

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

УДК 519.872.6

На правах рукописи

**БАБИЧЕВА ТАТЬЯНА СЕРГЕЕВНА**

Методы математического и имитационного моделирования процессов  
локального взаимодействия в транспортных системах

Специальность 05.13.18 - математическое моделирование, численные методы  
и комплексы программ

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

кандидат технических наук, доцент, в. н. с.

В. П. Осипов

ДОЛГОПРУДНЫЙ, МОСКВА – 2015

## Содержание

	Стр.
ВВЕДЕНИЕ	5
Глава 1. ОБЗОР ОСНОВНЫХ МЕТОДОВ И МОДЕЛЕЙ	14
1.1. Моделирование транспортных потоков. Краткая история. . . . .	14
1.1.1. История дорожного строительства и появление математического моделирования транспортных потоков . . . . .	15
1.1.2. Появление автомобилей на дорогах . . . . .	19
1.1.3. Эпоха вычислительных экспериментов . . . . .	26
1.1.4. Современное положение дел . . . . .	34
1.2. Более подробный обзор наиболее используемых в настоящее время методов . . . . .	38
1.2.1. Макроскопические модели транспортных потоков . . . . .	38
1.2.2. Мезомодели транспортных потоков. Кинетические модели . . . .	41
1.2.3. Микроскопические модели транспортных потоков . . . . .	47
1.2.4. Модели клеточных автоматов . . . . .	54
1.2.5. Модель Кёрнера-Клёнова. Теория Кёрнера трёх фаз транспорт- ных потоков . . . . .	62
1.2.6. Сравнительный анализ модели Трайбера и клеточных автоматов	65
1.2.7. Гибридные модели транспортных потоков . . . . .	67
1.3. Задачи диссертационного исследования . . . . .	68
Глава 2. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЗАДЕРЖЕК АТС НА ПЕРЕКРЁСТКЕ.	71
2.1. Понятие эффективного числа полос . . . . .	71
2.1.1. Аналитические методы расчёта эффективного числа полос . . . .	71

2.2. Исследования поведения АТС на перекрёстке с точки зрения Теории Массового Обслуживания . . . . .	75
2.2.1. Поведение АТС на перекрёстке в долгосрочной перспективе . . .	82
2.2.2. Применение полученных формул к реальным перекрёсткам . . .	83
2.2.3. Поведение АТС в стационарном случае . . . . .	87
2.3. Резюме . . . . .	91

### Глава 3. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ НА ИЗОЛИРОВАННЫХ ДОРОГЕ И ПЕРЕКРЁСТКЕ . . . . . 93

3.1. Компьютерное микроскопическое моделирование . . . . .	93
3.1.1. Компьютерное микроскопическое моделирование движения на изолированной дороге . . . . .	93
3.2. Программная реализация методов: микроскопическое моделирова- ние, программа VTSSIM . . . . .	98
3.2.1. Программная модель . . . . .	98
3.2.2. Структура программы . . . . .	99
3.2.3. Основные классы программы . . . . .	103
3.3. Апробация математической модели, реализованной в программе . .	105
3.3.1. Компьютерное микроскопическое моделирование движения на перекрёстке . . . . .	107
3.3.2. Сопоставление аналитического решения задачи и результатов имитационного моделирования . . . . .	115
3.3.3. Численные методы расчёта эффективного числа полос . . . . .	116
3.3.4. Применение компьютерного микроскопического моделирования для оптимизации дорожного движения . . . . .	117
3.4. Резюме . . . . .	120

### Глава 4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ НА КОЛЬЦЕВОЙ АВТО- СТРАДЕ . . . . . 121

4.1. Описание модели кольцевой автострады с односторонним движением. . . . .	121
4.2. Максимизация пропускной способности кольцевой автострады с односторонним движением. . . . .	124
4.3. Задача минимизации суммарных задержек АТС, возникающих при преодолении односторонней кольцевой автострады. . . . .	131
4.4. Программная реализация методов: моделирование движения на кольцевой автостраде . . . . .	133
4.5. Понятие <i>зелёной волны</i> для кольцевой автострады с односторонним движением. . . . .	135
4.5.1. Исследование и расчёт <i>Зелёной волны</i> при низкой загрузке . . .	140
4.5.2. Исследование и расчёт <i>Зелёной волны</i> при высокой загрузке . . .	141
4.5.3. Исследование и расчёт <i>Зелёной волны</i> при средней загрузке . . .	142
4.6. Резюме . . . . .	143
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	145
Список использованных источников	147

## ВВЕДЕНИЕ

### Актуальность

Лавинообразное увеличение количества транспортных средств на дорогах ставит перед обществом новые проблемы. Стоит ли строить новую автомобильную дорогу? Если строить, то какими характеристиками она должна обладать? Если её построить невозможно, то как модифицировать старую? Какой режим движения выбрать на существующих и строящихся дорогах? Какие режимы светофоров на перекрёстках увеличат пропускную способность? Особенно важны ответы на эти вопросы в крупных городах. Правильные ответы позволят улучшить транспортную ситуацию для всех участников дорожного движения и привести к экономии значительного количества средств.

Математическое моделирование, в том числе имитационное, может ответить на значительное количество таких вопросов. Для этого необходима разработка адекватных математических моделей процессов взаимодействия участников дорожного движения с такими элементами транспортной инфраструктуры, как дорожная сеть, системы организации дорожного движения, системы управления движением. Как правило, модели такого типа относят к классу имитационных или микромоделей, который объединяет модели клеточных автоматов, мультиагентные модели и т.п. Популярное в настоящее время алгоритмы микромоделирования требуют значительного количества вычислительных операций. В этой связи, актуальной становится разработка таких моделей и алгоритмов микромоделирования транспортных процессов, которые, с одной стороны, легко адаптируются к высокопроизводительным вычислительным средствам, а, с другой стороны, имели бы резервы к уменьшению вычислительной сложности. Этот резерв необходим для решения задач моделирования большой размерности более доступными вычислительными средствами, а также для проведения оценки некоторых процессов в

режиме реального времени.

Особенно актуально решение проблемы повышения эффективности управления транспортными потоками в больших городах на сложных перекрестках и многоуровневых транспортных развязках. Однако, у большинства исследователей комплексно не анализируется механизм формирования временных задержек автотранспортных средств (АТС) на сложных перекрестках в зависимости от интенсивности движения в разных направлениях и режимов работы светофоров.

В связи с этим имеется потребность в дополнительном аналитическом анализе микромоделей процессов взаимодействия участников дорожного движения с такими элементами транспортной инфраструктуры, как дорожная сеть, системы организации дорожного движения, системы управления движением. Целью такого анализа является обобщение и развитие аналитических и алгоритмических средств исследования особенностей движения и временных задержек автомобилей на многополосных дорогах и при пересечении сложных перекрестков.

**Степень разработанности проблемы.** В настоящее время основное внимание исследователей направлено на изучение транспортных потоков повышенной интенсивности, механизмов формирования пробок, повышение вычислительной эффективности алгоритмов решения типовых транспортных задач. При этом остаются недостаточно проработанными возможности методов теории систем массового обслуживания для определения временных задержек АТС и оптимальных режимов работы светофоров на перекрестках различной конфигурации. Уже отмечалось, что имитационное моделирование каких-либо процессов, в том числе процессов взаимодействия АТС с элементами дорожного движения, требует значительных вычислительных ресурсов. Предполагается, что если удастся применить теорию систем массового обслуживания для комплексного решения обозначенных выше задач, то появится возможность расширить спектр решаемых прикладных задач и

сократить требуемые для моделирования вычислительные ресурсы. Это позволит при реально доступных вычислительных ресурсах переходить к исследованию больших транспортных систем в мегаполисах.

Большинство существующих мультиагентных микромоделей (модели клеточных автоматов, модель разумного водителя Трайбера, и т. д.) сосредоточены на компоненте взаимодействия рассматриваемого АТС с АТС, движущимися по той же полосе. Во внимание не принимаются взаимодействие с АТС, движущимися по соседним полосам, таким образом, остаются в стороне такие аспекты реального дорожного движения, как движение по многополосным дорогам с учётом перестроения и обгона. Кроме того, существуют отдельные модели для взаимодействия АТС с элементами системы управления, например, со светофорами с учётом фаз их работы.

Данные вопросы требуют более глубокой проработки, в диссертации рассматриваются предлагаемые автором методы их решения.

### **Цель работы и поставленные задачи**

Основной целью данной диссертационной работы является разработка методов математического и имитационного моделирования процессов локального взаимодействия АТС между собой и элементами транспортной инфраструктуры при движении на многополосных дорогах и сложных перекрестках, сравнительный анализ разработанных алгоритмов и вычислительных процедур на типовых задачах, а также применение полученных результатов для постановки и решения задач оптимизации режимов работы светофоров на перекрестках.

Для достижения поставленной цели решаются следующие задачи:

- Проведение обзора литературы по теме диссертационной работы.
- Исследование возможности применения методов теории систем массового обслуживания для определения временных задержек АТС и оптимальных режимов работы светофоров на перекрёстках различной конфигурации в зависимости от светофорных режимов на нём и потоков

АТС по всем направлениям, получение аналитических зависимостей, описывающих временные задержки в движении АТС, возникающие при пересечении управляемого перекрёстка.

- Развитие микроскопической модели «разумного водителя» Трайбера для случая движения АТС по многополосным дорогам и перекрёсткам с учетом особенностей поведения водителей при перестроении.
- Разработка алгоритмов имитационного моделирования и проведения численных расчётов движения АТС на многополосных дорогах и перекрёстках, анализ полученных результатов, проверка адекватности результатов на реальных данных и путем сравнения с результатами других исследователей.
- Применения разработанных подходов для математического и имитационного моделирования движения на кольцевой автостраде.

**Научная новизна** выносимых на защиту результатов состоит в том, что:

1. Впервые получены аналитические зависимости, в явном виде выражающие средние временные задержки АТС на перекрёстке (потерянное время по сравнению с временем движения на свободной дороге) в зависимости от светофорных режимов и интенсивности транспортных потоков на нём.
2. Разработана обобщённая микромодель процесса локального взаимодействия АТС между собой и с элементами транспортной инфраструктуры при движении на многополосных дорогах и сложных перекрёстках.
3. Развита имитационная модель и алгоритмы моделирования транспортных потоков на основе формализации модели Трайбера рационального поведения водителей, учитывающая одновременно влияние таких факторов, как количество полос на дороге, схему организации движения, режим работы светофора, персональные модели поведения каждого из участников движения. Разработанные алгоритмы послужили основой

для решения задач оптимизации пропускной способности перекрёстков сложной структуры.

4. Впервые сформулировано и обосновано «свойство о равновесной максимальной пропускной способности на управляемом перекрёстке сложной структуры», а также следствие из него, позволяющее ввести и обосновать понятие так называемого «эффективного числа полос на управляемом перекрёстке».

### **Теоретическая и практическая значимость**

Работа носит как теоретический, так и практический характер.

Теоретический характер данной работы подтверждается преобладанием математических методов в качестве аппарата исследования для получения результатов моделирования движения АТС как на изолированных вершинах транспортных графов, так и на самих графах в целом. Для возможности расчётов в реальном времени и предсказательного моделирования актуально минимизировать вычислительную сложность возникающих задач оптимизации.

Практической значимостью данной работы является то, что результаты, полученные при моделировании изолированных перекрёстков, могут быть применены на практике благодаря свойству устойчивости найденных оптимальных значений к колебаниям потоков, следовательно, применимы даже в случаях неточных данных. Автором были исследованы движения на существующих перекрёстках. Полученные данные согласуются с наблюдениями практиков. Практическая значимость теоретических и прикладных исследований была проверена в ходе прикладного моделирования при решении типовых задач, в частности, моделирования транспортных потоков на перекрёстке повышенной сложности и движения по кольцевой автостраде с множеством истоков и стоков.

### **Общая методика исследования**

Методика исследований соответствовала перечню решаемых задач. Проведён обзор опубликованных за рубежом и в России работ, в который включены наиболее значимые по мнению автора публикации по данной тематике. Особое внимание уделено публикациям за последние 15 лет.

Исследовано развитие математического моделирования транспортных потоков с исторической точки зрения. Рассмотрена взаимосвязь развития данной отрасли науки с развитием смежных наук и вычислительной техники. Подробно изучены существующие модели транспортных потоков, рассматривающие как весь поток в целом, так и каждое АТС по-отдельности. Более подробно рассмотрены случаи изолированной дороги и перекрёстка.

Теоретические исследования в диссертационной работе касались обобщения микроскопических моделей транспортных потоков на случай многополосных дорог и перекрёстков. Результаты теоретических исследований проверялись в ходе вычислительных экспериментов с помощью разработанной автором компьютерной программы. Адекватность результатов теоретических и экспериментальных исследований подтверждается сопоставлением с выводами эмпирической теории трёх фаз Кёрнера для случая многополосных дорог, в частности, явно показаны возникающие фазовые переходы.

По результатам теоретических и экспериментальных исследований был показан физический смысл понятия «эффективного числа полос», что дало возможность сформулировать такое понятие, как «Свойство равновесной максимальной пропускной способности на управляемом перекрёстке».

Получены практические рекомендации по организации эффективного управления на управляемых перекрёстках.

Предложен метод использования аппарата теории систем массового обслуживания в применении к решению задачи поиска ожидаемых задержек, возникающих при пересечении управляемого перекрёстка с фиксированными длительностями фаз. Автором получены формулы, в явном виде выражающие зависимость величины задержек АТС от интенсивности транспортных

потоков вблизи данного перекрёстка, от пропускных способностей по направлениям, а также от длительностей светофорных фаз. Решена задача минимизации данных задержек путём изменения длительностей светофорных фаз при фиксированных потоках, а также численно показано стремление к стационарности распределения длительностей оптимальных фаз. Произведено сравнение результатов, полученных при микроскопическом моделировании движения на перекрёстке с результатами, полученными аналитическими методами и результатами других авторов.

Описана предлагаемая автором модель кольцевой автострады, закрученной в одну сторону и задаваемой матрицей корреспонденций АТС. Рассчитана максимальная пропускная способность рассматриваемой автострады в зависимости от матрицы корреспонденций и пропускных способностей главной и побочной дорог.

Поставлена задача минимизации общих задержек, возникающих при преодолении данной автострады, а также разработана компьютерная модель для решения данной задачи. Предлагаемая автором программа может быть использована для расчётов реальных задач.

Рассмотрены методы организации *зелёной волны*, позволяющей АТС пересекать множество подряд идущих перекрёстков без остановок, при случаях высокой, средней и низкой загрузки кольцевой автострады.

### **Апробация работы.**

Апробация работы, степень достоверности теоретических, экспериментальных и практических результатов обсуждались со специалистами на:

- 55,56,57,58 научных конференциях МФТИ (Москва, 2012-2015). На 56 научной конференции работа автора была отмечена как лучшая работа молодого учёного на секции.
- VII Московской международной конференции по исследованию операций ORM (Москва, 2013),
- Third International Conference on Information Technology and

Quantitative Management, Rio de Janeiro, Brasil, 2015, один из двух докладов автора был признан лучшим на секции,

- научных семинарах Московского Центра непрерывного математического Образования (Москва, 2012-2015),
- научном семинаре в институте Фурье, (Гренобль, Франция, 2013),
- научных семинарах кафедр математических основ управления, информатики и вычислительной математики МФТИ (2012-2015),
- научных семинарах ИПМ им. Келдыша РАН (Москва, 2015),
- X Юбилейной Международной научно-практической конференции «Современные информационные технологии и ИТ-образование», Москва, 2015.

Результаты исследования используются в проекте Соглашение № 14.604.21.0052 от 30.06.2014 г. с Минобрнаукой реализуемого а рамках федеральной целевой программы «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014-2020 годы», Уникальный идентификатор проекта RFMEFI60414X0052.

По теме диссертации опубликовано 9 печатных работ [1–9], из них в реферируемых журналах — 3 [1, 8, 9].

Разработанные автором программы включены в государственный реестр ФИПС под названием VTSSIM от 24 сентября 2015 года.

### **Объем и структура диссертации.**

Диссертация изложена на 163-и страницах машинописного текста и состоит из введения, обзора литературы, включающего описание основных методов и моделей исследования, трёх глав собственных исследований, заключения, библиографического указателя. Работа иллюстрирована 26-ю рисунками, 15-ю таблицами. Библиография включает 172 источника. Весь материал, представленный в диссертации, получен, обработан и проанализирован автором лично.

**На защиту выносятся:**

1. Методы и алгоритмы моделирования транспортных потоков на основе теории систем массового обслуживания.
2. Микроскопическая модель транспортных потоков, включающая в себя подробное описание движения АТС с учётом взаимодействия их между собой и элементами системы управления на многополосной дороге и управляемых перекрёстках сложной структуры.
3. Алгоритмы численного моделирования транспортных процессов на высокопроизводительных вычислительных комплексах (суперкомпьютерных кластерах), обеспечивающие устойчивость решения транспортных задач на многополосных дорогах и перекрёстках сложной структуры.
4. Результаты верификации предлагаемых моделей на основе сравнительного анализа результатов решения типовых задач.

## Глава 1

# ОБЗОР ОСНОВНЫХ МЕТОДОВ И МОДЕЛЕЙ

### 1.1. Моделирование транспортных потоков. Краткая история.

Транспорт, в том числе автомобильный, — необходимая составная часть современной цивилизации. Развитие транспортной системы любой страны есть основа процветания (и угасания) этой страны. Количество транспортных средств с каждым годом всё увеличивается, существующая дорожная сеть всё чаще не справляется с потоком автомобилей. Расширение и модификация дорожной сети — чрезвычайно ресурсоёмкая задача, требующая участия в том числе и государственных структур, поэтому планирование дорожной сети должно быть тщательно продумано на всех уровнях. Для этого требуется разработка транспортных моделей городов и связующих города дорог. Одной из основных задач последнего времени, остро стоящих в Москве и ряде других крупных городов, является разработка транспортной модели города, позволяющей решать задачи долгосрочного планирования (развития) транспортной инфраструктуры города, в частности, способной отвечать на вопросы: где стоит построить новую дорогу при заданных бюджетных ограничениях, где стоит увеличить число полос, как изменится транспортная ситуация, если построить в каком-либо месте торговый центр (жилой район, стадион), как правильно определять маршруты и расписание движения общественного транспорта и т. п. До появления современного программного обеспечения (кстати, до сих пор ещё не решающего эти вопросы целиком) вопросами по планированию дорожной инфраструктуры занималось не одно поколение инженеров, физиков и математиков. С путями, по которым они шли, мы попробуем ознакомиться.

### 1.1.1. История дорожного строительства и появление математического моделирования транспортных потоков

История городского дорожного строительства насчитывает много веков. При раскопках городов на территории Древнего Египта, Вавилона, Древней Греции археологами были обнаружены благоустроенные улицы с каменным покрытием [10].

Большое развитие дорожное строительство получило в Древнем Риме, где уже в V в. до н. э. были изданы законы, регулирующие размеры проезжей части улиц и предписывающие устройство проходов между домами. В «законах 12 таблиц» было, в том числе, указано, что ширина дороги на прямом участке должна быть 2,45 м (8 футов), а на поворотах — 4,9 м (16 футов) [11].

В основе классификации римских дорог лежит произведение римского землемера Сикула Флакка и юриста Домиция Ульпиана [12].

Падение Римской Империи повлекло за собой разрушение многих городов, возрождение которых началось лишь в IX в. Во времена феодальной эпохи дорожное строительство во многом опиралось на труды древних римлян, но, из-за дорогостоящей рабочей силы, было развито довольно плохо.

Новый этап дорожного движения связана с развитием капитализма и начался в шестидесятых годах восемнадцатого века. Разработки французского инженера Пьера Трезаге усовершенствовали конструкции дорожной одежды (дорожного покрытия) и сделали менее затратным её производство. В дальнейшем, англичанин Томас Тельфорд сделал схожее предложение, а Джон Мак-Адам впервые подвёл научную базу под эти нужды.

Дороги были рассчитаны на гужевой транспорт и лишь в конце 19-го века, когда появились автомобили, началось строительство дорог с использованием вяжущих материалов. Первые из широких работ по использованию асфальта были выполнены в Париже в 1832-1835 годах.

Первая дорога с покрытием из цементобетона была построена в 1865-м го-

ду в Англии, и уже к концу 19-го века дороги с данным покрытием появились во многих странах Западной Европы и США.

Уже в 10 веке на территории Киевской Руси строительство дорог осуществлялось в основном из древесных материалов. Поперёк улиц укладывались ряды брёвен, называвшиеся «мостами», откуда и образовались такие слова, как «мостовая», «мостить», и т. д. [10].

По свидетельству современников, улицы русских городов были благоустроеннее, чем в Западной Европе, где только в XII в. начали мостить городские улицы.

В дальнейшем начали появляться булыжные мостовые. В 12 веке в резиденции великого князя Андрея Боголюбского улицы были выложены из известняка. В 1861-м году началось строительство брусчатых мостовых (первая мостовая этого типа была построена в Одессе), а Москву в 1909 году украсила первая в России мозаичная мостовая [10].

В начале 20-го века, благодаря развитию транспорта и усиленному росту городов, остро стала проблема усовершенствования дорожных покрытий, организации разработок, связанных с управлением и усовершенствованием транспортных сетей, в том числе с использованием логического и математического аппарата. С этого момента и начинается история математического моделирования транспортных потоков.

