Т.к. целью проводимых преобразований является уравнение для энергии, заключенной в данных масштабах, которая получается путем интегрирования квадрата модуля Фурье-компонент поля скорости по всем волновым векторам с заданным значением модуля  $|\vec{k}| = k$ :

$$E(k) = \frac{1}{2} \int_{|\vec{k}=k} |\hat{u}(\vec{k})|^2 d\vec{k}, \quad (2.21)$$

то проинтегрировав уравнение (2.20) по поверхности сферы, радиуса  $k$ , получим следующую структуру, описывающую баланс энергии в системе:

$$\partial_t E(k) = T(k) - D(k) + F(k) \quad (2.22)$$

Здесь член  $T(k)$  получается из нелинейного слагаемого в уравнении (2.20) и описывает перенос энергии в заданный масштаб  $k$  в результате тройных взаимодействий пульсаций скорости,  $D(k) = 2\nu k^2 E(k)$  описывает диссипацию за счет действия молекулярной вязкости, и  $F(k)$  – форсинг, характеризует приток энергии за счет сил, поддерживающих турбулентное движение (работа внешних сил).

Рассмотрим стационарный турбулентный поток. Стационарность означает, что вся энергия, вводимая в поток за единицу времени, в точности равна энергии, превращающейся в тепло за счет действия вязкости. В этом случае

$$T(k) - D(k) + F(k) = 0 \quad (2.23)$$

Если учесть, что приток энергии происходит вблизи волнового числа  $k_L$ , соответствующего макромасштабу турбулентности  $L$ , а диссипация становится эффективной только на микромасштабах  $\lambda$  (масштаб Колмогорова), то приток и диссипация энергии оказываются сильно разнесенными друг от друга по масштабам. В развитой турбулентности существует интервал масштабов  $k_L \ll k \ll k_\lambda$  (инерционный интервал), в которых  $D(k) = F(k) = 0$ , а следовательно, и  $T(k) = 0$ . Поскольку энергия вносится на одном краю инерционного интервала, а выносится на другом, то она очевидным образом должна быть перенесена вдоль всего инерционного интервала. Условие  $T(k) = 0$  означает, что приток в данный масштаб из больших масштабов в точности равен оттоку энергии из данного масштаба в меньшие.

Рассмотрим величину  $E(k) = \int_0^k E(k') dk'$ , равную энергии, заключенной во всех масштабах, больших данного. Соответствующее уравнение получается путем интегрирования уравнения (2.22) от 0 до  $k$ :

$$\partial_t E(k) = \Pi(k) - \int_0^k D(k') dk + \int_0^k F(k') dk \quad (2.24)$$

Если рассмотреть масштаб, принадлежащий инерционному интервалу, и считать течение стационарным, то

$$\Pi(k) = \Phi = const. \quad (2.25)$$

$\Pi(k)$  – скорость спектрального переноса, по сути, есть поток энергии  $\Phi$  через текущий масштаб  $k$ . Этот поток равен суммарной энергии вносимой в течение за единицу времени, а также он равен суммарной скорости диссипации энергии, т.е. энергии передающейся в тепло за единицу времени.

Т.о., процессы возбуждения турбулентного течения, нелинейных взаимодействий вихрей и диссипации, сосуществующие вместе в физическом пространстве, строго разнесены по масштабам в Фурье пространстве. Первый шаг в понимании проблемы сделал Ричардсон, который выдвинул в 1922 году идею каскада энергии, т.е. процесса передачи энергии по цепочке от больших вихрей – меньшим. Строгую формулировку проблемы, давшую количественные результаты, предложил А.Н. Колмогоров в серии работ 1941 года. Он сформулировал две гипотезы, касающиеся статистических свойств однородной изотропной турбулентности при больших числах Рейнольдса.

*1-я гипотеза* состоит в том, что статистические свойства в инерционном и диссипативном интервале не зависят от способа возбуждения турбулентности и универсальным образом определяются тремя параметрами: скоростью диссипации энергии  $\varepsilon$ , кинематической вязкостью  $\nu$  и самим масштабом  $k$ .

2-я гипотеза состоит в том, что статистические свойства турбулентности в инерционном интервале универсальны и зависят только от скорости диссипации энергии  $\varepsilon$  и масштаба  $k$ .

Далее делается самое сильное предположение, являющееся, по сути, главной гипотезой теории K41. Оно заключается в том, что скорость диссипации энергии является универсальной константой для заданного однородного и изотропного турбулентного течения, т.е. в любой момент времени и в любой точке пространства диссипация энергии в единицу времени равна  $\varepsilon$ .

Соображения размерности позволяют получить форму спектра пульсаций скорости. Если спектр энергии может зависеть только от  $\varepsilon$  и  $k$ , то единственно возможная комбинация есть

$$E(k) = C\varepsilon^{2/3}k^{-5/3} \quad (2.26)$$

Формулу (2.26) называют законом Колмогорова, а входящую в него безразмерную константу  $C$  – константой Колмогорова.

Очевидно, закон подобия  $k^{-5/3}$  обеспечивает постоянство потока энергии в инерционном интервале  $\Pi(k) = \varepsilon = const$  (действительно: если  $\Pi(k) = const$  и из соображений размерности  $\Pi \sim E^{3/2}k^{5/2}$ , то  $E \sim k^{-5/3}$ ).

### ***Теория KLB (Kraichnan-Leith-Batchelor) двумерной турбулентности***

Турбулентность – это явление существенно трехмерное, и переход к плоской геометрии приводит к качественным изменениям свойств течений [46]. Факт, что двумерная турбулентность не является упрощенной моделью трехмерной, был установлен независимо Крейчнаном и Бэтчелором в середине 60-х годов. Практически сразу стало ясно и то, что шансов на реализацию чисто двумерной турбулентности в природных и даже лабораторных условиях нет. Несмотря на это, двумерная турбулентность привлекла к себе внимание значительного числа исследователей, которое не ослабевает и по сегодняшний день. Объясняется это несколькими причинами. Во-первых, качественное

своеобразие двумерной турбулентности дает прекрасные возможности для опробования различных моделей турбулентности (модель, претендующая на адекватное описание турбулентности должна быть чувствительной к изменению размерности пространства и правильно отражать её свойства в случае трех и двух измерений). Во-вторых, двумерная турбулентность стала доступной для прямых численных экспериментов уже в 70-х годах (в 80-х с появлением ЭВМ типа «Cray» удалось выйти на сетки  $1024 \times 1024$ , достаточные для приличного воспроизведения инерционных интервалов), а такое разрешение для трехмерных потоков стало возможным только в последние годы. Третья причина состоит в том, что, хотя строго двумерных турбулентных течений в природе не существует, многие черты двумерной турбулентности проявляют крупномасштабные геофизические и астрофизические течения.

Крэйчнан [49], Лейтс [50] и Бэтчелор [51] были пионерами в создании теории двумерной турбулентности. Теория KLB двумерной турбулентности, ставшая классической, основана на статистическом подходе, развитым Колмогоровым при изучении свойств мелкомасштабной трехмерной турбулентности.

Главное отличие в свободной эволюции двумерной турбулентности от эволюции трехмерной турбулентности следует из анализа уравнения (2.8). В двумерном случае механизм растяжения вихрей, который обеспечивал прямой энергетический каскад и рост энтропии в трехмерном течении, блокирован. Энтропия в невязком случае является вторым инвариантом движения:

$$d_t \Omega = -2\Pi \quad (2.27)$$

Это приводит к тому, что, если в трехмерном случае уменьшение вязкости, при сохранении условий генерации турбулентности, сопровождается ростом среднеквадратичной завихренности, то в двумерном случае этого не происходит, т.к.  $d_t \Omega \leq 0$ . Т.о., при больших числах Рейнольдса кинетическая энергия в двумерном турбулентном течении остается практически постоянной. Каскадный

процесс передачи энергии к высоким гармоникам, который затрагивает значительную долю от общей кинетической энергии потока, в двумерном случае исключен. С другой стороны, каскадный процесс переноса завихренности к большим волновым числам возможен. Чтобы показать это запишем уравнение относительно величины  $\vec{B} = \text{rot}(\vec{\omega})$ :

$$d_t \vec{B} = (\vec{B}, \vec{\nabla}) \vec{u} + \nu \Delta \vec{B}. \quad (2.28)$$

Уравнение (2.28) фактически совпадает с трехмерным уравнением Гельмгольца (2.8). Если умножить (2.28) скалярно на  $\vec{B}$  и проинтегрировать по объёму, то мы получим уравнение описывающее эволюцию палинстрофии:

$$\begin{aligned} d_t \Pi \equiv \frac{1}{2} d_t \int_V |\vec{B}|^2 dV &= \int_V (\vec{B}, \mathbf{S}\vec{B}) dV + \frac{1}{2} \int_V (\vec{B}, \vec{\omega}, \vec{B}) dV + \nu \int_V \text{div} [\vec{B}, \text{rot}(\vec{B})] dV - \\ &- \nu \int_V |\text{rot}(\vec{B})|^2 dV = \int_V (\vec{B}, \mathbf{S}\vec{B}) dV - \nu \int_V |\text{rot}(\vec{B})|^2 dV \end{aligned} \quad (2.29)$$

Первый член в правой части уравнения (2.29) описывает скорость изменения градиентов завихренности в процессе растяжения линий дивихренности. Увеличение или уменьшение градиентов завихренности зависит от знака среднего значения квадратичной формы  $\overline{(\vec{B}, \mathbf{S}\vec{B})}$ . По структуре уравнение (2.29), описывающее эволюцию палинстрофии в двумерном случае, ни чем не отличается от уравнения (2.11), описывающее эволюцию энстрофии в трехмерном случае. Следовательно и процессы растяжения вихрей в трехмерном случае и линий дивихренности в двумерном случае имеют одну и ту же природу. Именно поэтому можно считать, что двумерная турбулентность имеет право на существование.

В теории KLB вводится понятия скорости диссипации среднеквадратичной завихренности  $\chi \equiv \nu \cdot \overline{|\vec{B}|^2}$ . Используя предположение, что  $\chi = \text{const}$  можно применить подход Колмогорова к изучению двумерной турбулентности. Из размерностных соображений будем иметь:

$$\Omega(k) = \nu^{1/2} \chi^{1/2} f(k\nu^{1/2} / \chi^{1/6}), \quad k \gg L^{-1} \quad (2.30)$$

где  $\Omega(k)\delta k$  – это вклад в среднеквадратичную завихренность  $\frac{1}{2}\overline{\omega^2}$  от Фурье-компонент с волновыми числами, лежащими между  $k$  и  $k + \delta k$ ,  $f$  – это некая безразмерная функция универсального вида,  $L$  – характерный размер, соответствующий начальному полю завихренности. Инерционные и вязкие силы, очевидно, имеют сравнимое влияние на спектр завихренности на волновых числах порядка  $k_\lambda = \chi^{1/6} / \nu^{1/2}$ . Следовательно, положив число Рейнольдса достаточно большим, возникает диапазон волновых чисел

$$k_L \ll k \ll k_\lambda, \quad (2.31)$$

на которых можно считать, что вязкость не оказывает существенного влияния на спектр завихренности, тогда:

$$\Omega(k) = C\chi^{2/3}k^{-1}, \quad E(k) = C\chi^{2/3}k^{-3}, \quad (2.32)$$

где  $C$  – универсальная константа.

Т.к. в двумерной турбулентности поток энергии в среднем направлен в сторону больших масштабов, а поток энтропии в сторону малых масштабов, то и процессы переноса будут определяться двумя величинами  $\varepsilon$  – скоростью диссипации энергии и  $\chi$  – скоростью диссипации энтропии. Следовательно, если энергия и энтропия вносятся в поток на некотором промежуточном масштабе  $k_L \ll k_I \ll k_\lambda$ , то в двумерной турбулентности следует ожидать появления двух инерционных интервалов. В области  $k_I \ll k \ll k_\lambda$  формируется прямой энтропийный каскад с законом подобия  $E(k) = C_\chi \chi^{2/3} k^{-3}$ , а в области  $k_L \ll k \ll k_I$  формируется обратный энергетический каскад, который, в соответствии с теорией Колмогорова, должен обладать законом подобия  $E(k) = C_\varepsilon \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$ .

Заметим, что закон подобия (2.32) содержит в себе парадокс.

Действительно, энстрофия  $\int_{k_0}^{k_{\max}} \Omega(k) dk$  логарифмически расходится и при  $k_0 \rightarrow 0$ ,

и при  $k_{\max} \rightarrow \infty$ , тогда как закон сохранения (2.27) запрещает её рост. Чтобы избежать этой расходимости, к спектрам (2.32) надо ввести логарифмические поправки. Для этого положим [49]

$$\begin{cases} \Pi(k) \sim kE(k)\tau^{-1}(k) \\ \Lambda(k) \sim k^3 E(k)\tau^{-1}(k) \end{cases} \quad (2.33)$$

где  $\tau(k) \sim \left[ \int_{k_0}^k \Omega(k') dk' \right]^{-1/2}$  – временной масштаб пульсаций. Отсюда видно, что

условие  $\Pi(k) = \text{const}$  может обеспечить только «закон пяти третей», и при этом основной вклад в интеграл будут вносить волновые числа  $k' \sim k$ , что демонстрирует локальность спектрального переноса энергии. Для обеспечения условия  $\Lambda(k) = \text{const}$  необходимо положить

$$E(k) = C \chi^{2/3} k^{-3} \ln^{-1/3} \left( \frac{k}{k_0} \right) \quad (2.34)$$

При этом основной вклад в (2.34) будут вносить волновые числа  $k'$  из интервала  $k \gg k' \gg k_0$ , так что спектральный перенос энстрофии оказывается нелокальным процессом.

### **Обзор результатов моделирования двумерной турбулентности**

Фрик [46] отмечает, что одним из наиболее удачных экспериментов по наблюдению двумерной турбулентности можно считать работу Соммерия 1986 года [52]. В этой работе исследовался обратный каскад энергии в плоском течении в тонком слое ртути, возбуждаемом электромагнитными силами на малых масштабах. Эксперимент проводился в вертикальном магнитном поле, достигавшем 1Тл. Такое сильное магнитное поле практически подавляет

вертикальные движения и приводит к горизонтальному течению, с вертикальным профилем, описываемым известным профилем Гартмана  $f(z)$ . Полагая, что поле скорости  $\vec{u} = (u, v, 0)$  можно представить в виде  $\vec{u}(x, y, z) = \vec{u}(x, y) f(z)$ , и проинтегрировав уравнение Навье-Стокса по  $z$ , получим:

$$\partial_t \vec{u} + \alpha (\vec{u}, \nabla) \vec{u} = -\rho^{-1} \nabla p + \nu \Delta \vec{u} - \mu \vec{u} \quad (2.35)$$

где коэффициенты  $\alpha$  и  $\mu$  зависят от конкретного профиля течения в слое. Уравнение (2.35) часто называют уравнением с линейным трением. Линейное трение, в отличие от обычной вязкости, одинаково эффективно на всех масштабах и осуществляет отвод энергии на энергосодержащих масштабах.

В дно кюветы с ртутью были встроены 36 электродов, к которым подводилось постоянное напряжение (полярность чередовалась в шахматном порядке). Растекающиеся в слое электрические токи взаимодействовали с магнитным полем и приводили к возникновению 36 вихрей, закрученных также в шахматном порядке. Варьируя величину приложенного магнитного поля и силы тока, можно было менять интенсивность движения и величину линейного трения. В эксперименте удалось получить турбулентные режимы, в которых наблюдалось формирование обратного каскада энергии со спектром «-5/3».

На рисунке 2.1 показан экспериментальный спектр пульсаций скорости. Хотя диапазон масштабов, в которых можно наблюдать формирование инерционного интервала, мал, и результат имеет скорее качественный характер, все же именно эта работа убедительно доказала существование обратного энергетического каскада в квазидвумерных турбулентных потоках.

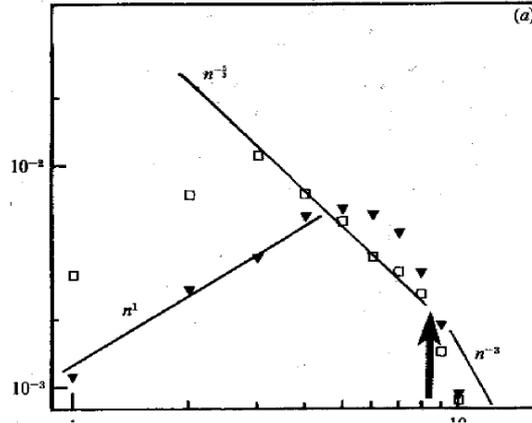


Рис. 2.1. Энергитический спектр в двумерной турбулентности. Эксперимент Соммериа 1986 г.

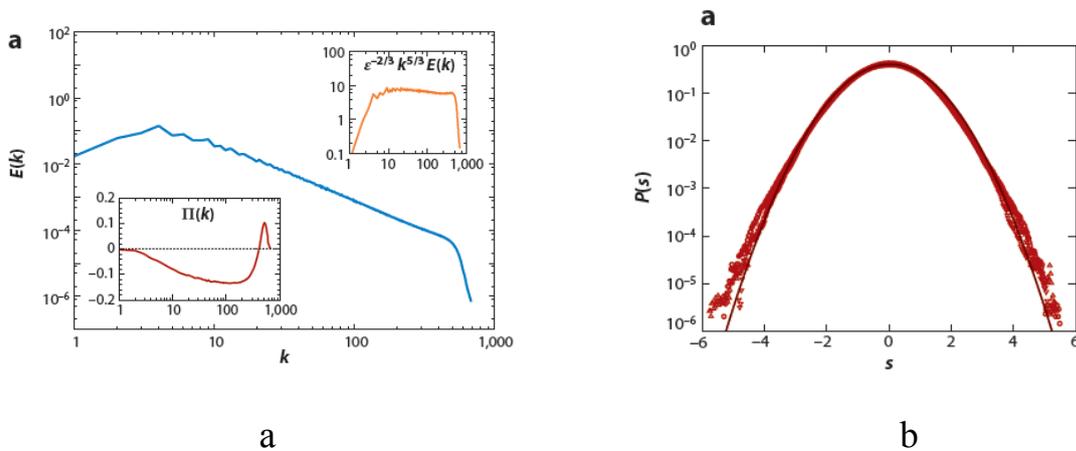
Все численные эксперименты можно разделить на две группы. Первая группа – это эксперименты по свободному вырождению турбулентности, вторая – по стационарно возбуждаемой турбулентности. Свободное вырождение подразумевает отсутствие внешних сил. В этом случае решение зависит только от начальных условий. С точки зрения динамики инерционных интервалов более интересны эксперименты по моделированию стационарной турбулентности. Для обеспечения стационарности необходимо обеспечить подвод энергии. В двумерной турбулентности интересны динамические процессы по обе стороны от масштабов возбуждения, поэтому сила  $f$  записывается в пространстве Фурье таким образом, что она поддерживает на заданном уровне энергию гармоник с заданным модулем волнового числа  $|\vec{k}| = k_I$ .

Что касается диссипативного слагаемого, то, во-первых, диссипация должна обеспечить отвод энергии на больших масштабах. Во-вторых, для получения более выраженного инерционного интервала переноса энтропии часто модифицируют и характер трения и на малых масштабах. При написании обычного диссипативного слагаемого в Фурье-представлении получаем член вида  $D(k) \sim \nu k^2$ . В численных экспериментах искусственным образом повышают степень волнового числа и записывают диссипацию в виде

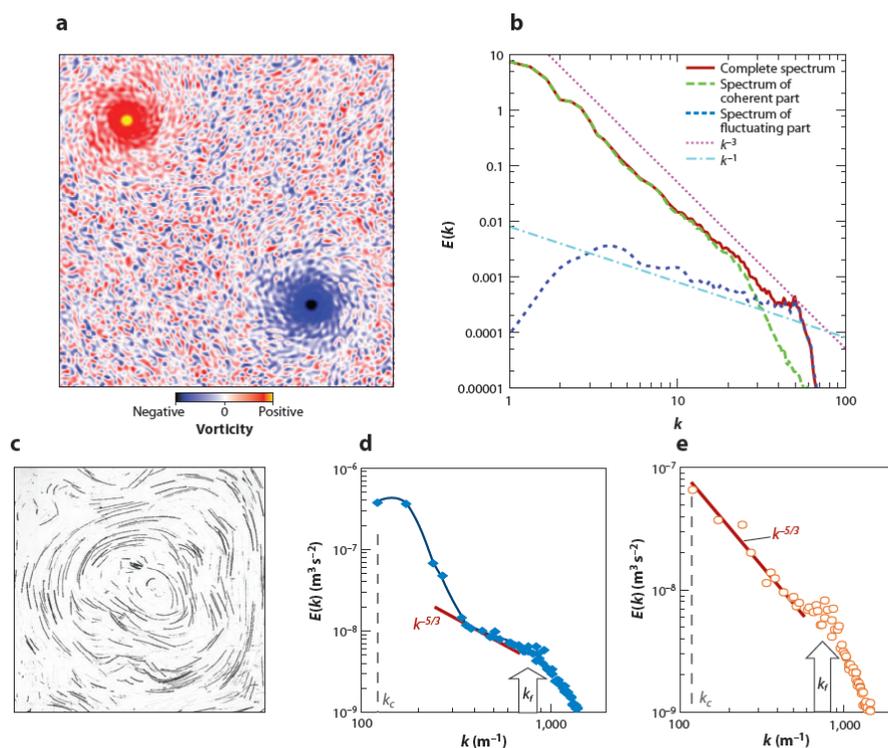
$$D(k) = -\mu k^n - \nu k^{-m} \quad (2.36)$$

с типичным значением показателем степени  $n = m = 8$ . Диссипативный член вида (2.36) приводит к тому, что действие диссипации концентрируется в узких интервалах вблизи граничных условий.

В своем обзоре Боффета (2011) [53] отмечает, что первые численные расчеты обратного энергетического каскада были получены при DNS-моделировании Лилли (1969) [54], затем Фришем и Сулемом (1984) [55], Херингом и Мак Вильямсом (1985) [56]. Точность численных расчетов увеличивалась с ростом вычислительной мощности, подтверждая закон «-5/3» и уточняя значение безразмерной константы. Используя разрешение  $2048^2$ , Смит и Яхот (1993) [57] получили значение  $C \approx 7$  и показали, что функция распределения флуктуаций скорости  $\delta u(r)$  близка к распределению Гаусса, что говорит об отсутствии влияния перемежаемости на обратный каскад.



**Рис. 2.2.** а) Спектр энергии  $E(k)$  при DNS-моделировании обратного энергетического каскада с разрешением  $2048^2$ . Форсинг действует на гармонике  $k = 600$ , линейное трение демпфирует энергию около  $k = 6$ . б) Функция распределения вероятности (PDF) пульсаций продольной компоненты скорости  $s = \delta u / (\delta u^2)^{1/2}$ .

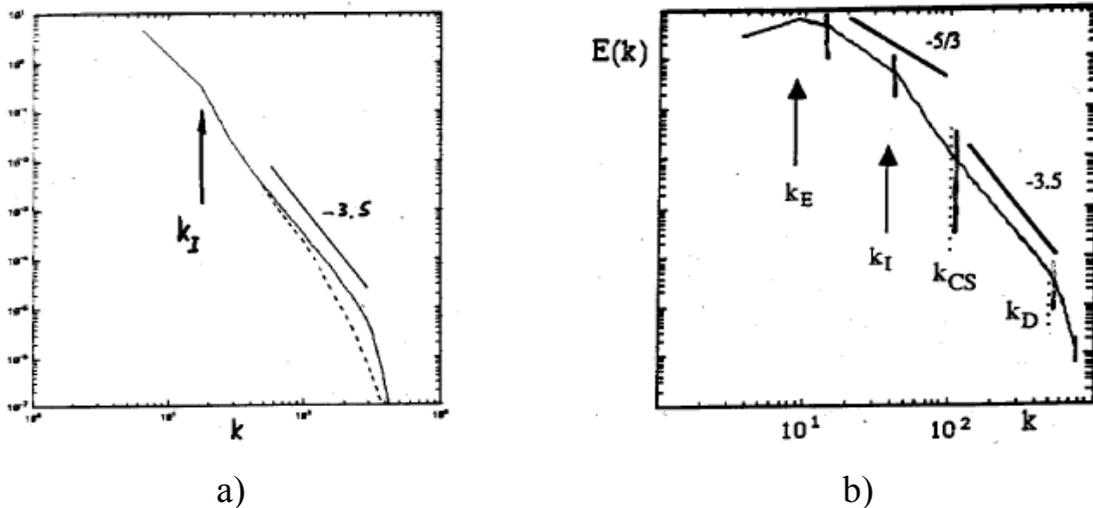


**Рис. 2.3.** *a) Поле завихренности после образования конденсата в численном эксперименте, b) эволюция энергетического спектра при отсутствии вязкости на больших масштабах, c) траектории маркеров в эксперименте (EML) d), e) энергетические спектры в EML эксперименте после образования конденсата*

Численные результаты были подтверждены экспериментально в серии лабораторных экспериментов. При генерации турбулентности в электромагнитном слое (EML) Парет и Табелинг (1997) [58] получили зависимость энергетического спектра  $k^{-5/3}$  и нашли константу  $C = 6.5 \pm 1.0$ . В 1998 году [59] эти же авторы провели эксперимент (EML) по изучению аналога «бозе-эйнштейновской конденсации» в двумерной турбулентности, т.е. эффекта, связанного с накоплением энергии на самой низкой моде в ограниченной области за счет действия обратного энергетического каскада при отсутствии диссипации энергии на больших масштабах.