Родоначальником направления математического моделирования транспортного движения считается российский ученый Дубелир — автор книги «Городские улицы и мостовые» от 1912-го года. Книга считается первой публикацией по данной тематике и в основном посвящена вопросам планировки городов и их транспортной сети, а также материалам для строительства дорог.

«Планировка городов» — первая часть этой книги. В ней описана планировка городских улиц как с точки зрения удобства передвижения, так и с точки зрения экологии и экономии [13].

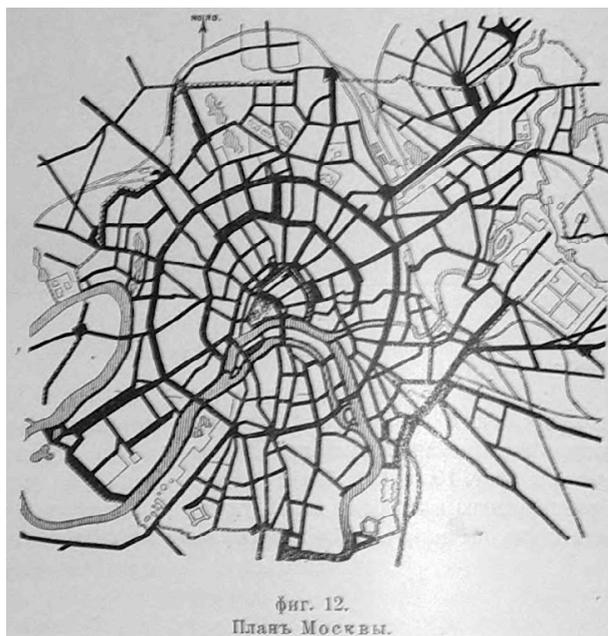
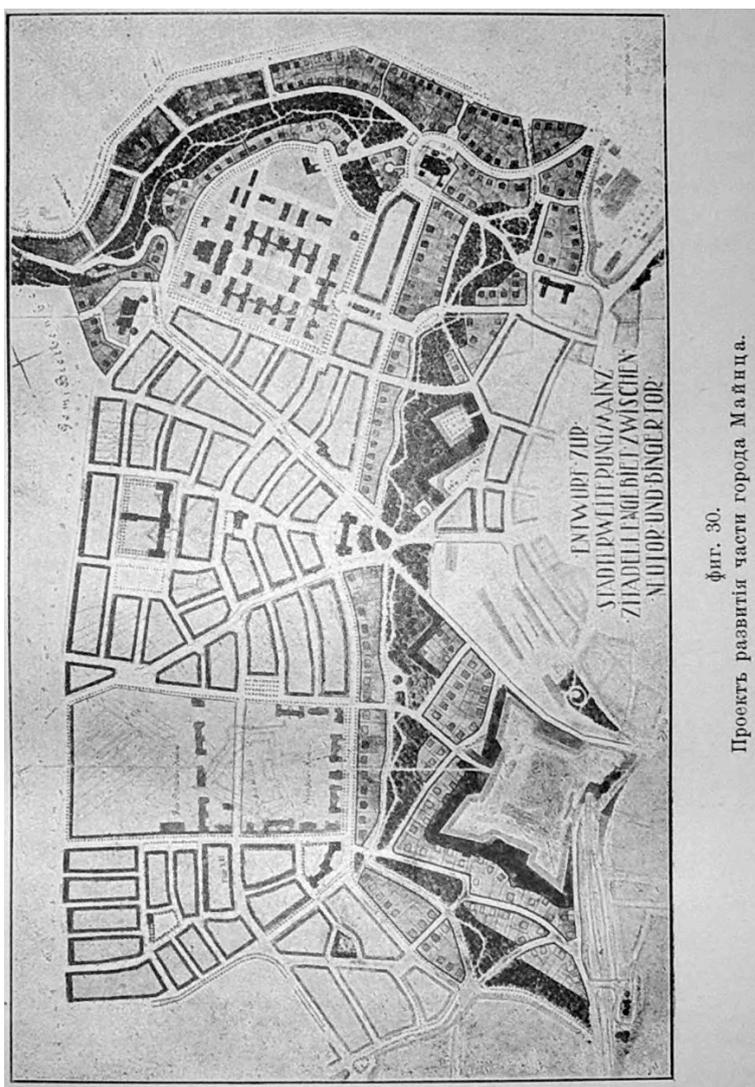


Рис. 1.1. «Радиальная» система застройки Москвы, 1912 г.

В главе «Системы расположения уличной сети», посвященной вопросам планировки городов, автор вводит несколько видов систем: радиальную (рисунок 1.1), прямоугольную, диагональную и современную (рисунок 1.2).

Ещё до появления автомобилей на улицах появились светофоры. Первые светофоры использовались для облегчения перехода пешеходов через улицу и были изобретены в 1868 году в Англии Джоном Пик Найтом. Днём этот светофор показывал информацию с помощью стрелок, а по ночам — с помощью газового фонаря. Через год этот светофор взорвался, при этом от ранений погиб управляющий им полицейский. В 1910 году был изобретен первый автоматический светофор. В России первый светофор появился в 1930-м году в Ленинграде. Со временем светофоры стали исполнять не только роль средства остановки транспорта при переходе пешеходами улицы, но и средства оптимизации дорожного движения, в том числе на перекрестках.

В моделировании транспортных систем большое место занимает так называемый расчет «матриц корреспонденции» — это квадратная матрица, которая описывает перемещения объектов из одной транспортной зоны в другую. В процессе создания релевантных транспортных моделей довольно сложно



фиг. 30.  
Проект развития части города Майнца.

Рис. 1.2. «Современная» система планирования, 1912г.

получить адекватную матрицу корреспонденции. Первая подобная математическая модель была сформулирована венским инженером фон Лиллем, который описал структуру железнодорожных пассажирских перевозок по направлению Вена-Брюнн-Прага и в ходе исследований вывел свой знаменитый закон движения пассажирского транспорта [14]. Данная математическая зависимость впоследствии получила широкое применение в описании и расчетах городских пассажирских потоков и, благодаря своей схожести с законом гравитационного тяготения, была названа «гравитационной моделью». В ней величины корреспонденций прямо пропорциональны объемам отправок из одного транспортного района в другой и обратно пропорциональны расстоянию между этими районами (хотя зачастую в подобных моделях они обратно пропорциональны экспоненциальной или квадратичной функции от расстояния).

### **1.1.2. Появление автомобилей на дорогах**

В конце 20-х годов города затронула проблема автомобилизации страны, потребовавшая улучшения дорожно-транспортных условий движения, и вызвавшая глобальные изменения технических норм, в основном рассчитанных на гужевой транспорт.

В связи с массовым увеличением транспорта на улицах возникла необходимость моделирования дорожного движения для изучения пропускной способности дорог и пересечений, то есть, максимального количества автомобилей, проходящих через данный промежуток в единицу времени, а также для оптимизации дорожного движения с целью улучшения ситуации на дорогах.

Первые попытки изучения пропускной способности и использования этого понятия относятся к тридцатым годам. Под пропускной способностью понимали интенсивность движения, при которой затруднения движения становились явными. В 1928 году Йоханнессон предпринял попытку определить

пропускную способность дороги исходя из среднего минимального расстояния между центрами автомобилей. По его мнению, «пропускная способность дороги достигается в тот момент, когда любое дальнейшее увеличение интенсивности движения при прочих неизменных факторах вызывает уменьшение скорости.» [15].

В 1933 году Гриншилдс применил покадровую киносъёмку для измерения скоростей отдельных автомобилей и расстояния между ними. Ему удалось выразить данные для зависимости расстояния между автомобилями от скорости в виде прямой  $S = 6,9 + 0,226v$ , где расстояние выражено в метрах, а скорость в километрах в час [16]. Число 0,226 в этой формуле позднее стало интерпретироваться как время реакции водителя, в том числе и в модели Танака [17].

Такие модели не учитывали поведение пешеходов, переходящих улицы. Впервые подобную задачу рассмотрел Адамс в 1936 году. Адамс пытался показать, что распределение числа движущихся по улице автомобилей является Пуассоновским [18]. Были вычислены некие средние величины, связанные с длительностью ожидания пешехода. Позднее эту же задачу рассмотрел Гарвуд, хотя и выразил её через движение одиночного автомобиля. Это распределение после назвали распределением Гарвуда. В 1951 году Таннер, исследовав распределение Гарвуда, получил новый метод, позволивший легко перейти к общему случаю, что впоследствии сделал Майн в 1954-1958 годах, приведя соответствующие формулы для произвольного транспортного потока главной улицы. А в 1955 году благодаря работам Герлу и Шуля [?, 19] участилось применение распределения Пуассона в задачах теории транспортных потоков, что подтвердило гипотезу Адамса.

Первая математическая модель транспортных потоков макроскопического толка, то есть, модель, рассматривающая поток автомобилей как одно целое, была предложена в 1955 году Лайтхиллом и Уиземом в работе [20] и независимо от них Ричардсом в работе [21]. В данных работах было рассмотрено

движение на однополосной бесконечной дороге с точки зрения гидродинамики. Эту модель впоследствии назвали моделью Лайтхилла-Уизема-Ричардса (LWR) [22, 23]. Авторы показали, что процессы переноса в сплошных средах — подходящий инструмент для моделирования заторов. Интересно, что в это время в СССР и США проводились активные исследования процессов и описывающих их уравнений, возникающих при взрыве бомбы. Было обнаружено, что поведение нелинейных волн при взрывах по возникающим дифференциальным уравнениям — процесс, аналогичный распространению затора на однополосной дороге.

В 1946 году были проведены первые массовые исследования, посвященные вопросу времени реакции водителя. Например, управление шоссежных дорог штата Огайо проверило свыше 1000 человек в целях выявления влияния на тормозной путь времени, затрачиваемого на включение тормоза при различной скорости после того, как водитель обнаруживает опасность. Среднее время реакции для мужчин составило 0,57 сек, для женщин — 0,62 сек [24]. Справедливо полагалось, что в обычных условиях время реакции будет больше, поскольку при испытаниях водители могли предвидеть появление опасности.

В 1951 году Гудмен рассмотрел Эрланговское распределение (обычно распределение Эрланга используется в тех случаях, когда длительность какого-либо процесса можно представить как сумму  $k$  элементарных последовательных составляющих, распределенных по экспоненциальному закону) интервалов между последовательными автомобилями и таким образом получил формулу для распределения числа автомобилей при синхронном счёте, названную обобщённым распределением Пуассона, далее исследовавшимся в работах Уислера, Хейта и других ученых.

В 1952-м году английский ученый Дж. Г. Вардроп представил миру свои два принципа равновесия, относящихся к концепции равновесия Нэша из теории игр, разработанных независимо друг от друга. Первый принцип во многом совпал с идеями 1920-годов, высказанными в соавторстве с Ф. Найтом.

До настоящего времени этот принцип остаётся одним из самых простых и понятных при описании распространения движущихся объектов по транспортной сети. Его формулировка: «время на поездку на всех используемых к данному моменту путях всегда будет не больше, чем время на поездку по путям неиспользуемым; каждый из участников потока независимо от остальных в каждый момент времени пытается выбрать наиболее оптимальную траекторию движения». Если продолжить проведение физических аналогий, то модель движения транспортных потоков достаточно точно описывается моделью распространения вязкой жидкости. Второй принцип равновесия гласит, что «среднее время поездки достигается только при совместных усилиях всех участников потока». Бекман (Beckmann), Макгуайр (McGuire) и Уинстен (Winsten) в 1956-м году впервые построили математическую модель сетевого равновесия.

Концепция равновесного распределения транспортных потоков состоит в следующем: в состоянии равновесия никто не может изменить свой путь так, чтобы цена поездки уменьшилась и, таким образом, никто не имеет мотивации к изменению своего пути. Решение задачи математического программирования может быть облегчено благодаря преобразованию Бэкмана [25]. С именем Бэкмана связано ещё одно понятие теории транспортных потоков — модель Бэкмана. Сущность этой модели в том, что найденное решение задачи минимизации является равновесием Нэша-Вардропа. В 1954 году Бейли рассмотрел обыкновенную систему с групповым обслуживанием, которая оказала большое влияние на Биси, предложившего рассмотреть задачу о пересечении перекрестка с точки зрения этой теории. Эта модель была более реалистична, чем предложенная Бекманом, МакГиром и Винстеном в 1956 году модель перекрёстка с двумя дискретными параметрами.

Движение на двухрядной дороге также начало изучаться около 1960-х годов и описывалось детерминированными процессами, близкими к более современной теории клеточных автоматов [26]. Одна из первых книг, система-

тизирующих знания о транспортных потоках — Ф. Хейт, «Математическая теория транспортных потоков», известная с 1963-го года. В данной книге рассмотрено моделирование автотранспортных потоков и подведена общая теоретическая база под эти цели, опирающаяся на теорию вероятности и теорию массового обслуживания. Благодаря этой книге математическое моделирование транспортных потоков выделилось в самостоятельный раздел прикладной математики. Тем не менее, эта книга была немного архаичной, так как содержала уже устаревшие методы моделирования транспортных потоков, не включая в себя при этом подробных описаний и математического аппарата уже существующих и активно разрабатываемых гидродинамических и кинетических моделей.

В 1960-м году Ньюэлл предложил модель последовательного расположения светофоров, обеспечивающую общую среднюю скорость автомобильного движения, а в 1961-м году — математическую модель микроскопического толка (в которых автомобили рассматриваются как отдельные элементы), названную его именем, которая является одной из первой нелинейных моделей оптимальной скорости. Для каждого водителя в данной модели выведена некая «безопасная» скорость, которая зависит от расстояния до движущегося впереди автотранспортного средства (лидера).

В 1959 году сотрудники концерна «Дженерал Моторс» Д. Газис, Р. Херман, Р. Потс предложили одну из первых нетривиальных микроскопических моделей однополосного транспортного потока, с помощью которой можно получить фундаментальную диаграмму — зависимость между интенсивностью потока автомобилей и плотностью.

В 1960-х годах Херст и Перчонок в своих статьях [27, 28], видимо, одними из первых начали вводить фактор ошибок водителя в моделировании его движения. Херст утверждал, что нормально мыслящий водитель должен и будет рисковать. «Совет водителю не рисковать равносильно предложению не выезжать на линию. Поскольку водитель не намерен принимать подобную

рекомендацию, он должен научиться отличать приемлемый риск от неприемлемого. Многие дорожно-транспортные происшествия являются результатом неправильной оценки риска со стороны нормальных эмоционально устойчивых водителей при удовлетворительной мотивации» [29].

В то же время появились первые предложения использовать имитаторы управления автомобилем. Например, по мнению Халберта и Войцика [30], автомобильный имитатор должен включать реальный автомобиль, задние колеса которого опираются на стальные ролики динамометра. Также в имитатор входят две киноленты, на одной из которой изображено то, что видит перед собой водитель, а на второй — то, что происходит позади него. В зависимости от этих изображений и осуществляется управление автомобилем. При повороте руля кадры переднего фильма должны перемещаться, шум двигателя должен быть реальным, а при помощи маховиков, размещенных на роликах, должна воспроизводиться инерция автомобиля, что должно создавать впечатление работы двигателя и изменения скорости. На основе технической базы тех времен эти исследования дали очень скромные результаты. Большинство из работ того времени, посвященных имитации автомобильного движения, были посвящены вопросам методологии, очередности исследований и потенциальным применениям.

Начиная с 1960 года были проведены обширные исследования, начатые Газисом, Херманом и Марадудиным, посвященные в том числе вопросам длительности включения желтого сигнала светофора. По предположению Дрю, решить проблему восприятия желтого сигнала как вызова двигаться побыстрее должен был светофор с обратным отсчетом [29].

Как уже упоминалось ранее, формирование матрицы корреспонденций является одной из центральных и сложнейших задач во всех исследованиях, связанных с существенными структурными или параметрическими изменениями транспортных потоков городской сети. При всем многообразии подходов к формированию таких матриц довольно четко прослеживается разделение

их на два больших класса: экстраполяционные и вероятностные.

Экстраполяционные методы формирования матрицы корреспонденций основаны на использовании данных обследования существующего состояния распределения потоков пассажиров и транспорта между корреспондирующими районами с применением для прогнозирующих расчетов пропорциональных коэффициентов роста. В начале 50-х годов этот метод получил широкое распространение, например, можно выделить такие методы, как детройтский метод и метод Фратара. Детройтский метод был впервые применен при проектировании системы магистралей в 1953 году и, наряду с использованием коэффициентов роста отдельных районов, использует коэффициент роста города в целом. К сожалению, прогнозирование с помощью использования этого метода не всегда надежно, и ошибки в вычислениях будут нарастать, если темпы роста города отличаются от темпов роста отдельных районов. Профессор Томас Дж. Фратар использовал итерационный метод, при котором результаты одного шага становились входными данными следующего и так вплоть до равенства между подсчитанными заранее величиной транспортного оборота района и рассчитанной суммой корреспонденций. После того, как ЭВМ стали активнее использоваться, этот метод получил наибольшее распространение среди экстраполяционных методов расчета матриц корреспонденций [31–37].

В 1966 году появились работы А. Дж. Вильсона, касающиеся энтропийных методов в математическом моделировании, посвященные, в том числе, расчетам матрицы корреспонденции. Энтропийные методы базируются на теории, также применяемой в статистической физике – энтропия есть мера неопределенности системы. Основная гипотеза данной модели в том, что если принять, что в макросистеме состояние равновесия достигается при максимуме её энтропии, то при этом должны выполняться условия конечности ресурсов, содержащихся в системе. Разные варианты этих условий приводят к разным по сложности задачам математического программирования [38].

### 1.1.3. Эпоха вычислительных экспериментов

Появление ЭВМ позволило производить сложные численные эксперименты с помощью моделирования процессов, и, что особо важно, появилась возможность учитывать случайный характер транспортного потока. К моделированию обычно прибегают в тех случаях, когда изучаемые системы невозможно анализировать с помощью прямых или формальных аналитических методов.

В 1967-м году была создана, видимо, первая вычислительная математическая модель транспортного потока коллективом авторов Дрю, Месерол, Бур [39]. Это была программа, разработанная для исследования процесса выезда на магистраль с примыкающего въезда, изображенного авторами следующим образом [29] (такие схемы популярны в США):

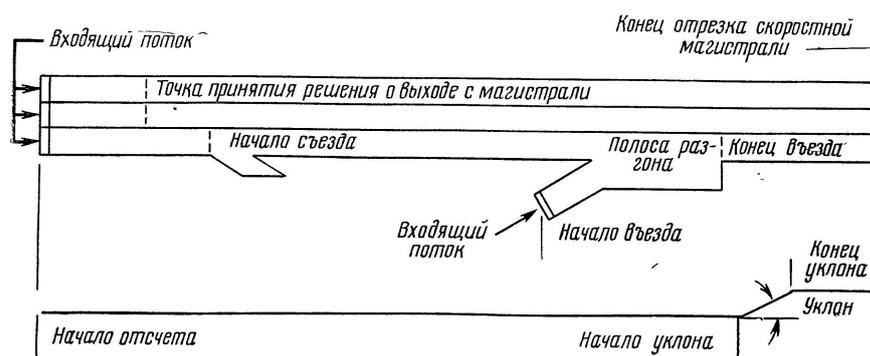


Рис. 1.3. Съезд с автомагистрали

Проведенное исследование носило достаточно общий характер. Авторами предусматривалась возможность изменения входных параметров с целью изменения структуры магистрали, что позволяло моделировать работу различных магистралей. Были изучены такие переменные факторы, как число полос, длина отрезка магистрали, число въездов и съездов, их расположение и длина, длина каждого участка разгона, место начала уклона, уклон дороги. Первоначально каждому автомобилю были заданы такие параметры, как его начальная точка, фактическая скорость и требуемая скорость. Движение

автомобилей осуществлялось по некоей «логике» авторов, по сути задающей микромодель транспортного движения [29].

В 1972 году американец Д. Дрю написал книгу «Теория транспортных потоков и управление ими», которая является одной из крупнейших монографий по данной тематике. В ней рассматриваются как физические, так и психологические особенности движения автомобиля, а также различные математические модели транспортных потоков, в том числе введен энергетический подход к уровню обслуживания [29].

В данной работе была также подробно изучена проблема видимости и освещенности на дорогах с различной кривизной, судя по всему, поставленная самим автором.

Эффективность дорожно-уличной системы автор оценивал по трём основным критериям: интенсивности движения, его средней скорости и числу дорожно-транспортных происшествий. Все эти данные необходимо собирать и обрабатывать с точки зрения математической статистики. «Контрольные подсчеты на главных улицах должны производиться не реже, чем 1 раз в 2 года, автомобили следует разделять по направлениям движения, минимальная продолжительность подсчета — 24 часа» [29]. Для подсчёта использовались инструменты от ручных до пневматических, фото, звуковых и инфракрасных счетчиков. При проектировании дороги автор предлагал пользоваться расчетной часовой интенсивностью движения — ожидаемой интенсивностью движения по ней в каком-то заданном году, что вынуждало продумывать методы предсказательного моделирования, на тот момент бывшие элементарными. Значительная часть монографии была посвящена всевозможным распределениям, анализу их взаимодействий, а также их применениям в математическом моделировании транспортных потоков. Одна из глав посвящена непосредственно компьютерному моделированию транспортных потоков.

Заинтересованность к исследованию транспортных систем в 60-70 годы привела к финансированию исследовательских контрактов. Ряд авторитет-

ных ученых в области математики (известный специалист по математической статистике Л. Брейман [17]), физики (И. Пригожин), автоматического управления (М. Атанс) оказали большое влияние на дальнейшие исследования.

В 1961 году Пригожиным и соавторами впервые было описано кинетическое уравнение для транспортного потока.

В отличие от моделей гидродинамического толка, кинетические модели основываются на описании динамики фазовой плотности потока. Это означает, что изучается плотность распределения АТС и по координате, и по скорости. Эта модель возникает при агрегации молекулярной динамики — модели, описывающей каждую частицу по-отдельности. Транспортный поток в данной модели описывается кинетическим уравнением типа Больцмана, в котором вместо «интеграла столкновения частиц газа» используется «интеграл взаимодействия АТС». Как уравнения Эйлера выводятся из уравнений Больцмана, так и макроскопическая модель при этом подходе выводится из кинетической модели.

В 1963 году в Канаде, в г. Торонто, была создана первая большая система управления движением, включающая в себя ЭВМ. Подобные системы с ЭВМ, призванные управлять движением в особо оживленных районах, появились в 1965-1969 годах во многих городах, включая Токио, Мюнхен, Лондон, Мадрид и Нью-Йорк. Начиная с 1970 года, одной из лидирующих стран по автоматизации управления дорожным движением стала Япония, где данные системы были установлены во всех крупных городах страны и была создана подобная система для сети японских скоростных дорог.

В 1967 году известные японские специалисты Х. Иносэ и Т. Хамада вместе с профессором К. Фуджисаки опубликовали статью «Теория управления дорожным движением, основанная на макроскопических моделях транспортного потока». По-видимому, в ней впервые была в явном виде выражена концепция макромоделирования в теории управления движением [17].

В 80-х годах Х. Иносэ и Т. Хамада была написана книга «Управление

дорожным движением» [17]. В этой книге макромодельный подход использовался как эффективный и почти универсальный метод исследования и оптимизации управления дорожным движением.

В этой книге особенно выделена роль теории графов в транспортном моделировании, в том числе, были добавлены такие методы, как введение «фиктивных» вершин, соответствующих независимым светофорным фазам, а также изучена топология транспортных графов.

В книге был сделан акцент на вопросах управления светофорными режимами, которые, по мнению авторов, составляют ядро всего управления дорожным движением. Этот вопрос был поднят в связи с тем, что в некоторых районах плотность расположения светофоров была настолько велика, что автомобиль проезжал через 2 соседних светофора приблизительно за 10 секунд, что вынуждало продумывать системы коллективного управления светофорными режимами.

Одна из глав книги ожидаемо была посвящена вопросам имитационного моделирования транспортных потоков с помощью использования ЭВМ. Авторы подразделяли имитационные модели на три категории: микроскопические, в которых рассматривались отдельные транспортные средства, макроскопические, представляющие группы из нескольких автомобилей и жидкостные, рассматривающие транспортный поток как жидкость [17]. В современной литературе модели, называемые Х. Иносэ и Т. Хамада жидкостными, считаются макроскопическими. Методы, описываемые авторами при имитационном моделировании, очень близки к более современной теории клеточных автоматов. В том числе, авторами были введены вероятностные факторы смены полосы движения.

Поскольку имитационное моделирование на микроуровне не могло обеспечить характеристик всей дорожной сети, то необходимо было выполнить крупномасштабные работы по развитию имитационного моделирования, что привело к использованию макроскопических моделей. Макромоделирование

обычно оперировало с приближенными моделями, которые, тем не менее, в условиях дорожного движения оставались вполне удовлетворительными благодаря тому, что основные временные задержки были вызваны не воздействием автомобилей друг на друга, а особенностями светофорных фаз.

Авторы использовали следующий метод макроскопического моделирования: дороги делились на участки длиной несколько десятков метров и транспортный поток представлялся числом автомобилей на участке и их средней скоростью. Таким образом, было задано дискретное расстояние вдоль дороги с шагом, равным длине участка, а автомобили в пределах участка не различались. Временной шаг в данной модели выбирался одного порядка с минимальной величиной времени проезда участка [17].

В 70-х годах Шеннон Р. написал книгу «Имитационное моделирование систем — искусство и наука». [40], в которой ввел термины «метод фиксированного шага» и «метод шага до следующего события». Использовались также термины «метод  $\Delta t$ » и «метод особых состояний», которые в дальнейшем нашли своё применение в имитационном моделировании транспортных потоков, так как модели, вычисляемые на ЭВМ, должны обладать дискретностью.

Следующим после появления модели LWR шагом, упомянутым ещё в 1955 году, но окончательно предложенным в 1974-м, был учёт «дальнозоркости» водителей путём добавления диффузионных слагаемых, соответствующих факту, что при увеличении плотности потока водители уменьшают скорость, а при уменьшении плотности — увеличивают. Эта модель была названа моделью Уизема.

Примерно в то же время была создана новая модель — модель Пейна, в которой уже не предполагалось, что желаемая скорость достигается мгновенно.

В 1975 году Павери-Фонтана предложил усовершенствование кинетического уравнения Пригожина. Как и в исходном уравнении, так и в уравнении,

предложенном Павери-Фонтана, АТС рассматривались как точечные объекты. Модификация этих уравнений с учетом неточечных размеров автомобилей была сделана позже (в 1996 году) в работах Хелбинга. К слову, в наше время кинетические модели используются в основном не для моделирования движения АТС на трассах, а при исследовании поведения толпы, например, для моделирования входов и выходов из объектов типа стадионов. При строительстве объектов в Сочи для этого использовалась модель Хелбинга. Гидродинамическая модель разобрана И. Морозовым [41]. Также существуют модели, являющиеся промежуточными между гидродинамическими и кинетическими, например, подобной (так называемой мезоскопической моделью) пользуется коллектив Б. Н. Четверушкина.

В нашей стране оптимизация движения автотранспортных средств активно изучалась в конце 70-х годов, опять же, в связи с Олимпийскими играми 1980 года. Результаты этих исследований неоднократно докладывались на семинарах на мехмате МГУ им. М.В. Ломоносова.

Интенсивные научные разработки в областях математического моделирования транспортных потоков, проектирования дорог и организации движения велись в МАДИ, ВНИИ БД МВД СССР, ХАДИ и других научных организациях страны. Вплоть до 1976 года на территории СССР ограничения скорости устанавливались лишь на опасных для движения участках дорог, например, на крутых спусках, при сужениях дороги и плохой видимости. Начиная с 1 января 1976 года в правилах дорожного движения были внесены изменения, ограничивающие скорость. Исследования по эффективности ограничения скорости проводились в ВНИИ БД МВД СССР. К примеру, рекомендовалось исследовать распределение скорости на участке дороги и ограничить скорость тем значением, которое превышает 15 процентов водителей. Но все эти запреты не учитывали влияния интенсивности движения.

В 1979 году была издана книга советских ученых Кислякова, Филиппова и Школяренко «Математическое моделирование и оценка условий движения

автомобилей и пешеходов» [42], в которой были подведены некие выводы на основе исследований как в СССР, так и за границей на тему оценки условий безопасного движения автомобилей и пешеходов. В ней были приведены новые показатели такой оценки, пригодные для научно обоснованного прогноза, учитывающие вероятностный характер автомобильного и пешеходного движения.

В книге рассмотрены условия движения как при наличии светофорного управления, так и без него. Оценка давалась на основе анализа условий выполнения водителями типичных маневров удобным и безопасным образом. В данной книге дорожно-транспортная ситуация была задана как вероятностное состояние процесса дорожного движения, но вероятностный фактор самих водителей в данном контексте не рассматривался.

Со всё большим распространением ЭВМ стало необходимым продумать новые, более совершенные и удобные для вычислений методы компьютерного моделирования транспортных потоков.

Ещё в 50-е годы Дж. Фон Нейманом была введена концепция клеточных автоматов. В 1992 году появилась модель Нагеля-Шрекенберга, положившее начало активному использованию теории клеточных автоматов в транспортном моделировании. Эти модели обладали малой научной ценностью, но оказались весьма удобны для компьютерных расчетов. В моделях данного типа дорога и время разбиваются на дискретные промежутки. В большинстве моделей подразумевается, что в одной клетке может находиться не более одного автотранспортного средства [23]. В моделях клеточных автоматов важнейшим является вопрос: *что есть клетка?* Если полагать клетку фиксированной частью полосы, которую за определённое время проезжает АТС, то динамическая система, получающаяся при данном допущении, есть дискретный аналог непрерывных моделей.

Начиная с этого времени появляется много статей и книг, рассматривающих модели дискретного микромоделирования транспортных потоков. Если

вначале эти проекты были весьма дорогостоящи из-за огромных расходов на вычислительную технику и создание программного обеспечения и вынуждали разработчиков совершать множество дополнительных действий по разбиению задачи на подзадачи и вычислению их по-отдельности, то после удешевления и улучшения вычислительных мощностей появились более общие и сложные модели, в том числе с различными стратегиями поведения водителей.

В это время основной интерес стал уделяться исследованию динамического поведения потока. Исследователи обратили внимание на то, что многие сложности в динамике поведения систем есть следствие свойств взаимодействия между АТС в моделях.

В конце 80-х — начале 90-х годов во многих странах мира и особенно в США наблюдался огромный рост числа АТС, в связи с чем транспортная ситуация значительно ухудшилась и транспортные проблемы стали задачей национальной безопасности. Лучшие физики и лаборатории в Лос-Аламосе изучали эти проблемы с использованием компьютерной техники. Например, некоммерческий проект TRANSIMS (система анализа моделирования транспорта) представляет собой интегрированный набор инструментов, разработанных для проведения регионального анализа транспортной системы на основе клеточных автоматов. Он использует новую парадигму моделирования индивидуальных АТС и их мультимодальных перевозок на основе синтетических популяций и их деятельности. По сравнению с другими моделями транспортной совокупности, TRANSIMS представляет время последовательно и непрерывно. Его зависящие от времени маршрутизации на основе микромоделирования также отличаются от других агрегатных моделей. Основой методики является нагрузка дорожной сети трафиком и итерирование до достижения равновесия Нэша. Имеются подмодули синтезатора населения, генератора активности, планировщика маршрута и микросимулятор. Входными данными в очередной итерации служат выходные данные предыду-

щей [43, 44]. Другим примером является программный комплекс VISUM [45].

В России также проводилось множество исследований на данную тематику, так как уровень автомобилизации страны резко возрос при том, что уровень развития дорожных сетей и технических средств управления был очень низок. Также в России, к сожалению, всегда была проблема с оценкой состояния и качества автомобильных дорог. Даже Гоголь в своём «Ревизоре» упоминал некий мост, который был изображен на всех картах и планах, но «А кто помог тебе сплутовать, когда ты строил мост и написал дерева на двадцать тысяч, тогда как его и на сто рублей не было?» [46], а также стоит упомянуть недавно построенный мост во Владивостоке стоимостью 29 миллиардов, который смыло дождём. Эти аспекты требовали не локального и узковедомственного, а полноконтрольного доступа за управлением движения и разработкой его состояния. В 1993 - 1994 годах была попытка средствами АО НПЦ «Кибернетика» разработать Краснодарской краевой АСУД на дорогах, но всё остановилось после составления отчёта [47].

#### 1.1.4. Современное положение дел

В настоящее время много литературы посвящено изучению и моделированию транспортных потоков. Финансируются исследования, направленные на решение существующих и потенциальных проблем. Ряд академических журналов печатает только работы о динамике автомобильного движения. В их числе Transportation Science, Transportation Research, Operation Research, Automatica, Physical Review E, Physical Reports, Mathematical Computer Simulation.

Калифорнийская школа (П. Варайя и А. Б. Куржанский) [48–51] активно развивает математическую теорию управления транспортными потоками. Исходя из модели клеточных автоматов К. Даганзо (1994) = схема Годунова + модель Лайтхилла–Уизема + треугольная фундаментальная диаграмма,

авторы предлагают оригинальный способ оптимального управления транспортными потоками в Калифорнии. Одной из задач коллектива калифорнийских учёных была оптимизация движения на скоростных трассах, решённая следующим образом — въезд на трассы был затруднен для уменьшения эффекта «бутылочного горлышка», возникающего при занятых полосах при въезде. Этим, как ни странно, добились эффекта, что сама скоростная трасса начала ехать в более оптимальном режиме и водители стали терять время только на выездах на неё, что позволило сильно сократить их временные издержки.

Из треугольной фундаментальной диаграммы [23] следует, что одному и тому же значению потока автомобилей соответствуют разные (как правило, две) плотности и, как следствие, разные скорости. Очевидно, что более выгодным режимом является режим с большей скоростью. Задача управления (светофорами или въездами на основные магистрали) заключается в том, чтобы большую часть времени среднестатистический водитель проводил именно в режимах, соответствующих большей скорости.

Одной из важных современных теорий, по которым зачастую оцениваются модели транспортных потоков, является эмпирическая теория трёх фаз, разработанная Борисом Кёрнером с 1996 по 2002 год. Она рассматривает переход от свободного потока к плотному (*trac breakdown*) и возникающих в результате структурах в интенсивном потоке на скоростных магистралях. Более подробно данная модель описана в 1.2.5.

Менее требовательная к качеству предоставленных данных модель, впоследствии названная моделью Нестерова-Пальмы, была предложена в 1998 году. Она известна и под другим названием — модели стационарной динамики.

В рамках этой модели предполагается, что водители действуют оппортунистически, т.е. выполнен первый принцип Вардропы. Рассмотрим некоторый граф  $\Gamma < V, E >$ . В модели каждому ребру  $e \in E$  ставятся в соответствии

параметры  $\bar{f}_e$  и  $\bar{t}_e$ . Они имеют следующую трактовку:  $\bar{f}_e$  — максимальная пропускная способность ребра  $e$ ,  $\bar{t}_e$  — минимальные временные издержки на прохождение ребра  $e$ . Таким образом, сама модель задается графом  $\Gamma(V, E, \bar{f}, \bar{t})$ , где  $\bar{f} = \{\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_{|E|}\}^T$ ,  $\bar{t} = \{\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_{|E|}\}^T$ . Пусть  $f$  — вектор распределения потоков по ребрам, иницируемый равновесным распределением потоков по маршрутам, а  $t$  — вектор временных издержек, соответствующий распределению  $f$ . Тогда, если транспортная система находится в стационарном состоянии, всегда выполняются неравенства  $f \leq \bar{f}$  и  $t \geq \bar{t}$ . При этом считается, что, если поток по ребру  $f_e$  меньше, чем максимальная пропускная способность ребра  $\bar{f}_e$ , то все автомобили в потоке двигаются с максимальной скоростью, а их временные издержки  $t_e$  минимальны и равны  $\bar{t}_e$ . Если же поток по ребру  $f_e$  становится равным пропускной способности ребра  $\bar{f}_e$ , то временные издержки водителей  $t_e$  могут быть сколь угодно большими. Это удобно объяснить следующим образом. Допустим, на некоторое ребро  $e$  стало поступать больше автомобилей, чем оно способно обслужить. Тогда на этом ребре начинает образовываться очередь (пробка). Временные издержки на прохождение ребра  $t_e$  складываются из минимальных временных издержек  $\bar{t}_e$  и времени, которое водитель вынужден отстоять в пробке. При этом, очевидно, если входящий поток автомобилей на ребро  $e$  не снизится до максимально допустимого уровня (пропускной способности ребра), то очередь будет продолжать расти и система не будет находиться в стационарном состоянии. Если же в какой-то момент входящий на ребро  $e$  поток снизится до уровня пропускной способности ребра, то в системе наступит равновесие. При этом пробка на ребре  $e$  (если входящий поток  $f_e$  будет равен  $\bar{f}_e$ ) не будет рассасываться, т.е. временные издержки так и останутся на уровне  $t_e (t_e > \bar{t}_e)$ . Модель стационарной динамики можно получить предельным переходом из модели Бэкмана.

Самой современной моделью, предложенной А.В. Гасниковым и Ю.Е. Нестеровым [52], является трехстадийная модель стационарной динамики. В

этой модели предпринята попытка объединить в одну общую модель, которая сводится к решению задачи негладкой выпуклой оптимизации, модель расчета матрицы корреспонденций (энтропийная модель), модель равновесного расщепления потоков (по способу передвижений) и модель Нестерова—де Пальма. Ранее такие попытки предпринимались, в основном, с моделью равновесного распределения потоков Бэкмана, калибровка которой представляется значительно более сложным делом. Предполагается, что предложенный в данной модели способ расчета намного эффективнее всех ранее известных способов прогонки блоков таких многостадийных моделей с целью поиска неподвижной точки.

В статье, описывающей данную модель [53] используется теорема Тихонова о разделении времен получения трехстадийной модели из отдельных блоков (расчет матрицы корреспонденций + равновесное расщепление потоков + равновесное распределение потоков). Строится обобщение модели стационарной динамики на случай, когда есть несколько способов передвижения, и, таким образом, в неё встраивается модель равновесного расщепления потоков. После объединения её с энтропийной моделью расчета матрицы корреспонденций получается трехстадийная модель. Поиск равновесия в полученной трехстадийной модели в итоге сводится к решению задачи негладкой выпуклой оптимизации. Эта модель также обобщена на случай поиска стохастического равновесия, что можно проинтерпретировать как ограниченную рациональность водителей или их неполную информированность, что делает её более приближенной к практике. С вычислительной точки зрения, сделанная модификация сводит задачу к задаче гладкой выпуклой оптимизации с немного более громоздким функционалом. В ряде случаев трехстадийную модель можно обобщить до четырехстадийной, в которой учитываются различные типы пользователей и различные типы передвижений (моделирование идет на больших масштабах времени).

## **1.2. Более подробный обзор наиболее используемых в настоящее время методов**

Как уже было сказано в историческом обзоре, существуют различные подходы к транспортному моделированию. Остановимся поподробнее на наиболее используемых в современности и в данной работе моделях. Обратим внимание на то, что для всестороннего анализа транспортных процессов необходимо совмещать различные методы моделирования. Макромодели, хотя и могут оценить общее состояние моделируемой системы, не могут учесть множество частных особенностей. Хотя микромодели, как правило, обладают бóльшим разрешением, они вынуждены одновременно иметь дело с взаимодействием большого количества транспортных средств как с собой, так и с элементами дорожной инфраструктуры и поэтому для получения удовлетворительных результатов требуют значительных вычислительных ресурсов. Моделирование транспортных процессов мегаполисов в целом на микроуровне возможно только на исключительно производительных вычислительных комплексах. Поэтому если ставится такая задача, то её решение должно быть связано с комбинированным подходом, при котором общие тенденции определяются макромоделями, а конкретные фрагменты транспортной системы рассчитываются с помощью микромоделей. Можно сказать, что макромодели являются подосновой, формирующей потребности в микромоделировании.

### **1.2.1. Макроскопические модели транспортных потоков**

Макроскопические модели транспортных потоков рассматривают поток АТС как единое целое, обычно — как аналог одномерной сжимаемой жидкости. Хотя история данного вопроса достаточно велика, в настоящее время до сих пор используются одни из самых старых моделей.

Например, модель Лайтхилла-Уизема-Ричардса (LWR) (1955), несмотря на всё её несовершенство, неплохо справляется с данными той точности, кото-

рые существуют в настоящее время, в то время, как более высокоуровневые модели из-за неточности данных иногда не только не улучшают результат моделирования, но и значительно повышают требуемые для моделирования вычислительные мощности.

Большинство существующих моделей полагают, что транспортные потоки и функции возникающих затрат аддитивны.

Одной из моделей, которая учитывает неаддитивность социально-экономических систем, является модель, основанная на динамике Тсаллиса, описанная Колесниченко [54].

**Модель Лайтхилла-Уизема-Ричардса (LWR).** В модели LWR транспортный поток считается подобным потоку сжимаемой жидкости и описывается законом сохранения массы (количества АТС). Модель основана на предположении о существовании функциональной зависимости между интенсивностью потока АТС (скорость  $\times$  плотность) и плотностью [20, 21].

При введении начальных условий возникают различные варианты задачи Коши, например, описывающие распространение затора (пробки).

Один из самых серьёзных недостатков в модели LWR — это то, что в любой момент времени средняя скорость соответствует равновесному значению при данной плотности потока, что не позволяет корректно исследовать часто возникающие случаи неравновесных потоков [55].

**Модель Танака.** Один из способов определения зависимости в фундаментальной диаграмме — модель Танака (1963) [17]. В этой модели рассматривается поток АТС, состоящий из одной полосы. Положим, что скорость АТС не превышает  $v_{\max}$ . Плотность  $\rho(v) = \frac{1}{d(v)}$ , где  $d(v) = L + c_1v + c_2v^2$  — среднее расстояние между АТС для определённой скорости потока,  $L$  — средняя длина АТС,  $c_1$  — время реакции водителей,  $c_2$  — коэффициент, зависящий от тормозного пути.

В целом, коэффициент  $c_2$  зависит от состояния дорожного покрытия и погодных условий.

Из зависимости  $d(v)$  можно получить зависимость  $V(\rho)$ , удовлетворяющую условиям модели LWR.

**Модель Уизема.** Уизем предложил в 1974 году [56] учесть так называемую *дальнозоркость водителей*:

$$v(t, x) = V(\rho(t, x)) - \frac{D(\rho(t, x))}{\rho(t, x)} \frac{\partial \rho(t, x)}{\partial x}, \quad D(\rho) > 0.$$

Это означает, что при увеличении плотности потока впереди водители уменьшают скорость, а при уменьшении плотности — увеличивают скорость. Это приводит к появлению диффузионных слагаемых в уравнениях, описывающих поток.

**Модель Пейна.** Следующий шаг, изменяющий модель LWR — создание так называемой *модели Пейна* (1971) [57, 58].

Эта модель может трактоваться как обобщение закона сохранения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0,$$

в котором нет прямой зависимости скорости от плотности.