Таким образом, обратный каскад энергии был подтвержден как в экспериментах, так и в многочисленных численных расчетах. Что же касается прямого энстрофийного каскада, то здесь первые попытки промоделировать его при больших числах Рейнольдса принесли много неожиданных результатов. Большой неожиданностью стал очень крутой спектр в инерционном интервале

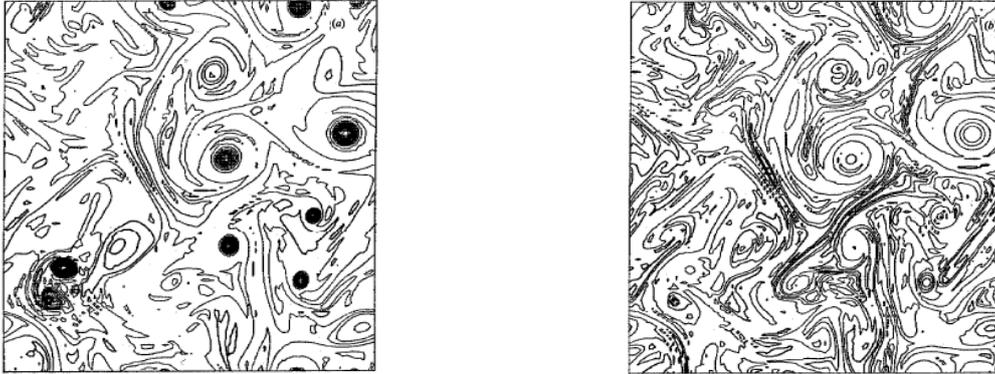
переноса энтропии. Вместо закона «-3» численные эксперименты давали результаты от «-3.5» до «-5» и для свободно затухающей турбулентности (Herring 1974 [60], McWilliams 1984 [61]), и при наличии форсинга (Basdevant 1981 [62] и Legras 1988 [63]). Напомним, что в трехмерной турбулентности перемежаемость дает поправки к закону «-5/3» порядка нескольких сотых, а в двумерном случае расхождение составило единицы. В качестве примера рассмотрим результаты численных расчетов, взятых из работы Vabiano 1995 [64] (рис. 2.4). На левом рисунке моделируется прямой энтрофийный каскад. Используется сетка  $1024^2$ , случайная сила действует на волновое число  $k_I = 10$ , диссипативный член используется в форме (2.36). На правом рисунке делается попытка одновременно получить оба инерционных интервала. Используется сетка  $1728^2$ , случайная сила действует на волновое число  $k_I = 40$ . Наклоны спектров в обоих случаях примерно равны «-3.5».



**Рис. 2.4.** Результаты численного эксперимента Vabiano. а)  $k_I = 10$ , сетка  $1024^2$  б)  $k_I = 40$ , сетка  $1728^2$

Расхождение результатов связано с существованием в турбулентном потоке долгоживущих когерентных структур – изолированных интенсивных вихрей, слабо взаимодействующих с окружающим их турбулентным потоком (рис. 2.4). В работе Vabiano 1987 [65] был проведен интересный эксперимент. Изолируемые вихри разрушались искусственно таким образом, что при этом не изменялось распределение энергии по спектру (это делалось путем введения случайных фаз в

Фурье-компоненты). В результате спектральное распределение возвращалось к виду (2.32).



**Рис. 2.5.** Когерентные структуры в двумерном турбулентном потоке. (слева) Поле концентрации пассивной примеси. (справа) Babiano 1987.

Уравнение переноса завихренности  $\partial_t \omega + (\vec{u} \vec{\nabla}) \omega = \nu \Delta \omega$  по форме совпадает с уравнением переноса пассивной примеси (в качестве примеси может выступать, например, температура)

$$\partial_t T + (\vec{u} \vec{\nabla}) T = \chi \Delta T \quad (2.37)$$

Однако аналогия между этими уравнениями не работает. На рисунке 2.5 показано поле концентрации пассивной примеси, полученное в том же эксперименте, что и поле завихренности на предыдущем рисунке. Существенное отличие заключается в том, что в поле пассивной примеси нет столь выраженных изолированных структур. След от каждого вихря можно ясно увидеть и в поле пассивной примеси, и это кажется естественным, но при этом не наблюдается интенсивный рост концентрации к центру вихря, как это имеет место в поле завихренности. На рисунке 2.6 приведены спектры пульсаций завихренности и пассивной примеси. Видно, что спектр пассивной примеси соответствует закону  $k^{-1}$ , в то время как спектр завихренности (энстрофии) после сравнительно короткого участка с наклоном «-1», дает крутой спад с законом близким к «-3» («-5» для энергетического спектра). Различие в результатах обусловлено тем, что

если температура (пассивная примесь) действительно не зависит от скорости, то завихренность жестко связана со скоростью соотношением  $\vec{\omega} = \text{rot}(\vec{u})$ .

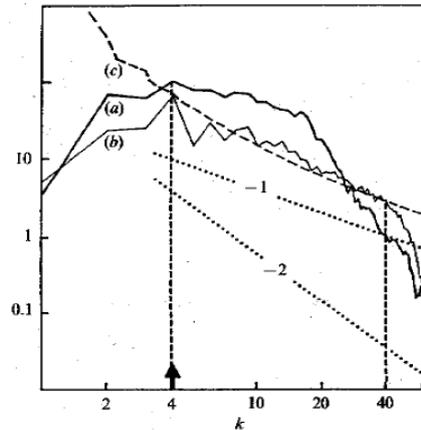


Рис. 2.6. Спектры пульсаций завихренности и концентрации пассивной примеси. Babiano 1987.

Довольно интересна работа Ohkitani 1991 [66]. Он использовал т.н. декомпозицию Вейса 1981 [67] для выделения гиперболических областей (h), в которых доминирующую роль играет тензор деформаций, и эллиптических областей (e), в которых главную роль имеет тензор вращений. Эллиптические области будут соответствовать когерентным структурам, а гиперболические промежуточной турбулентной пелене. Соответственно поле завихренности можно представить в виде

$$\omega(\vec{x}) = \omega^h(\vec{x}) + \omega^e(\vec{x}) \quad (2.38)$$

где  $\omega^h(\vec{x}) = \begin{cases} \omega(\vec{x}), & \text{в h-области} \\ 0, & \text{в e-области} \end{cases}$  и  $\omega^e(\vec{x}) = \begin{cases} \omega(\vec{x}), & \text{в e-области} \\ 0, & \text{в h-области} \end{cases}$ , и построить

спектры от гиперболической и эллиптической частей по отдельности, отфильтровывая вклад когерентных структур.

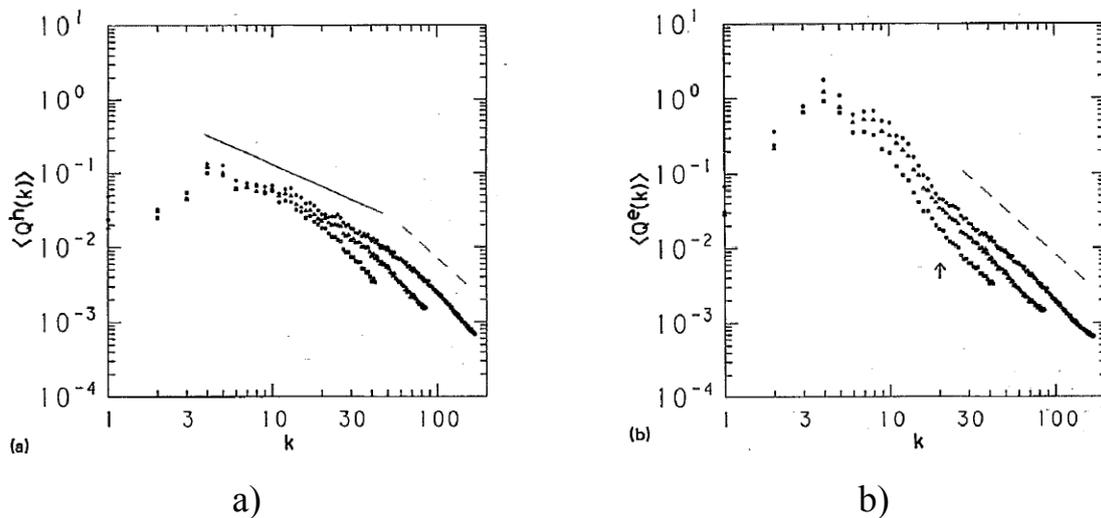
Чтобы разделить эллиптические и гиперболические области, рассматривается уравнение (2.28). В правой части стоит тензор  $\nabla \mathbf{u}$ , который можно представить в виде

$$\nabla \mathbf{u} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} + \omega \\ S_{12} - \omega & -S_{11} \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

где  $S_{11} = 2\partial_x u = -2\partial_y v$ ,  $S_{12} = \partial_x v + \partial_y u$ ,  $\omega = \partial_x v - \partial_y u$ . Собственные значения тензора  $\nabla \mathbf{u}$  равны

$$\lambda_{\pm} = \pm \left[ -\det(\nabla \mathbf{u}) \right]^{1/2} = \pm \left[ S_{11}^2 + S_{12}^2 - \omega^2 \right]^{1/2} \quad (2.40)$$

В областях, где собственные значения  $\lambda_{\pm}$  вещественные, будут доминировать процессы растяжения градиентов вихрей, обеспечивающих прямой энстрофийный каскад. В этом случае движение называется гиперболическим. В областях, где собственные значения комплексные, вихри будут стабильными, а движение эллиптическим. На рисунке 2.7 приведены спектры от гиперболических и эллиптических областей.



**Рис. 2.7.** а) Спектры пульсаций завихренности от гиперболических областей. Сетки 128, 256, 512. Сплошная линия – наклон «-1», пунктирная – «-2» («-3» и «-4» соответственно для энергетического спектра); б) спектры от эллиптических областей, пунктирная – «-2», Ohkitani 1991

В спектре от гиперболических областей есть область с наклоном «-1», что соответствует классическому спектру энергии KLB «-3». Эллиптическая же часть приводит к укрупнению спектра (наклон «-2»).

Таким образом, работа Ohkitani убедительно продемонстрировала важность учета влияния когерентных структур на прямой энстрофийный каскад. МакВильямс также отмечал, что затухающая турбулентность демонстрирует длительную память начальных условий (неуниверсальность), и связывал это именно с влиянием когерентных структур.

В работе Мальтруда и Воллиса 1991 [68] численно было продемонстрировано, что при разрушении всех когерентных вихрей с помощью сильной инфракрасной диссипации устанавливается спектр  $k^{-3}$ . В более поздних работах [69], [70], [71] также были получены спектры типа KLB, и даже с учетом логарифмической поправки из-за нелокальности взаимодействия в Фурье-пространстве. Достигалось это путем использования особого вида диссипации, уменьшающей влияние когерентных структур на спектры турбулентности. К примеру, в работе Ishihara и Kaneda 2001 [69] использовалась диссипация вида:

$$D(\vec{k}) = -\alpha\omega(\vec{k}) - \gamma\omega_{rms} \left( \frac{k}{K_{\max}} \right)^{2n-2} \cdot \omega(\vec{k}) \quad (2.41)$$

где  $\omega(\vec{k})$  – завихренность (в фурье-пространстве),  $\alpha = \text{const} \neq 0$  при  $k \leq K_{\alpha}$ , и  $\alpha = 0$  при  $k > K_{\alpha}$ ,  $\omega_{rms}$  – rms завихренности, вычисляется на каждом шаге по времени,  $\gamma$  – настроечный параметр,  $K_{\max}$  зависит от мелкости сетки,  $n$  обычно равен 4. Форсинг организуется с помощью марковского процесса:

$$F_n(\vec{k}) = A(1 - R^2)^{1/2} e^{i\theta} + RF_{n-1}(\vec{k}) \quad (2.42)$$

где  $A$  – параметр, отличный от нуля в интервале частот  $k \in (K_{f \min}, K_{f \max})$ ,  $\theta$  – случайная фаза,  $R$  – функция от шага  $\Delta t$  и корреляционного времени форсинга.

На рисунке 2.8 приведены результаты расчетов энергетического спектра и потока энстрофии для двух разных наборов значений параметров входящих в (2.41)-(2.42) на сетках  $1024^2$  и  $2048^2$ . Наклон в спектрах изменяется от «-3.14» до «-3.17».

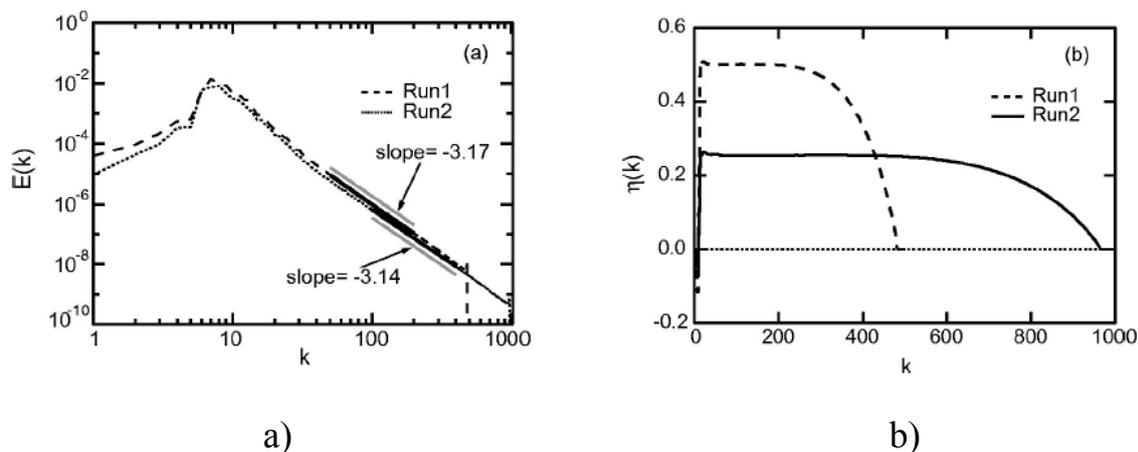


Рис. 2.8. a) Энергетический спектр, b) поток энтропии. Ishihara and Kaneda (2001)

Также можно отметить работу Brachet et al. 1988 [72], где было продемонстрировано, что наклоны спектральных характеристик в свободно затухающей турбулентности могут зависеть от времени наблюдения. Численный эксперимент проводился на сетке с разрешением  $2048^2$ , в начальный момент были возбуждены только большие масштабы. На первых этапах развития турбулентности формировался спектр  $\sim k^{-4}$ , и постепенно наклон уменьшался до значения  $\sim k^{-3}$ , когда турбулентность становилась более «старой».

В своем обзоре двумерной турбулентности Табелинг 2002 [73] отмечает, что результаты моделирования прямого каскада энтропии сильно зависят от начальных условий, размеров и распределения когерентных вихрей, времени наблюдения, структуры диссипации и форсинга в системе.

Что касается физических экспериментов, то первые попытки касались наблюдения энтропийного каскада в тонком слое ртути в сильном магнитном поле (EML) (рис. 2.10). Спектр  $k^{-3}$  был получен, но при интерпретации результатов подчеркивалась значительная роль анизотропной джоулевой диссипации, а также стенок. Позже эксперименты в мыльных пленках (рис. 4.12) показали, что энтропийный каскад может развиваться в соответствии с классической теорией в реальных физических системах [74], [75], [76], [77], [78], [79]. Преимущество экспериментов с мыльными пленками по сравнению с EML заключается в том, что толщина мыльной пленки может быть в 100 раз меньше

эффективного слоя электролита в магнитном поле. Это позволяет получать и исследовать турбулентность на гораздо более малых масштабах.

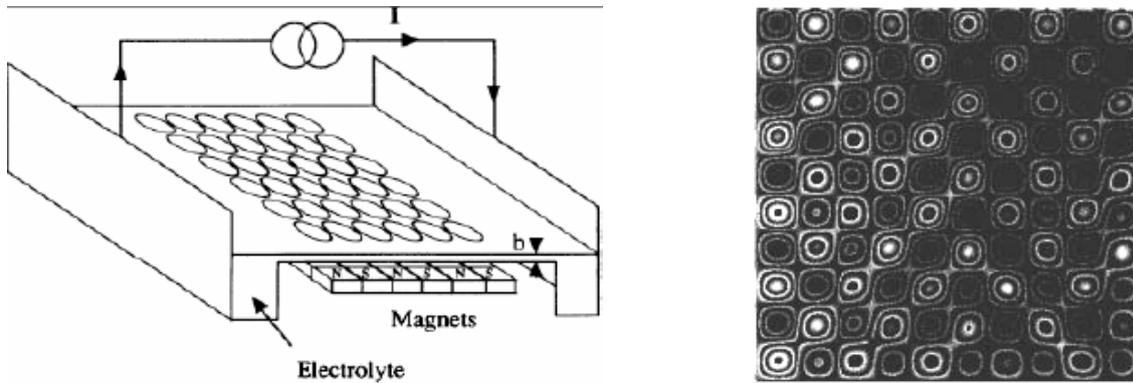


Рис. 2.10. Схема эксперимента со слоем электролита в магнитном поле. PIV метод. Tabeing P., Golub J., Cenedese A.

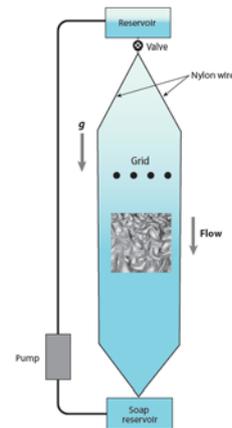


Рис. 2.11. Схема эксперимента с мыльными пленками. LDV/PIV методы. Couder Y., Goldberg W., Kellay H., Rutgers M.A., Rivera M., Ecke R.E.

На рисунке 2.12 приводятся результаты экспериментов в мыльных пленках (взято из обзора Voffeta 2011 [53])

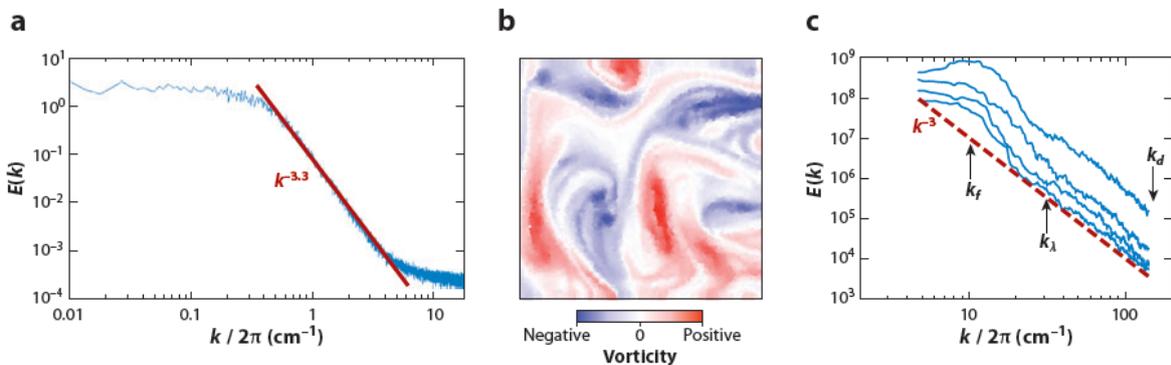


Рис. 2.12. а)  $E(k)$  в эксперименте в мыльных пленках (LDV-метод), Belmonte et al. 1999; б) поле

завихренности в аналогичном эксперименте (PIV-метод); с)  $E(k)$  в эксперименте в мыльных пленках, Rivera et al. 2003

В работе Belmonte et al. в 1999 году был проведен эксперимент в горизонтальной мыльной пленке с использованием специального «гребешка» для генерации турбулентности. Наклон спектра в инерционном интервале был близок к спектру KLB («-3.3»). В аналогичном эксперименте Rivera et al. 2003 (рис. 2.12 с) были получены спектры в зависимости от расстояния по потоку. Наклоны спектров близки к классическому («-3»).

Основной мотивацией для развития теории двумерной турбулентности, следуя Крейчнану, была надежда в то, что данная модель будет полезной для описания атмосферной турбулентности. Первые наблюдения за атмосферными спектрами показали их степенной характер. Анализ ветровых и температурных измерений, выполненных в программе GASP (Global Atmospheric Sampling Program) Nastrom et al. [80, 81], подтвердил существование закона  $k^{-3}$  в области 1000-3000 км, а в области от 600 км и ниже  $k^{-5/3}$  (рис. 2.13).

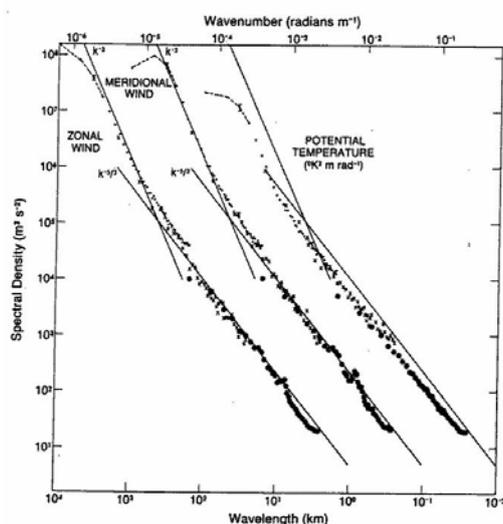


Рис. 2.13. Спектральная плотность атмосферной турбулентности. Nastrom and Gage 1984.

В свете теории KLB двумерной турбулентности, наклон «-3» был интерпретирован как прямой энстрофийный каскад, обусловленный вводом энстрофии при бароклинной неустойчивости. Появление же спектра  $k^{-5/3}$  длительное время оставался не ясным, т.к. было широко распространено мнение,

что поток энергии к малым масштабам в двумерной турбулентности запрещен. Можно объяснить это либо отражением обратного каскада при введении энергии на малых масштабах [82], либо как возникновение положительного потока энергии от больших структур к малым в результате распада длинных гравитационных волн. Однако последние наблюдения за атмосферой показали, что в ней могут существовать и прямой поток энтропии, и прямой поток энергии на мезомасштабах от нескольких десятков километров, до нескольких тысяч километров [83]. Как отмечали Tung и Orlando [84], при некоторых условиях нисходящий поток энергии, хотя и небольшой по сравнению с восходящим, может обнаруживать себя в энергетическом спектре. Это и приводит к возникновению спектра  $k^{-5/3}$ , который наблюдался в атмосфере в области высоких волновых чисел.

### ***Спектры турбулентности порождаемые сингулярностями***

В связи с трудностями, возникшими при моделировании прямого каскада, появлялись также и альтернативные теоретические работы двумерной турбулентности. В 1971 году Саффман [85] предложил динамический сценарий формирования «филаментов» завихренности (линий с большими градиентами завихренности). Из его теории следовало, что наклоны энергетических спектров должны быть равны «-4», что хорошо подтверждалось в ряде численных работ, отмеченных в предыдущем разделе. Позже Моффат [47], подчеркивая важность спиралеобразных структур, предложил спектр «-11/3». Также следует отметить теорию конформного поля Полякова 1992 [86].