**Модель Эйва-Раскла.** Эйв и Раскл (Aw-Rascle) [59, 60], учитывая недостатки модели Пейна-Уизема, разработали новую модель. Вот её основные принципы:

1. Система дифференциальных уравнений, описывающая модель, должна быть гиперболического типа.
2. Значения скорости и плотности, полученные в результате решения задачи Римана с произвольными неотрицательными граничными услови-

ями, должны оставаться неотрицательными и не должны превышать максимально возможную скорость.

3. Собственные значения, полученные при решении задачи Римана с произвольными данными, не должны превосходить скорости потока. Это означает, что едущие сзади АТС не могут воздействовать на едущих впереди.
4. Решение должно согласовываться с тем, что водитель может наблюдать каждый день: торможение вызывает волны сжатия, ускорение вызывает волны разрежения. Третье условие должно выполняться.
5. При малой плотности потока решение должно проявлять зависимость от начальных данных. При  $\rho = 0$  решение не должно непрерывным образом зависеть от начальных данных.

В этой модели транспортный поток описывается нелинейной системой дифференциальных уравнений гиперболического типа (для плотности и скорости потока) с диффузией. Уравнение состояния при этом входит во второе уравнение и отражает склонность водителей двигаться с определённой скоростью.

### 1.2.2. Мезомодели транспортных потоков. Кинетические модели

Мезомодели учитывают особенности поведения водителей, при этом рассматривают автотранспортный поток, не прибегая к моделированию отдельно взятых машин. В различной литературе мезомоделями называют различные модели, но, в целом, чаще всего под мезомоделями понимают так называемые «кинетические модели».

Данный метод основан на выводе некоей макроскопической модели из описания процесса микроскопического взаимодействия АТС с использованием кинетического уравнения (Пригожин). Аналогом в статистической физике является вывод уравнений газодинамики из кинетического уравнения для

фазовой плотности [31].

**Модель Пригожина-Больцмана [61].** Пусть  $f(x, v, t)$  и  $f_2(x, v, x', v', t)$  — функции распределения вдоль магистрали соответственно для одного АТС и для двух АТС. А именно, пусть  $f(x, v, t)dx dv$  будет равно ожидаемому количеству АТС в интервалах  $dx$  (в окрестностях  $x$ ) и  $dv$  (в окрестностях  $v$ ) во время  $t$  и пусть  $f_2(x, v, x', v', t)dx dv dx' dv'$  будет равно ожидаемому количеству пар АТС таких, что первое будет находиться в окрестностях  $x$  в интервале  $dx$  и  $v$  в интервале  $dv$ , а второе, соответственно, в окрестностях  $x'$  в интервале  $dx'$  и в окрестностях  $v'$  в интервале  $dv'$ .

Концентрация АТС тогда выражается

$$c(x, t) = \int_0^x f(x, v, t)dv. \quad (1.1)$$

Общее количество АТС на магистрали во время  $t$  есть

$$N(t) = \int_I^\infty xc(x, t)dx, \quad (1.2)$$

где пределы интегрирования есть полное расширение  $I$ . Далее,

$$\begin{aligned} f(x, v, t) &= \frac{1}{N-1} \int_I^\infty \int_0^x f_2(x, v, x', v', t)dv'dx' \cong \\ &\cong \frac{1}{N} \int_I^\infty \int_0^x f_2(x, v, x', v', t)dv'dx' \end{aligned} \quad (1.3)$$

при  $N(t) \gg 1$ .

Здесь применяется следующее соглашение: в то время, как строчные буквы обозначают функции распределения, то соответствующие прописные будут обозначать функции распределения, нормализованные к единице, напри-

мер:

$$f(x, v, t) = c(x, t)F(x, v, t),$$

где

$$\int_0^{\infty} F(x, v, t) dv = 1.$$

Можно считать, что поток АТС есть

$$\phi(x, v, t) = v f(x, v, t). \quad (1.4)$$

Легко показать, что  $(\phi(x, v, t) dv dt)$  равно ожидаемому количеству АТС, которые пересекают положение  $x$  во интервал времени  $dt$  в окрестностях  $t$  со скоростью  $dv$  в окрестностях  $v$ ). Можно проверить, что  $f$  и  $\phi$  соотносятся с пространством и распределением времени соответственно модели Бреймана [62].

Поток АТС  $q(x, t)$  и средняя скорость  $\langle v \rangle(x, t)$  определяются как

$$q(x, t) = c(x, t) \langle v \rangle(x, t) = \int_0^{\infty} \phi(x, v, t) dv. \quad (1.5)$$

Уравнение Пригожина-Больцмана для потока трафика есть

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right) f(x, v, t) = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} + \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{rel}. \quad (1.6)$$

Левая часть есть хорошо известный оператор потока, применённый к функции распределения функции от одного АТС. Правая часть есть формула Пригожина, включающая в себя два различных распределения — процессов коллизии и процессов релаксации.

**Модель Пригожина-Хермана.** Полученная модель газовой динамики Пригожина была обобщена коллективом Пригожин-Херман [63].

В основном, изменение модели заключается в модификации уравнения Пригожина-Больцмана путём модификации правой его части [64,65]. Процесс релаксации включает в себя только одиночное время релаксации  $T$ .

Программа каждого водителя как выражение от распределения желаемых скоростей остаётся независимой от локальной концентрации.

Модель Пригожина, несмотря на увлечение газовой динамикой, вызывала множество вопросов и критики. Две наиболее серьёзные критики :

1. [66] Корректность члена, выражающего замедление, (авторы используют термин «взаимодействие») сомнительна при наличии очередей АТС. Это связано с тем фактом, что корреляция, присущая очередям, делает неверной предположение о хаотическом порядке взаимодействия АТС, лежащего в основе члена замедления кинетического уравнения Пригожина-Хермана.
2. [67] Отсутствие производной в члене, выражающем релаксацию, вызывает вопросы, связанные с корректностью модели. Корректность выражения для времени релаксации  $T$ , таким образом, не может быть доказана. Кроме того, также проблематично понять смысл значения времени релаксации и, таким образом, определить способ его экспериментального определения.

**Модель Павери-Фонтана.** Обычно данную модель не выделяют в отдельную. Она заключается в некоторых обобщениях моделей Пригожина-Больцмана и Пригожина-Хермана.

Если говорить конкретнее, уравнение Павери-Фонтана получается при интегрировании и предельном переходе для изначального уравнения Пригожина [66,67].

В отличие от Пригожина, Павери-Фонтана описывает ускорение по направлению к желаемой скорости  $v_0$  таким образом:

$$\frac{dv}{dt} := \frac{1}{\tau}(v_0 - v), \quad (1.7)$$

что означает индивидуальную релаксацию вместо коллективной. Отношение 1.7 можно заменить на другой закон ускорения  $dv/dt$  или на другую программу вождения, например, зависящую от плотности потока, как предложено Альберти (Alberti) и Белли (Belli) [68].

Кроме того, процесс ускорения в подходе, основанном на взаимодействии, был предложен Нельсоном (Nelson) [69].

**Модель Хелбинга.** Для избавления от множества недостатков описания транспортных потоков уравнением типа Пригожина, Хелбинг перенес на описание транспортного потока методы, которые применяются в статистической физике для описания поведения сыпучих материалов.

Автором были получены уравнения типа Навье-Стокса.

Хелбинг (Helbing) вывел макроскопическое уравнение трафика, используя уравнения газовой кинетики Павери-Фонтана и метод, аналогичный решению уравнений Эйлера для обычных жидкостей (т.е. расширение Чапмена-Энскога). По сравнению с другими моделями, в модели Хелбинга динамическая равновесная скорость  $V_{eq}$  также зависит от плотности и средней скорости в точке взаимодействия. Более конкретно, Хелбинг предложил следующее уравнение Эйлера с нелокальным членом для средней скорости АТС:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{v_0 - v}{\tau} - \frac{v_0(\theta + \theta_0)}{\tau A(\rho_{\max})} \left( \frac{\rho_a T}{1 - \rho_a/\rho_{\max}} \right)^2 B(\delta_v). \quad (1.8)$$

Таким образом, изменение во времени средней скорости  $v$  получается из следующих членов:

1. *транспортного*, от которого зависит распространения скоростного профиля со средней скоростью;
2. *давления*, который выражает эффект дисперсии, связанный с конечным множеством скоростей АТС;
3. *ускорения*, описывающего ускорение по направлению к желаемой средней скорости  $v_0$  со временем релаксации водителя  $\tau$ ;
4. *торможения*, который является нелокальным и моделирует торможение в ответ на дорожную ситуацию потока в точке взаимодействия  $x_a = x + \gamma(1/(\rho_{\max} + TV))$  при  $1 < \gamma < 2$  — это параметр модели;  $\rho_{\max}$  — максимальная плотность,  $T$  — среднее время продвижения.

В уравнении 1.8 присутствует фактор Больцмана в виде

$$B(\delta_s, S) = \delta_v \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} + (1 + \delta_v^2) \int_{-\infty}^{\delta_v} \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dz,$$

где

$$\delta_v = \frac{v - v_0}{\sqrt{\theta - \theta_a}},$$

который учитывает скорость и дисперсию в актуальной позиции  $x$  и в точке взаимодействия  $x_a$  соответственно.

**Модель, используемая коллективом ИПМ РАН.** В России коллективом ИПМ РАН под руководством Четверушкина Б.Н. широко используются разностные схемы в газодинамике [70].

В частности, коллективом авторов данного института была получена двухмерная модель транспортных потоков на основе газодинамических уравнений.

Путём введения параметра цели, в модель газовой динамики были внесены изменения, заключающиеся в том, что было введено ещё и движение поперёк дороги.

Авторами предлагается модель поперечного движения, в которой автомобили перемещаются на полосу с большей скоростью или меньшей плотностью, а также движутся в сторону установленной цели [71].

Путём нововведения, связанного с введением поперечного движения диффузионным потоком, уравнения типа Больцмана могут быть преобразованы к системе следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\tau_x}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + P) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\tau_x}{2} \frac{\partial}{\partial y} (\rho u v) \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\tau_y}{2} \left( \frac{\partial}{\partial y} (\rho v^2) + \nu_y \rho^{\beta_y} \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u v) \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\tau_x}{2} f \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho u v}{\partial y} &= f - \frac{\partial}{\partial x} P + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\tau_x}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^3 + 3 P u) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\tau_x}{2} \frac{\partial}{\partial y} (\rho u^2 v) \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\tau_y}{2} \left( \frac{\partial}{\partial y} (\rho u v^2) + \nu_y \rho^{\beta_y} \frac{\partial}{\partial y} (\rho u) \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 v) \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\tau_x}{2} f u \right); \end{aligned}$$

$$v = k_u \cdot \rho \frac{\partial u}{\partial y} - k_d \cdot u \frac{\partial \rho}{\partial y} + \min \left( k_t \cdot \frac{u}{x_t - x}, 1 \right) \cdot u \cdot \frac{y_t - y}{x_t - x}.$$

Большое множество параметров в данной модели позволяют её калибровать с учётом статистических данных и материалов других исследователей. Одно из преимуществ данной модели заключается в простоте её численной реализации, основанной на конечно-разностных схемах. Диссипативные члены в правых частях уравнений дают дополнительные вычислительные преимущества. В работах авторов из данного коллектива используются явные и полунейвные методы, основанные на конечных разностях второго порядка аппроксимации по пространству [72].

### 1.2.3. Микроскопические модели транспортных потоков

Как уже было сказано ранее, в микроскопических моделях каждое АТС рассматривается как отдельный элемент транспортной системы. Остановимся на некоторых из наиболее используемых моделей поподробнее.

В микроскопических моделях транспортных потоков полагается, что ускорение конкретного АТС зависит от соседних АТС. Наибольшее влияние на поведение водителя оказывает АТС, движущееся впереди, *лидирующее АТС*, *лидер*. Таким образом, модель движения может быть описана формулой (1.9):

$$\frac{dv_\alpha(t)}{dt} = \frac{v_\alpha^0 + d_\alpha(t) - v_\alpha(t)}{t_\alpha} + f_{\alpha,(\alpha-1)}(t). \quad (1.9)$$

Здесь  $f_{\alpha,(\alpha-1)}(t) \leq 0$  описывает отталкивающее воздействие лидера ( $\alpha-1$ ), которое есть общая функция от

1. относительной скорости  $\Delta v_\alpha(t) = [v_\alpha(t) - v_{\alpha-1}(t)]$ ;
2. скорости  $v_\alpha(t)$  АТС  $\alpha$ , влияющей на безопасную дистанцию до впереди идущего АТС;
3. расстояния между головными частями АТС (расстояние брутто)  $d_\alpha(t) = [x_{\alpha-1}(t) - x_\alpha(t)]$  или просвет (расстояние нетто)  $s_\alpha(t) = [d_\alpha(t) - l_{\alpha-1}]$ , где  $l_\alpha$  означает длину АТС  $\alpha$ .

Соответственно, для идентично ведущих себя АТС с  $v_\alpha^0 = v_0$ ,  $\tau_{\alpha=\tau}$  и  $f_{\alpha,(\alpha-1)} = f$  получаем

$$f_{\alpha,(\alpha-1)}(t) = f(s_\alpha(t), v_{\alpha lpha}(t), \Delta v_\alpha(t)). \quad (1.10)$$

Если пренебречь колебаниями во времени и предположить, что скорость может зависеть от трафика, то

$$v^e(s_\alpha, v_\alpha, \Delta v_\alpha) = v_0 + \tau f(s_\alpha, v_\alpha, \Delta v_\alpha), \quad (1.11)$$

при которой водитель  $\alpha$  пытается адаптироваться. Можно значительно упростить обобщенную (поведенческую) модель 1.9, как

$$\frac{dv_\alpha}{dt} = \frac{v^e(s_\alpha, v_\alpha, \Delta v_\alpha) - v_\alpha}{\tau}. \quad (1.12)$$

**Нецелочисленные модели следования за лидером.** Модели типа 1.12 обычно называют *моделями следования за лидером*.

Первые модели следования за лидером появились в 1950-х годах, например, модель, описанная в статье [73] в 1953 году, а также модель, описанная в статьях [74–77].

Одна из простейших моделей представляет результаты в предположении, что дистанция нетто получается из безопасной, зависящей от скорости дистанции как  $s^*(v_\alpha) = s' + T \cdot v_\alpha$ , где  $T$  означает эффективное безопасное время. Это приводит к  $s_\alpha(t) = s^*(v_\alpha(t))$ , или, после дифференцирования по времени,  $dv_\alpha(t)/dt = [ds_\alpha(t)/dt]/T = [dd_\alpha(t)/dt]/T = [v_{\alpha-1}(t) - v_\alpha(t)]/T$ . К сожалению, эта модель не описывает эмпирически наблюдаемые волны плотности. Таким образом, требуется ввести добавочное время задержки  $\Delta t \approx 1.3$  сек в адаптации, отражающее конечное время реакции водителей. Это приводит нас к модели «воздействие-отклик»:

$$\underbrace{\frac{dv_\alpha(t + \Delta t)}{dt}}_{\text{Отклик}} = \frac{1}{T} \underbrace{[v_{\alpha-1}(t) - v_\alpha(t)]}_{\text{Воздействие}}. \quad (1.13)$$

Здесь  $1/T$  — чувствительность воздействия. Это уравнение относится к классу дифференциальных уравнений с задержкой, которые обычно плохо сходятся при больших временах задержки,  $\Delta \approx 5$  сек. Для данной модели Гандер в 1958-м году показал, что вариации индивидуальных скоростей АТС усиливаются при уровнях неустойчивости  $\Delta t/T > 1/2$ . Экспериментально полученное значение оказалось  $\Delta t/T \approx 0.55$ . Вследствие этого, нелинейная динамика АТС приводила к волнам движения-останова и в конце концов к авариям. Для того, чтобы избежать подобного эффекта и унифицировать похожие варианты моделей, Газис в статье от 1961-го года [78] ввёл в уравнение

обобщённый фактор чувствительности с двумя параметрами  $m_1$  и  $m_2$ :

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{T_0} \frac{[v_\alpha(t + \Delta t)]^{m_1}}{[x_{\alpha-1}(t) - x_\alpha(t)]^{m_2}}. \quad (1.14)$$

Соответствующая нецелочисленная модель может быть переписана следующим образом:

$$\frac{[dv_\alpha(t + \Delta t)/dt]}{[v_\alpha(t + \Delta t)]^{m_1}} = \frac{1}{T} \frac{[dd_\alpha(t)/dt]}{[d_\alpha(t)]^{m_2}},$$

решение которого

$$f_{m_1}(v_\alpha(t + \Delta t)) = c_0 + c_1 f_{m_2}(d_\alpha(t))$$

при  $f_k(z) = z^{1-k}$ , если  $k \neq 1$  и  $\ln z$  в противном случае ( $c_0, c_1$  — константы интегрирования). Для  $m_1 \neq 1$  и  $m_2 \neq 2$  возможен стационарный режим, относящийся к постоянным скоростям и дистанциям. Плотность АТС  $\rho$  тогда определяется обратной величиной к дистанции брутто  $1/d_\alpha$ , и соответствующая равновесная скорость  $V_e$  равна  $v_\alpha$ . Таким образом получается соотношение между скоростью и плотностью

$$V_e(\rho) = V_0 [1 - (\rho/\rho_{\max})^{m_2-1}]^{1/(1-m_1)}$$

при свободной скорости  $V^0$  и максимальной плотности  $\rho_{\max}$ . Большинство соотношений между скоростью и плотностью являются особыми случаями этой формулы для различных значений параметров модели  $m_1$  и  $m_2$ . Реалистичный результат для фундаментальной диаграммы получается, например, для нецелых значений  $m_1 \approx 0.8$  и  $m_2 \approx 2.8$  [79, 80] или  $m_1 = 0.953$  и  $m_2 = 3.05$  [81, 82].

Рассмотренные модели следования за лидером использовались в программе транспортного моделирования MITSIM и были получены более реалистичные параметры зависимости от ускорения [83, 84].

Заслуживают упоминания и другие модели следования за лидером:

- модель Трайбера [85],
- модель Джиппса [86],
- модель, предложенная Бенекочалом и Трайтерером CARSIM, которая, в том числе, описывает движение на перекрёстках [87–89],
- модель, предложенная дель Кастильо [90],
- модель, описанная Мэзоном и Вудсом [75].

**Модель оптимальной скорости Ньюэлла.** Одним из недостатков нецелочисленных моделей следования было то, что они не могли описать поведение водителя вне окружения. Без движущегося впереди АТС, то есть, при  $d_\alpha \rightarrow \infty$ , АТС  $\alpha$  не будет ускоряться совсем, хотя, по логике вещей, желательная скорость  $v_\alpha^0$  должна достигаться именно на трассе, в свободном трафике. Таким образом, другие модели следования не предполагают адаптацию к скорости лидирующего АТС, а предлагают адаптацию к скорости  $v'_e(d_\alpha)$  (зависящей от дистанции), которая должна отражать требования безопасности и иногда называется *оптимальной скоростью*. Сам Ньюэлл в 1961-м году [91] выразил задержанную адаптацию в форме

$$v_\alpha(t + \Delta t) = v'_e(d_\alpha(t)) = v_e(s_\alpha(t)), \quad (1.15)$$

затем Бандо в 1994-м году [92] предложил использовать отношение

$$v'_e(d) = (v_0/2)[\tanh(d - d_c) + \tanh d_c] \quad (1.16)$$

с константами  $v_0$  и  $d_c$ , вместе с моделью оптимальной скорости

$$\frac{dv_\alpha(t)}{dt} = \frac{v'_e(d_\alpha(t)) - v_\alpha(t)}{\tau}, \quad (1.17)$$

что можно рассматривать как аппроксимацию первого порядка рядом Тей-

лора  $v_\alpha(t + \Delta t) \approx [v_\alpha(t) + \Delta t dv_\alpha(t)/dt]$  уравнения 1.14 с  $\tau = \Delta t$ . Для модели оптимальной скорости можно показать, что небольшие колебания неизбежно приведут к заторам, если удовлетворено условие неустойчивости [92]

$$\frac{dv'_e(d_\alpha)}{dd_\alpha} = \frac{dv_e(s_\alpha)}{ds_\alpha} > \frac{1}{2\tau}, \quad (1.18)$$

то есть, если имеется большое время релаксации  $\tau$  или большие изменения в скорости  $v_e(s_\alpha)$  с промежутками  $s_\alpha$ . Подобные исследования проводились для изучения влияния дополнительного времени задержки  $\Delta t$ .

**Intelligent driver model.** Так как модель оптимальной скорости не содержит отклика водителя на относительную скорость  $\delta v_\alpha$  с впереди движущимся АТС, она весьма чувствительна к конкретному выбору функции  $v'_e(d_\alpha)$  и приводит к авариям, когда быстро движущееся АТС приближается к стоящему [93]. Чтобы избежать этого, требуется ввести отношения, зависящие от пары скорость/дистанция и выбрать очень маленькие значения  $\tau$  во избежании нереально больших ускорений [94]. В действительности, однако, время ускорения от пяти до десяти раз больше времени торможения. Более того, водители сохраняют достаточно большую дистанцию безопасности и раньше снижают скорость, когда относительная скорость,  $\Delta v_\alpha(t)$  высока. Эти аспекты были приняты во внимание моделями Гиппса [86], в работах Манстеннета и Крауттера [94, 95], в работах Краусса [96, 97], Хельбинга [98], Некоара [99] и других работах.

#### *Модель разумного водителя (IDM).*

Статьи Трайбера и соавторов [85, 100–102] — хороший пример усилий добиться наилучшего приближения к тому, как ведут себя реальные водители. Полученную модель легко откалибровать, она робастная, в ней не случаются аварии, она численно эффективна, даёт реалистичное поведение при процессах ускорения и торможения и приводит к эмпирически наблюдаемым явле-

ниям. Более того, фундаментальная диаграмма в данной модели соотносится с таковой, полученной по газо-кинетической теории нелокальной модели трафика. Это позволяет связать микро- и макромоделю. В других аспектах, модель разумного водителя разделяет некоторые особенности модели Ньюэлла и модели Нагеля-Шрекенберга.

Ускорение в модели разумного водителя есть непрерывная функция от скорости  $v_\alpha$ , промежутка между АТС  $s_\alpha = (d_\alpha - l_{\alpha-1})$  и разницы скоростей  $\Delta v_\alpha$  рассматриваемого ( $\alpha$ ) и движущегося впереди АТС:

$$\frac{dv_\alpha}{dt} = a_\alpha \left[ 1 - \left( \frac{v_\alpha}{v_\alpha^0} \right)^\delta - \left( \frac{s_\alpha^*(v_\alpha, \Delta v_\alpha)}{s_\alpha} \right)^2 \right]. \quad (1.19)$$

Это выражение есть суперпозиция стремления к ускорению  $a_\alpha[1 - (v_\alpha/v_\alpha^0)^\delta]$  на свободной дороге и необходимости замедления  $f_{\alpha,(\alpha-1)} = -s_\alpha[s_\alpha^*(v_\alpha, \Delta v_\alpha)/s_\alpha]^2$ , описывающего взаимодействие с другими АТС. Параметр  $\delta$  позволяет нам откалибровать поведение при ускорении. В то время, как  $\delta = 1$  соотносится с экспоненциальное от времени ускорению на свободной дороге, как полагается большинством других моделей, в пределе  $\delta \rightarrow \infty$ , можно описать постоянное ускорение  $a_\alpha$ , пока не будет достигнута желаемая скорость  $v_\alpha^0$ . Член, отвечающий за замедление, зависит от отношения между желаемым просветом  $s_\alpha^*$  и актуальным просветом  $s_\alpha$

$$s_\alpha^*(v_\alpha, \Delta v_\alpha) = s'_\alpha + s''_\alpha \sqrt{\frac{v_\alpha}{v_\alpha^0}} + T_\alpha v_\alpha + \frac{v_\alpha \Delta v_\alpha}{2\sqrt{a_\alpha b_\alpha}} \quad (1.20)$$

и динамически изменяется вместе со скоростью  $v_\alpha$  со степенью приближения  $\Delta v_\alpha$ , этим самым отражая разумное поведение водителя.

Параметры данной модели могут быть выбраны индивидуально для каждого АТС  $\alpha$ . Опустим пока индекс  $\alpha$  для удобства чтения и предположим параметры всех АТС равными. Таким образом, остаётся желаемая скорость  $v_0$ , временной промежуток безопасности  $T$ , максимальное ускорение  $a$ , ком-

форное замедление  $b$ , экспонента ускорения  $\delta$ , дистанции затора  $s'$  и  $s''$ , длина АТС  $l$ , на которые не распространяются динамические изменения. Чтобы ещё уменьшить количество параметров, положим  $\delta = 1$ ,  $s'' = 0$  и  $l = 0$ , что всё ещё приводит к адекватным результатам.

В равновесном трафике с  $dv_\alpha/dt = 0$  и  $\Delta v_\alpha$ , водители стремятся сохранить равновесную дистанцию, зависящую от скорости,  $s_e(v_\alpha)$  перед впереди движущимся АТС  $s_e(v) = s^*(v, 0)[1 - (v/v_0)^\delta]^{-1/2}$ . Решение этого уравнения для равновесной скорости  $v = v_e$  приводит к простому выражению только для  $s'' = 0$  и  $\delta = 1, \delta = 2$  или  $\delta \rightarrow \infty$ . Для особого случая  $\delta = 1$  и  $s' = s'' = 0$  равновесная скорость равна

$$v_e(s) = \frac{-1 + \sqrt{1 + [4T^2(v_0)^2 s^2]}}{2v_0 T^2}.$$

Из этого уравнения и микро-макро отношения  $s = (d - l) = (1/\rho - l) = (1/\rho - 1/\rho_{max})$  между промежутком и плотностью потока выводится соответствующая плотность  $Q_e(\rho) = \rho(V_e(\rho))$  как функция плотности трафика  $\rho$ . Коэффициент ускорения  $\delta$  влияет на область перехода между свободным и затруднённым движениями. Для  $\delta \rightarrow \infty$  и  $s'' = 0$ , фундаментальная диаграмма принимает треугольную форму:

$$Q_e(\rho) = \min \left( \rho v_0, \frac{q - \rho(l + s')}{T} \right).$$

При уменьшении  $\delta$ , диаграмма становится всё более гладкой.

Трайбер и соавторы предпринимали множество попыток обобщения данной модели на различные случаи, в том числе, описанные в статьях [103, 104].

#### 1.2.4. Модели клеточных автоматов

Модели клеточных автоматов — это частный случай микроскопических моделей транспортных потоков, основанный на дискретизации пространства-

времени. Модели клеточных автоматов интересны, в первую очередь, своей скоростью и своим сложным поведением в динамике, включая такие интересные феномены, как самоорганизующаяся критичность, формирование спиральных образцов, колеблющаяся или хаотическая последовательность состояний. Высокая скорость и эффективность вычислений в сочетании со следующими свойствами делают эти модели идеально подходящими для параллельных вычислений:

- дискретизация пространства в идентичные ячейки (узлы решётки)  $j$  размера  $\Delta x$ ;
- конечное количество возможных состояний  $g(x)$ ;
- параллельное обновление по времени  $t = i\Delta t$  с элементарным шагом  $\Delta t$ ;
- глобально применимые правила обновления;
- взаимодействия близкого порядка с конечным (небольшим) количеством соседних узлов.

Несмотря на эти упрощения, конечные автоматы и соответствующие им сеточные автоматы в газовых средах имеют широкое применение в приложениях для реалистического моделирования сыпучих сред или жидкостей, для расчёта химических реакций и даже для моделирования лавин.

Их применение в моделировании динамики дорожного движения вызвало колоссальную активность в связи с попытками понять причины нестабильности трафика, ответственные за рваный ритм движения (stop-and-go) и заторы как на автострадах, так и в городах. Первые модели клеточных автоматов для автострад относятся к Кремеру (Cremer) с коллегами (в 1987-м году) [105] и к Нагелю (Nagel) и Шрекенбергу (Schreckenberg) [106] (1992 год). С тех пор появилось ошеломляющее количество предложений для публикации на эти темы.

**Модель Нагеля-Шрекенберга и её вариант с медленным стартом.** Клеточные автоматы описывают динамическое поведение менее детально, чем модели следования за лидером, но их упрощения позволяют исключительно быстро рассчитывать гигантское количество взаимодействующих АТС. Нагель и Шрекенберг в 1992 году предложили разбивать улицу на ячейки  $j$  длиной  $\Delta x$ , а время  $t$  на  $i$  интервалов длительностью  $\Delta t = 1$  сек. Каждая ячейка или пустая или содержит ровно одну единицу АТС со скоростью

$$v_i = \hat{v}_i \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad (1.21)$$

где  $\hat{v}_i \in \{0, 1, \dots, \hat{v}_{\max}\}$ . Для автострад обычно выбирают размер ячейки в  $\Delta x = 7.5$  метров и масштабируют желаемую скорость  $\hat{v}_{\max} = v_0 \Delta t / \Delta x = 5$ . Позиции АТС обновляются параллельно согласно следующим правилам:

1. *Движение*: Продвинуть АТС вперёд на  $\hat{v}_i$  ячеек.
2. *Ускорение*: Если АТС не достигло максимальной скорости, увеличить скорость до  $\hat{v}'_i = (\hat{v}_i + 2)$ , согласно постоянного ускорения  $\Delta x / (\Delta t)^2$ .
3. *Замедление*: Если дистанция (то есть, количество ячеек) до следующего АТС впереди есть  $\hat{d}_i \leq \hat{v}'_i$ , скорость уменьшается до  $\hat{v}''_i = (\hat{d}_i - 1)$ , иначе  $\hat{v}''_i = \hat{v}'_i$ .
4. *Рандомизация*: С вероятностью  $p$ , скорость уменьшается до  $\hat{v}_{i+1} = (\hat{v}''_i - 1)$ , если это приведёт к неотрицательному числу, иначе  $\hat{v}_{i+1} = 0$ .

Согласно шагам (2)-(4), обновлённая скорость как функция от предыдущей скорости  $\hat{v}_i$  может быть вычислена по формуле

$$(\hat{v})_{i+1} = \max(0, \min(\hat{v}_{\max}, \hat{d}_i - 1, \hat{v}_i + 1) - \xi_i^{(p)}), \quad (1.22)$$

где логическая случайная переменная  $\xi_i^{(p)} = 1$  с вероятностью  $p$ , иначе 0.

Заметим, что, согласно правилу (3), водители всегда двигаются со скоростью ниже, чем промежуток перед ними с разницей  $\Delta t$ . Таким образом,

параметр  $\Delta t$  играет в одно и то же время роли шага обновления, времени адаптации  $\tau$  и безопасного времени  $T$ . Более того, длина дискретизации  $\Delta t$  согласуется с минимальным требуемым пространством  $l'$ , то есть, с инверсией плотности затора. Это делает модель Нагеля-Шрекенберга исключительно компактной и элегантной.

Параметр модели («вероятность замедления»)  $p$  описывает индивидуальные флуктуации скорости из-за задержки водителем процесса ускорения (несовершенное вождение). Для автострад Нагель и Шрекенберг предлагают  $p = 0.5$ , что приводит к относительно зашумленной динамике, в то время, как  $p = 0.2$  и  $\hat{v}_{\max}$  — подходящие значения для городского движения.

Вариант данной модели, модель Барловича, добавляющая рандомизацию в зависимости от скорости [107] содержит правило медленного старта. В нём полагается, что  $p = 0.001$  для конечных скоростей и  $p_0 = 0.5$  для  $\hat{v}_i = 0$ . Подобная модель была предложена Бенджамином [108] в 1996 году. Фундаментальная диаграмма результирующей модели сочетает свойства модели Нагеля-Шрекенберга при  $p = 0.001$  для малых плотностей со свойствами её же при  $p = 0.5$  для больших плотностей. Между ними можно обнаружить регион, в котором могут существовать решения обеих моделей, но состояния с высокими потоками метастабильны.

**Некоторые другие модели клеточных автоматов.** Для модели Нагеля-Шрекенберга появляется интересное расширение при добавлении понятия так называемого *круиз-контроля* [109], когда флуктуации отключаются при  $\hat{v}_i = \hat{v}_{\max}$ . Тогда распределение заторов изменяется с экспоненциального [110] к степенному, что добавляет в модель некоторую фрактальность и самоорганизованность [110, 111]. Нагель в 2008 году описал модификацию модели клеточных автоматов на двухполосной дороге [112, 113].

Модель клеточных автоматов Бриона и Ву [114] (1999) модифицирует модель Нагеля-Шрекенберга добавлением вероятностной составляющей в про-

цессе ускорения и требования минимального зазора времени для ускорения.

В том числе, этот коллектив авторов рассматривал задание движения на перекрёстках с помощью клеточных автоматов [115].

Такаясу и Такаясу в 1993 году [116], по-видимому, первыми ввели правило *медленного старта* (*slow-to-start*). Их модель, на которую иногда ссылаются как на модель ТТ или модель Т2, обобщена Шадшнайдером и Штекенбергом [107]: стоящее АТС (скорость  $\hat{v}_i = 0$ ) будет ускоряться с вероятностью  $q = (1 - p)$ , если в наличии имеется ровно одна ячейка впереди. Для  $\hat{d}_i > 2$  ускорение будет детерминированным и равным  $\hat{v}_{i+1} = 1$ .

Модель Нагеля и Херманна от 1993-го года [117] можно рассматривать как непрерывную версию модели Нагеля-Шрекенберга. Её немного обобщённая версия [118] от Зеурманна и Херманна, 1998 года есть

$$\hat{v}_{i+1} = \begin{cases} \max(\hat{d}_i - \hat{\delta}) & \text{для } \hat{v}_i > \hat{d}_i - \hat{\alpha}, \\ \min(\hat{v}_i + \hat{a}, \hat{v}_{\max}) & \text{для } \hat{v}_i < \hat{d}_i - \hat{\beta}, \\ \hat{v}_i & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

Здесь коэффициенты ускорения  $\hat{a} = \hat{a}_{\max} \cdot \min(1, \hat{d}_i / \hat{\gamma})$ , где  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$  и  $\hat{\gamma}$  есть параметры модели.

Другая версия модели Нагеля-Шрекенберга, свободная от коллизий в пространстве — модель Джишса [86], представляемая уравнением

$$v_{\alpha}(t + 1) = \max[0, \text{rnd}(v_{\alpha}^{\text{des}}(t) - a\Delta t, v_{\alpha}^{\text{des}}(t))],$$

где  $\text{rnd}(z_1, z_2)$  есть случайное число, равномерно распределённое в интервале  $[z_1, z_2]$ . Желаемая скорость определяется выражением  $v_{\alpha}^{\text{des}}(t) = \min(v_{\alpha}^{\max}, v_{\alpha}^{\text{safe}}(t), v + a\Delta t)$ , в то время, как безопасная скорость вычисляется как

$$v_{\alpha}^{\text{safe}}(t) = \frac{v_{\alpha-1}(t) + b[s_{\alpha} - v_{\alpha-1}(t)\Delta t]}{v_{\alpha}(t) + b\Delta t}.$$

Эта модель разработана и развивалась Крауссом [96, 97, 119, 120].

Модель, описанная в диссертационной работе Янигро (Janigro) в 1994 году основывается на сетях Петри [80].

Юкава (Yukawa) и Кикучи (Kikuchi) [121, 122] изучали модели трафика, основанные на связных сетях [123].

Хотя имеется много других моделей, основанных на клеточных автоматах, можно упомянуть ещё и модели Фукуи (Fukui) и Ишибаши (Ishibashi) [124], Кноспе [125]. В ней  $\hat{v}_{i+1} = \max[0, \min(\hat{v}_{\max}, \hat{d}_i - 1) - \xi_i^p]$  с неограниченными возможностями ускорения.

Кроме моделей медленного старта, много моделей клеточных автоматов имеют принципиальные различия с другими моделями трафика, особенно с моделями с детерминистическим подходом, например, таким, как рассмотренные ранее модели следования за лидером. Они требуют введения флуктуаций для того, чтобы объяснить появление участков с затруднённым движением. То есть, в пределе  $p \rightarrow 0$ , дорожные затруднения должны исчезнуть. Это не говорит о низком качестве моделей клеточных автоматов, поскольку поведение водителей, очевидно, не безупречно и дорожный поток подвержен случайностям. Однако, это поднимает следующие вопросы:

1. Доминирующий или побочный эффект на процесс движения оказывают флуктуации [126, 126]?
2. Какие виды наблюдений требуют рассмотрения факторов зашумления?
3. Можно ли модели клеточных автоматов математически соединить с другими моделями?

**Модель дискретной оптимальной скорости.** Для создания связи между моделью Нагеля-Шрекенберга и моделью оптимальной скорости, давайте дискретизируем последнюю:

$$v_\alpha(t + \Delta t) \approx \frac{v_\alpha(t) + [v'_e(d_\alpha(t)) - v_\alpha(t)]}{\tau} \cdot \Delta t.$$

Опуская индекс АТС  $\alpha$  и масштабируя время в  $\Delta t = 1$  сек, расстояние между ячейками в длину ячеек  $\Delta x$  и скорость в  $\Delta x/\Delta t$ , получаем  $\hat{v}_{i+1} = \hat{v}_i + \hat{\lambda}[\hat{v}'_e(\hat{d}_i - \hat{v}_i)]$ , где  $\hat{\lambda} = \Delta t/\tau$ . Для того, чтобы получить целочисленные скорости  $\hat{v}$  и положения, нам нужно ввести табуляционную функцию  $h(z)$ .

Дополнительно, нам нужно ввести какой-либо шум для сравнения с моделью Нагеля-Шрекенберга. Совокупная дискретная и оптимальная по шуму модель будет такой [127]:

$$\hat{v}_{i+1} = \max[0, \hat{v}_i + h(\hat{\lambda}[\hat{v}'_e(\hat{d}_i)] - \xi_i^{(p)}). \quad (1.23)$$

Для пороговой функции  $h(z) = \lfloor z \rfloor$  аргумент  $z$  округляется вниз к ближайшему наибольшему натуральному числу  $n \leq z$ . Из этих уравнений следует

$$\hat{v}_{i+1} \leq \hat{\lambda}\hat{v}'_e(\hat{d}_i) + (1 - \hat{\lambda})\hat{v}_i.$$

**Аппроксимация Бернулли для смешанного потока на нескольких полосах** Заслуживает отдельного внимания одна из моделей, основанных на клеточных автоматах, разработанная коллективом МАДИ [128].

В данной модели рассматривается многополосное движение АТС  $K$  различных типов. Каждое АТС занимает отдельную клетку в на своей полосе. Рассматривается  $m$  полос, полосы 1 и  $m$  имеют одну соседнюю полосу, остальные — по две. Всего существует три типа перемещений. При отсутствии препятствия перед АТС движение происходит только вперёд. При наличии препятствия АТС равновероятно переходит на соседнюю полосу при некоторых ограничениях, связанных с тем, что появление в одной клетке двух АТС недопустимо. Если на одну клетку претендуют два АТС, то приоритет отдаётся АТС, находящемуся справа (по ПДД). При дискретном времени АТС типа  $k$ , находящееся в свободном состоянии, передвигается вперёд с вероятностью  $p_k$ , а с вероятностью  $1 - p_k$  остаётся на месте.

Пусть  $q_k$  есть интенсивность потока АТС  $k$ -го типа,  $r_k$  — плотность потока АТС  $k$ -го типа,  $r = \sum_{k=1}^K r_k$  есть суммарная плотность потока,  $w_j$  есть вероятность события перемещения АТС, находящегося на  $j$ -й полосе вперёд, в том числе, со сменой полосы,  $s_j$  есть вероятность события перемещения АТС, находящегося на  $j$ -й полосе вперёд только со сменой полосы.

Основным допущением в рассматриваемой авторами модели является то, что независимо от состояния других клеток, каждая из клеток содержит АТС  $k$ -го типа с вероятностью  $r_k$  и что клетка свободна с вероятностью  $1 - r$ . Тогда вероятность продвижения вперёд без перехода равна  $1 - r$ , а

$$s_j = r(1 - r)^2$$

при  $j \in \{1, m\}$  и

$$s_j = r(1 - r)^2(1 - 2r - r^2) \text{ при } 2 \leq j \leq m - 1.$$

Соответственно, по этим формулам и рассчитываются вероятности продвижения АТС.

Одним из важных следствий данной модели является модель просачивания, в которой рассматривается движение АТС со значительно превосходящими окружающий поток скоростными характеристиками, причём не скованного ограничениями скорости. Данная модель особенно актуальна для моделирования движения, например, карет скорой помощи, машин полиции и других спецслужб.

По сути, название данной модели означает, что незначительное количество клеток осуществляет просачивание через случайное поле препятствий. Путём использования механизма модели Бернулли высчитывается, при каких параметрах многополосных дорог вероятность просачивания ненулевая. Эта тема развита в работах таких авторов, как А. С. Бугаев, А. П. Буслаев,

А. Г. Таташев, М. В. Яшина [128–132].

### 1.2.5. Модель Кёрнера-Клёнова. Теория Кёрнера трёх фаз транспортных потоков

Одной из важных современных теорий, по которым зачастую оцениваются модели транспортных потоков, является эмпирическая теория трёх фаз, разработанная Кёрнером с 1996 по 2002 год [133–139]. Она фокусируется на объяснении физики перехода от свободного потока к плотному (trac breakdown) и на возникающих в интенсивном (плотном) потоке структурах. Кёрнер, в отличие от классических теорий, выделяет три фазы транспортного потока, классические теории же рассматривают две фазы: свободный и плотный поток (congested trac). Кёрнер в плотном потоке выделяет две фазы: синхронизованный поток и широкий движущийся кластер машин (локальный движущийся затор, wide moving jam). Таким образом, выделяются три фазы потока (фаза есть некоторое состояние потока, рассматриваемое в пространстве и времени) [140, 141]:

- Свободный поток  $F$ . При малой плотности свободного потока водители в состоянии установить желаемую скорость. Имеется корреляция между величиной потока и плотностью потока.
- Широкий движущийся кластер АТС  $J$  — задний фронт широкого движущегося кластера; машины, которые выезжают из кластера, ускоряются до достижения ими свободного или синхронизованного потока, который движется против потока с постоянной средней скоростью.
- Синхронизованный поток  $S$  — задний фронт области синхронизованного потока, в котором АТС ускоряются до достижения ими свободного потока, не обладающего свойствами широкого движущегося кластера. Задний фронт такого потока часто располагается вблизи сужения автомагистрали.

Спонтанный фазовый переход, то есть, образование плотного потока, может произойти в свободном потоке при различных значениях величины потока. На основании эмпирических данных, Кёрнер сделал вывод, что значение пропускной способности автомагистрали в свободном потоке находится в определённом диапазоне [137, 142–146] и что количество таких значений бесконечно.