В своих работах [87-89] Кузнецов Е.А. отмечает: «Хорошо известно, что особенности, возникающие в результате нелинейной эволюции в непрерывных средах, продуцируют в коротковолновой области степенные хвосты в спектре турбулентности. Эта идея была использована Филлипсом [90] для нахождения спектра турбулентности волн на воде за счет образования барашков, т.е. особенностей поверхности  $z = \eta(x, y, t)$  в виде заострений. В этом случае вторая

производная вертикального отклонения  $\eta$  содержит  $\delta$ -функциональные особенности, благодаря чему Фурье-образ от  $\eta$  при больших волновых числах падает как  $k^{-2}$ . Отсюда, по Филлипсу, спектр  $E(k)$  оказывается пропорциональным  $k^{-3}$ ...». Применяя эти же рассуждения к двумерной турбулентности, где ожидаемые особенности могут быть связаны с резкими градиентами завихренности, можно прийти к распределению

$$E(k) \sim k^{-3} \quad (2.43)$$

Т.е. с точностью до логарифмической поправки данный результат в точности совпадает со спектром в теории KLB. Однако при выводе этого соотношения неявно предполагалось, что особенности точечные, хотя в двумерной турбулентности они скорее оказываются распределенными вдоль линий. В частности, если предположить, что скачки завихренности распределены изотропно, то спектр турбулентности будет сильно отличаться от распределения (2.43). Как было показано Саффманом в 1971 году [85], спектр в этом случае имеет вид

$$E(k) \sim k^{-4} \quad (2.44)$$

Появление резких градиентов завихренности, т.е. когда величина завихренности  $\omega(\vec{r})$  испытывает скачки, толщина которых  $\delta$  мала по сравнению с характерными масштабами турбулентности, наблюдалось в большом количестве численных экспериментов [61, 63, 91], моделирующих турбулентность при больших числах Рейнольдса – в режиме, когда в нулевом приближении можно вместо уравнений Навье-Стокса рассматривать уравнение Эйлера. Поэтому главным является вопрос: возможен ли такой процесс в рамках уравнения Эйлера? Кузнецов Е.А. с соавторами приводит следующие соображения в пользу этого. Из уравнения  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot}[\vec{u} \times \vec{B}]$ , описывающего эволюцию дивихренности, следует, что  $\vec{B}$  изменяется только благодаря нормальной компоненте скорости

$u_n$ . Тангенциальная компонента скорости  $u_\tau$  при этом играет пассивную роль, обеспечивая выполнение условия несжимаемости  $div(\vec{u})=0$ . Введем новые траектории, определяемые нормальной компонентой скорости:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{u}_n(\vec{r}, t); \quad \vec{r}|_{t=0} = \vec{a}. \quad (2.45)$$

Решение этой системы уравнений задает отображение  $\vec{r} = \vec{r}(\vec{a}, t)$ . В силу того, что траектории задаются не самой скоростью, а её нормальной компонентой, то Якобиан  $J$  этого отображения не фиксирован, он может принимать произвольные значения. Этот факт непосредственно следует из уравнения

$$\frac{dJ}{dt} = div(\vec{u}_n)J; \quad J = \det \left\| \partial x_i / \partial a_j \right\|, \quad (2.46)$$

которое получается из (2.45) дифференцированием по переменным  $\vec{a}$ . С помощью этих соотношений уравнение эволюции завихренности допускает интегрирование

$$B(\vec{r}, t) = \frac{(\vec{B}_0(\vec{a}) \cdot \nabla_a) \vec{r}(\vec{a}, t)}{J}. \quad (2.47)$$

В виду произвольных значений  $J$ , из уравнения (2.47) следует, что в поле завихренности могут возникать сингулярности. В дальнейшем будем предполагать, следуя Саффману, что в двумерной турбулентности при больших числах Рейнольдса происходит формирование скачков завихренности. Ширина  $\delta$  скачков определяется из баланса инерционных и вязких сил. Нас будет интересовать область коротких длин, когда  $k$  лежит в интервале

$$L^{-1} \ll k \ll \delta^{-1} \quad (2.48)$$

Для того чтобы найти спектр от разрывов, вначале запишем выражение для градиента  $\omega$  от одного разрыва, предполагая его ориентированным вдоль  $y$ :

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = G(x) \delta(y - y_0) + \text{регулярные члены}, \quad (2.49)$$

где  $G(x)$  непрерывная функция, отличная от нуля на интервале  $[x_1, x_2]$  при  $G(x_{1,2}) = 0$ , а затем просуммируем по всем разрывам.

От одного разрыва Фурье-амплитуда  $\omega_k$  примет вид:

$$\omega_k = -i \frac{e^{-ik_y y_0}}{k_y} \int_{x_1}^{x_2} G(x) e^{-ik_x x} dx, \quad (2.50)$$

от ансамбля разрывов:

$$\omega_k = -i \sum_{\alpha} \frac{e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{n}) y_{\alpha}}}{(\vec{k} \cdot \vec{n}_{\alpha})} \int_{x_{1\alpha}}^{x_{2\alpha}} G_{\alpha}(x) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{\tau}_{\alpha}) x} dx \quad (2.51)$$

Чтобы найти спектр энтропии необходимо произвести осреднение величины  $|\omega_k|^2$  по всем случайным переменным. Считая, что положения разрывов равномерно распределены в пространстве, получим

$$\overline{|\omega_k|^2} = N \left\langle \frac{1}{(\vec{k} \cdot \vec{n})^2} \left| \int_{x_1}^{x_2} G(x) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{\tau}) x} dx \right|^2 \right\rangle \quad (2.52)$$

где  $N$  – число разрывов в области  $S$ , угловые скобки означают осреднение и по  $x_1, x_2$  и по угловому распределению.

Т.к. нас интересует коротковолновая часть спектра  $kL \gg 1$ , то под интегралом в уравнении (2.52) стоит быстро осциллирующая функция от  $x$ . Следовательно, интеграл можно оценить по методу стационарной фазы. Этот метод можно применить для всех углов  $\theta_k > \theta_0$  ( $\theta_k$  – угол между векторами  $\vec{k}$  и  $\vec{n}$ ), где  $\theta_0 = \frac{1}{kL}$ . В области  $\theta_k \leq \theta_0$  ( $\vec{k} \cdot \vec{\tau}) \approx 0$  и плотность энергетического спектра имеет вид

$$\varepsilon_1(\vec{k}) \sim \frac{n}{k^4} \langle (\overline{G}l)^2 \rangle, \quad \theta_k \leq \theta_0 \quad (2.53)$$

где  $n$  – плотность разрывов,  $\bar{G}l = \int_{x_1}^{x_2} G(x) dx$ .

Для остальной области по методу стационарной фазы с учетом условия  $G(x_{1,2}) = 0$  получим

$$\varepsilon_2(\vec{k}) \sim \frac{N}{k^2} \frac{\langle (G')^2 \rangle}{(\vec{k} \cdot \vec{n})^2 (\vec{k} \cdot \vec{\tau})^4}, \quad \theta_k \gg (kL)^{-1} \quad (2.54)$$

Эта формула имеет особенности при углах  $\theta_k$  близких к 0 и  $\pi/2$ . При малых углах это выражение нужно заменить на (2.53). А при углах близких к  $\pi/2$  интеграл в (2.54) следует ограничить из за пересечения с линией разрыва.

Таким образом, плотность энергии  $\varepsilon(\vec{k})$  в сильно анизотропном случае имеет резкий пик в направлении анизотропии. Если угловой разброс функции распределения  $\Delta\theta$  уже  $\theta_0 = (kL)^{-1}$  то плотность энергии в этом пике имеет убывание  $\sim k^{-4}$ , что соответствует энергетическому спектру типа KLB  $E(k) \sim k^{-3}$ . Для всех остальных углов  $\varepsilon(\vec{k})$  затухает пропорционально  $k^{-6}$  при больших  $k$ .

Если предположить, что распределение по углам изотропно, то, осредняя по углам соотношение (2.53), получим

$$E_1(k) = 2k \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \varepsilon_1(k) d\theta_k \sim \frac{n}{k^4 L} \langle (\bar{G}l)^2 \rangle \quad (2.55)$$

Во втором выражении (2.54) основной вклад вносится вблизи углов  $\sim (kL)^{-1}$ :

$$E_2 \sim \frac{nL^3}{k^4} \langle (G')^2 \rangle \quad (2.56)$$

Следовательно

$$E(k) = E_1(k) + E_2(k) \sim k^{-4}, \quad (2.57)$$

что совпадает со спектром полученным Саффманом.

Таким образом, если предположить, что основной вклад в спектр вносят резкие градиенты завихренности, то при сильно анизотропном распределении линий разрывов формируется спектр, близкий к спектру, предсказанному размерностной теорией KLB. В изотропном же случае следует ожидать спектральное распределение Саффмана.

### Глава 3. Двумерные течения

#### Схема «КАБАРЕ» в переменных «скорость-давление»

Запишем уравнение Навье-Стокса (2.1) в матричной форме

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \mathbf{A}_x \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + \mathbf{A}_y \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} = \vec{f} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{A}_x = \begin{pmatrix} u_x & 0 \\ 0 & u_x \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}_y = \begin{pmatrix} u_y & 0 \\ 0 & u_y \end{pmatrix}; \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}; \quad \vec{f} = -\nabla p + \nu \Delta \vec{u} \quad (3.2)$$

и произведем расщепление уравнения (3.1) на два уравнения переноса по каждому направлению:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \mathbf{A}_x \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} &= \vec{Q}_x; & \vec{Q}_x &= \vec{f} - \mathbf{A}_y \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \mathbf{A}_y \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} &= \vec{Q}_y; & \vec{Q}_y &= \vec{f} - \mathbf{A}_x \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Нетрудно видеть, что собственные числа матриц  $\mathbf{A}_x$  и  $\mathbf{A}_y$  совпадают с компонентами вектора скорости. Форму уравнений (2.1) будем называть *консервативной*, а форму (3.3) *псевдохарактеристической*. Консервативная форма используется в первой и третьей фазе схемы «КАБАРЕ» [92] при вычислении консервативных переменных, а псевдохарактеристическая во второй фазе при вычислении потоковых переменных.

Для исследуемых вопросов можно рассмотреть наиболее простую геометрию – квадрат со стороной  $2\pi$  с периодическими граничными условиями. Расчетную область покроем равномерной ортогональной пространственной сеткой с шагами  $h_x$  и  $h_y$  вдоль соответствующих координатных осей (рис. 3.1 (а)). Такое упрощение используется специально для исключения влияния каких-либо особенностей геометрии или сетки на результаты моделирования.

На рисунке 3.1 (b) показано взаимное расположение консервативных  $(U, V)$  и потоковых  $(u, v)$  переменных в расчетных ячейках, а так же их буквенное обозначение (R – right, L – left, T – top, B – bottom, C – center). Давление будем относить к узлам.

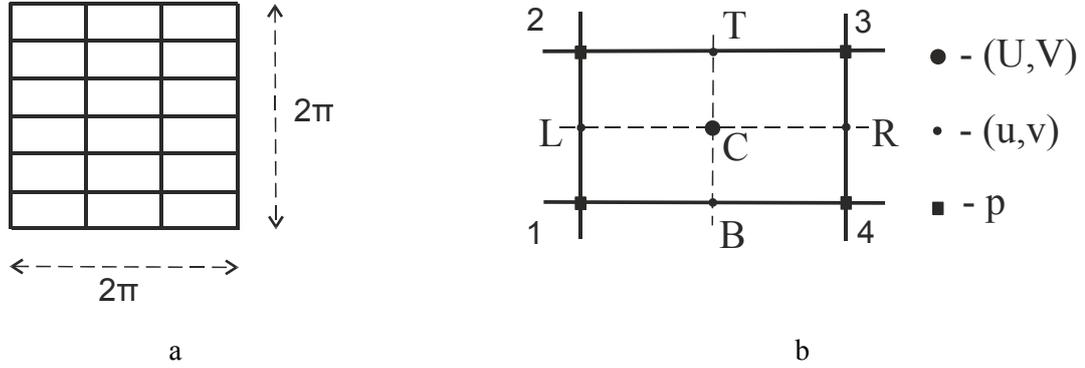


Рис. 3.1. Расчетная область

В начальный момент распределение давления и скорости считается известным:  $p(\vec{x}, 0) = p_0(\vec{x})$ ,  $\vec{u}(\vec{x}, 0) = \vec{u}_0(\vec{x})$ . На первой фазе находятся промежуточные консервативные переменные на полуцелом временном слое.

$$\begin{cases} \frac{U_C^{n+1/2} - U_C^n}{\tau^n / 2} + F_1^n = -(\nabla_x p)^* + \nu \cdot L(U_C^n) \\ \frac{V_C^{n+1/2} - V_C^n}{\tau^n / 2} + F_2^n = -(\nabla_y p)^* + \nu \cdot L(V_C^n) \end{cases} \quad (3.4)$$

где

$$F_1 = \frac{(u_R)^2 - (u_L)^2}{h_x} + \frac{u_T \cdot v_T - u_B \cdot v_B}{h_y}; \quad F_2 = \frac{u_R \cdot v_R - u_L \cdot v_L}{h_x} + \frac{(v_T)^2 - (v_B)^2}{h_y}; \quad (3.5)$$

$$L(\varphi) = \frac{\varphi_{CR} - 2\varphi_C + \varphi_{CL}}{h_x^2} + \frac{\varphi_{CT} - 2\varphi_C + \varphi_{CB}}{h_y^2}.$$

Силы давления можно задавать двумя способами:

1) Явно с нижнего слоя:

$$\begin{cases} (\nabla_x p)^* = \left( \frac{(p_3 + p_4)/2 - (p_1 + p_2)/2}{h_x} \right)^n \\ (\nabla_y p)^* = \left( \frac{(p_2 + p_4)/2 - (p_1 + p_3)/2}{h_y} \right)^n \end{cases} \quad (3.6)$$

2) Неявно с промежуточного слоя:

$$\begin{cases} (\nabla_x p)^* = \left( \frac{(p_3 + p_4)/2 - (p_1 + p_2)/2}{h_x} \right)^{n+1/2} \\ (\nabla_y p)^* = \left( \frac{(p_2 + p_4)/2 - (p_1 + p_3)/2}{h_y} \right)^{n+1/2} \end{cases} \quad (3.7)$$

При неявном способе задания давления вычисления производятся в два этапа, и схема расщепляется по физическим процессам. На первом этапе находятся предварительные скорости только с учетом переноса

$$\begin{cases} \frac{\tilde{U}_C - U_C^n}{\tau^n / 2} + F_1^n = \nu \cdot L(U_C^n) \\ \frac{\tilde{V}_C - V_C^n}{\tau^n / 2} + F_2^n = \nu \cdot L(V_C^n) \end{cases}, \quad (3.8)$$

а на втором полученные скорости корректируются силами давления:

$$\begin{cases} \frac{U_C^{n+1/2} - \tilde{U}_C}{\tau^n / 2} = -(\nabla_x p)^{n+1/2} \\ \frac{V_C^{n+1/2} - \tilde{V}_C}{\tau^n / 2} = -(\nabla_y p)^{n+1/2} \end{cases} \quad (3.9)$$

Требую выполнения условия дивергентности поля скорости  $(U_C^{n+1/2}, V_C^{n+1/2})$  относительно узлов расчетной сетки (рис. 3.3.):

$$D(U_C^{n+1/2}, V_C^{n+1/2}) = 0, \quad (3.10)$$

где

$$D(u, v) = \frac{u_A + u_B - u_C - u_D}{2h_x} + \frac{v_B + v_C - v_A - v_D}{2h_y}, \quad (3.11)$$

получим уравнение Лапласа для определения поля давления:

$$\Delta_h p^{n+1/2} = \frac{2}{\tau^n} \cdot D(\tilde{U}_C, \tilde{V}_C).$$

Здесь обозначение  $\Delta_h$  соответствует девятиточечной аппроксимации лапласиана («косой крест»). Решать данное уравнение будем спектральным методом. Вычислив давление  $p^{n+1/2}$ , по формулам (3.7), (3.9) найдем дивергентное поле консервативных скоростей на промежуточном слое по времени.

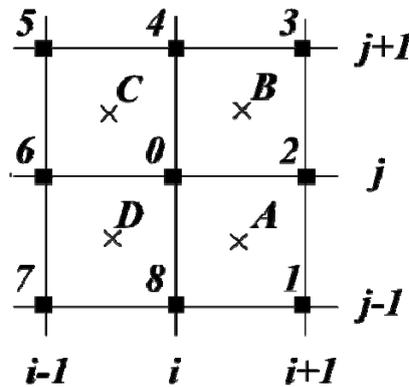


Рис. 3.3. Шаблон для вычисления давления

*Вторая фаза.* После вычисления промежуточных скоростей вычисляются потоковые переменные на новом временном слое линейной экстраполяцией инвариантов Римана с последующей нелинейной коррекцией на основе принципа максимума. Из анализа уравнений переноса (3.3) следует, что у них имеется только по одной характеристике, а инварианты Римана совпадают с компонентами скорости.

Для вычисления нормальной составляющей потоковой скорости к вертикальной грани, вначале следует линейной экстраполяцией вычислить их новые «прикидочные» значения со стороны каждой из прилегающих ячеек (рис. 3.4)  $u_{PNL}$ ,  $u_{PNR}$ :

$$u_{PNL} = 2U_{CLN} - u_L; \quad u_{PNR} = 2U_{CRN} - u_R \quad (3.12)$$

Здесь  $U_{CLN} = U_{CL}^{n+1/2}$ ,  $U_{CRN} = U_{CR}^{n+1/2}$  – вычисленные на первой фазе промежуточные консервативные скорости.

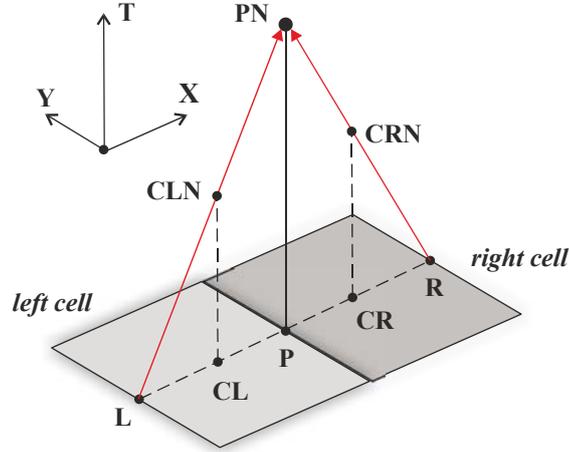


Рис. 3.4. Шаблон для вычисления потоковых переменных

Затем их надо подвергнуть процедуре нелинейной коррекции по *принципу максимума*, который вытекает из уравнений переноса (3.3):

$$u_{PNL} = \begin{cases} \max(u)_L, & \text{if } (u_{PNL} \geq \max(u)_L) \\ \min(u)_L, & \text{if } (u_{PNL} \leq \min(u)_L); \\ u_{PNL}, & \text{else} \end{cases} \quad u_{PNR} = \begin{cases} \max(u)_R, & \text{if } (u_{PNR} \geq \max(u)_R) \\ \min(u)_R, & \text{if } (u_{PNR} \leq \min(u)_R) \\ u_{PNR}, & \text{else} \end{cases} \quad (3.13)$$

где

$$\begin{aligned} \max(u)_L &= \max(u_L, U_{CL}, u_P) + \tau^n \cdot Q_L; & \min(u)_L &= \min(u_L, U_{CL}, u_P) + \tau^n \cdot Q_L \\ \max(u)_R &= \max(u_R, U_{CR}, u_P) + \tau^n \cdot Q_R; & \min(u)_R &= \min(u_R, U_{CR}, u_P) + \tau^n \cdot Q_R \end{aligned} \quad (3.14)$$

Источниковые члены  $Q_R$  и  $Q_L$  можно оценить по левой части уравнений (3.3)

$$Q_L = \frac{U_{CLN} - U_{CL}}{\tau^n / 2} + \frac{u_P + u_L}{2} \cdot \frac{u_P - u_L}{h_x}; \quad Q_R = \frac{U_{CRN} - U_{CR}}{\tau^n / 2} + \frac{u_R + u_P}{2} \cdot \frac{u_R - u_P}{h_x} \quad (3.15)$$

Выбор нового значения нормальной компоненты скорости будет определяться в соответствии с направлением прихода характеристики в точку P.

Направление характеристик в каждой ячейке логично определять по нормальной компоненте консервативной скорости на промежуточном слое по времени ( $U_{CLN}$ ,  $U_{CRN}$ ). При этом могут возникать ситуации, когда в точку Р приходит одна характеристика (слева или справа), приходят две характеристики (и слева и справа), а также случай, когда не приходит ни одной из характеристик. Для разрешения таких ситуаций при решении квазилинейных гиперболических уравнений ставят частичную задачу Римана о распаде произвольного разрыва:

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x F(u) = 0 \\ u(x < 0) = a, u(x > 0) = b, \\ u(x = 0) = ? \end{cases} \quad (3.16)$$

которая для выпуклых функций потока допускает решение в виде т.н. потока Годунова [45]:

$$u(x = 0) = \begin{cases} u_{\min}, & b \geq a, & u_{\min} = \left[ \min_{u \in [a, b]} (F(u)) \right]^{-1} \\ u_{\max}, & b < a, & u_{\max} = \left[ \max_{u \in [b, a]} (F(u)) \right]^{-1} \end{cases} \quad (3.17)$$

Т.е. решениями будут являться либо ударные волны, либо волны разрежения, направление движения которых зависит от соотношений на разрыве. Если функция потока является функцией Хопфа  $F(u) = u^2 / 2$ , как в нашем случае, то решение задачи Римана примет простой вид:

$$u(x = 0) = \begin{cases} a, & a + b \geq 0 \\ b, & a + b < 0 \\ 0, & a < 0, b > 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

В схеме КАБАРЕ поток Годунова используется в несколько модифицированном виде, а именно, соотношения на разрыве определяются по консервативным скоростям, а само переносимое значение по значениям потоковых скоростей слева и справа:

$$u_{PN} = \begin{cases} u_{PNL}, & U_{CRN} + U_{CLN} \geq 0 \\ u_{PNR}, & U_{CRN} + U_{CLN} < 0 \\ 0, & U_{CLN} \leq 0 \ \& \ U_{CRN} \geq 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

Аналогичным образом вычисляются нормальные компоненты потоковой скорости на горизонтальных гранях расчетной сетки.

Далее, по вычисленным нормальным компонентам скорости находится дивергенция поля потоковых скоростей, относящаяся к центрам ячеек:

$$\frac{u_{RN} - u_{LN}}{h_x} + \frac{v_{TN} - v_{BN}}{h_y} = D_{CN} \quad (3.20)$$

Величина этой дивергенции будет, вообще говоря, отличной от нуля. Это обстоятельство порождает дополнительную вычислительную процедуру, которая состоит в том, что нормальные компоненты скорости подвергаются минимальной вариации  $\tilde{u} = u + \delta u$ ,  $\tilde{v} = v + \delta v$ , обеспечивающей соленоидальность окончательных значений нормальных компонент потоковых скоростей:

$$\frac{\delta u_{RN} - \delta u_{LN}}{h_x} + \frac{\delta v_{TN} - \delta v_{BN}}{h_y} - D_{CN} \equiv \delta D_{CN} = 0 \quad (3.21)$$

Чтобы вариации скоростей были минимальны, составим квадратичный функционал:

$$\Phi = \frac{1}{4} \sum_{C \in \Omega_C} \left( (\delta u_{RN})^2 + (\delta u_{LN})^2 + (\delta v_{TN})^2 + (\delta v_{BN})^2 \right) \cdot h_x \cdot h_y \quad (3.22)$$

Здесь  $\Omega_C$  – множество всех центров расчетных ячеек. Задача минимизации функционала (3.22) с дополнительными ограничениями (3.21) представляет собой задачу на нахождение условного экстремума с функцией Лагранжа:

$$\Lambda = \frac{1}{4} \sum_{C \in \Omega_C} \left( (\delta u_{RN})^2 + (\delta u_{LN})^2 + (\delta v_{TN})^2 + (\delta v_{BN})^2 \right) \cdot h_x \cdot h_y + \sum_{C \in \Omega_C} \lambda_C \cdot \delta D_{CN} \cdot h_x \cdot h_y \quad (3.23)$$

где  $\lambda_C$  – множители Лагранжа, заданные на множестве  $\Omega_C$ .

Условие минимальности имеет вид:

$$\left. \frac{\partial \Lambda(\delta u, \delta v, \lambda)}{\partial \delta u} \right|_C = 0; \quad \left. \frac{\partial \Lambda(\delta u, \delta v, \lambda)}{\partial \delta v} \right|_C = 0 \quad (3.24)$$

После элементарных преобразований получим:

$$\delta u_{RN} = \frac{\lambda_{CR} - \lambda_C}{h_x}; \quad \delta v_{TN} = \frac{\lambda_{CT} - \lambda_C}{h_y} \quad (3.25)$$

Подставив (3.25) в (3.21), получим уравнение Лапласа (с шаблоном «прямой крест») для вычисления множителей Лагранжа:

$$\frac{\lambda_{CR} - 2\lambda_C + \lambda_{CL}}{h_x^2} + \frac{\lambda_{CT} - 2\lambda_C + \lambda_{CB}}{h_y^2} = D_{CN} \quad (3.26)$$

Решать его, с учетом простоты геометрии, удобно спектральным методом.

Для завершения этапа вычисления потоковых переменных на новом временном слое остается вычислить касательные составляющие скорости. Как уже отмечалось ранее, касательные составляющие скорости являются инвариантами Римана и для их вычисления должна использоваться линейная экстраполяция с нелинейной коррекцией по принципу максимума. Рассмотрим эту процедуру на примере вычисления касательной составляющей для вертикальной грани.