В 2002 году Кёрнером и Клёновым была предложена стохастическая трёх-фазная модель транспортных потоков. Наиболее интересна дискретная по пространству и времени её версия, так как в непрерывной модели нет предусмотренных моделью флуктуаций в случае гомогенных по пространству и времени транспортных потоков [134].

Поскольку поток трафика в «бутылочном горлышке» — узком месте дороги обычно не гомогенный, а в непрерывной модели прописаны флуктуации для негомогенных транспортных потоков, дискретная модель численно показывает те же результаты симуляции для фазовых переходов вблизи «бутылочного горлышка» на многополосной потоке, как и непрерывная модель.

Правила обновления движения АТС в дискретной стохастической модели следующие:

$$v_{n+1} = \max(0, \min(v_{free}, \tilde{v}_{n+1} + \varepsilon_n, v_n + a\tau, v_{s,n})),$$

$$x_{n+1} = x_n + v_{n+1}\tau,$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots$  — номер временного шага,  $\tau$  — временной шаг,  $x_n$  — координата АТС на шаге  $n$ ,  $v_n$  — скорость АТС на шаге  $n$ ,  $a$  — максимальное ускорение,  $\tilde{v}_{n+1}$  — скорость АТС без скоростных флуктуаций  $\varepsilon_n$ ,  $v_{s,n}$  — безопасная скорость на временном шаге  $n$ ,  $v_{free}$  — максимальная скорость при свободном движении.

Стохастическая компонента  $\varepsilon_n$  описывает случайное замедление (если

АТС тормозит) или ускорение [137].

$$\varepsilon_n = \begin{cases} -\varepsilon_b, & \text{при } S_{n+1} = -1, \\ \varepsilon_a, & \text{при } S_{n+1} = 1, \\ \varepsilon^{(0)}, & \text{при } S_{n+1} = 0, \end{cases}$$

где  $S$  — состояние движения АТС в отсутствие компоненты  $\varepsilon_n$  :

$$S_{n+1} = \begin{cases} -1, & \text{если } \tilde{v}_{n+1} < v_n, \\ 1, & \text{если } \tilde{v}_{n+1} > v_n, \\ 0, & \text{если } \tilde{v}_{n+1} = v_n, \end{cases}$$

$\varepsilon_b$  и  $\varepsilon_a$  есть случайные компоненты для ускорения и замедления АТС:

$$\varepsilon_a = a\tau\theta(p_a - r),$$

$$\varepsilon_b = a\tau\theta(p_b - r),$$

а случайная компонента

$$\varepsilon^{(0)} = a^{(0)}\tau \begin{cases} -1, & \text{если } r < p^{(0)}, \\ 1, & \text{если } p^{(0)} \leq r \leq 2p^{(0)}, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

используется при отсутствии ускорения или торможения и связана с невозможностью в реальной жизни точно поддерживать строго заданную скорость.

$p_a$  и  $p_b$  — вероятности случайного ускорения или торможения АТС,  $p^{(0)}$  и  $a^{(0)}$  — константы,  $r = rand(0, 1)$ ,  $\theta(z) = sign(z)$ .

Методы нахождения безопасной скорости в модели Кёрнера-Клёнова свя-

заны с моделью Краусса и не приведены здесь, как не показывающие особенности данной модели, во избежании перенасыщения обзора литературы данной диссертационной работы.

В рассматриваемой модели двухполосной автодороги смена полосы АТС происходит независимо от месторасположения АТС. АТС в этой модели может поменять полосу, если необходимые условия для перехода с полосы на полосу выполняются совместно с условиями безопасности при смене полосы.

Последнее условие делает данную модель неадекватной для моделирования движения вблизи перекрёстков, так как данная модель не предусматривает возможности достижения цели.

Несколько месяцев спустя, данная модель была обобщена Кёрнером, Клёновым и Вольфом до модели, обозначаемой в англоязычной литературе «KKW model» [147, 148] — это модель, основанная на клеточных автоматах, где безопасная скорость определена аналогично модели Нагеля-Шрекенберга.

#### **1.2.6. Сравнительный анализ модели Трайбера и клеточных автоматов**

Обе модели рассматривают АТС как минимальный объект, находящийся на дороге и который является агентом, реагирующим на внешние условия такие, как скорости самого АТС и окружающих его (находящегося перед ним, за ним, на соседних полосах).

Реально протекающие процессы в транспортных системах носят непрерывный характер, поэтому для их моделирования на ЭВМ требуется дискретизация. В настоящее время применяются две модели, в некоторых аспектах использующие похожие алгоритмы, но отличающиеся режимом дискретизации, вследствие чего имеющие различные эксплуатационные качества.

Дискретизация по ячейкам в модели Нагеля-Шрекенберга позволяет на порядки (в 100-1000 раз) ускорить процессы микромоделирования, так как

такая дискретизация хорошо позволяет использовать внутренний и внешний параллелизм вычислительных систем. Внутренний параллелизм заключается в том, что за одну операцию изменения можно обработать группу ячеек. Внешний параллелизм состоит в том, что возможным становится использовать такие средства, как CUDA, OpenCL для моделирования поведения отдельных ячеек, позволяя при этом объединить моделирование групп ячеек средствами MPI. Всё это вместе взятое позволяет эффективно использовать вычислительные кластеры, в том числе гетерогенные и достигать скорости моделирования, превосходящей реальное время даже для больших задач. Дискретизация по времени в модели Трайбера не обладает такими свойствами. Даже при использовании дискретного времени для всех, координаты каждого АТС принимают непрерывные значения для каждого, что вынуждает использовать более сложные и дорогостоящие с точки зрения затрат ресурсов вычислительной системы методы, например, связанные списки (в модели Нагеля-Шрекенберга для определения координат АТС достаточно массива заранее известной длины для каждой полосы). В отличие от модели Нагеля-Шрекенберга, параллельное обновление всех положений при данном методе возможно только для несвязных дорог. Сложность алгоритмов поиска свободного пространства для перестроения в общем случае зависит от количества АТС, находящихся на полосе и возрастает при возрастании этого количества. С другой стороны, модель Нагеля-Шрекенберга не способна различить должным образом такие различные транспортные средства, как гружёную фуру длиной 7 метров и мотоцикл длиной два метра, хотя модель их поведения на дороге, очевидно, будет различной. Такие параметры, как максимальное ускорение и желаемое торможение могут быть приняты во внимание, но такие параметры, как безопасное расстояние при перестроении и безопасное расстояние до впереди идущего АТС будут неизбежно закруглены до размеров ячейки (типично 7.5 метров). Также закругленными оказываются скорости АТС до величины, кратной отношению размеров ячейки к единице

дискретизации времени. При дискретизации по времени в модели Трайбера таких проблем удаётся избежать. Если для грузового автомобиля безопасная дистанция составляет, например, 4 метра, то для легкового автомобиля она может составлять 2 метра на одной и той же скорости. Это всё можно учесть в модели для этих групп АТС и для любых других групп. При преобладающем числе грузовых автомобилей в транспортном потоке поведение потока должно и будет отличаться от потока с преобладающим количеством легковых автомобилей и мотоциклов.

### 1.2.7. Гибридные модели транспортных потоков

Естественно попытаться скомбинировать сильные стороны каждого из подходов и использовать тот, который даст нам нужные детали в каждом подходящем случае. Этот гибридный подход в последнее время привлекает значительный интерес в моделировании транспортных потоков.

В принципе, многие модели предусматривают множественность моделирования и подходят как для микроскопических, так и для макроскопических расчётов. Наиболее часто используемый подход — гибридные модели, сочетающие в себе возможности макроскопических моделей и моделей клеточных автоматов, что позволяет легко моделировать происходящие процессы численным образом. Гибридности можно добиться как предельными переходами, так и более искусственным образом.

Из наиболее известных в последнее время моделей можно выделить, например, модели, полученные дискретизацией модели Ава-Раскла, описанной ранее (например, [149]), модели, основанные на расширении модели Даганзо (например, [150, 151]), а также множество других моделей.

Данные исследования можно обобщить в виде таблицы 1.1:

Методы микромоделирования являются необходимой компонентой в цикле транспортного моделирования. Они могут решать те задачи, на которые

Уровень моделирования	Решаемые задачи	Модели решения задачи	Методы решения задачи	Необходимые данные
	Определение транспортного спроса и подвижности населения	Генерация активности населения	Социологическое обследование и обработка его результатов	Социологические данные по активностям м маршрутам
		Генерация маршрутов		
		Расчёт матриц корреспонденции	Гравитационная модель	Дорожная сеть
Макромоделирование	Оценка эффективности строительства	Гидродинамические модели	Модель LWM, модель Пэйна, модель Танака, модель Эйва-Раскла	Сбор и мониторинг транспортного спроса по целям поездок, видам перевозок, периодам времени
	Оценка эффективности регулирования	Модели равновесного распределения	Модели VISUM	
			Модели Бэкмана	
			Модель Нестерова-де Пальма	
Мезомоделирование	Оценка эффективности мер по организации дорожного движения	Модель следования за лидером	Модель Ньюэла	Анализ и мониторинг методов ОДД и поведенческих особенностей водителя
		<b>Модель разумного водителя</b>	<b>Модель Трайбера</b>	
		Модель клеточных автоматов	Модель Нагеля-Шрекенберга	

Таблица 1.1

### Модели, задачи и методы транспортного моделирования

не могут ответить методы макромоделирования. С другой стороны именно в результате макромоделирования могут быть поставлены задачи уточнения модели, задачи микро моделирования.

### 1.3. Задачи диссертационного исследования

В результате проведения обзора основных работ, связанных с данной диссертационной работой было определено, что, несмотря на большое количество исследований по теме моделирования транспортных процессов, ряд вопросов до сих пор раскрыт недостаточно полно. Недостаточно рассматривались вопросы моделирования взаимодействия АТС, движущимися по многополосным дорогам и такие аспекты реального дорожного движения, как движение по многополосным дорогам с учётом перестроения и обгона. Решение таких задач крайне важно, так как именно учёт таких факторов, как перестроение АТС, обгон, поведение АТС на сложных перекрёстках, может дать ответы

на вопросы, связанные с оценкой эффективности систем управления транспортными потоками. Всё это послужило основой для определения целей и постановки задач, решаемых в данной диссертации.

Второй важной задачей, поставленной после изучения существующих работ, была задача по исследованию задержек АТС на перекрёстке с помощью теории систем массового обслуживания. При успешном решении данной задачи появляется возможность резко сократить время моделирования прохождения транспортных потоков через управляемые перекрёстки.

Таким образом, в данной диссертационной работе основной целью было построение математических и имитационных моделей взаимодействия АТС между собой и с элементами системы управления дорожным движением, а также применение полученных зависимостей для постановки и решения задач оптимизации дорожного движения на регулируемых перекрёстках сложной структуры и магистралях, со множеством въездов и выездов.

Для выполнения поставленной цели решаются следующие задачи:

1. Проведение обзора публикаций по теме диссертационной работы.
2. Получение аналитических зависимостей, описывающих пропускную способность перекрёстка в зависимости от светофорных режимов на нём и потоков АТС по всем направлениям.
3. Получение аналитических зависимостей, описывающих временные задержки в движении АТС, возникающие при пересечении управляемого перекрёстка.
4. Построение микроскопической модели, предусматривающей возможность перестроения, которая описывает движение АТС по многополосным дорогам и регулируемым перекрёсткам сложной структуры.
5. Использование полученной модели для проведения вычислительных экспериментов по анализу поведения АТС на многополосных дорогах и перекрёстках, анализ полученных результатов, проверка адекватности модели на реальных данных.

6. Применение полученных зависимостей для математического и имитационного моделирования движения на кольцевой автостраде.
7. Разработка программных средств для реализации вычислительных экспериментов в интересах данного диссертационного исследования.

## Глава 2

# ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЗАДЕРЖЕК АТС НА ПЕРЕКРЁСТКЕ.

### 2.1. Понятие эффективного числа полос

При оценочных расчетах полезным оказывается такое понятие, как эффективное число полос, которое мы поясним простым примером. Предположим, что поток АТС, двигающийся по шестиполосной дороге, доходит до Т-образного перекрестка. Предположим, что целью трети водителей является поворот налево, а целью остальных — движение прямо. Поворачивать и двигаться прямо одновременно, правила работы светофора это запрещают. В этом случае две крайние левые полосы займут АТС, у водителей которых цель — поворот налево. Ответ на вопрос, почему и при каких условиях занятыми окажутся именно две полосы, должна дать модель. Поток АТС через светофор при включении зелёного сигнала для прямого движения не будет теоретическим, максимально возможным для заданного числа полос, не 6 000 АТС/час, а только 4 000 АТС/час. Эффективное число полос в этом случае равно 4. Важно заметить, что эффективное число полос совершенно не обязательно должно быть целым числом (задержки на перестроение, попеременное движение АТС по двум полосам, нецелые пропорции и т. п.).

#### 2.1.1. Аналитические методы расчёта эффективного числа полос

**Свойство о равновесной максимальной пропускной способности на управляемом перекрёстке.** *Рассмотрим управляемый многополосный перекрёсток с Пуассоновскими транспортными потоками. Рассмотрим поток АТС с одного направления на фиксированной светофорной фазе. Пусть  $N$  — число полос на исходящей дороге,  $N_i$  — число полос на целевых дорогах,  $S$  — максимальная пропускная способность одной полосы,  $\Omega_i(t)$  — очередь*

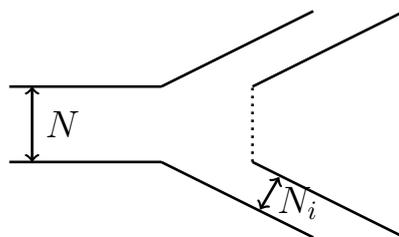


Рис. 2.1. Иллюстрация к свойству о равновесной максимальной пропускной способности

АТС с исходящей дороги в направлении  $i$  в момент времени  $t$ ,  $\Omega(t)$  — очередь АТС на исходящей дороге в момент времени  $t$ ,  $\Omega_a(t)$  — очередь тех АТС на исходящей дороге, которые могут продолжить движение на данной фазе в момент времени  $t$ . Тогда:

Математическое ожидание максимального проходящего потока с одного направления на управляемом перекрёстке на данной фазе за время  $T$  равно:

$$E[S_{max} \cdot T] = \int_0^T \min\left(S \cdot N \cdot \frac{\Omega_a(t)}{\Omega(t)}, \sum_i S \cdot N_i \cdot \frac{\Omega_i(t)}{\Omega(t)}\right) dt.$$

*Доказательство.* Найдём максимальный проходящий поток через рассматриваемый перекрёсток в единицу времени. Пусть  $\Omega_i$  — очередь АТС в текущий момент с исходящей дороги в направлении  $i$ ,  $\Omega$  — очередь АТС на исходящей дороге в текущий момент,  $\Omega_a$  — очередь тех АТС на исходящей дороге, которые могут продолжить движение на данной фазе в текущий момент.

Тогда вероятность того, что рассматриваемое АТС может продолжить движение, равно  $\frac{\Omega_a}{\Omega}$ . Учтя пропускную способность исходящей дороги и наложив ограничение на пропускную способность целевых дорог, а также проинтегрировав получившееся выражение по  $t$ , получим требуемую формулу.

Для доказательства данной формулы важно учесть, что АТС стремятся к равновесным максимальным потокам, в том числе, для этого они перестраиваются на целевые полосы.

□

**Следствие об эффективном числе полос в отсутствии асимметрии очередей.** Рассмотрим управляемый многополосный перекрёсток с Пуассоновскими транспортными потоками. Рассмотрим поток АТС с одного направления на фиксированной светофорной фазе. Пусть в начальный момент времени очередь на перекрёстке отсутствует. Пусть  $q$  — математическое ожидание входящего потока с данного направления,  $k$  — математическое ожидание потока АТС, которые могут продолжить движение на данной фазе,  $S$  — максимальная пропускная способность одной полосы,  $N$  — число полос на исходящей дороге,  $N_i$  — число полос на целевых дорогах,  $k_i$  — математическое ожидание потока АТС, способных продолжить движение в направлении  $i$  на данной фазе. Тогда:

Математическое ожидание максимального проходящего потока с одного направления на данном управляемом перекрёстке на данной фазе равно:

$$E[S_{max}] = \min \left( S \cdot N \cdot \frac{k}{q}, \sum_i S \cdot N_i \cdot \frac{k_i}{q} \right)$$

*Доказательство.* Выразим зависимость очереди в момент времени  $t$  от заданных параметров.

$$\Omega_i(t) = \Omega_{0_i} + \delta\Omega_i = 0 + k_i \cdot t - l_i \cdot t,$$

где  $l_i$  — исходящий поток АТС в направлении  $i$ .

Так как цели АТС в потоке распределены равномерно и в каждый момент времени распределение целей АТС, непосредственно пересекающих перекрёсток, такое же, то:

$$l_i = \min(k_i \cdot \phi(N_1, \dots, k_1, \dots, S, q), N_i \cdot S).$$

То есть, если пренебречь пропускной способностью исходящих рёбер,

$$\Omega_i(t) = k_i \cdot t(1 - \phi).$$

Так как  $\sum_i k_i = q$ , то  $\Omega_a(t) = \sum_{i \in out} \Omega_i(t)$ ,  $\Omega(t) = \sum_i \Omega_i(t)$ .

В таком случае, по свойству о равновесной максимальной пропускной способности на управляемом перекрёстке,

$$\begin{aligned} E[S_{\max} \cdot T] &= \int_0^T \min\left(S \cdot N \cdot \frac{\Omega_a(t)}{\Omega(t)}, \sum_i S \cdot N_i \cdot \frac{\Omega_i(t)}{\Omega(t)}\right) dt = \\ &= \int_0^T \min\left(S \cdot N \cdot \frac{\sum_{i \in out} \Omega_i(t)}{\sum_i \Omega_i(t)}, \sum_i S \cdot N_i \cdot \frac{\Omega_i(t)}{\sum_i \Omega_i(t)}\right) dt = \\ &= \int_0^T \min\left(S \cdot N \cdot \frac{\sum_{i \in out} k_i}{\sum_i k_i}, \sum_i S \cdot N_i \cdot \frac{k_i}{\sum_i k_i}\right) dt = \\ &= \int_0^T \min\left(S \cdot N \cdot \frac{k}{q}, \sum_i S \cdot N_i \cdot \frac{k_i}{q}\right) dt = \\ &= \min\left(S \cdot N \cdot \frac{k}{q}, \sum_i S \cdot N_i \cdot \frac{k_i}{q}\right) \cdot T. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$E[S_{max}] = \min\left(S \cdot N \cdot \frac{k}{q}, \sum_i S \cdot N_i \cdot \frac{k_i}{q}\right),$$

что и требовалось доказать. □

В третьей главе приведены результаты моделирования, обосновывающие это следствие.

## 2.2. Исследования поведения АТС на перекрёстке с точки зрения Теории Массового Обслуживания

Методы массового обслуживания для моделирования задач на перекрёстке использовались, к примеру, в работе [152]. В ней рассматривалась система  $GI|G|\infty$ , в которой запросы, поступившие на одном периоде занятости, имеют одинаковое время обслуживания. Времена обслуживания на различных периодах занятости — независимые одинаково распределенные случайные величины. Эта модель возникла при описании «синхронного движения», возникающего в транспортных системах при высокой интенсивности движения. С помощью рассматриваемой модели, к примеру, авторы получили распределение времени ожидания автомобиля на однополосной второстепенной дороге при пересечении главной и второстепенной дорог на неуправляемом перекрестке, если в момент его появления на перекрестке нет других автомобилей. По сути, движение на неуправляемом перекрёстке можно сформулировать как задачу об регулируемом перекрёстке с Пуассоновскими длинами фаз. Аналогичные методы рассматривались также в [153].

При рассмотрении светофора с фиксированными длительностями фазами возникает более сложный математический аппарат. В частности, данная задача, правда, для случая одной однополосной дороги и светофора с двумя фазами (зелёный-красный) была рассмотрена в [154].

Следует отметить, что зачастую существующие как макро-, так и микро-модели рассматривают только движение по однополосным трассам. Применение методов теории массового обслуживания к транспортным задачам на многополосных дорогах практически не осуществлялось.

В исследовании данных задач, например, необходимо учитывать, что время обслуживания на многополосных перекрёстках — величина, зависящая от текущей светофорной фазы и распределения целей движущихся АТС.

Для того, чтобы полученные результаты можно было использовать, необ-

ходимо с помощью вышеуказанных методов изучить влияние длительностей светофорных фаз и светофорных режимов на такие величины, как средняя пропускная способность на перекрёстке, среднее время ожидания, длина скапливаемых очередей по различным направлениям дорог на перекрёстке. Это позволит найти оптимальные правила функционирования светофоров, минимизирующие данные величины.

Введём следующие сокращения и обозначения:

- $c$  — сигнальный цикл
- $c_1$  — время длительности первой фазы
- $c_2$  — время длительности второй фазы
- $c_3$  — время длительности третьей фазы
- $c_4$  — время длительности четвертой фазы
- $q$  — поток входящего трафика
- $S$  — максимальный поток проходящего перекресток трафика
- $\Omega_0$  — ожидаемая очередь переполнения из предыдущих циклов

Рассмотрим простой поток АТС, прибывающих к светофору с фиксированными временами фаз. Пусть этот поток — Пуассоновский процесс, Тогда  $E(A(h)) = gh$ , где  $A$  — прибытие во время интервала  $h$ .

Введём понятие задержки АТС на светофоре. Задержка АТС равна времени, потраченному АТС на перекрёстке на ожидание. Выразим общую задержку АТС во время одного сигнального цикла как сумму компонент, получающихся при каждой фазе цикла. К примеру, если рассматривать перекрёсток 2-х дорог со следующими фазами (рисунок 2.2), то

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4, \quad (2.1)$$

где

- $W_1$  — общая задержка АТС, вызванная первой фазой,
- $W_2$  — общая задержка АТС, вызванная второй фазой,

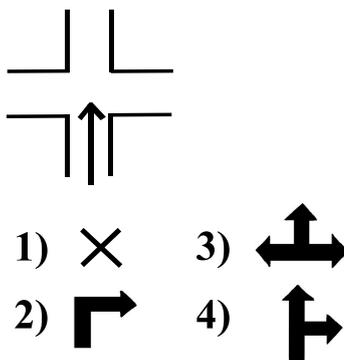


Рис. 2.2. Светофор

- $W_3$  — общая задержка АТС, вызванная третьей фазой,
- $W_4$  — общая задержка АТС, вызванная четвертой фазой.

Для рассматриваемого перекрестка:

$$W_1 = \int_0^{c_1} \Omega(t) dt = \int_0^{c_1} (\Omega(0) + A(t)) dt, \quad (2.2)$$

$$W_2 = \int_{c_1}^{c_1+c_2} \Omega(t) dt,$$

$$W_3 = \int_{c_1+c_2}^{c_1+c_2+c_3} \Omega(t) dt,$$

$$W_4 = \int_{c_1+c_2+c_3}^c \Omega(t) dt.$$

Найдём математическое ожидание  $W_1$ , в случае, когда первая фаза — только красный свет. Проинтегрировав (2.2), получим:

$$E[W_1] = c_1 \Omega(0) + \frac{1}{2} q c_1^2. \quad (2.3)$$

Ранее в данной работе было введено понятие эффективного числа полос. Воспользовавшись этим понятием, можно получить, что, если  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  и  $k_4$  —

соответственные интенсивности потоков, которые могут продолжать движение в каждой фазе, то проходящий поток будет равен не  $S$ , а, соответственно,

$$\begin{aligned} E[S_1] &= S \cdot \frac{k_1}{q}, \\ E[S_2] &= S \cdot \frac{k_2}{q}, \\ E[S_3] &= S \cdot \frac{k_3}{q}, \\ E[S_4] &= S \cdot \frac{k_4}{q}. \end{aligned}$$

$S$ , максимальная пропускная способность перекрестка с каждой из сторон — константа для каждой конкретной задачи. Обычно её полагают равной 1800 АТС/час на одну полосу [53].

Определим случайную величину  $Z_1$  как общую задержку АТС, происходящую во время первой фазы, если ее цикл бесконечен.  $Z_1$  считается общим временем ожидания во время фазы 1 для процесса очереди  $\Omega(t)$  при составных Пуассоновских прибытиях интенсивности  $q$ , постоянном времени обслуживания  $1/S_1$  при времени  $\Omega(t = t_0)$ .

$$E[Z_1] = \frac{E[\Omega(t_0)]}{2S_1(1 - q/S_1)^2} + \frac{E[\Omega^2(t_0)]}{2S_1(1 - q/S_1)}$$

Так как  $W_1$  может быть выражено с использованием переменной  $Z_1$  следующим образом:

$$E[W_1] = E[Z_1|\Omega(t = c_1)] - E[Z_1|\Omega(t = 0)],$$

то, следовательно,

$$E[W_1] = \frac{E[\Omega(c_1) - \Omega(0)]}{2S_1(1 - q/S_1)^2} + \frac{E[\Omega^2(c_1)] - E[\Omega^2(0)]}{2S_1(1 - q/S_1)}. \quad (2.4)$$

Аналогичные размышления можно повторить для 2, 3 и 4 светофорных фаз.

Количество прибывших АТС за цикл равно  $A(c)$ ; математическое ожидание количества покинувших перекресток АТС на каждой фазе равно  $S_1c_1$ ,  $S_2c_2$ ,  $S_3c_3$  и  $S_4c_4$  соответственно.

В таком случае, если ввести так называемые *избыточные потоки*

$$P_i = q - E[S_i], \text{ то}$$

$$E[\Omega(c_1) - A(c_1) - \Omega(0) + A(0)] = -S_1c_1;$$

$$E[\Omega(c_1) - \Omega(0)] = -S_1c_1 + E[A(c_1) - A(0)] = -S_1c_1 + qc_1 = c_1P_1;$$

$$E[\Omega(c_1 + c_2) - A(c_1 + c_2) - \Omega(c_1) + A(c_1)] = -S_2c_2;$$

$$E[\Omega(c_1 + c_2) - \Omega(c_1)] = -S_2c_2 + E[A(c_1 + c_2) - A(c_1)] = -S_2c_2 + qc_2 = c_2P_2;$$

$$E[\Omega(c_1 + c_2 + c_3) - A(c_1 + c_2 + c_3) - \Omega(c_1 + c_2) + A(c_1 + c_2)] = -S_3c_3;$$

$$E[\Omega(c_1 + c_2 + c_3) - \Omega(c_1 + c_2)] = -S_3c_3 + qc_3 = c_3P_3;$$

$$E[\Omega(c) - A(c) - \Omega(c_1 + c_2 + c_3) + A(c_1 + c_2 + c_3)] = -S_4c_4;$$

$$E[\Omega(c) - \Omega(c_1 + c_2 + c_3)] = -S_4c_4 + qc_4 = c_4P_4.$$

Тогда можно выразить

$$E[\Omega(c_1)] = \Omega_0 - S_1c_1 + qc_1 = \Omega_0 + c_1P_1,$$

$$E[\Omega(c_1 + c_2)] = E[\Omega(c_1)] - S_2c_2 + qc_2 = \Omega_0 - S_1c_1 + qc_1 - S_2c_2 + qc_2,$$

$$E[\Omega(c_1 + c_2)] = \Omega_0 + c_1P_1 + c_2P_2,$$

$$E[\Omega(c_1 + c_2 + c_3)] = E[\Omega(c_1 + c_2)] - S_3c_3 + qc_3,$$

$$E[\Omega(c_1 + c_2 + c_3)] = \Omega_0 + c_1P_1 + c_2P_2 + c_3P_3,$$

$$E[\Omega(c)] = \Omega_0 + c_1P_1 + c_2P_2 + c_3P_3 + c_4P_4.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
& E[\Omega^2(c_1 + c_2) - \Omega^2(c_1)] = \\
& = 2E(\Omega(c_1 + c_2) - \Omega(c_1)) \cdot E(\Omega(c_1)) + E((\Omega(c_1 + c_2) - \Omega(c_1))^2) = \\
& = 2E[-S_2c_2 + A(c_1 + c_2) - A(c_1)] \cdot (\Omega_0 - S_1c_1 + qc_1) + E((-S_2c_2 + A(c_1 + c_2) - A(c_1))^2) = \\
& = 2(-S_2c_2 + qc_2) \cdot (\Omega_0 - S_1c_1 + qc_1) + S_2^2c_2^2 - 2E(A(c_1 + c_2) - A(c_1))S_2c_2 + \\
& + E((A(c_1 + c_2) - A(c_1))^2) = \\
& = 2(-S_2c_2 + qc_2) \cdot (\Omega_0 - S_1c_1 + qc_1) + S_2^2c_2^2 - 2qc_2S_2c_2 + E((A(c_1 + c_2) - A(c_1))^2) =, \\
& \text{(из стационарности пуассоновского потока),} \\
& = 2(-S_2c_2 + qc_2) \dots (\Omega_0 - S_1c_1 + qc_1) + S_2^2c_2^2 - 2qc_2S_2c_2 + E((A(c_2))^2) = \\
& = 2(-S_2c_2 + qc_2) \dots (\Omega_0 - S_1c_1 + qc_1) + S_2^2c_2^2 - 2qc_2S_2c_2 + D(A(c_2)) + q^2c_2^2 = \\
& = 2c_2(q - S_2) \cdot (\Omega_0 - S_1c_1 + qc_1) + S_2^2c_2^2 - 2qc_2S_2c_2 + qc_2 + q^2c_2^2 = \\
& = 2c_2P_2 \cdot (\Omega_0 + c_1P_1) + P_2^2c_2^2 + qc_2.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Аналогично получаем формулы для математических ожиданий из других фаз.

Третья фаза:

$$\begin{aligned}
& E[\Omega^2(c_1 + c_2 + c_3) - \Omega^2(c_1 + c_2)] = \\
& = 2E(\Omega(c_1 + c_2 + c_3) - \Omega(c_1 + c_2))E(\Omega(c_1 + c_2)) + E((\Omega(c_1 + c_2 + c_3) - \Omega(c_1 + c_2))^2) = \\
& = 2(-S_3c_3 + qc_3)(\Omega_0 - S_1c_1 + qc_1 - S_2c_2 + qc_2) + E((A(c_3) - S_3c_3)^2) = \\
& = 2(-S_3c_3 + qc_3)(\Omega_0 - S_1c_1 + qc_1 - S_2c_2 + qc_2) + E((A(c_3))^2) - 2S_3c_3E[A(c_3)] + S_3^2c_3^2 = \\
& = 2(-S_3c_3 + qc_3)(\Omega_0 - S_1c_1 + qc_1 - S_2c_2 + qc_2) + qc_3(1 + qc_3) - 2S_3c_3qc_3 + S_3^2c_3^2 = \\
& = 2P_3c_3(\Omega_0 + c_1P_1 + c_2P_2) + c_3^2P_3^2 + qc_3.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Четвертая фаза :

$$\begin{aligned}
& E(\Omega^2(c) - \Omega^2(c_1 + c_2 + c_3)) = \\
& 2E(\Omega(c) - \Omega(c_1 + c_2 + c_3))E(\Omega(c_1 + c_2 + c_3)) + E((\Omega(c) - \Omega(c_1 + c_2 + c_3))^2) = \\
& = 2(-S_4c_4 + qc_4)(\Omega_0 - S_1c_1 + qc_1 - S_2c_2 + qc_2 - S_3c_3 + qc_3) + \\
& + qc_4(1 + qc_4) - 2S_4c_4qc_4 + S_4^2c_4^2 = \\
& = 2P_4c_4(\Omega_0 + c_1P_1 + c_2P_2 + c_3P_3) + c_4^2P_4^2 + qc_4;
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Первая фаза :

$$\begin{aligned}
E[\Omega^2(c_1) - \Omega^2(0)] &= \\
2E(\Omega(c_1) - \Omega(0))E(\Omega(0)) + E(((\Omega(c_1) - \Omega(0))^2) &= \\
= 2(-S_1c_1 + qc_1)\Omega_0 + qc_1(1 + qc_1) - 2S_1c_1qc_1 + S_1^2c_1^2 &= \\
= 2P_1c_1\Omega_0 + c_1^2P_1^2 + qc_1. &
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Из вышеприведённых уравнений следует:

$$\begin{aligned}
-E[W_1] &= \frac{(E[\Omega(c_1) - \Omega(0)]}{2S_1(1 - q/S_1)^2} + \frac{E[\Omega^2(c_1)] - E[\Omega^2(0)]}{2S_1(1 - q/S_1)} = \\
&= \frac{S_1E[\Omega(c_1) - \Omega(0)]}{2(S_1 - q)^2} + \frac{E[\Omega^2(c_1) - \Omega^2(0)]}{2(S_1 - q)} = \\
&= \frac{S_1c_1P_1}{2P_1^2} - \frac{2P_1c_1\Omega_0 + c_1^2P_1^2 + qc_1}{2P_1} \\
&= \frac{c_1(-\Omega_0P_1 - c_1P_1^2)}{2P_1},
\end{aligned} \tag{2.9}$$

$$E[W_1] = c_1\Omega_0 + \frac{P_1c_1^2}{2}.$$

В случае же, когда у рассматриваемого потока дисперсия равна нулю, то есть, для равномерного потока:

$$E[W_1] = c_1\Omega_0 + \frac{P_1c_1^2}{2} + c_1S_1/2P_1. \tag{2.10}$$

Повторим аналогичные размышления для второй фазы:

$$E[W_2] = \frac{P_2c_2^2}{2} + c_2(\Omega_0 + P_1c_1); \tag{2.11}$$

Повторим размышления для 3-й фазы:

$$E[W_3] = \frac{P_3c_3^2}{2} + c_3(\Omega_0 + P_1c_1 + P_2c_2); \tag{2.12}$$

И для 4-й фазы:

$$E[W_4] = \frac{P_4c_4^2}{2} + c_4(\Omega_0 + P_1c_1 + P_2c_2 + P_3c_3). \tag{2.13}$$

Для указанного вначале перекрёстка, в котором первая фаза — полностью красная для всех автомобилей, выезжающих снизу, проверим верность полученной формулы. Для равномерного потока у нас есть формула (2.2.), полученная вычислением интеграла. Для данного случая  $k_1 = 0$ , то есть  $S_1 = 0$ , таким образом, из (2.10),

$$E[W_1] = c_1\Omega_0 + \frac{P_1c_1^2}{2} + c_1S_1/2P_1 = c_1\Omega_0 + \frac{qc_1^2}{2}, \quad (2.14)$$

что показывает совпадение результатов при различных методах.

Используя уравнения (2.1), (2.9), (2.11), (2.12) и (2.13) получаем следующее:

$$\begin{aligned} E[W] &= c_1\Omega_0 + \frac{P_1c_1^2}{2} + \frac{P_2c_2^2}{2} + c_2(\Omega_0 + P_1c_1) + \\ &+ \frac{P_3c_3^2}{2} + c_3(\Omega_0 + P_1c_1 + P_2c_2) + \frac{P_4c_4^2}{2} + c_4(\Omega_0 + P_1c_1 + P_2c_2 + P_3c_3) = \\ &= c\Omega_0 + \frac{P_1c_1^2}{2} + \frac{P_2c_2^2}{2} + c_2P_1c_1 + \\ &+ \frac{P_3c_3^2}{2} + c_3(P_1c_1 + P_2c_2) + \frac{P_4c_4^2}{2} + c_4(P_1c_1 + P_2c_2 + P_3c_3). \end{aligned} \quad (2.15)$$

### 2.2.1. Поведение АТС на перекрёстке в долгосрочной перспективе

Математическое ожидание изменение длины очереди АТС в конце цикла равно

$$E[\Delta\Omega] = c_1P_1 + c_2P_2 + c_3P_3 + c_4P_4.$$

Рассчитаем общую задержку со всех направлений за время  $T$ .

За первый цикл:  $E[W] = c\Omega_0 + c_1P_1(c_1/2 + c_2 + c_3 + c_4) + c_2P_2(c_2/2 + c_3 + c_4) + c_3P_3(c_3/2 + c_4) + c_4P_4(c_4/2)$ .

За второй цикл:  $E[W] = c(\max(\Omega_0 + c_1P_1 + c_2P_2 + c_3P_3 + c_4P_4, 0) + c_1P_1(c_1/2 + c_2 + c_3 + c_4) + c_2P_2(c_2/2 + c_3 + c_4) + c_3P_3(c_3/2 + c_4) + c_4P_4(c_4/2))$ .

Таким образом, если рассмотреть математическое ожидание суммарной задержки АТС за время  $T$ , то есть за  $T/c$  светофорных циклов  $E[W] = c(\sum_{i=0}^{\frac{T}{c}} \max(\Omega_0 + (c_1P_1 + c_2P_2 + c_3P_3 + c_4P_4)i, 0) + (c_1P_1(c_1/2 + c_2 + c_3 + c_4) + c_2P_2(c_2/2 + c_3 + c_4) + c_3P_3(c_3/2 + c_4) + c_4P_4(c_4/2))) \cdot \frac{T}{c}$ .

Перейдём к расчёту суммарной задержки по всем направлениям.

Пусть  $P_{ij}$  — избыточный поток для дороги с номером  $i$  на фазе  $j$ ,  $\Omega_{i0}$  — начальная очередь АТС на данной дороге. В таком случае, суммарная задержка по четырём дорогам равна:

$$\begin{aligned}
 E[W] = & c \left( \sum_{i=0}^{\frac{T}{c}} (\max(\Omega_{10} + (c_1 P_{11} + c_2 P_{12} + c_3 P_{13} + c_4 P_{14})i, 0) + \right. \\
 & \max(\Omega_{20} + (c_1 P_{21} + c_2 P_{22} + c_3 P_{23} + c_4 P_{24})i, 0) + \\
 & \max(\Omega_{30} + (c_1 P_{31} + c_2 P_{32} + c_3 P_{33} + c_4 P_{34})i, 0) + \\
 & \left. \max(\Omega_{40} + (c_1 P_{41} + c_2 P_{42} + c_3 P_{43} + c_4 P_{44})i, 0) \right) + \\
 & (c_1(P_{11} + P_{21} + P_{31} + P_{41})(c_1/2 + c_2 + c_3 + c_4) + \\
 & + c_2(P_{12} + P_{22} + P_{32} + P_{42})(c_2/2 + c_3 + c_4) + \\
 & + c_3(P_{13} + P_{23} + P_{33} + P_{43})(c_3/2 + c_4) + \\
 & \left. c_4(P_{14} + P_{24} + P_{34} + P_{44})(c_4/2) \right) \cdot \frac{T}{c}.
 \end{aligned}$$

Для конкретных перекрёстков величины  $P_{ij}$  можно считать постоянными. Решение этой задачи в общем виде достаточно громоздко и разбивается на множество случаев в зависимости от этих величин.

Эта модель достаточно упрощена и не учитывает, к примеру, что АТС начинают своё движение не сразу же после смены светофорной фазы, но для решения задачи оптимизации полученной точности достаточно.

### 2.2.2. Применение полученных формул к реальным перекрёсткам

Для конкретного перекрестка двухполосных дорог, рассмотренного в работе [155] рассчитаем общую задержку за светофорный цикл со всех направлений.

Разберемся, какой реальный смысл играют коэффициенты  $k_1, k_2, k_3, k_4$ . Пусть у рассмотренного перекрестка поток АТС на нижней дороге распределен следующим образом:  $X_l q$  АТС имеют цель поворота налево,  $X_s q$  —

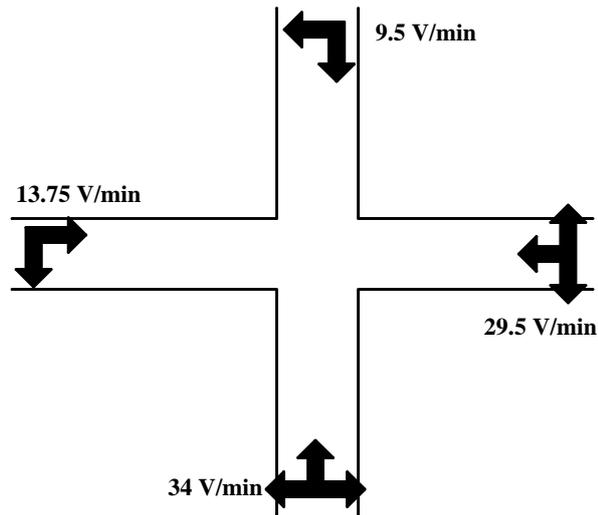


Рис. 2.3. Перекресток

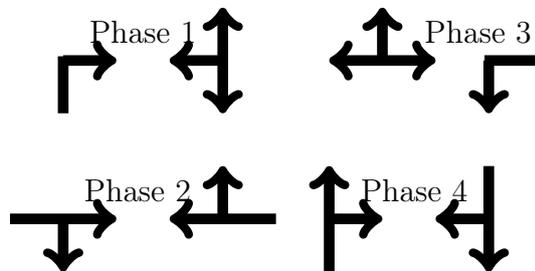


Рис. 2.4. Фазы светофора

вперёд,  $X_r q$  — направо. Очевидно, что  $X_l + X_s + X_r = 1$ . Тогда для данного режима светофора  $k_1 = X_r q$ ,  $k_2 = 0$ ,  $k_3 = q$ ,  $k_4 = (X_r + X_s)q$ .

Для конкретного рассматриваемого перекрестка  $X_l = X_s = X_r = 1/3$ ,  $q = 34$ .