Прежде всего, нужно определиться, из какой ячейки, левой или правой, должен приходиться соответствующий инвариант. Для этого будем придерживаться правила, согласно которому направление прихода инварианта определяется направлением характеристической скорости, которая совпадает с уже вычисленным значением нормальной скорости на новом временном слое в середине вертикальной грани. Таким образом, если  $u_{PN} \geq 0$ , то касательная компонента должна вычисляться по параметрам левой прилегающей ячейки, в противном случае – по параметрам правой ячейки:

$$\begin{cases} v_{PN} = 2V_{CLN} - v_L, & \text{if } (u_{PN} > 0) \\ v_{PN} = 2V_{CRN} - v_R, & \text{if } (u_{PN} < 0) \end{cases} \quad (3.27)$$

Коррекция касательной компоненты будет производиться стандартным образом: например, если  $u_{PN} > 0$ , то корректируем по левой ячейке:

$$v_{PN} = \begin{cases} \max(v)_L, & \text{if } (v_{PN} \geq \max(v)_L) \\ \min(v)_L, & \text{if } (v_{PN} \leq \min(v)_L) \\ v_{PN}, & \text{else} \end{cases} \quad (3.28)$$

где

$$\begin{aligned} \max(v)_L &= \max(v_L, V_{CL}, v_P) + \tau^n \cdot Q_L; \quad \min(v)_L = \min(v_L, V_{CL}, v_P) + \tau^n \cdot Q_L; \\ Q_L &= \frac{V_{CLN} - V_{CL}}{\tau^n / 2} + \frac{u_P + u_L}{2} \cdot \frac{v_P - v_L}{h_x}. \end{aligned}$$

Случай, когда  $u_{PN} = 0$ , нужно рассмотреть отдельно, т.к. от выбора касательной компоненты скорости (при нулевой нормальной) существенно зависят решения. Следуя пути построения схемы, логично было бы определить касательную компоненту через экстраполяцию

$$v_{PN} = \alpha(U_{CRN} + U_{CLN}) - (2\alpha - 1)v_P \quad (3.29)$$

$\alpha \in [0, 1]$ . С дальнейшей коррекцией по принципу максимума. В работе исследовались случаи  $\alpha = 1, 1/2, 0$ .

*Третья фаза.* После нахождения потоковых переменных на новом временном слое остается вычислить новые консервативные переменные. Для этого удобно использовать симметричную по времени и пространству схему второго порядка аппроксимации:

$$\begin{cases} \frac{U_C^{n+1} - U_C^n}{\tau^n} + \frac{1}{2}(F_1^n + F_1^{n+1}) = -(\nabla_x p)^* + v \cdot L(U_C^{n+1/2}) \\ \frac{V_C^{n+1} - V_C^n}{\tau^n} + \frac{1}{2}(F_2^n + F_2^{n+1}) = -(\nabla_y p)^* + v \cdot L(V_C^{n+1/2}) \end{cases} \quad (3.30)$$

В зависимости от того каким способом задавались силы давления на первой фазе возможны два варианта:

1) При первом способе давление задается неявно:

$$\begin{cases} (\nabla_x p)^* = \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{(p_3 + p_4)/2 - (p_1 + p_2)/2}{h_x} \right)^n + \left( \frac{(p_3 + p_4)/2 - (p_1 + p_2)/2}{h_x} \right)^{n+1} \right\} \\ (\nabla_y p)^* = \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{(p_2 + p_4)/2 - (p_1 + p_3)/2}{h_y} \right)^n + \left( \frac{(p_2 + p_4)/2 - (p_1 + p_3)/2}{h_y} \right)^{n+1} \right\} \end{cases} \quad (3.31)$$

Расщепив схему на две, так же как это делалось на первой фазе, и, потребовав обнуления сеточной дивергенции относительно узлов для скоростей с нового слоя по времени, получим уравнение Лапласа, решив которое мы найдем давление на новом слое.

2) При втором, явно с промежуточного слоя:

$$\begin{cases} (\nabla_x p)^* = \left( \frac{(p_3 + p_4)/2 - (p_1 + p_2)/2}{h_x} \right)^{n+1/2} \\ (\nabla_y p)^* = \left( \frac{(p_2 + p_4)/2 - (p_1 + p_3)/2}{h_y} \right)^{n+1/2} \end{cases} \quad (3.32)$$

Опыт расчетов по схеме «КАБАРЕ» говорит о том, что не принципиально на каком слое задавать давление (на целом или на полуцелом). Исходя из соображений удобства, далее в расчетах будем использовать второй вариант.

Поскольку конвективные члены в описанном алгоритме вычисляются по явной схеме, то возникает ограничение на величину допустимого шага по времени. Это ограничение совпадает с условием корректности процедуры нелинейной коррекции по принципу максимума. Эта процедура корректна, когда все существующие обратные характеристики, опущенные из середин ребер на верхнем слое, пересекают нижнюю грань каждой пространственно-временной расчетной ячейки. Это условие, применительно к несжимаемой жидкости, можно записать как:

$$\tau^n \leq CFL \cdot \min_{i,j \in \omega} \left( \frac{h_x}{|U_C^n|}, \frac{h_y}{|V_C^n|}, \frac{h_x h_y}{2\nu} \right) \quad (3.33)$$

(последний член в скобках необходим при наличии вязкости:  $\nu \neq 0$ ).

В гибридных схемах единственное отличие от схемы «КАБАРЕ» заключается в процедуре экстраполяции (3.12), (3.27):

$$\begin{aligned} u_{PNL} &= (1-\alpha)(2U_{CLN} - u_L) + \alpha(U_{CLN} + U_{CRN} - u_P) \\ u_{PNR} &= (1-\alpha)(2U_{CRN} - u_R) + \alpha(U_{CLN} + U_{CRN} - u_P) \end{aligned} \quad (3.34)$$

где  $\alpha \in [0,1]$  – параметр гибридизации.

### **Схема «КАБАРЕ» в переменных «функция тока – завихренность»**

Помимо естественных переменных (скорость-давление), рассматривались также переменные завихренность-функция тока [93], чтобы продемонстрировать, что схема «КАБАРЕ» сохраняет свои свойства в разных наборах переменных.

Систему уравнений Навье-Стокса (2.1) для несжимаемой жидкости в двумерном случае можно записать в виде (2.8). Равенство нулю дивергенции скорости позволяет записать её как ротор некоторой функции тока  $\vec{\psi} = (0, 0, \psi)$  –  $\vec{u} = \text{rot}(\vec{\psi})$ , для вычисления которой решается уравнение Пуассона  $\Delta\psi = -\omega$ . Таким образом, в дивергентной форме уравнения движения примут вид:

$$\begin{cases} \partial_t \omega + \text{div}(\omega \vec{u}) = \nu \Delta \omega \\ \Delta \psi = -\omega, \quad \vec{u} = (\partial_y \psi, -\partial_x \psi) \end{cases} \quad (3.35)$$

Их можно представить в псевдохарактеристической форме с расщеплением по двум направлениям

$$\begin{cases} \partial_t \omega + u \cdot \partial_x \omega = Q_x \equiv \nu \Delta \omega - v \cdot \partial_y \omega \\ \partial_t \omega + v \cdot \partial_y \omega = Q_y \equiv \nu \Delta \omega - u \cdot \partial_x \omega \end{cases} \quad (3.36)$$

Опишем кратко алгоритм схемы «КАБАРЕ».

*Фаза 1.* В схеме «КАБАРЕ» использует как консервативные переменные (завихренности  $\Omega$ ), заданные в центрах ячеек, так и потоковые переменные (завихренности  $\omega$  и нормальные компоненты скоростей  $u$  и  $v$ ), заданные в центрах граней каждой ячейки. Функцию тока отнесем к узлам расчетной сетки. На первом шаге вычисляются промежуточные (на полуцелом слое по времени) консервативные переменные по явной разностной схеме, аппроксимирующей уравнения движения в дивергентной форме (рис. 3.5 – 3.6)

$$\begin{aligned} & \frac{\Omega_C^{n+1/2} - \Omega_C^n}{(\tau^n / 2)} + \frac{u_R^n \omega_R^n - u_L^n \omega_L^n}{h_x} + \frac{v_T^n \omega_T^n - v_B^n \omega_B^n}{h_y} = \\ & = \mu \left( \frac{\Omega_{CR}^n - 2\Omega_C^n + \Omega_{CL}^n}{h_x^2} + \frac{\Omega_{CT}^n - 2\Omega_C^n + \Omega_{CB}^n}{h_y^2} \right) \end{aligned} \quad (3.37)$$

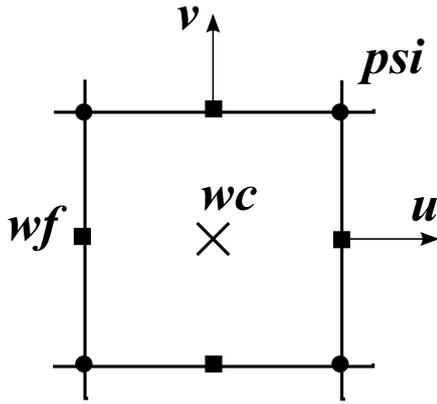


Рис. 3.5. Шаблон №1 для схемы «КАБАРЕ»

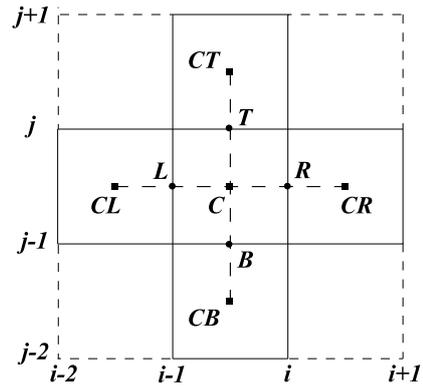


Рис. 3.6. Шаблон №2 для схемы «КАБАРЕ».

*Фаза 2.* На второй фазе алгоритма находятся потоковые завихренности на новом временном слое последовательно для вертикальных и горизонтальных граней. Опишем алгоритм для вертикальных граней (для горизонтальных граней аналогично).

Новое значение потоковой завихренности на  $i$ -той грани найдем с помощью линейной экстраполяции, направление которой будет определяться нормальной компонентой скорости  $u_R^n$  (см. рис. 3.7). Возможны два случая:

$$\begin{cases} \text{if } (u_R^n < 0) \rightarrow \tilde{\omega}_R^{n+1} = 2\Omega_{CR}^{n+1/2} - \omega_{RR}^n \\ \text{if } (u_R^n \geq 0) \rightarrow \tilde{\omega}_R^{n+1} = 2\Omega_C^{n+1/2} - \omega_L^n \end{cases} \quad (3.38)$$

Далее следует процедура нелинейной коррекции потоков, основанная на *принципе максимума*. Минимумы и максимумы завихренностей можно оценить следующим образом. Если  $u_R^n < 0$ , то для правой ячейки

$$\begin{aligned} [\max(\omega)]_R &= \max(\omega_R^n, \omega_{CR}^n, \omega_{RR}^n) + \tau^n \cdot [Q_x]_R \\ [\min(\omega)]_R &= \min(\omega_R^n, \omega_{CR}^n, \omega_{RR}^n) + \tau^n \cdot [Q_x]_R \end{aligned} \quad (3.39)$$

Аналогично, если  $u_R^n \geq 0$ , то для левой ячейки

$$\begin{aligned} [\max(\omega)]_L &= \max(\omega_L^n, \omega_C^n, \omega_R^n) + \tau^n \cdot [Q_x]_L \\ [\min(\omega)]_L &= \min(\omega_L^n, \omega_C^n, \omega_R^n) + \tau^n \cdot [Q_x]_L \end{aligned} \quad (3.40)$$

Здесь дополнительные слагаемые  $Q_R$  и  $Q_L$  характеризуют источники члены в *псевдохарактеристической* форме уравнений и оцениваются по левой части уравнений.

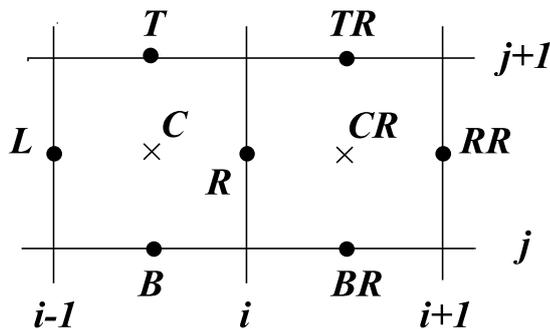


Рис. 3.7. Шаблон №3 для схемы «КАБАРЕ»

Для нахождения потоковых скоростей на новом временном слое по времени нужно решить эллиптическое уравнение  $\Delta\psi = -\omega$ , с уже известной правой частью, на шаблоне «прямой крест».

*Фаза 3.* На последней фазе алгоритма находятся значения новых консервативных завихренностей со вторым порядком точности по пространству и времени:

$$\begin{aligned} & \frac{\Omega_C^{n+1} - \Omega_C^n}{\tau} + \frac{1}{2}(F_x^n + F_x^{n+1}) + \frac{1}{2}(F_y^n + F_y^{n+1}) = \\ & = \mu \left( \frac{\Omega_{CR}^{n+1/2} - 2\Omega_C^{n+1/2} + \Omega_{CL}^{n+1/2}}{h_x^2} + \frac{\Omega_{CT}^{n+1/2} - 2\Omega_C^{n+1/2} + \Omega_{CB}^{n+1/2}}{h_y^2} \right) \end{aligned} \quad (3.41)$$

где  $F_x = \frac{\omega_R u_R - \omega_L u_L}{h_x}$ ,  $F_y = \frac{\omega_T v_T - \omega_B v_B}{h_y}$ .

### Примеры тестовых расчетов

*Задача об одиночном вихре.* Зададим скорость кругового движения и давление в вихре как функцию расстояния от его центра:

$$\begin{cases} u_\varphi(r) = u_0 \cdot \frac{r}{r_0} \cdot \exp\left(\beta\left(1 - (r/r_0)^2\right)\right) \\ u_r(r) = 0 \\ p(r) = p_0 \cdot \left(1 - \frac{u_0^2}{4\beta} \cdot \exp\left(2\beta\left(1 - (r/r_0)^2\right)\right)\right) \end{cases} \quad (3.42)$$

где  $r = \left((x - x_0)^2 - (y - y_0)^2\right)^{1/2}$ ,  $x_0 = y_0 = \pi$ ;  $p_0, u_0, \beta, r_0$  – неотрицательные параметры. При нулевой вязкости вихрь (3.42) будет стационарным и устойчивым.

На рисунке 3.8-3.9 показан профиль завихренности для моментов времени  $T = 0$  и  $T = 20000 \approx 2860\Delta T$  или  $\sim 10^5$  временных шагов на сетке  $32^2$  рассчитанный по схеме «КАБАРЕ» в переменных «функция тока – завихренность» [93]. Число Куранта  $CFL = 0.2$ , вязкость  $\nu = 0$ . Поведение вихря, посчитанного по схеме «КАБАРЕ», очень устойчиво. В начальный момент времени образуются небольшие (<2%) провалы вблизи экстремумов завихренности, что является следствием грубости сетки. В дальнейшем с вихрем визуально ничего не происходит (создается впечатление, что вихрь будет держать свою форму бесконечно долго).

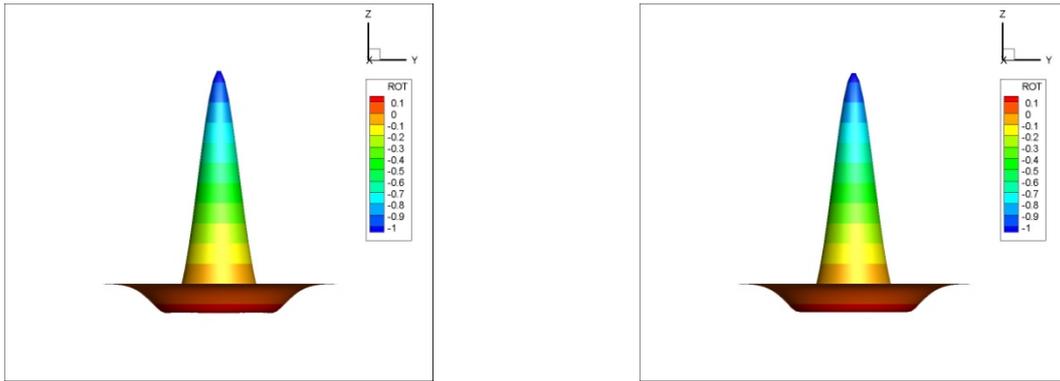


Рис. 3.8. Профиль вихря в начальный момент времени и через 2860 оборотов

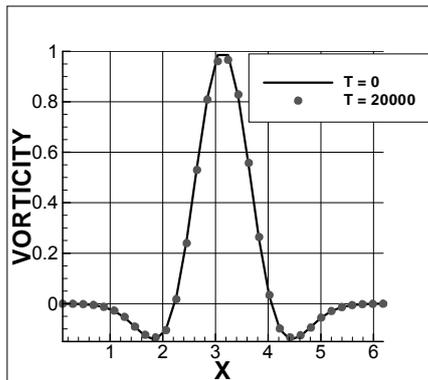


Рис. 3.9. Профиль завихренности в задаче об одиночном вихре для моментов времени  $T=0$  и  $T=20000$ . Схема «КАБАРЕ». Сетка  $32^2$ .

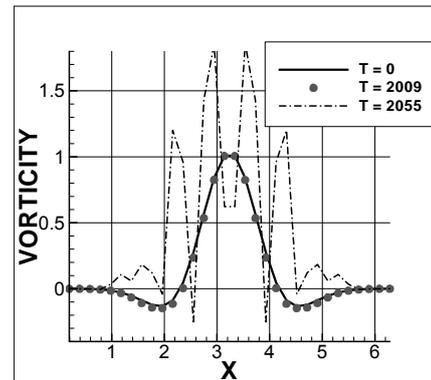


Рис. 3.10. Профиль завихренности в задаче об одиночном вихре для моментов времени  $T=0$ , 2009, 2055. Схема «Аракавы». Сетка  $32^2$ .

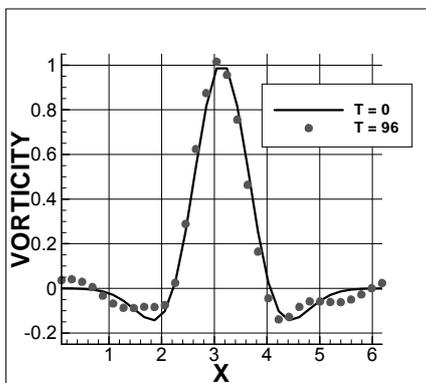
Таким образом, в схеме «КАБАРЕ» стационарные вихри разрешаются на очень грубых сетках (5-6 точек на ядро вихря) и не затухают. По всей видимости данное свойство напрямую связано с временной обратимостью схемы «КАБАРЕ». Характеристические скорости в вихре направлены в одном направлении по концентрическим окружностям, и поэтому характеристики одного семейства не пересекаются, а следовательно, принцип максимума не срабатывает.

На рис. 3.10 приведены аналогичные результаты для схемы «Аракавы» [40] в моменты времени  $T=0$ , 2009 и 2055. Схема «Аракавы» точно воспроизводит начальный профиль завихренности на относительно малых временах  $T \approx 2000 \approx 286\Delta T$ . Затем наблюдается рост нефизических осцилляций вблизи экстремумов завихренности, вихрь начинает терять свою форму, медленно развивается нелинейная неустойчивость. Момент времени  $T=2055$  соответствует

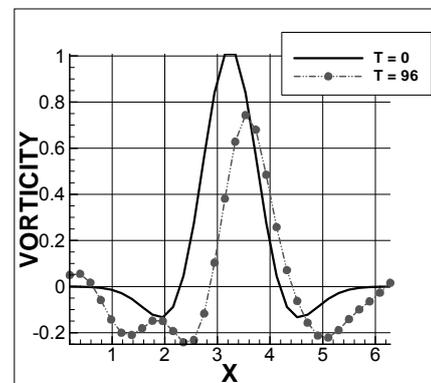
началу развала вихря, происходящего практически мгновенно (за несколько временных шагов).

Далее, зададим трансляционное движение вихря вдоль оси  $x$  со скоростью  $u_{tr} = \pi / 6$ . Период трансляционного движения, соответствующий этой скорости, равен  $T_{tr} = 2\pi / u_{tr} = 12$ . Рассмотрим профиль вихря в моменты времени кратные трансляционному периоду ( $T=12$  и  $96$ ). Через один период вихрь должен возвратиться в свое первоначальное положение, сохраняя при этом свою форму. На рис. 3.11-3.12 показана эволюция профиля завихренности движущегося вихря за 8 периодов по схемам «КАБАРЕ» и «Аракавы» соответственно на сетке  $32 \times 32$ .  $CFL=0.2$ ,  $\nu = 0$ .

Фазовые и амплитудные ошибки в схеме «КАБАРЕ» визуально значительно меньше, чем в схеме «Аракавы». Кроме того, в схеме «Аракавы» развивается нелинейная неустойчивость, которая к моменту времени  $T=180$  приводит к «развалу» вихря.



**Рис. 3.11.** Профиль завихренности в задаче об одиночном движущемся вихре. Схема «КАБАРЕ». Сетка  $32^2$ .  $CFL=0,2$ .  $T=0, 96$ .



**Рис. 3.12.** Профиль завихренности в задаче об одиночном движущемся вихре. Схема Аракавы. Сетка  $32^2$ .  $CFL=0,2$ .  $T=0, 96$ .

Порядок сходимости схемы «КАБАРЕ». Уолш в 1992 году [94] получил семейство собственных функций уравнения Навье-Стокса, основываясь на обобщении вихрей Тейлора-Грина в периодической области  $[0, 2\pi]^2$ . Для всех целых пар  $(m, n)$  удовлетворяющих условию  $\lambda = -(m^2 + n^2)$ , семейство

собственных функций можно построить как линейную комбинацию функций тока:

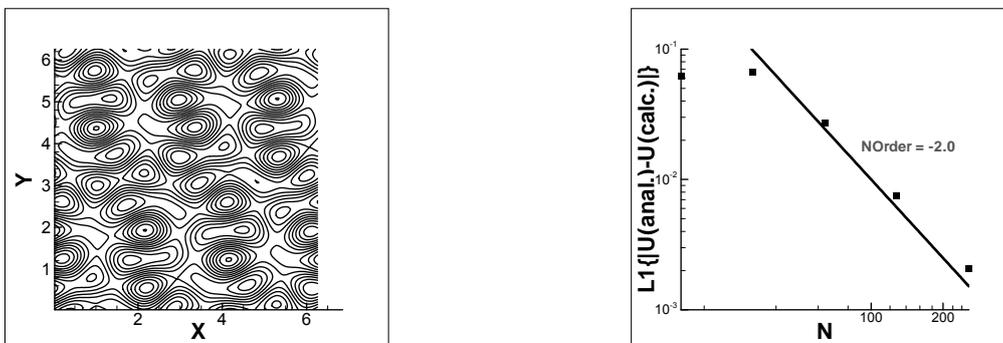
$$\cos(mx)\cos(ny), \sin(mx)\cos(ny), \cos(mx)\sin(ny), \sin(mx)\sin(ny) \quad (3.43)$$

Взяв за начальные условия  $\vec{u}' = (\psi_y, -\psi_x)$ ,  $\Delta p' = -2\{u'_1, u'_2\}$  (давление должно уравновешивать  $2m$  и  $2n$  гармоники, следующие из квадратичного члена уравнения Навье-Стокса), где  $\{\alpha, \beta\} \equiv \alpha_y \beta_x - \alpha_x \beta_y$  – скобки Пуассона, решение уравнения Навье-Стокса можно определить как  $\vec{u}(\vec{x}, t) = e^{\nu \lambda t} \cdot \vec{u}'(\vec{x})$ . На рисунке 3.10 изображено поле завихренности для случая, предложенного Уолшем:

$$\psi = (1/4)\cos(3x)\sin(4y) - (1/5)\cos(5y) - (1/5)\sin(5x) \quad (3.44)$$

Интересно получить решения на больших временах. Для этого введем относительно большую фоновую скорость  $\vec{u}_0$ . Тогда решением будет:  $\vec{u}(\vec{x}, t) = \vec{u}_0 + e^{\nu \lambda t} \cdot \vec{u}'[\vec{x} - \vec{u}_0 \cdot t]$ . Варьируя  $\vec{u}_0$ , можно переносить решение на значительное число характерных длин до того, как собственные функции затухнут.

На рисунке 3.13 приведены справа ошибки в норме  $L_1$  для решения, приведенного слева [92]. Вязкость  $\nu = 0.05$  и фоновая скорость  $\vec{u}_0 = (16; 5)$ . Решение сносится на  $L \approx 25l$  (где  $l = 2\pi/5$  – характерный пространственный масштаб) к конечному моменту времени  $t = 2$ .



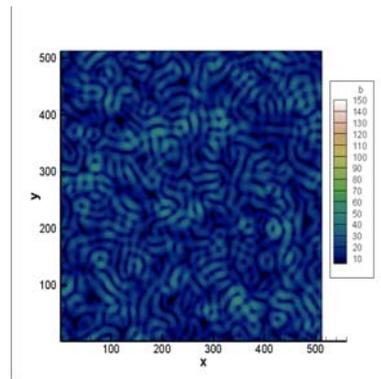
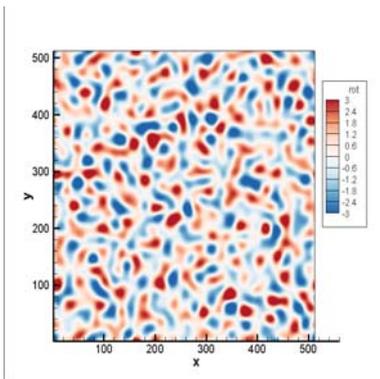
**Рис. 3.13.** Результаты моделирования вихревого течения: (левый) поле завихренности к моменту времени  $t=2$  для  $N=128$ , и (правый) ошибки в норме  $L_1$  в зависимости от  $N$  при

фиксированном шаге  $\tau = 10^{-4}$ .

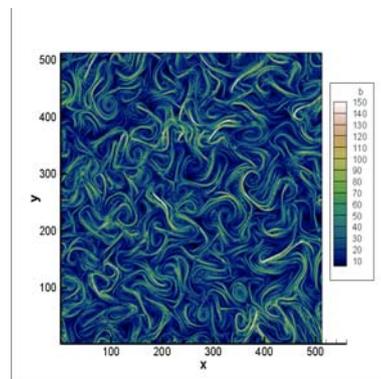
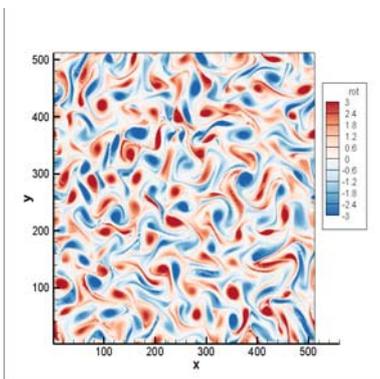
Из рисунков виден второй порядок сходимости схемы «КАБАРЕ» при измельчении сетки ( $N=16, 32, 64, 128, 256$ ) при фиксированном шаге по времени.

### *Моделирование затухающей однородной изотропной турбулентности*

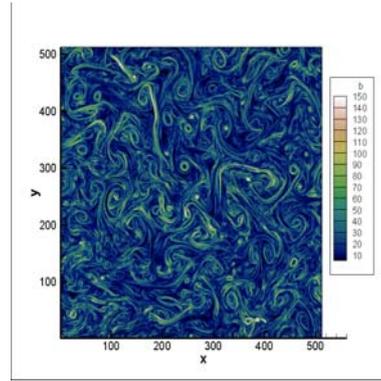
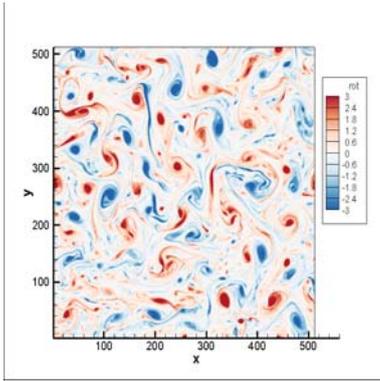
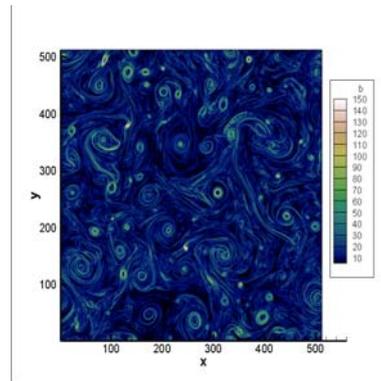
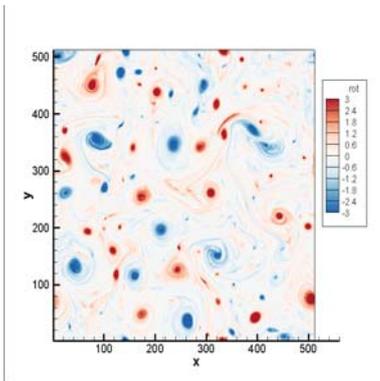
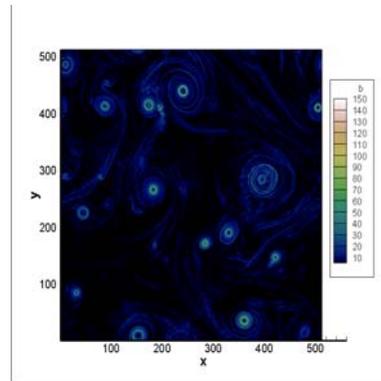
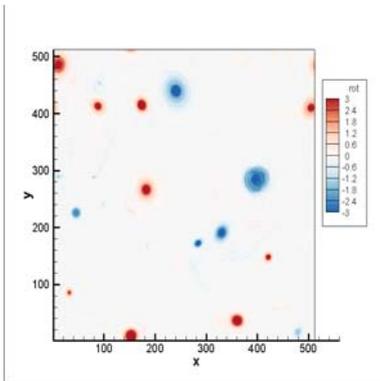
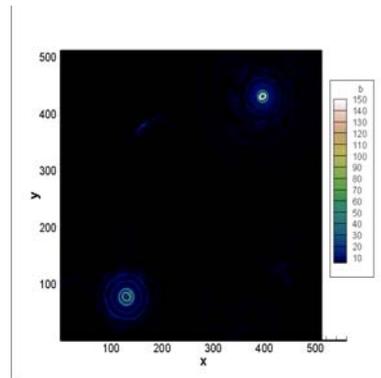
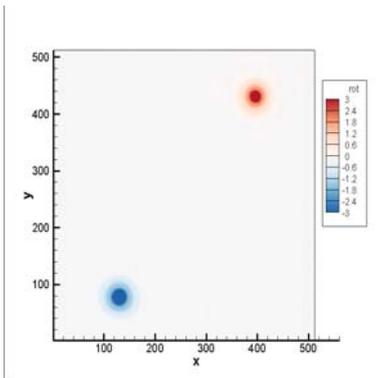
Вначале рассмотрим вопросы, связанные с моделированием свободно затухающей однородной изотропной турбулентности. На серии рисунков 3.14 показана эволюция поля завихренности  $\omega_z$  и модуля завихренности  $|\vec{B}|$  в задаче со случайным полем скоростей (1.25). Вязкость  $\nu = 0$ , сетка  $512^2$ , число Куранта  $CFL = 0.3$ .



$T=0$



$T=4$

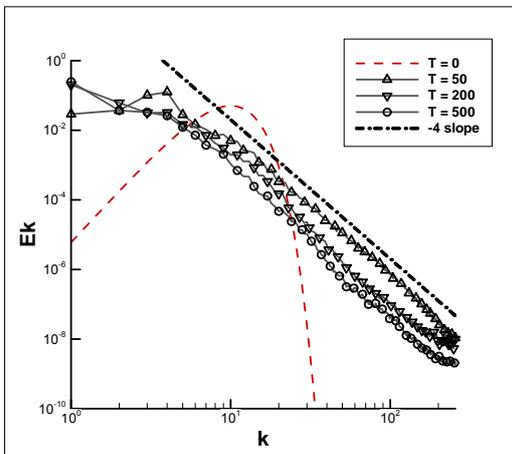
 $T=20$  $T=48$  $T=240$ 

$$T=1680$$

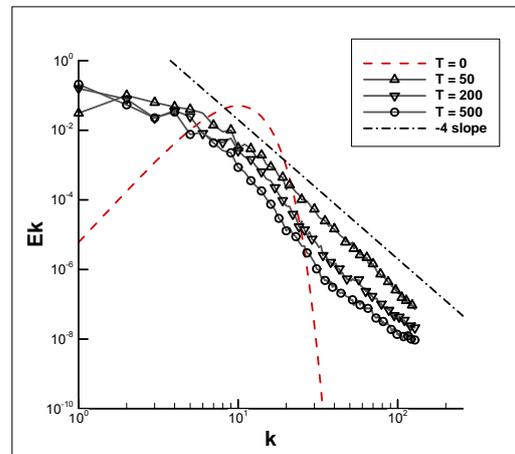
**Рис. 3.14.** Эволюция поля завихренности (слева) и дизавихренности (справа) в задаче о свободно затухающей однородной изотропной двумерной турбулентности

Происходит интенсивное слияние вихрей одного знака (конденсация) до образования устойчивой конфигурации, состоящей из двух противоположных по знаку крупных вихрей. Такое поведение говорит о том, что в системе существует каскад энергии, направленный от структур с меньшими размерами к структурам с большими размерами.

Величина дизавихренности на линиях разрыва (филаментах или нитях) возрастает в начальные моменты времени на порядок. Визуально, филаменты распределены в пространстве без каких-либо выделенных направлений, т.е. практически изотропно. Как обсуждалось во второй главе диссертации при изотропном распределении линий разрыва завихренности формируются спектры с наклоном «-4» (Саффман [85]). На серии рисунков 3.15 приводятся спектры турбулентности на разных расчетных сетках  $512^2$ ,  $256^2$ ,  $128^2$ ,  $64^2$ .



$512^2$



$256^2$

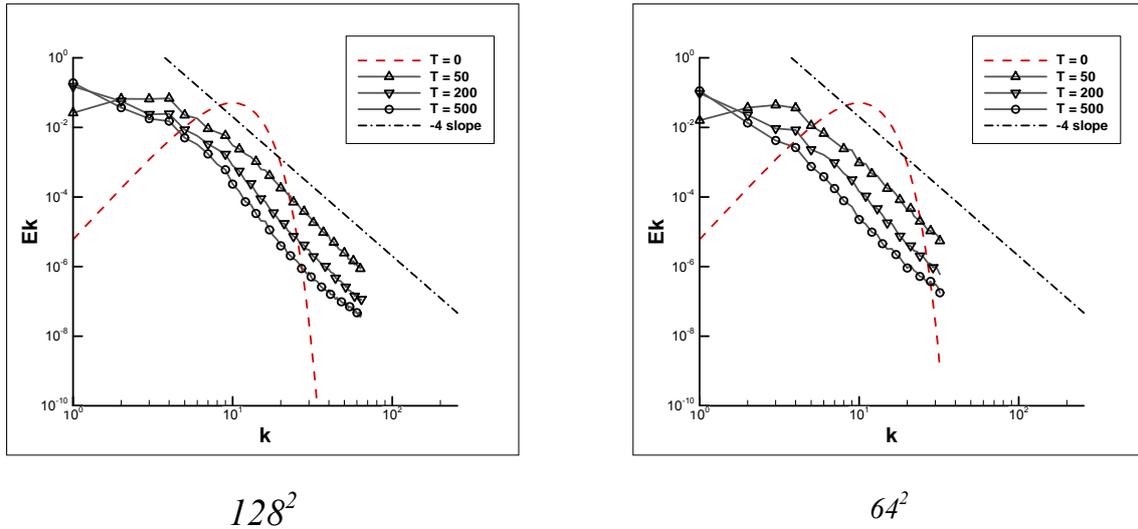


Рис. 3.15. Спектры турбулентности по схеме «КАБАРЕ» на разных сетках осредненные по 10 реализациям

Спектры сохраняют наклон близкий к «-4» на всех сетках вплоть до частоты Найквиста. Схемы, использующие искусственную вязкость для подавления нелинейной неустойчивости, таким свойством не обладают. К примеру, по схеме «Аракavy» минимально необходимая вязкость приводит к загибам спектров вниз (рис. 3.16).

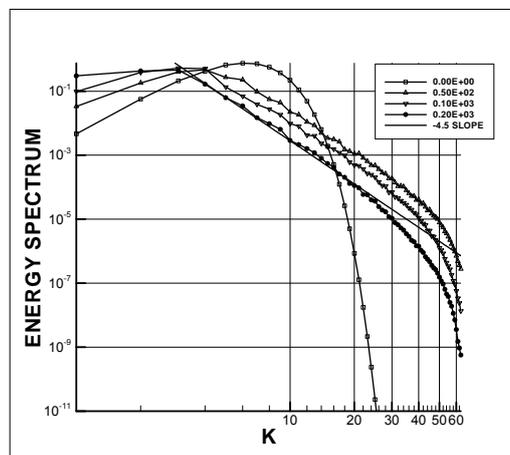


Рис. 3.16. Спектры турбулентности по схеме «Аракavy» с искусственной вязкостью

Оказывается, по схеме «КАБАРЕ» можно получить и спектры с наклоном «-3» (теория KLB) [92], если в формуле (3.29) положить  $\alpha = 0$ , а не  $\alpha = 1$  (рис. 3.17).

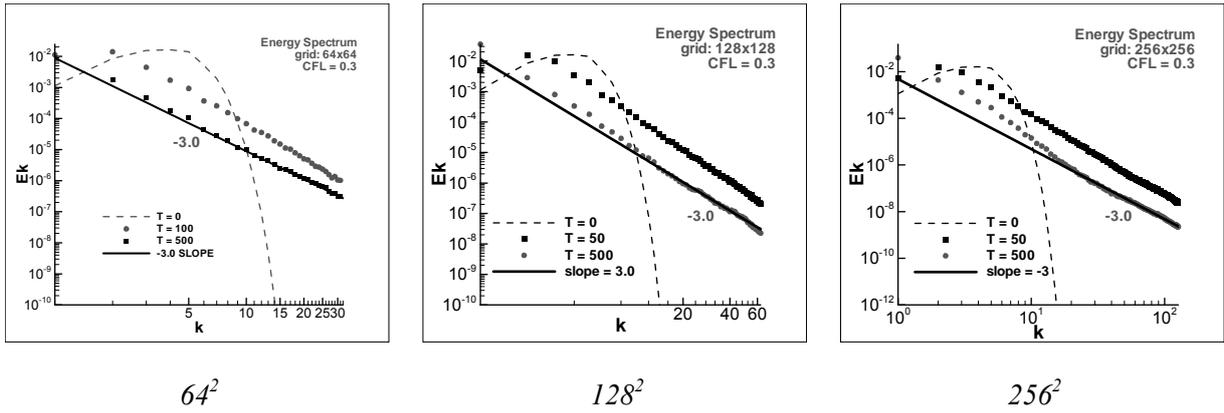


Рис. 3.17. Спектры турбулентности по схеме «КАБАРЕ» на разных сетках осредненные по 10 реализациям

В этом случае наклоны структурных функций также совпадают с размерностной теорией KLB  $S_q(l) \sim \chi^{q/3} l^q$  (рис. 3.18).

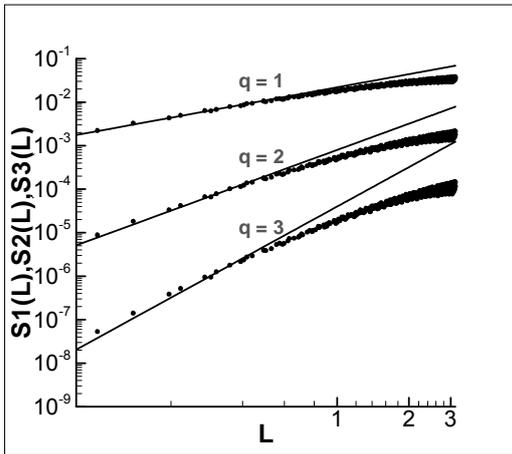


Рис. 3.18. Структурные функции первых трех порядков

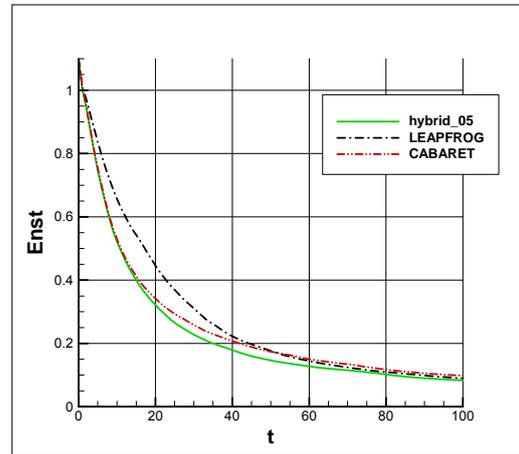


Рис. 3.19. Зависимость энтропии от времени по схемам «КАБАРЕ», «LEAPFROG», «hybrid\_05»

В схеме «двухслойный крест» спектры ложатся на прямую с наклоном от «-3» до «-3.5». На самых грубых сетках спектры немного загибаются вверх (рис. 3.20).

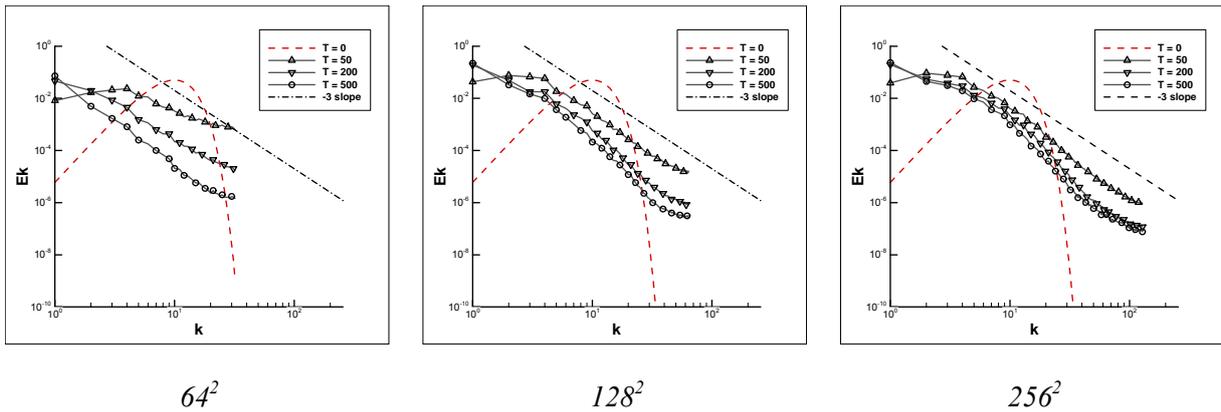


Рис. 3.20. Спектры турбулентности по схеме «двухслойный крест» на разных сетках осредненные по 10 реализациям

По наиболее диссипативной схеме «*hybrid\_05*» наклоны спектров, наоборот, увеличиваются до «-5» (рис. 3.21).

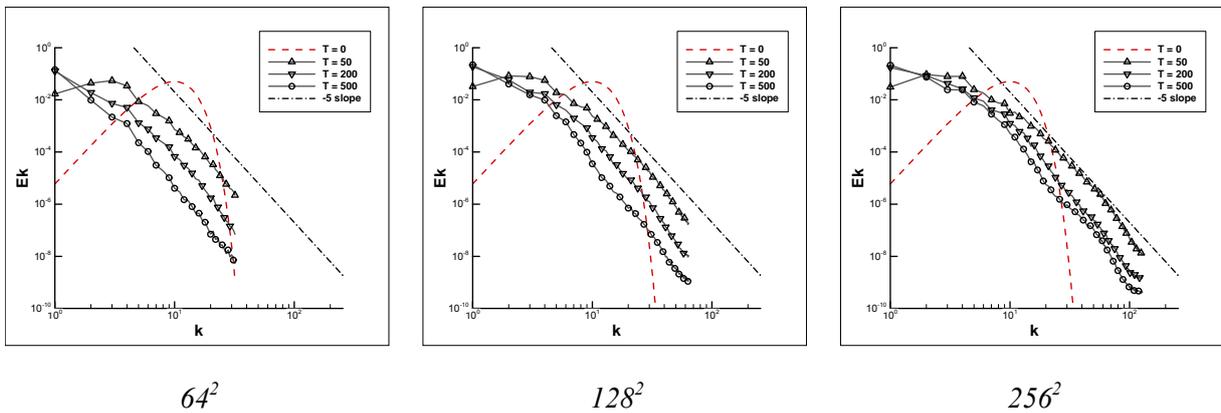


Рис. 3.21. Спектры турбулентности по схеме «*hybrid\_05*» на разных сетках осредненные по 10 реализациям

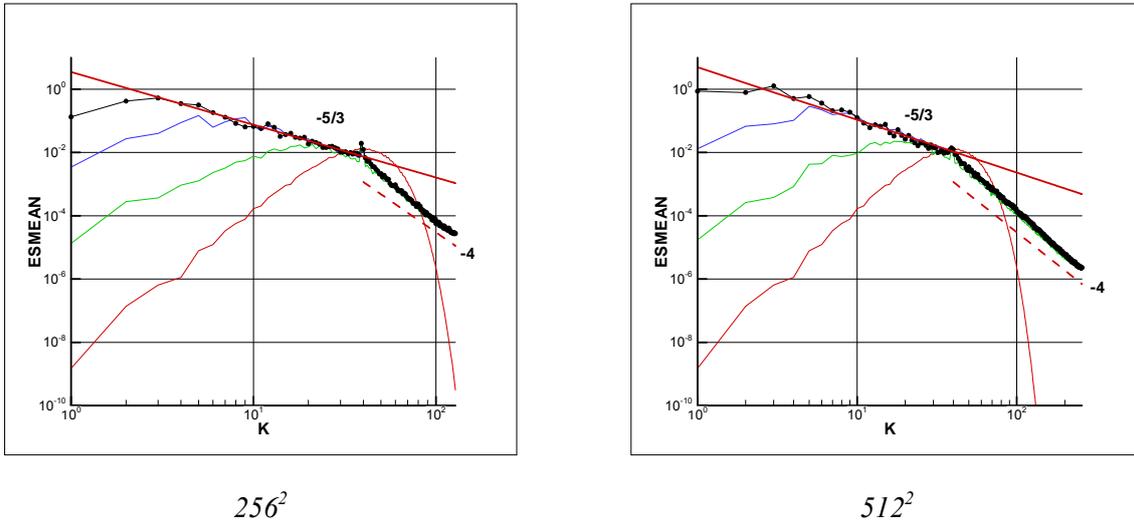
Сравнение убывания энтропии от времени по этим схемам представлено на рисунке 3.19 (сетка  $128^2$ ). Видно, что гибридная схема наиболее диссипативна, а схема «двухслойный крест» наименее.

### Форсинг. Моделирование обратного энергетического каскада

Рассмотрим ту же задачу с форсингом, т.е. с «подкачкой» в систему энергии и энтропии. Пусть начальная спектральная кривая имеет максимум не на 10 гармонике, а на 40. Это делается специально, чтобы пронаблюдать формирование обратного каскада. Будем удерживать на каждом шаге по времени величину амплитуд гармоник с модулем волнового вектора равным 40. В этом и будет заключаться форсинг. Большая часть поступающей энергии перетекает в сторону

низких частот, и накапливается на самой низкой гармонике, а вводимая энстрофия перетекает к частоте Найквиста и уводится на подсеточный уровень с помощью схемной диссипации.

На рисунке 3.22 приводится результат расчета турбулентности с форсингом по схеме «КАБАРЕ» на двух сетках  $256^2$  и  $512^2$ .



**Рис. 3.22.** Спектры турбулентности с форсингом (схема «КАБАРЕ»)

В области  $1 < k < 40$  формируется обратный энергетический каскад с наклоном « $-5/3$ » соответствии с законом Колмогорова. В области  $40 < k < k_{\max}$  прямой энстрофийный каскад с наклоном « $-4$ » (Саффман).

## Глава 4. Трехмерные течения

Алгоритм схемы «КАБАРЕ» для трехмерного случая отличается от двумерного только наличием 3-его измерения, поэтому не будем его здесь приводить. Все тестовые расчеты проводятся в наиболее простой геометрии (куб со стороной  $2\pi$  и периодическими граничными условиями). Сетка также максимально простая – структурированная, равномерная, ортогональная. Расчетный код был распараллелен с помощью технологии MPI. Для спектрального метода решения уравнения Пуассона использовалась процедура БПФ из кластерной библиотеки Intel MKL. Основные расчеты проводились на суперкомпьютере «Ломоносов» (МГУ). Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2012618645.

### *Вихрь Рэнкина*

Рассмотрим в качестве начальных данных колоннообразный вихрь Рэнкина [48]:

$$\begin{cases} u_\varphi(r) = \frac{\omega_0 r_0}{2} \cdot \frac{r_0}{r}, & r > a \\ u_\varphi(r) = \frac{\omega_0 r}{2}, & r \leq a \\ u_r(r) = 0 \\ u_z(r) = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

где  $\omega_0$  – постоянная завихренность внутри ядра вихря радиуса  $a$ . Известно, что колоннообразный вихрь с линейным распределением азимутальной скорости (твердотельное вращение) устойчив к любым малым возмущениям и в нём могут распространяться лишь нейтральные (инерционные) волны [48]. Модель вихря Рэнкина представляющая собой комбинацию твердотельного вращения и потенциального течения вне ядра, для многих задач является хорошим приближением при описании реальных колоннообразных вихрей и вихревых

нитей. Кельвин (1880) продемонстрировал, что вихрь Рэнкина тоже устойчив к малым возмущениям как осесимметричной, так и спиральных мод. Неустойчивость развивается лишь при наложении аксиального течения в ядре (Chandrasekhar 1961, Krishnamoorthy 1966).

На рисунке 4.1 показаны изоповерхности завихренности в начальный момент времени и через 100 периодов обращения по схеме «КАБАРЕ». Параметры вихря:  $\omega_0 = 1$ ,  $a = 0.5$  (5 точек на диаметр),  $T = 4\pi / \omega = 4\pi$  (период обращения).

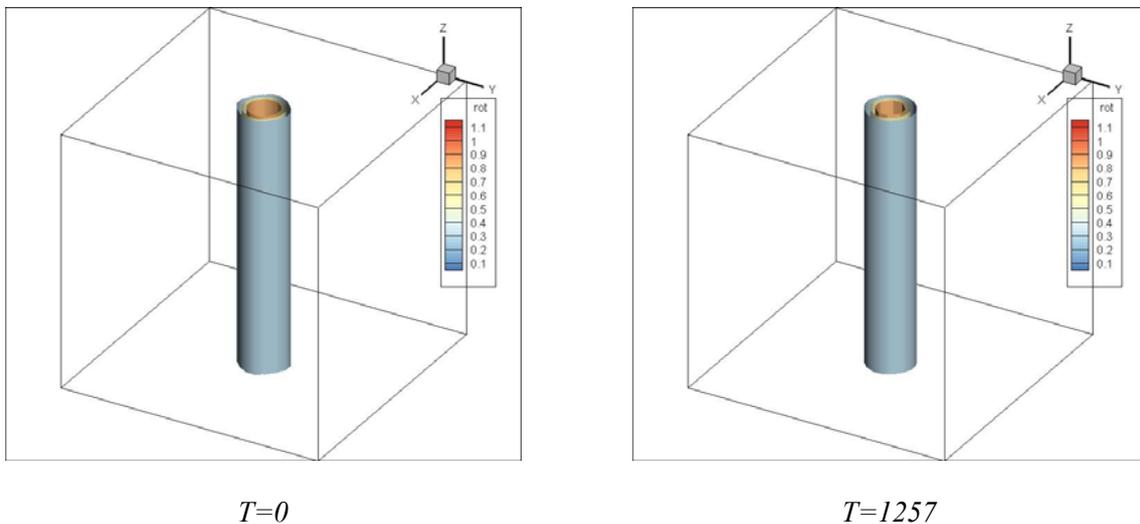


Рис. 4.1. Изоповерхности завихренности вихря Рэнкина. Схема «КАБАРЕ». 32<sup>3</sup>

Зависимость кинетической энергии от времени показана на рисунке 4.2.

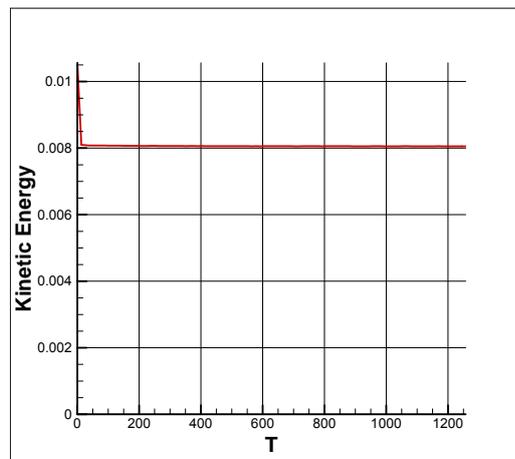


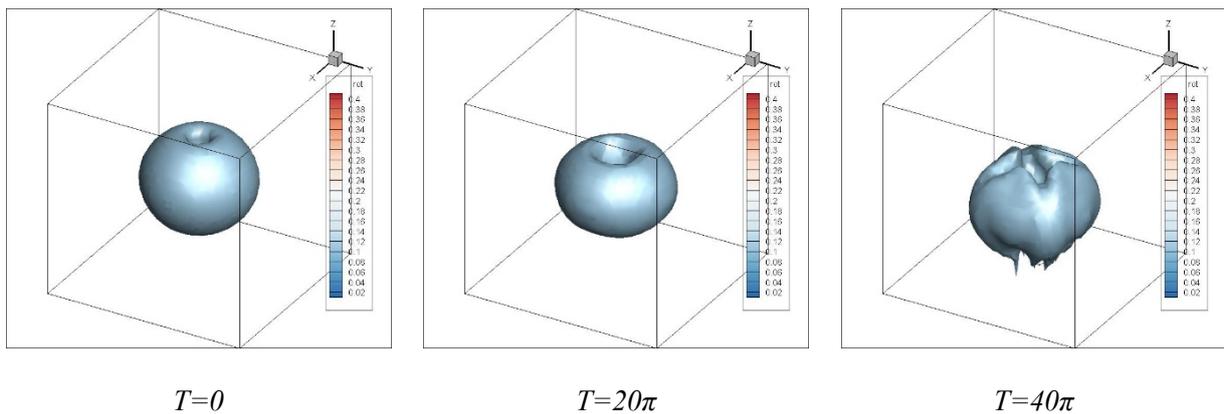
Рис. 4.2. Зависимость кинетической энергии от времени

### Сферический вихрь Хилла

Вихревые кольца – другой тип вихрей широко встречающихся в обыденной жизни. Простейшей моделью вихревого кольца является сферический вихрь Хилла [48]. Рассмотрим следующую задачу. Пусть область завихренной жидкости заключена внутри сферы радиуса  $a$ , движущейся с постоянной поступательной скоростью  $U$ . Вихревые линии являются концентрическими окружностями с общей осью, проходящей через центр сферы, а линии тока лежат в меридиональных плоскостях. Вне сферы движение потенциально.

$$\begin{cases} u_r = \frac{3}{2}U \frac{rz}{a^2}, u_z = \frac{3}{2}U \left(1 - \frac{2r^2 + z^2}{a^2}\right) + U, & r^2 + z^2 < a^2 \\ u_r = \frac{3}{2}U \frac{rz}{a^2} \left(\frac{a^2}{r^2 + z^2}\right)^{5/2}, u_z = U \left[ \left(\frac{a^2}{r^2 + z^2}\right)^{5/2} \frac{2z^2 - r^2}{2a^2} - 1 \right] + U, & r^2 + z^2 > a^2 \\ u_\varphi = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

Пусть  $a = \pi/2$ ,  $U = 0.1$ ,  $\nu = 0$ . Время одного «пролёта» вихря вдоль оси  $z$ :  $\Delta T = 20\pi$ . На рисунке 4.3 показаны изоповерхности поля завихренности в моменты времени кратные трансляционному периоду.



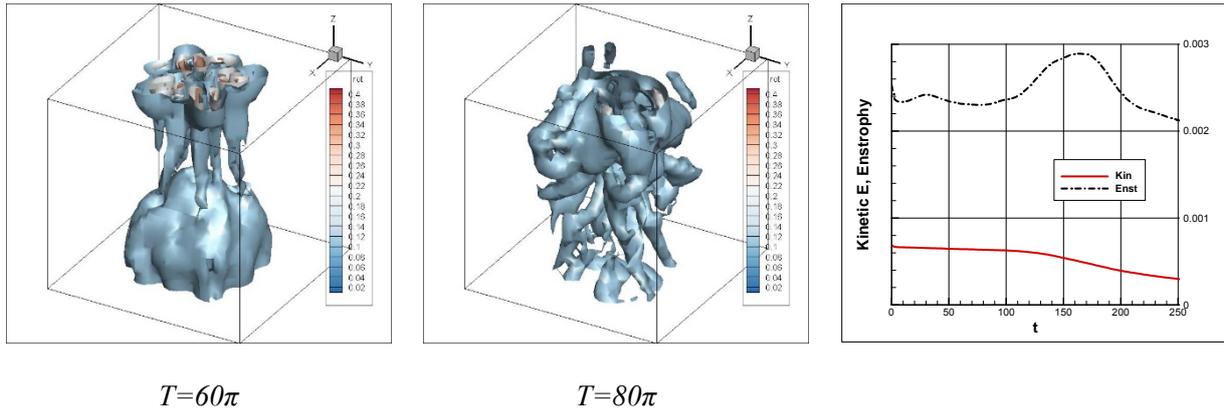


Рис. 4.3. Изоповерхности завихренности вихря Хилла. Схема «КАБАРЕ».  $32^3$

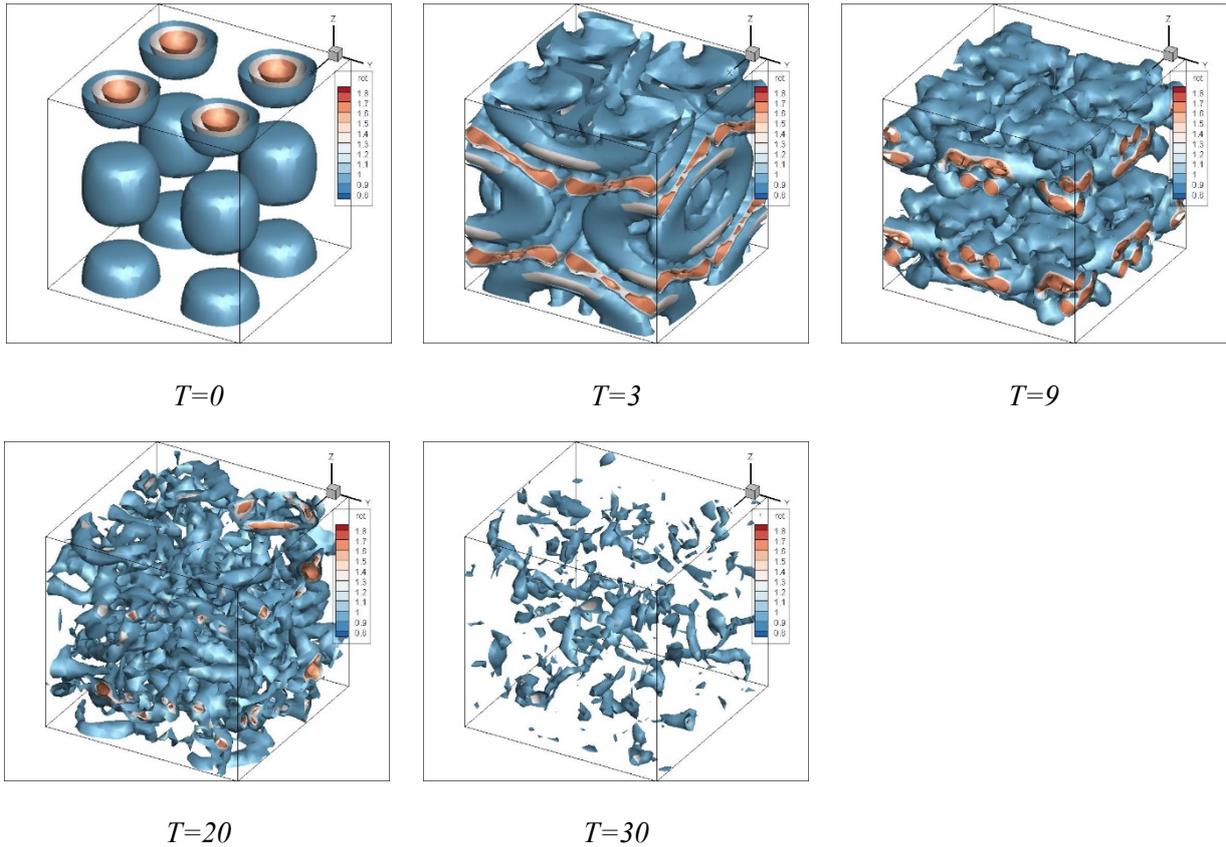
Вихрь совершает примерно два пролёта и начинает разваливаться (турбулизоваться). Происходит возбуждение меньших масштабов в процессе растяжения вихревых трубок, что приводит к росту энстрофии и ускорению диссипации кинетической энергии. На последнем рисунке приведены расчеты кинетической энергии и энстрофии вихря.

### ***Вихрь Тейлора-Грина***

Как видно из примера с вихрем Хилла, в процессе распада неустойчивых вихревых структур происходит возбуждение малых масштабов и формирование энергетического каскада. В литературе широко распространен подход моделирования затухающей турбулентности, порождаемой распадом неустойчивых вихрей. Наиболее популярен в этом плане одночастотный вихрь Тейлора-Грина [95-97]:

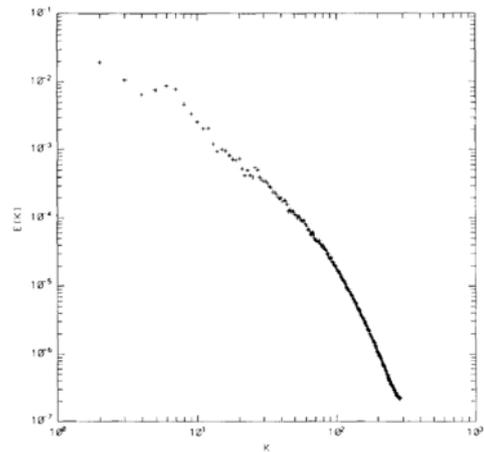
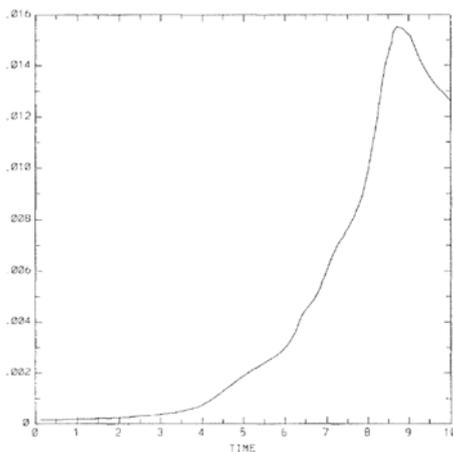
$$\begin{cases} u_x = \sin(x)\cos(y)\cos(z) \\ u_y = -\cos(x)\sin(y)\cos(z) \\ u_z = 0 \\ p = p_0 + \frac{1}{16}(\cos(2x) + \cos(2y))(\cos(2z) + 2) \end{cases} \quad (4.3)$$

На рисунке 4.4 показаны изоповерхности поля модуля завихренности по схеме «КАБАРЕ» на сетке  $32^3$ .



**Рис. 4.4.** *Изоповерхности завихренности вихря Тейлора-Грина. Схема «КАБАРЕ».  $32^3$*

В работе [97] проводится прямое численное моделирование однородной изотропной турбулентности, порождаемой развалом вихря Тейлора-Грина. Расчетная сетка  $864^3$ . Число Рейнольдса (обратная вязкость  $Re = 1/\nu$ ) равно  $Re = 5000$ . Для расчета используется спектральный метод. На рисунке 4.5 приведены результаты DNS-расчета – скорость диссипации кинетической энергии  $\varepsilon(t) = 2\nu\Omega(t)$  (a) и энергетический спектр (b).



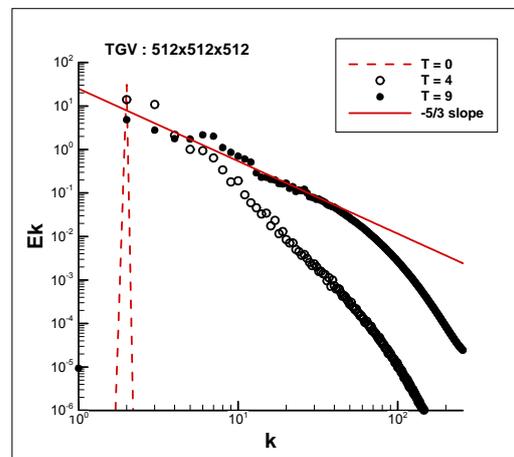
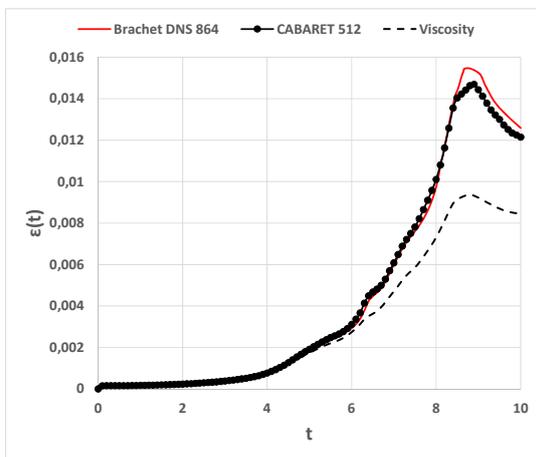
а

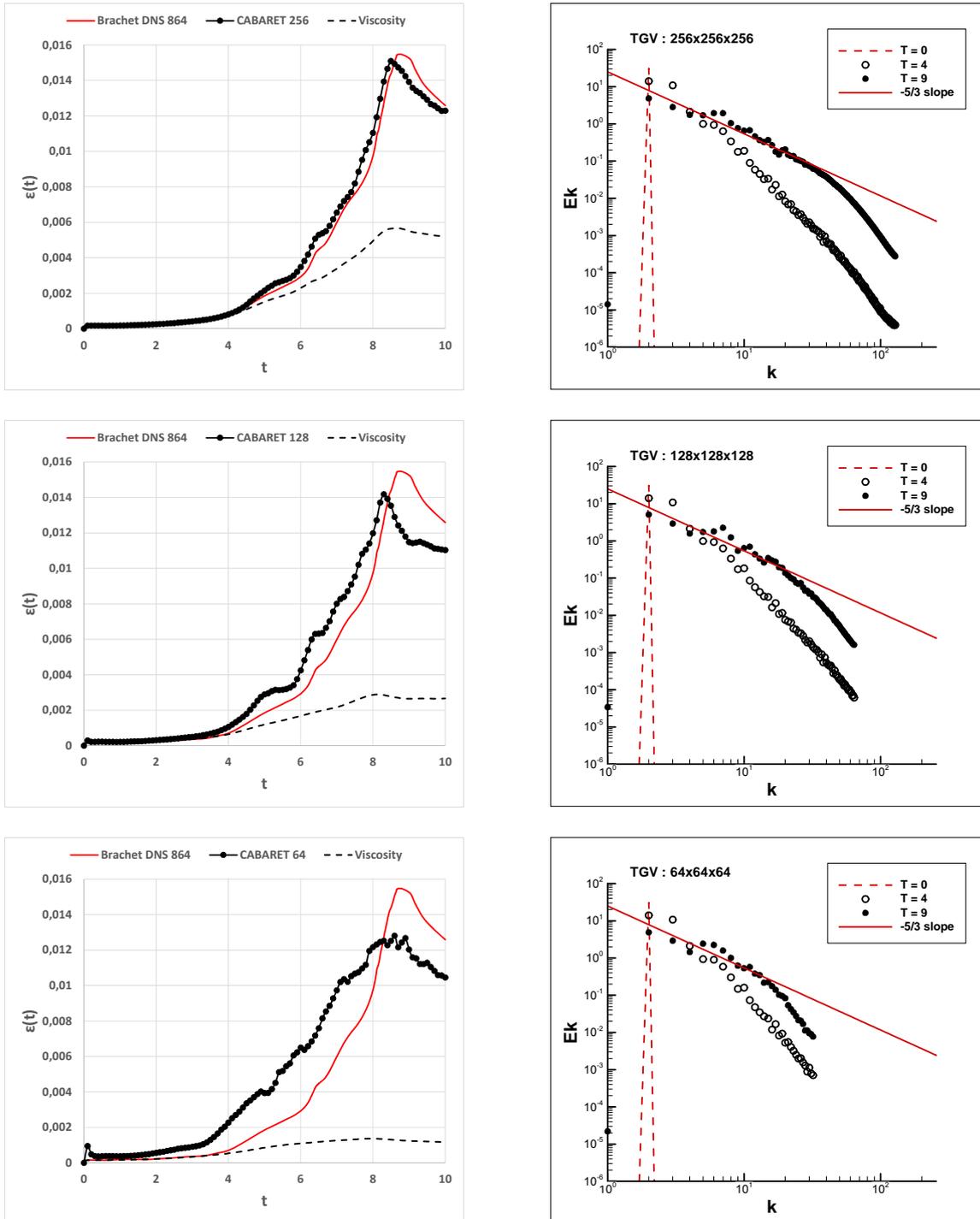
б

**Рис. 4.5.** (а) – скорость диссипации кинетической энергии; (б) – энергетический спектр. DNS моделирование вихря Тейлора-Грина (Brachet 1991)

Максимум кривой скорости диссипации примерно соответствует моменту времени  $t \approx 9$ . До этого момента происходит процесс возбуждения высоких частот, а после – постепенная диссипация энергии турбулентности в тепло. Энергетический спектр строится как раз в момент времени  $t = 9$ . Из рисунка видно, что инерционный интервал, с наклоном близким к « $-5/3$ », переходит в диссипативный интервал в районе 70-ой гармоники. Ещё можно отметить небольшой локальный максимум в спектре на гармонике  $k = 6$ . Будем использовать данные результаты как эталонные решения задачи.

На рисунке 4.6 показан расчет скорости диссипации кинетической энергии  $\varepsilon = -d_t E_{kin}$  и энергетического спектра на последовательности грубых сеток, не разрешающих полностью диссипативный интервал, по схеме «КАБАРЕ». Вязкость, как и в DNS расчете взята равной  $\nu = 1 / 5000$ .





**Рис. 4.6.** Скорость диссипации кинетической энергии (слева) и энергетический спектр (справа).  
Схема «КАБАРЕ»

Довольно хорошее совпадение результатов с DNS-расчетом можно наблюдать уже на сетке  $256^3$ . Кривая скорости диссипации хорошо ложится на DNS-расчет. В спектрах видны сформированные инерционные интервалы (с наклоном « $-5/3$ ») и даже локальные максимумы на гармонике  $k=6$ . Однако заметен и существенный недостаток решений: на сетке  $512^2$  загиб спектра вниз

начинается примерно с 60-ой гармоники, на сетке  $256^2$  с 45-ой, на сетке  $128^2$  с 25-ой, на  $64^2$  с 15-ой. Этот загиб не связан с действием молекулярной вязкости, которая оказывает влияние примерно с 70-ой гармоники, а связан со схемной диссипацией. Приведем расчеты спектров вообще без молекулярной вязкости на грубых сетках (рис. 4.7).

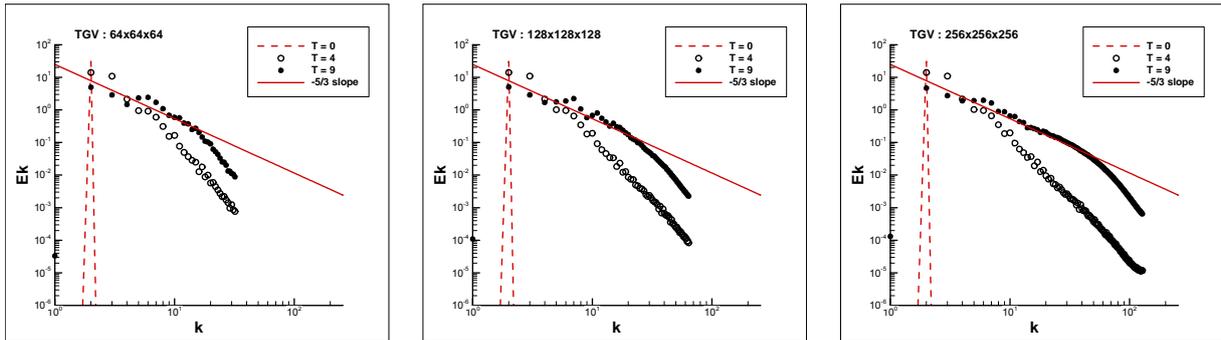
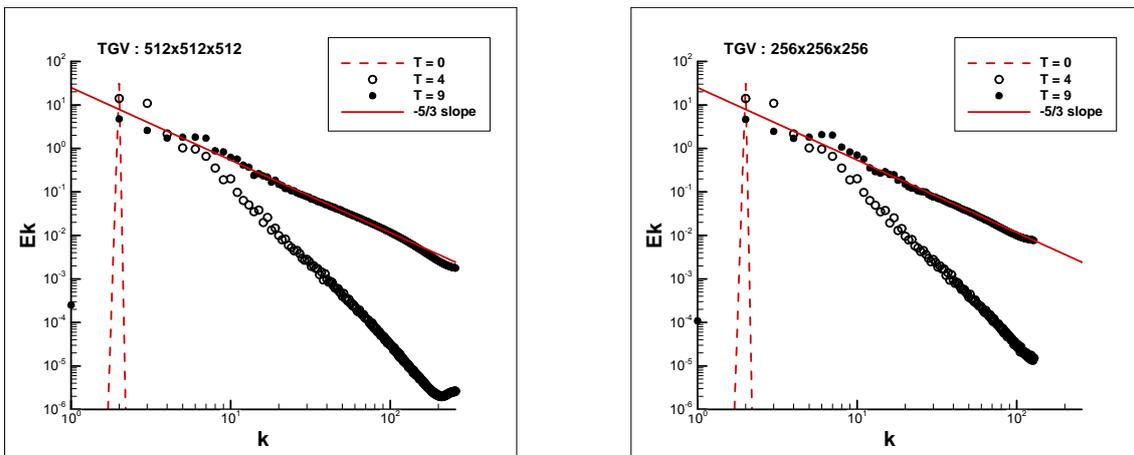


Рис. 4.7. Энергетические спектры по схеме «КАБАРЕ» без молекулярной вязкости

Из рисунков видно, что спектры загибаются вниз. Таким образом, в трехмерном случае схема «КАБАРЕ» не обладает свойством идеального LES алгоритма. Вихревые структуры, определенные менее чем на 5-6 узлах сетки испытывают сильное численное демпфирование.

Аналогичные результаты по схеме «двухслойный крест» без вязкости приведены на рис. 4.8.



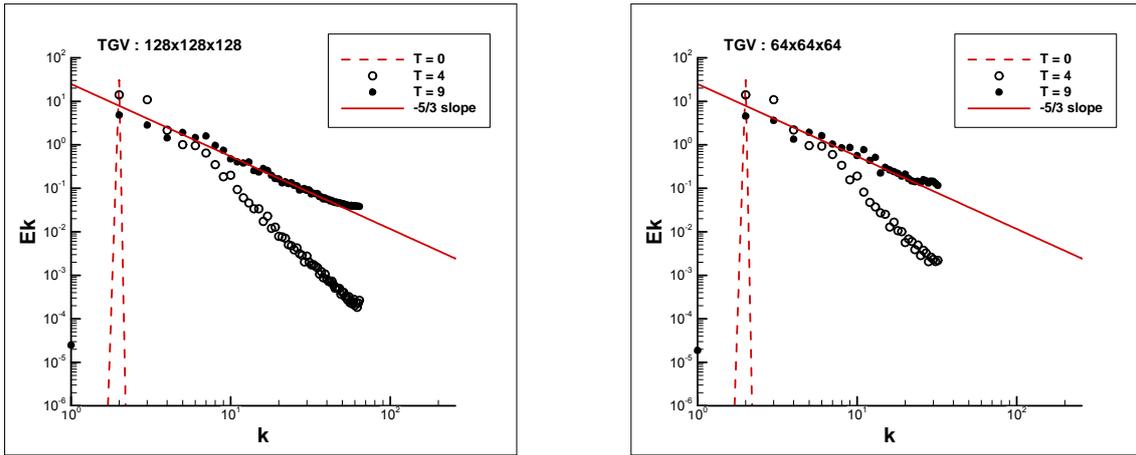


Рис. 4.8. Энергетические спектры по схеме «двухслойный крест» без молекулярной вязкости

Практически идеальные прямые спектры на всех сетках, как мы и надеялись получить в схеме «КАБАРЕ». Кривые скорости диссипации также хорошо ложатся на DNS-расчет (рис. 4.9).

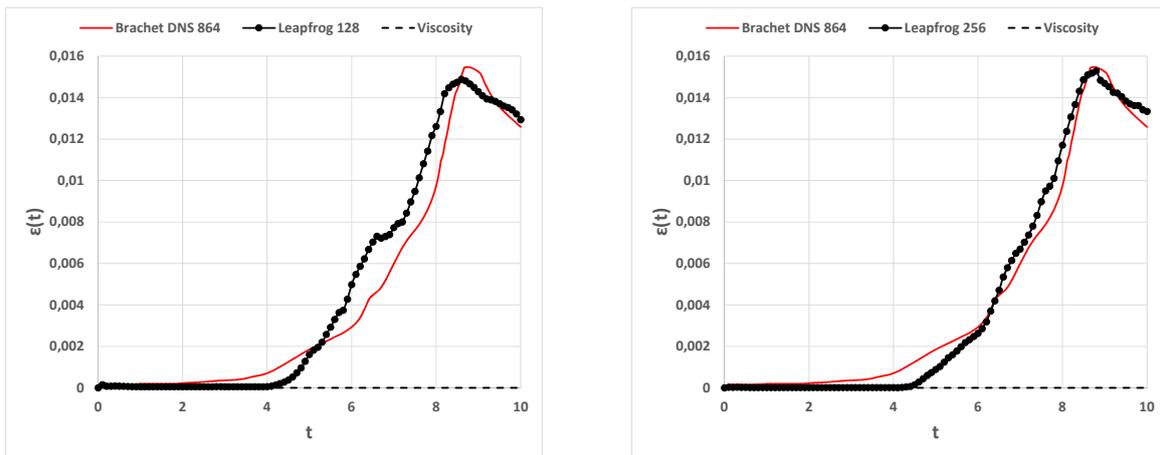
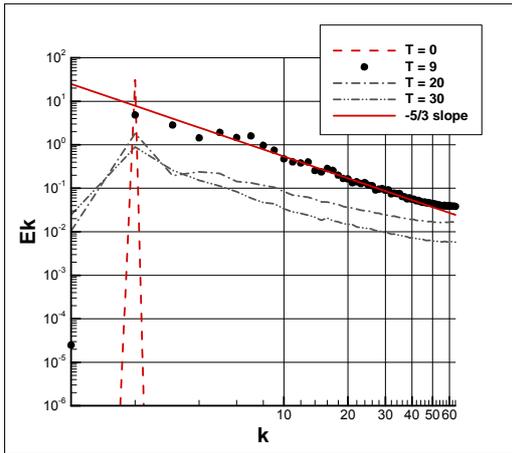
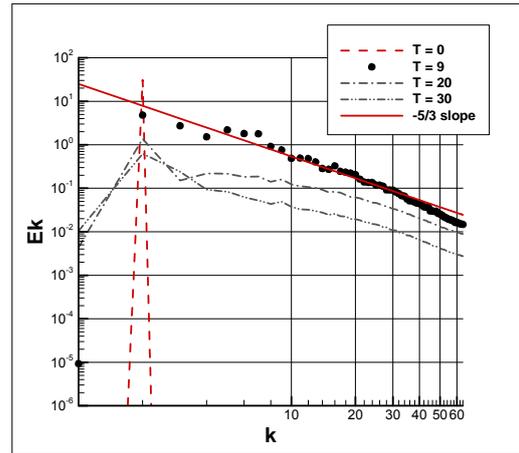


Рис. 4.9. Скорость диссипации кинетической энергии по схеме «двухслойный крест» без молекулярной вязкости

Однако, на более поздних временах  $T > 20$ , наблюдается небольшой загиб спектров вверх (рис. 4.10). Для того, чтобы детальнее изучить поведение хвостов спектров рассмотрим другой тест – задачу со случайным полем скоростей, где можно изменять начальные условия в широких пределах.



«Leapfrog»

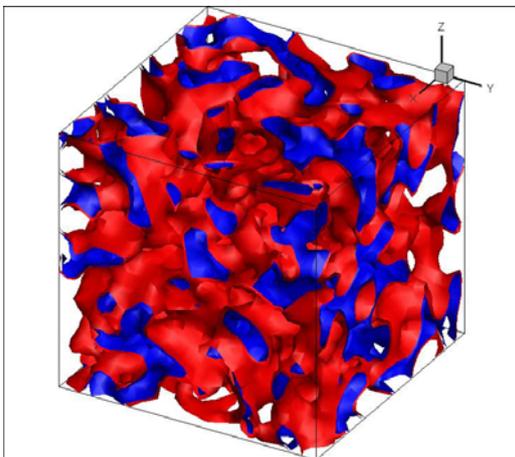
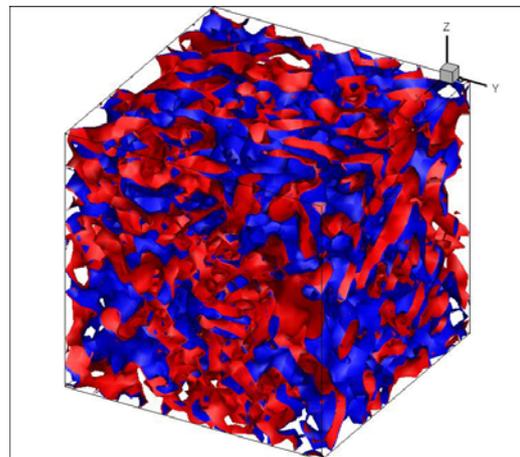


«hybrid\_09»

Рис. 4.10. Энергетические спектры на больших временах в задаче о вихре Тейлора-Грина. Сетка  $128^3$ .

### Случайное поле скоростей

В качестве начальных условий рассмотрим задачу со случайным полем скоростей (1.25)-(1.26). На рисунке 4.11 приведен пример эволюции случайного поля модуля завихренности во времени (сетка  $32^3$ ).

 $T=0$  $T=5$

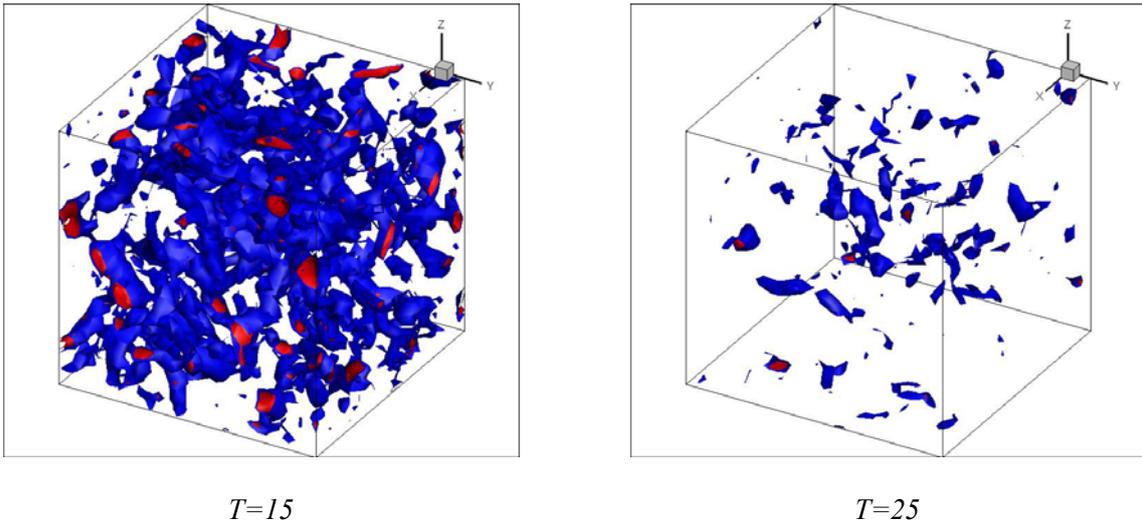


Рис. 4.11. Пример эволюции поля модуля завихренности во времени

На рисунке 4.12 показаны энергетические спектры на сетке  $64^3$  по схемам «двухслойный крест», «*hybrid\_09*», «КАБАРЕ». Вязкость равна нулю.

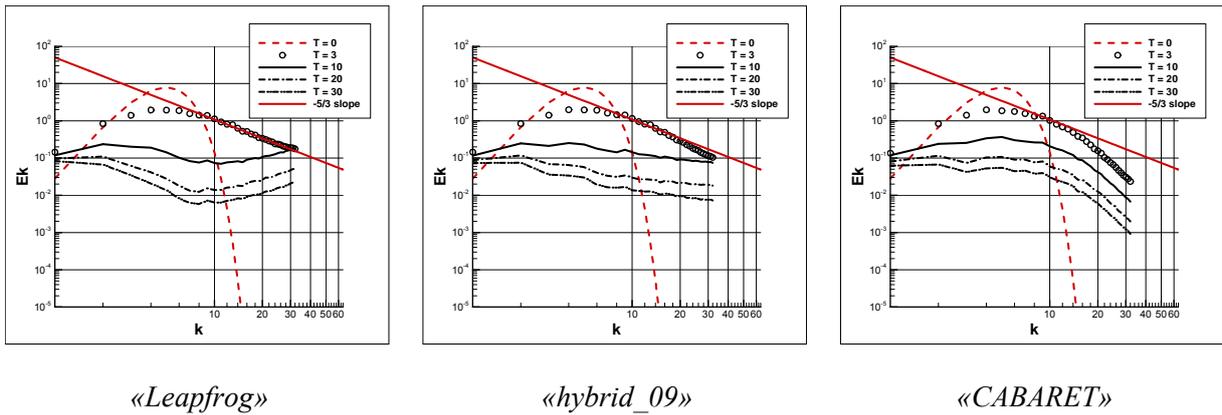
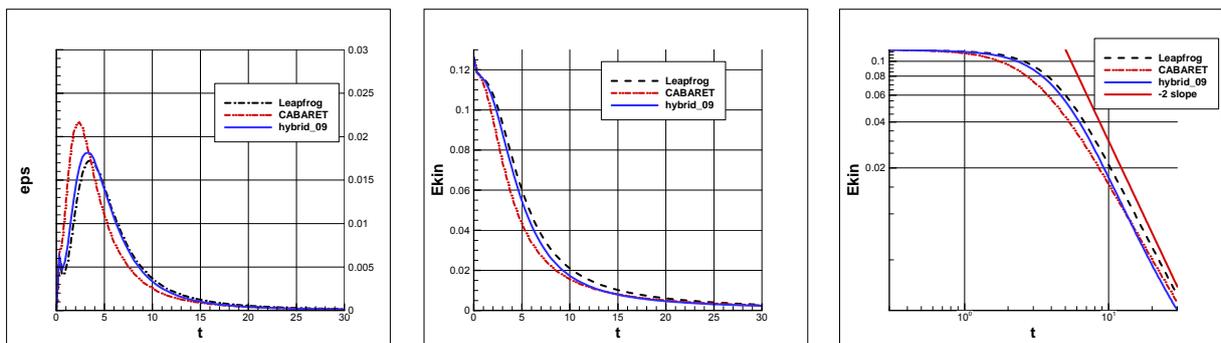


Рис. 4.12. Сравнение спектров на больших временах по схемам «двухслойный крест», «*hybrid\_09*» и «КАБАРЕ»

Момент времени  $T \approx 3$  соответствует максимуму в скорости диссипации кинетической энергии (рис. 4.13).

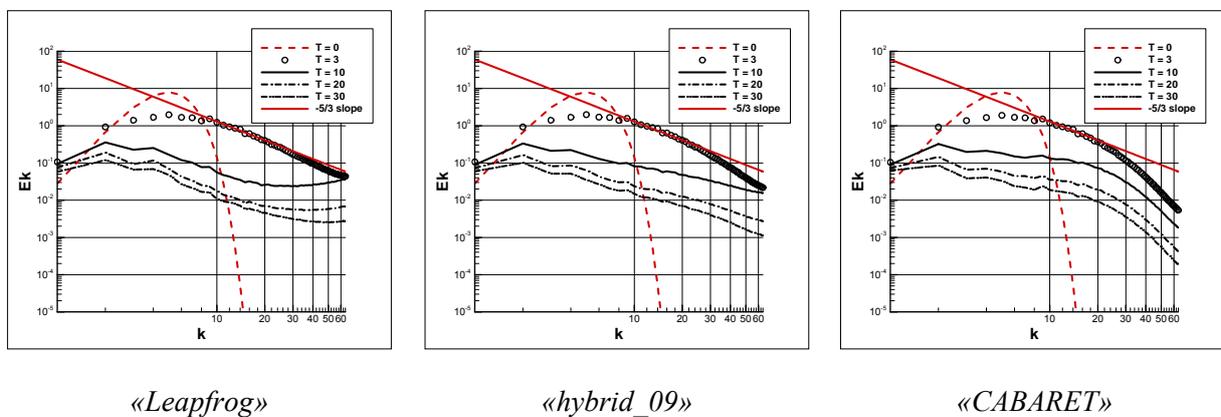


(a) (b) (c)

**Рис. 4.13.** (a) – скорость диссипации кинетической энергии, (b) – кинетическая энергия, (c) – логарифмический масштаб. Сетка  $64^3$ .

В этот момент времени спектр в схеме «двухслойный крест» практически идеально ложится на теоретический наклон. В более поздние моменты времени высокие частоты загибаются вверх. На них происходит накопление энергии каскада. Как известно из анализа, проведенного в Главе 1, схема «двухслойный крест» наименее диссипативная из всех рассматриваемых в данной работе схем. По всей видимости, «двухслойному кресту» как раз немного не хватает диссипации, чтобы правильно передавать энергетический каскад. Схемы, полученные в результате гибридизации «Креста» со схемой «КАБАРЕ», уже не обладают свойством бездиссипативности (в отсутствии коррекции), и позволяют управлять величиной схемной диссипации с помощью параметра гибридизации. Гибридная схема с одной стороны должна быть максимально близка к «двухслойному кресту», чтобы сохранить свойство идеального LES алгоритма, а с другой стороны уводить энергию на подсеточный уровень на больших временах без её накопления и чрезмерной диссипации на высоких гармониках. Наилучшие результаты достигаются при параметре гибридизации  $\alpha = 0.9$  (рис. 4.12).

Аналогичные результаты на сетке  $128^3$  представлены на рисунках 4.14 – 4.15.



**Рис. 4.14.** Сравнение спектров на больших временах по схемам «двухслойный крест», «hybrid\_09» и «КАБАРЕ». Сетка  $128^3$ .

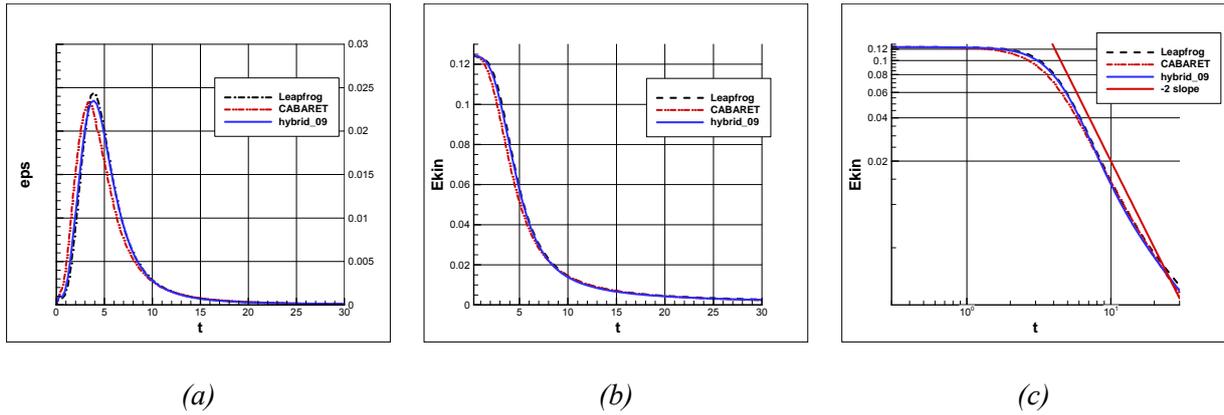


Рис. 4.15. (a) – скорость диссипации кинетической энергии, (b) – кинетическая энергия, (c) – логарифмический масштаб. Сетка  $128^3$ .

### Обобщенная константа Смагоринского

На рисунке 4.16 показан расчет обобщенной константы Смагоринского (0.10) для схем «КАБАРЕ», «hybrid\_09», «двухслойный крест» на сетках  $64^3$  и  $128^3$ .

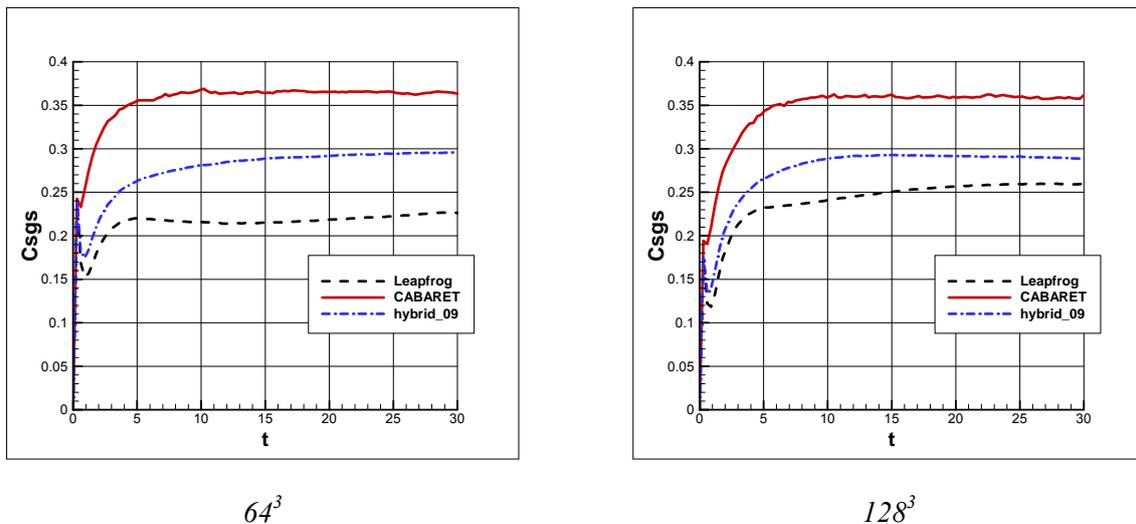


Рис. 4.16. Обобщенная константа Смагоринского в задаче со случайным полем скоростей

При оценке обобщенной константы Смагоринского ширина фильтра  $\Delta$  была взята равной шагу сетки  $h$ . В оригинальной статье [27], где была введена обобщенная константа Смагоринского, говорится, что  $\Delta \sim h$ , поэтому результаты могут немного отличаться. Тем не менее видно, что диссипация в схеме «двухслойный крест» лучше всего имитирует действие подсеточной модели Смагоринского ( $C_s \approx 0.2$ ). Схема «КАБАРЕ» наиболее диссипативная и дает

результаты близкие к другим схемам высокой разрешающей способности (MILES), описанным во введении.

### Влияние форсинга

Пусть приток энергии осуществляется на 5-ой гармонике, а на 1-ой гармонике осуществляется отвод энергии. На рисунке 4.17 приведены спектры на сетке  $64^3$  по всем трём схемам.

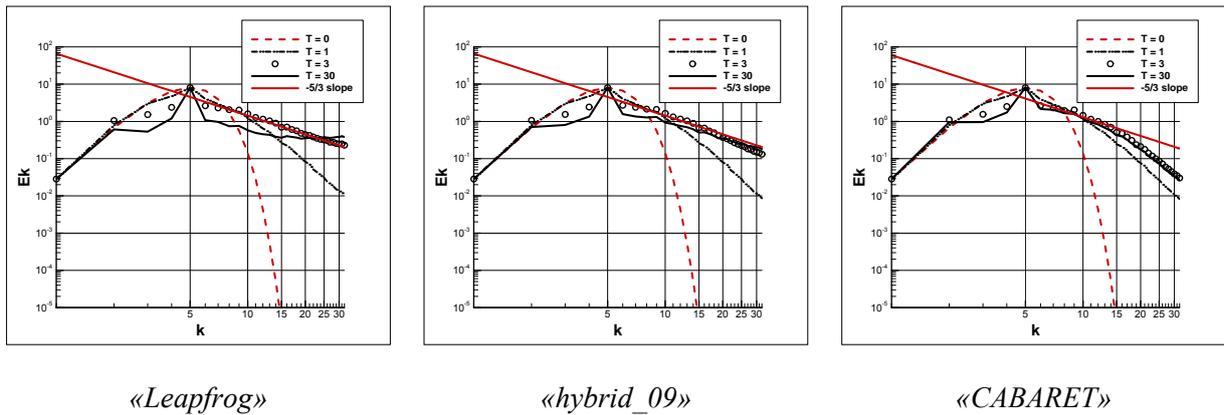


Рис. 4.17. Сравнение спектров при наличии форсинга. Сетка  $64^3$ .

Зависимость кинетической энергии от времени показана на рис. 4.18.

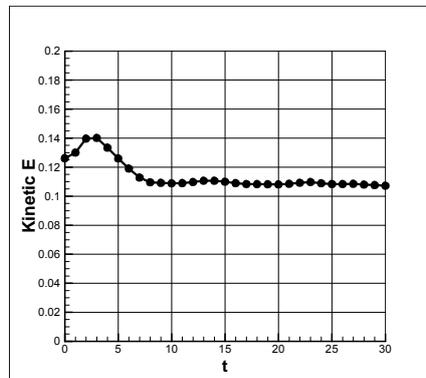
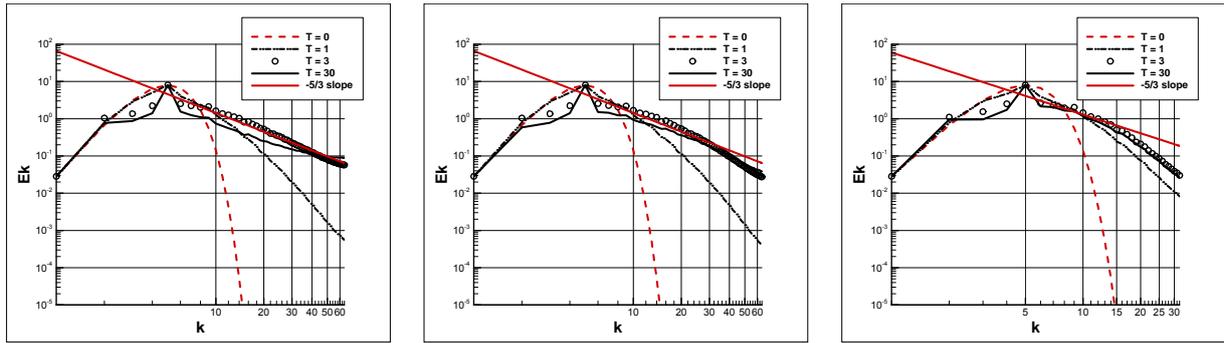


Рис. 4.18. Кинетическая энергия при наличии форсинга. Сетка  $64^3$ .

Аналогичные результаты на сетке  $128^3$  показаны на рисунке 4.19.



«Leapfrog»

«hybrid\_09»

«CABARET»

Рис. 4.19. Сравнение спектров при наличии форсинга. Сетка  $128^3$ .

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

### *Защищаемые положения*

1. Предложена консервативная форма представления схемы Крест посредством введения консервативных и потоковых переменных. По аналогии со схемой КАБАРЕ предложен алгоритм монотонизации потоковых переменных на основе принципа максимума, устраняющий нелинейную неустойчивость Филлипса.
2. Методика КАБАРЕ обобщена на случай несжимаемой жидкости в переменных «скорость-давление» и «завихренность-функция тока». Проведен сравнительный анализ решений в разных наборах переменных.
3. Разработан комплекс параллельных программ для моделирования уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости на ортогональных сетках (Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2012618645).
4. Исследованы свойства полученных алгоритмов на серии модельных задач. Проведено сравнение решений с популярными в литературе схемами Аракавы, WENO-5. Показано, что при моделировании стационарных одиночных вихрей схема КАБАРЕ обладает свойством бездиссипативности.
5. Сформулирована концепция Perfect LES-алгоритма. Разработана математическая модель, относящаяся к классу Implicit LES, для расчета течений со свободной турбулентностью, обладающая свойством Perfect LES-алгоритма.

### *Апробация работы*

Основные результаты работы докладывались и обсуждались на следующих научных семинарах и конференциях:

1. XI Школа молодых ученых ИБРАЭ РАН, доклад на тему «Надсеточное моделирование двумерных вихревых течений в несжимаемой жидкости в переменных вихрь-функция тока», Москва, ИБРАЭ РАН, 22-23 апреля 2010.

2. 53-я научная конференция МФТИ, доклад на тему «Схема КАБАРЕ для несжимаемой жидкости в переменных скорость давление», МФТИ, 22-29 ноября 2010.
3. XII Школа молодых ученых ИБРАЭ РАН, доклад на тему «Схема КАБАРЕ для несжимаемой жидкости», Москва, ИБРАЭ РАН, 28-29 апреля 2011.
4. XIV Всероссийская молодежная конференция-школа с международным участием «Современные проблемы математического моделирования», доклад на тему «Схема КАБАРЕ для несжимаемой жидкости», Абрау-Дюрсо, 12-17 сентября 2011.
5. XIII Школа молодых ученых ИБРАЭ РАН, доклад на тему «Методика КАБАРЕ на треугольных сетках», Москва, ИБРАЭ РАН, 26-27 апреля 2012.
6. XIV Школа молодых ученых ИБРАЭ РАН, доклад на тему «Схема КАБАРЕ для двухуровневой технологии расчетов задач флуктуационной гидродинамики», Москва, ИБРАЭ РАН, 25-26 апреля 2013.
7. SSTEMM 2013, Вторая международная конференция «Суперкомпьютерные технологии математического моделирования», доклад на тему «Computational modeling of multiscale problems of fluctuating hydrodynamics», Якутск, 8-11 июля 2013.
8. 11-ый Международный Междисциплинарный Семинар LPrM3-XI. Доклад на тему «Математическое моделирование задач флуктуационной гидродинамики с использованием алгоритмов следующего поколения», Черногория, г. Будва, 14-21 сентября 2013.
9. Научная конференция «Тихоновские чтения 2013», доклад на тему «Моделирование однородной изотропной турбулентности по схеме КАБАРЕ», Москва, ВМК МГУ, 28 октября - 1 ноября, 2013.

### *Публикации*

1. Глотов В.Ю., Данилин А.В. Надсеточное моделирование двумерных вихревых течений в несжимаемой жидкости в переменных вихрь-функция тока // Препринт №ИБРАЭ-2010-01. – М.: ИБРАЭ РАН, 2010. – 188 с.

2. Глотов В.Ю., Головизнин В.М. Схема КАБАРЕ для несжимаемой жидкости в переменных скорость-давление // Труды 53-й научной конференции МФТИ «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук», Часть VIII, Проблемы современной физики. – М.: МФТИ, 2010. – С. 119-121.
3. Глотов В.Ю. Схема КАБАРЕ для трехмерной несжимаемой жидкости // Препринт №IBRAE-2011-03. – М.: ИБРАЭ РАН, 2011. – 166 с.
4. Глотов В.Ю. Схема КАБАРЕ для несжимаемой жидкости // Труды XIV молодежной конференции-школы с международным участием «Современные проблемы математического моделирования». – Ростов-на-Дону: издательство Южного федерального университета, 2011. – С. 96-101.
5. Глотов В.Ю., Головизнин В.М. Схема КАБАРЕ для двумерной несжимаемой жидкости в переменных завихренность-функция тока // Математическое моделирование – 2011. – Т. 23, № 9 – С. 89-104.
6. Глотов В.Ю., Яковлев П.Г. Методика КАБАРЕ на треугольных сетках // Препринт №IBRAE-2012-02. – М.: ИБРАЭ РАН, 2012. – 146 с.
7. Глотов В.Ю. Схема КАБАРЕ для двухуровневой технологии расчетов задач флуктуационной гидродинамики // Препринт №IBRAE-2013-03. – М.: ИБРАЭ РАН, 2013. – 181 с.
8. Глотов В.Ю., Головизнин В.М. Схема КАБАРЕ для двумерной несжимаемой жидкости в переменных давление-скорость // Журнал вычислительной математики и математической физики – 2013. – Т. 53, № 6 – С.721-735.
9. Goloviznin V.M., Glotov V.Yu., Markesteijn A.P., Karabasov S.A. Computational modeling of multiscale problems of fluctuating hydrodynamics // Суперкомпьютерные технологии математического моделирования: Тез. докл. – Якутск: издательский дом СВФУ, 2013. – С. 29.
10. Глотов В.Ю., Головизнин В.М., Карабасов С.А., Маркештейн А.П. Математическое моделирование задач флуктуационной гидродинамики с использованием алгоритмов следующего поколения // 11-ый Международный

Междисциплинарный Семинар LPrM3-XI: Сборник тезисов – Будва, 2013 – С. 44.

11. Головизнин В.М., Глотов В.Ю. Моделирование однородной изотропной турбулентности по схеме КАБАРЕ // Сборник тезисов докладов научной конференции «Тихоновские чтения». – М.: МАКС Пресс, 2013. – 84 с.
12. Глотов В.Ю., Головизнин В.М., Карабасов С.А., Маркештейн А.П. Новая схема «нелинейный крест» для моделирования стохастических уравнений Ландау-Лифшица // Журнал вычислительной математики и математической физики – 2014. – Т. 54, № 2 – С. 165-184.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Волков, К.Н. and В.Н. Емельянов, *Моделирование крупных вихрей в расчетах турбулентных течений*. 2008, Москва: ФИЗМАТЛИТ.
2. Юн, А.А., *Моделирование турбулентных течений*. 2010, Москва: Книжный дом "ЛИБРОКОМ". 352.
3. Smith, A.M.O. and T. Cebeci, *Numerical Solution of the Turbulent Boundary*. 1967.
4. Baldwin, B.S. and H. Lomax, *Layer Approximation and algebraic Model for Separated Turbulent Flows*. AIAA Paper, 1978: p. 78-257.
5. Johnson, D.A. and L.S. King, *A Mathematically Simple Closure Model for Attached and Separated Turbulent Boundary Layers*. AIAA Journal. **23**(11): p. 1684-1692.
6. Wilcox, D.C., *Turbulence Modelling for CFD*. 1994, California.
7. Spalart, P.R. and S.R. Allmaras, *One-Equation Turbulence model for Aerodynamics*, in *Conference Reno*. 1999: Nevada, USA. p. 92-439.
8. Kolmogorov, A.N., *Equations of turbulent motion of an incompressible fluid* Izvestia Academy of Science, USSR, Physics, 1942. **6**: p. 56-58.
9. Chou, P.Y., *On the Velocity Correlations and the Solution of the Equations of Turbulent Fluctuation*. Quart. Appl. Math., 1945. **3**.
10. Kato, M. and B.E. Launder, *The Modelling of Turbulent Flow Around Stationary and Vibrating Square Cylinders*, in *Proc. 9th Symposium on Turbulent Shear Flows*. 1993: Kyoto.
11. Yakhot, A., et al., *Renormalization group formulation of large-eddy simulation*. Journal of Scientific Computing, 1986. **1**(1): p. 1-51.
12. Schneider, E., *Numerische Simulation turbulenter vorgemischter Verrennungssysteme: Entwicklung and Anwendung eines RANS basierte gesamt Models*. 2005: Darmstadt.
13. Menter, F.R., *Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications* AIAA Journal, 1994. **32**(8): p. 1598-1605.
14. Smagorinsky, J., *General Circulation Experiments with the Primitive Equations*. Monthly Weather Review, 1963. **91**(3): p. 99-164.
15. Jiroveanu, D., G.H. Cottet, and B. Michaux, *Some numerical results with selective eddy-viscosity model for large-eddy simulations*. Annals of University of Craiova, 2003. **30**(1): p. 299-339.
16. Leiser, M. and O. Metais, *New trends in large-eddy simulations of turbulence*. Annual Review of Fluid Mechanics, 1996. **28**: p. 45-82.
17. Dicros, F., F. Nicoud, and T. Poisot, *A wall-adapting local eddy-viscosity model for simulations in complex geometries*. Proceedings of the 6th ICFD Conference on Numerical Methods for Fluid Dynamics, 1998: p. 293-299.
18. Germano, M., et al., *A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model*. Physics of Fluids, 1991. **3**(7): p. 1760-1765.
19. Meneveau, C., T. Lund, and W. Cabot, *A Lagrangian dynamic sub-grid scale model of turbulence*. Journal of Fluid Mechanics, 1996. **319**: p. 353-385.
20. Ghosal, S., et al., *A dynamic localization model for large-eddy simulation of turbulent flows*. Journal of Fluid Mechanics, 1995. **286**: p. 229-255.
21. Morinishi, Y. and O.V. Vasilyev, *Vector level identity for dynamic subgrid scale modeling in large eddy simulation*. Physics of Fluids, 2002. **14**(10): p. 3616-3623.
22. Bardina, J., J.H. Ferziger, and W.C. Reynolds, *Improved subgrid models for large eddy simulation*. AIAA Paper. **80**: p. 16.
23. Clark, R.A., J.H. Ferziger, and W.C. Reynolds, *Evaluation of subgrid-scale models using an accurately simulated flow*. Journal of Fluid Mechanics, 1979. **91**: p. 1-16.
24. Ghosal, S., *An Analysis of Numerical Errors in Large-Eddy Simulation of Turbulence*. Journal of Computational Physics, 1996. **125**: p. 187-206.

25. Boris, J.P., et al., *New Insights into Large Eddy Simulation*. Fluid Dynamics Research, 1992. **10**: p. 199-228.
26. Grinstein, F.F. and C. Fureby, *Recent progress on MILES for high Reynolds number flow*. J. Fluids Eng., 2002. **124**: p. 848-861.
27. Garnier, E., et al., *On the Use of Shock-Capturing Schemes for Large-Eddy Simulation*. Journal of Computational Physics, 1999. **153**: p. 273-311.
28. Karabasov, S.A. and V.M. Goloviznin, *Compact Accurately Boundary-Adjusting high-Resolution Technique for fluid dynamics*. Journal of Computational Physics, 2009. **228**(19): p. 7426-7451.
29. Головизнин, В.М. and А.А. Самарский, *Некоторые свойства разностной схемы "КАБАРЕ"*. Математическое моделирование, 1998. **10**(101-116).
30. Головизнин, В.М., С.А. Карабасов, and И.М. Кобринский, *Балансно-характеристические алгоритмы с разделёнными консервативными и потоковыми переменными*. Математическое моделирование, 2003. **15**(9): p. 29-48.
31. Глотов, В.Ю., et al., *Новая схема "двухслойный крест" для моделирования стохастических уравнений Ландау-Лифшица*. Журнал вычислительной математики и математической физики, 2014. **54**(2): p. 165-184.
32. Hirsch, C., *Numerical computation of internal and external flows*. Vol. 1. 2001: Eastbourne: Antony Rowe Ltd.
33. Головизнин, В.М. and А.А. Самарский, *Разностная аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной производной*. Математическое моделирование, 1998. **10**(1): p. 86-100.
34. Годунов, С.К., *Разностный метод численного решения разрывных решений уравнений гидродинамики*. Мат. Сб., 1959. **47**(89): p. 271-306.
35. Головизнин, В.М. and С.А. Карабасов, *Нелинейная коррекция схемы КАБАРЕ*. Математическое моделирование, 1998. **10**(12): p. 107-123.
36. Pirozzoli, S., *On the spectral properties of shock-capturing schemes*. Journal of Computational Physics, 2006. **219**: p. 489-497.
37. Fauconnier, D. and E. Dick, *Spectral analysis of nonlinear finite difference discretizations*. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2013. **246**: p. 113-121.
38. Shu, C.W., *Highly essentially non-oscillatory schemes for convection dominated problems*. SIAM Review, 2009. **51**: p. 82-126.
39. Jiang, G.S. and C.W. Shu, *Efficient Implementation of Weighted ENO Schemes*. Journal of Computational Physics, 1996. **126**: p. 202-228.
40. Роуч, П., *Вычислительная гидродинамика*. 1980, Мир: Москва. p. 606.
41. Arovitola, A. and D. F.M., *On the application of congruent upwind discretizations for large eddy simulations*. Journal of Computational Physics, 2004. **194**: p. 329-343.
42. Gurbatov, S.N., et al., *On the decay of Burgers turbulence*. J. Fluid Mech., 1997. **344**: p. 339-374.
43. Zikanov, O. and A. Thess, *Burgers equation*. Phys. Fluids, 1997. **9**(5): p. 1362-1367.
44. Jameson, A., *The Construction of Discretely Conservative Finite Volume Schemes that Also Globally Conserve Energy or Entropy*. J. Sci. Comput, 2008. **34**: p. 152-187.
45. Куликовский, А.Г., Н.В. Погорелов, and А.Ю. Семенов, *Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений*. 2001, Москва: ФИЗМАТЛИТ. 608.
46. Фрик, П.Г., *Турбулентность: модели и подходы. Курс лекций. Часть II*. 1998, Пермь: Перм. гос. техн. ун-т. 108.
47. Moffat, H.K., *Geophysical and Astrophysical Turbulence*. In Advances in Turbulence, 1987: p. 228-244.
48. Алексеенко, С.В., П.А. Куйбин, and В.Л. Окулов, *Введение в теорию концентрированных вихрей*. 2003, Новосибирск: Институт теплофизики СО РАН. 504.

49. Kraichnan, R.H., *Inertial Ranges in Two-Dimensional Turbulence*. The Physics of Fluids, 1967. **10**(7): p. 1417-1423.
50. Leith, C.E., Phys. Fluids, 1968. **11**(671).
51. Batchelor, G.K., *Computation of the Energy in Homogeneous Two-Dimensional Turbulence*. Phys. Fluids, 1969. **12**(II).
52. Sommeria, J., *Experimental study of the two-dimensional inverse energy cascade in square box*. J. Fluid Mech., 1986. **170**: p. 139-168.
53. Boffetta, G. and R.E. Ecke, *Two-Dimensional Turbulence*. Annu. Rev. Fluid Mech., 2011. **44**: p. 427-51.
54. Lilly, D., *Numerical simulation of two-dimensional turbulence*. Phys. Fluids, 1969. **12:II**: p. 240-249.
55. Frisch, U. and P.L. Sulem, *Numerical simulation of the inverse cascade in two-dimensional turbulence*. Phys. Fluids, 1984. **27**: p. 1921-23.
56. Herring, J. and J. McWilliams, *Comparison of direct numerical simulation of two-dimensional turbulence with two-point closure: the effects of intermittency*. J. Fluid Mech., 1985. **153**: p. 229-42.
57. Smith, L. and V. Yakhot, *Bose condensation and small-scale structure generation in a random force driven 2D turbulence*. Phys. Rev. Lett., 1993. **71**: p. 352-55.
58. Paret, J. and P. Tabeling, *Experimental observation of the two-dimensional inverse energy cascade*. Phys. Rev. Lett, 1997. **79**: p. 4162-65.
59. Paret, J. and P. Tabeling, *Intermittency in the two-dimensional inverse cascade of energy: experimental observations*. Phys. Fluids, 1998. **10**: p. 3126-36.
60. Herring, J., et al., *Decay of two dimensional homogenous turbulence*. J. Fluid Mech., 1974. **66**: p. 417-444.
61. McWilliams, J., *The emergence of isolated coherent vortices in turbulent flow*. J. Fluid Mech., 1984. **146**: p. 21-43.
62. Basdevant, C., et al., *A study of barotropic model flows: intermittency, waves and predictability*. J. Atmos. Sci., 1981. **38**: p. 2305-26.
63. Legras, B., P. Santangelo, and R. Benzi, *High-resolution numerical experiments for forced two-dimensional turbulence*. Europhys. Lett., 1988. **5**: p. 37-42.
64. Babiano, A., P. Frick, and B. Dubrulle, *Scaling properties of numerical two-dimensional turbulence*. Physical Review E, 1995. **52**(4): p. 3719-3729.
65. Babiano, A., et al., *Vorticity and passive scalar dynamics in two-dimensional turbulence*. J. Fluid Mech., 1987. **183**: p. 379-397.
66. Ohkitani, K., *Wave number space dynamics of enstrophy cascade in a forced two-dimensional turbulence*. Phys. Fluids A, 1991. **3**(6): p. 1598-1611.
67. Weiss, J., *The dynamics of enstrophy transfer in two-dimensional hydrodynamics*. LJI-TN-81-121. La Jolla Inst., 1981. **48**: p. 273.
68. Maltrud, M.E. and G.K. Vallis, *Energy spectra and coherent structures in forced two-dimensional and beta-plane turbulence*. J. Fluid Mech., 1991. **228**.
69. Ishihara, T. and Y. Kaneda, *Energy spectrum in the enstrophy transfer range of two-dimensional forced turbulence*. Phys. Fluids, 2001. **13**: p. 544-547.
70. Lindborg, E. and K. Alvelius, *The kinetic energy spectrum of two dimensional enstrophy turbulence cascade*. Phys. Fluids, 2000. **12**: p. 945-947.
71. Pasquero, C. and G. Falkovich, *Stationary spectrum of vorticity cascade in two dimensional turbulence*. Phys. Rev. E, 2002. **65**: p. 056305.
72. Brachet, M.E., et al., *The dynamics of freely decaying two-dimensional turbulence*. J. Fluid Mech., 1988. **194**: p. 333-349.
73. Tabeling, P., *Two-dimensional turbulence: a physicist approach*. Physics Reports, 2002. **362**: p. 1-62.

74. Gharib, M. and P. Derano, *A liquid film (soap film) tunnel to study two-dimensional laminar and turbulent shear flows*. Physica D, 1989. **47**: p. 406-416.
75. Kellay, H., X.-L. Wu, and G. W.I., *Experiments with turbulent soap films*. Phys. Rev. Lett., 1997. **74**: p. 3975-3978.
76. Martin, B.K., X.-L. Wu, and W.I. Goldburg, *Spectra of decaying turbulence in soap film*. Phys. Rev. Lett., 1998. **80**: p. 3964-3967.
77. Rutgers, M.A., *Forced 2D turbulence: experimental evidence of simultaneous inverse energy and forward enstrophy cascades*. Phys. Rev. Lett., 1998. **81**: p. 2244-2247.
78. Belmonte, A., et al., *Velocity fluctuations in a turbulent soap film: the third moment in two dimensions*. Phys. Fluids, 1999. **11**: p. 1196-200.
79. Rivera, M.K., et al., *Energy and enstrophy transfer in decaying two-dimensional turbulence*. Phys. Rev. Lett., 2003. **90**: p. 104502.
80. Nastrom, G.D. and K.S. Gage, *A climatology of atmospheric wave number spectra of wind and temperature observed by commercial aircraft*. J. Atmos. Sci., 1984. **42**: p. 950-960.
81. Nastrom, G.D., K.S. Gage, and W.H. Jasperson, *The atmospheric kinetic energy spectrum,  $10^0 - 10^4$  km*. Nature, 1984. **310**: p. 36-38.
82. Lilly, D.K., *Stratified turbulence and the mesoscale variability of the atmosphere*. J. Atmos. Sci., 1983. **40**: p. 749-761.
83. Cho, J.Y.N. and E. Lindborg, *Horizontal velocity structure functions in upper troposphere and lower stratosphere. 1. Observations*. J. Geophys. Res., 2001. **106**(D10): p. 10,223-10,232.
84. Tung, K.K. and W.W. Orlando, *The  $k^{-3}$  and  $k^{-5/3}$  energy spectrum of the atmospheric turbulence: quasi-geostrophic two level model simulation*. J. Atmos. Sci., 2003. **60**: p. 824-835.
85. Saffman, P.G., Stud. Appl. Maths, 1971. **50**.
86. Polyakov, A.M., *The theory of turbulence in two dimensions*. Princeton preprint PUPT-1341, 1992.
87. Кузнецов, Е.А., *Спектры турбулентности, порождаемые сингулярностями*. Письма в ЖЭТФ, 2004. **80**(2): p. 92-98.
88. Kuznetsov, E.A., *Mixed Lagrangian-Eulerian description of vortical flows for ideal and viscous fluids*. Journal of Fluid Mechanics, 2008. **600**: p. 167-180.
89. Kuznetsov, E.A., et al., Theor. Comput. Fluid Dyn., 2010. **24**: p. 253-258.
90. Phillips, O.M., Fluid Mech., 1958. **4**.
91. Kida, S., J. Phys. Soc. Japan, 1985. **54**.
92. Глотов, В.Ю. and В.М. Головизнин, *Схема КАБАРЕ для двумерной несжимаемой жидкости в переменных скорость-давление*. Журнал вычислительной математики и математической физики, 2013. **53**(6): p. 721-735.
93. Глотов, В.Ю. and В.М. Головизнин, *Схема КАБАРЕ для двумерной несжимаемой жидкости в переменных функция тока-завихренность*. Математическое моделирование, 2011. **23**(9): p. 89-104.
94. Walsh, O., *Eddy solutions of the Navier-Stokes equations*. The NSE II-Theory and Numerical Methods, 1992: p. 306-309.
95. Brachet, M., et al., *Small-scale structure of the Taylor-Green vortex*. J. Fluid Mech., 1983. **130**: p. 411-452.
96. E. Garnier, et al., *On the use of shock-capturing schemes for large-eddy simulation*. Journal of Computational Physics, 1999. **153**: p. 273-311.
97. Brachet, M., *Direct simulation of the three-dimensional turbulence in the Taylor-Green vortex*. Fluid Dynamics Research, 1991. **8**: p. 1-8.