Таким образом,

- $\Omega_{10} = \Omega_{20} = \Omega_{30} = \Omega_{40} = 0$ ,
- $E[P_{11}] = 34 - S \cdot 2 \cdot 1/3 = 34 - 30 \cdot 2 \cdot 1/3 = 14$ ,
- $E[P_{12}] = 34 - 30 \cdot 2 \cdot 1 = -26$ ,
- $E[P_{13}] = 34$ ,
- $E[P_{14}] = 34 - 30 \cdot 2 \cdot 2/3 = -6$ ,
- $E[P_{21}] = 13.75$ ,
- $E[P_{22}] = 13.75$ ,

- $E[P_{23}] = 13.75 - 30 \cdot 2 \cdot 1 = -46.25,$
- $E[P_{24}] = 13.75,$
- $E[P_{31}] = 9.5,$
- $E[P_{32}] = 9.5,$
- $E[P_{33}] = 9.5,$
- $E[P_{34}] = 9.5 - 30 \cdot 2 \cdot 1 = -51.5,$
- $E[P_{41}] = 29.5 - 30 \cdot 2 \cdot 1 = -31.5,$
- $E[P_{42}] = 29.5 - 30 \cdot 2 \cdot 1/3 = 9.5,$
- $E[P_{43}] = 29.5 - 30 \cdot 2 \cdot 2/3 = -11.5,$
- $E[P_{44}] = 29.5.$

Задача свелась к решению проблемы минимизации общих задержек в единицу времени:  $E(W)/T$ , то есть, к минимизации функции

$$\begin{aligned}
F = & \left( c \sum_{i=0}^{\frac{T}{c}} (i \cdot \max(14c_1 - 26c_2 + 34c_3 - 6c_4, 0) + \right. \\
& i \cdot \max(13.75c_1 + 13.75c_2 - 46.25c_3 + 13.75c_4, 0) + \\
& i \cdot \max(9.5c_1 + 9.5c_2 + 9.5c_3 - 51.5c_4, 0) + \\
& \left. i \cdot \max(-31.5c_1 + 9.5c_2 - 11.5c_3 + 29.5c_4, 0) \right) + \\
& (c_1(5.75)(c_1/2 + c_2 + c_3 + c_4) + c_2(6.75)(c_2/2 + c_3 + c_4) + \\
& c_3(-14.25)(c_3/2 + c_4) + c_4(-14.25)(c_4/2)) \cdot \frac{T}{c} / T = \\
& \left( c \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{T}{c} + 1 \right) \frac{T}{c} \left( \max(14c_1 - 26c_2 + 34c_3 - 6c_4, 0) + \right. \right. \\
& \max(13.75c_1 + 13.75c_2 - 46.25c_3 + 13.75c_4, 0) + \\
& \max(9.5c_1 + 9.5c_2 + 9.5c_3 - 51.5c_4, 0) + \\
& \left. \left. \max(-31.5c_1 + 9.5c_2 - 11.5c_3 + 29.5c_4, 0) \right) + \right. \\
& \left. (c_1(5.75)(c_1/2 + c_2 + c_3 + c_4) + c_2(6.75)(c_2/2 + c_3 + c_4) + \right. \\
& \left. c_3(-14.25)(c_3/2 + c_4) + c_4(-14.25)(c_4/2)) \cdot \frac{T}{c} \right) / T,
\end{aligned}$$

что сводится к минимизации следующего выражения:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left( \frac{T}{c} + 1 \right) \left( \max(14c_1/c - 26c_2/c + 34c_3/c - 6c_4/c, 0) + \right. \\ & \max(13.75c_1/c + 13.75c_2/c - 46.25c_3/c + 13.75c_4/c, 0) + \\ & \max(9.5c_1/c + 9.5c_2/c + 9.5c_3/c - 51.5c_4/c, 0) + \\ & \left. \max(-31.5c_1/c + 9.5c_2/c - 11.5c_3/c + 29.5c_4/c, 0) \right) + \\ & c_1/c(5.75)(c_1/2c + c_2/c + c_3/c + c_4/c) + c_2/c(6.75)(c_2/2c + c_3/c + c_4/c) + \\ & c_3/c(-14.25)(c_3/2c + c_4/c) + c_4/c(-14.25)(c_4/2c). \end{aligned}$$

Так как  $c_4 = c - c_1 - c_2 - c_3$ , то это задача минимизации на пирамиде

$$c_1 \geq 0,$$

$$c_2 \geq 0,$$

$$c_3 \geq 0,$$

$$c - c_1 - c_2 - c_3 \geq 0.$$

Решение этой задачи, в общем, зависит от отношения  $T/c$ , количества рассматриваемых циклов, но полученное решение асимптотическое и практически не подвержено колебаниям начиная с  $T/c = 50$ .

$c_1^*/c$	$c_2^*/c$	$c_3^*/c$	$c_4^*/c$	$T/c$
0.208502	0.368045	0.229767	0.193685	40
0.209071	0.367474	0.2292	0.194255	50
0.209071	0.367473	0.229201	0.194255	60
0.209071	0.367474	0.2292	0.194255	70
0.209071	0.367473	0.2292	0.194255	80
0.209071	0.367474	0.2292	0.194255	90
0.209071	0.367474	0.2292	0.194255	100

Таблица 2.1

Зависимость оптимального значения  $c_i^*/c$  от количества циклов  $T/c$

Таким образом, эргодичность рассматриваемого процесса показана численно.

### 2.2.3. Поведение АТС в стационарном случае

Рассмотрим решение этой задачи для другого типа перекрёстка, Т-образного.

В качестве объекта исследования выступал реальный перекрёсток г.Пермь на пересечении ул. Уральская - ул. Крупской. Статистические данные по интенсивности входящих потоков и распределению целей автомобильных транспортных средств были взяты в [156].

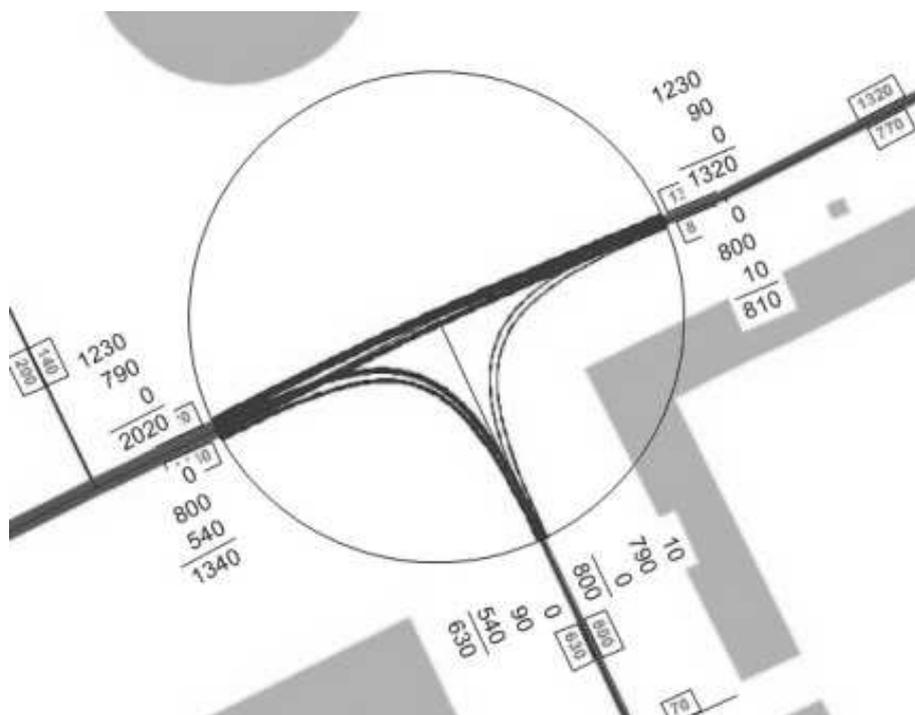


Рис. 2.5. Схема перекрёстка ул. Уральская - ул. Крупской в г. Пермь

На рисунке 2.5 представлена схема движения транспорта на пересечении ул. Уральской и ул. Крупской в г. Пермь, а так же приведены интенсивности потоков в утренние часы пик. Как видно из схемы, в отличие от предыдущей задачи, в данном случае цели АТС распространены не равномерно.

На рисунке 2.6 представлены схемы фаз движения по данному Т-образному перекрёстку.

Интенсивность потоков АТС в утренние часы представлена на рисунке 2.7, а в вечерние часы на рисунке 2.8.

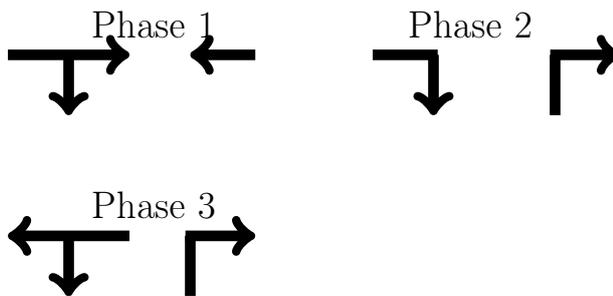


Рис. 2.6. Схемы движения по Т-образному перекрёстку в ходе фаз работы светофора

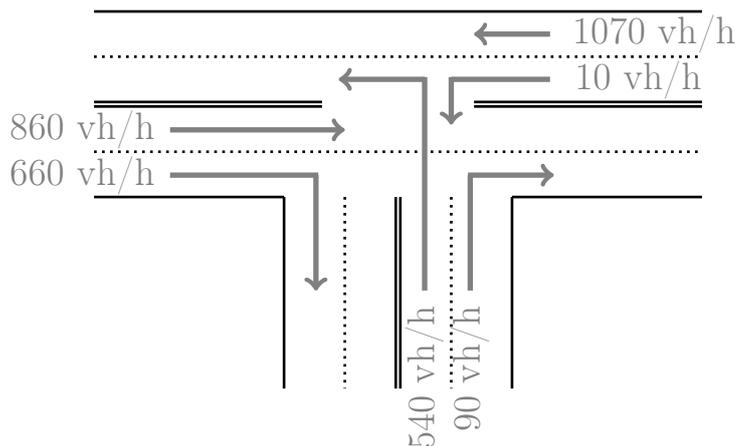


Рис. 2.7. Интенсивность потока АТС в утренние часы пик

Для улучшения читаемости дальнейших формул, введём следующие сокращения:

$$\begin{aligned}
 \Omega_{0i} &= \Omega_{10} + \Omega_{20} + \Omega_{30} + \Omega_{40}; \\
 P_{1i} &= P_{11} + P_{21} + P_{31} + P_{41}; \\
 P_{2i} &= P_{12} + P_{22} + P_{32} + P_{42}; \\
 P_{3i} &= P_{13} + P_{23} + P_{33} + P_{43}; \\
 P_{4i} &= P_{14} + P_{24} + P_{34} + P_{44}.
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Если рассмотреть конкретные фиксированные потоки данного перекрёстка, то  $P_{1i} = -25.7$ ,  $P_{2i} = -61.7$ ,  $P_{3i} = -20.7$ .

Рассмотрим случай перекрёстка со стационарной ненулевой длиной очереди в начале цикла  $E[\Omega(0)] = E[\Omega(c)]$  и  $E[\Omega^2(0)] = E[\Omega^2(c)]$ . Это также имеет смысл благодаря эргодичности [153], так как длительность рассматриваемого промежутка времени оптимизации много превышает длительность

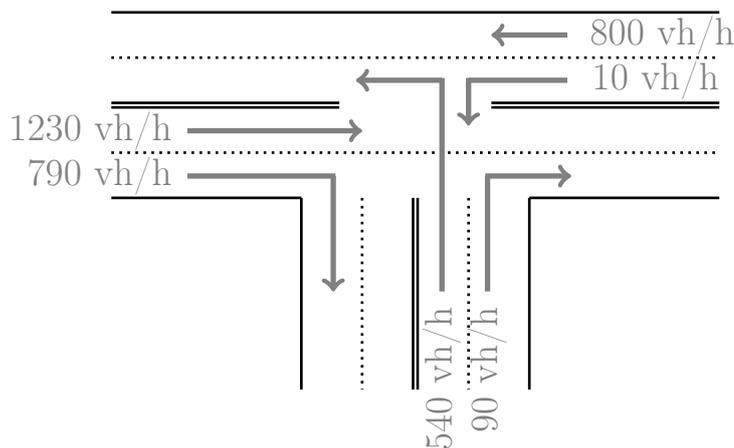


Рис. 2.8. Интенсивность потока АТС в вечерние часы пик

одной фазы.

Тогда,

$$c_1 P_{1i} + c_2 P_{2i} + c_3 P_{3i} = 0. \quad (2.17)$$

В таком случае, так как в стационаре достаточно минимизировать задержки на одном светофорном цикле и задача сводится к минимизации следующей функции:

$$F(c_1, c_2) = c_1(c - c_1/2)P_{1i} + c_2(c - c_1 - c_2/2)P_{2i} + (c - c_1 - c_2)^2 P_{3i}/2 \quad (2.18)$$

на треугольнике

$$\begin{aligned} c_1 &\geq 0; \\ c_2 &\geq 0; \\ c - c_1 - c_2 &\geq 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Из (2.17) следует, что

$$c_1 = \frac{cP_{3i} - c_2(P_{2i} - P_{3i})}{P_{3i} - P_{1i}}. \quad (2.20)$$

Тогда максимум функции  $F$  одной переменной достигается при

$$c_2 = \frac{2cP_{1i}}{P_{1i} + 3P_{2i} - 4P_{3i}}. \quad (2.21)$$

В таком случае,

$$c_1 = \frac{3P_{1i}P_{3i} + 3P_{2i}P_{3i} - 4P_{3i}^2 - 2P_{1i}P_{2i}}{(P_{1i} + 3P_{2i} - 4P_{3i})(P_{3i} - P_{1i})}c; \quad (2.22)$$

$$c_3 = \frac{P_{1i}(P_{1i} - P_{2i})}{(P_{1i} + 3P_{2i} - 4P_{3i})(P_{3i} - P_{1i})}c. \quad (2.23)$$

В случае, если полученные значения положительны, существует оптимальное решение для стационарного режима работы светофора.

Можно рассчитать ожидаемую задержку в единицу времени на светофоре в данном случае:

$$\begin{aligned} F &= \Omega_{0i} + c_1/c(c_1/2 + c_2 + c_3)P_{1i} + c_2/c(c_2/2 + c_3)P_{2i} + c_3^2/2cP_{3i} = \\ &= \Omega_0 + \frac{4P_{1i}P_{2i} - 5P_{1i}P_{3i} - 3P_{2i}P_{3i} + 4P_{3i}^2}{2(P_{1i} + 3P_{2i} - 4P_{3i})(P_{1i} - P_{3i})}P_{1i}c. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Средняя задержка АТС  $d$  получается при делении получившегося числа на среднее количество АТС  $q_1 + q_2 + q_3 + q_4$ :

$$d = \frac{\Omega_0 + \frac{4P_{1i}P_{2i} - 5P_{1i}P_{3i} - 3P_{2i}P_{3i} + 4P_{3i}^2}{2(P_{1i} + 3P_{2i} - 4P_{3i})(P_{1i} - P_{3i})}P_{1i}c}{q_1 + q_2 + q_3 + q_4}.$$

Аналогичным образом можно рассчитать ожидаемые задержки по каждому направлению рассматриваемого перекрёстка.

В случае же, когда стационарная длина очереди в начале цикла равна нулю, выражение (2.17) сменяется на выражение

$$c_1P_{1i} + c_2P_{2i} + c_3P_{3i} \leq 0. \quad (2.25)$$

В таком случае, очевидно, требуется минимизация функции двух пере-

менных (2.18) при условиях (2.25), (2.19).

Решение этой задачи находится в сильной зависимости от наличия и интенсивности избыточных потоков и в общем виде не существует.

Исследуем поведение перекрёстка 4-х дорог при стационарной длине очереди.

Тогда,

$$c_1 P_{1i} + c_2 P_{2i} + c_3 P_{3i} + c_4 P_{4i} = 0;$$

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = c.$$

Задача сводится к минимизации выражения (2.26) при вышеуказанных уравнениях связи:

$$c_1(c_1/2 + c_2 + c_3 + c_4)P_{1i} + c_2(c_2/2 + c_3 + c_4)P_{2i} + c_3(c_3/2 + c_4)P_{3i} + c_4^2/2P_{4i}. \quad (2.26)$$

Это достигается при следующих значениях длин фаз:

$$c_1 = \frac{2(P_{1i} - 2P_{2i})(P_{2i} - P_{3i})P_{4i}}{-8P_{1i}P_{2i}^2 - P_{1i}^2P_{3i} + 8P_{1i}P_{2i}P_{3i} + P_{1i}^2P_{4i} + 4P_{1i}P_{2i}P_{4i} + 4P_{2i}^2P_{4i} - 4P_{1i}P_{3i}P_{4i} - 4P_{2i}P_{3i}P_{4i}}c;$$

$$c_2 = \frac{2P_{1i}(P_{1i} + 2P_{2i} - 3P_{3i})P_{4i}}{-8P_{1i}P_{2i}^2 - P_{1i}^2P_{3i} + 8P_{1i}P_{2i}P_{3i} + P_{1i}^2P_{4i} + 4P_{1i}P_{2i}P_{4i} + 4P_{2i}^2P_{4i} - 4P_{1i}P_{3i}P_{4i} - 4P_{2i}P_{3i}P_{4i}}c;$$

$$c_3 = \frac{P_{1i}(P_{1i} - 2P_{2i})P_{4i}}{-8P_{1i}P_{2i}^2 - P_{1i}^2P_{3i} + 8P_{1i}P_{2i}P_{3i} + P_{1i}^2P_{4i} + 4P_{1i}P_{2i}P_{4i} + 4P_{2i}^2P_{4i} - 4P_{1i}P_{3i}P_{4i} - 4P_{2i}P_{3i}P_{4i}}c;$$

$$c_4 = \frac{P_{1i}(8P_{2i}^2 + P_{1i}P_{3i} - 8P_{2i}P_{3i})}{-8P_{1i}P_{2i}^2 - P_{1i}^2P_{3i} + 8P_{1i}P_{2i}P_{3i} + P_{1i}^2P_{4i} + 4P_{1i}P_{2i}P_{4i} + 4P_{2i}^2P_{4i} - 4P_{1i}P_{3i}P_{4i} - 4P_{2i}P_{3i}P_{4i}}c.$$

Если при заданных потоках в стационарном режиме эти числа окажутся положительными, то решение задачи минимизации получено.

Таким образом, можно также подставить эти значения и найти среднюю задержку АТС на данном перекрёстке.

### 2.3. Резюме

В данной главе были рассмотрены микроскопические и макроскопические методы моделирования на изолированных участках транспортной сети.

Было сформулировано свойство о равновесной максимальной пропускной способности на управляемом перекрёстке, показывающая зависимость про-

пускной способности перекрёстка от распределения целей АТС и светофорного режима. Это свойство было аналитически доказано, а для нескольких перекрёстков численно была показана корректность данного свойства.

С помощью методов теории систем массового обслуживания была получена макроскопическая модель поведения АТС на управляемом перекрёстке, получены формулы, в явном виде выражающие общую задержку АТС, возникающую при пересечении перекрёстка, а также решена задача минимизации возникающих задержек в зависимости от светофорного цикла.

## Глава 3

# ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ НА ИЗОЛИРОВАННЫХ ДОРОГЕ И ПЕРЕКРЁСТКЕ

### 3.1. Компьютерное микроскопическое моделирование

#### 3.1.1. Компьютерное микроскопическое моделирование движения на изолированной дороге

**Цели и задачи.** В данном разделе была поставлена цель с помощью построенной автором модели изучить поведение АТС на многополосных дорогах, исследовав такие явления, как

- фазовый переход скорости потока при увеличении интенсивности потока.
- изменения скорости потока, связанные с запретом или разрешением перестроения между полосами. Решение этой задачи помогло бы понять целесообразность запрета перестроения на протяженных дорогах в зависимости от текущей интенсивности входящего потока.
- изменения скорости потока, связанные с увеличением количества грузовых автомобилей при сохранении интенсивности входящего потока. Решение этой задачи помогло бы понять целесообразность запрета въезда грузовых автомобилей в особо загруженные районы в часы с критическими потоками.

**Изучение фазовых переходов на многополосных дорогах** В модели IDM Трайбера для каждого АТС задаются желаемая скорость в диапазоне  $0 \dots V_{max}$ , величина  $d$  — расстояние между текущим АТС и следующим перед ним,  $V_n$  — скорость текущего АТС. Правила обновления задаются моделью Трайбера IDM (1.2.3.).

Ускорение в модели IDM есть непрерывная функция, учитывающая различные модели вождения для всех скоростей как в шоссейном, так и в городском трафике. Кроме расстояния между АТС (от бампера до бампера)  $s$  и актуальной скорости  $v$ , модель учитывает также разницу между скоростями (степень сближения с ведущим АТС  $v = v - v_l$ ). Функция ускорения в данной модели определяется формулой:

$$a_{IDM}(s, v, \Delta v) = \frac{dv}{dt} = a \left[ 1 - \left( \frac{v}{v_0} \right)^\delta - \left( \frac{s^*(v, \Delta v)}{s} \right)^2 \right],$$

где

$$s^*(v, \Delta v) = s_0 + vT + \frac{v\Delta v}{2\sqrt{ab}}.$$

В этом выражении стратегия ускорения на свободной дороге  $v_{free}(v) = a[1 - (v/v_0)^\delta]$  сочетается со стратегией торможения  $v_{brake}(s, v, \Delta v) = -a(s^*/s)^2$ , которая становится превалирующей, когда промежуток до лидирующего АТС перестаёт быть значительно большим, чем эффективный желаемый промежуток  $s^*(v, \Delta v)$ . Свободное движение характеризуется желаемой скоростью  $v_0$ , максимальным ускорением  $a$  и показателем степени  $\delta$ , определяющим, как ускорение уменьшается с ростом скорости ( $\delta = 1$  соответствует линейному уменьшению). Параметры IDM  $v_0$ ,  $T$ ,  $s_0$  и  $b$  имеют приемлемую интерпретацию, они обоснованы, измеримы эмпирически и имеют реалистические значения [157] (таблица 3.1).

Желаемые скорости изначально полагаются удовлетворяющими распределению Гаусса с наложенным ограничением на максимальное и минимальное значения скоростей и определяются по плотности распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

где  $\mu$  - математическое ожидание, указывающее абсциссу максимума функции распределения, а  $\sigma^2$  - дисперсия. Математическое ожидание есть средняя

Параметр	Автомобиль	Грузовик
Желаемая скорость $v_0$	120 км/ч	85 км/ч
Степень ускорения $\delta$	4	4
Желаемый временной зазор $T$	1.5с	2.0с
Дистанция сближения $s_0$	2.0м	4.0м
Максимальное ускорение $a$	1.4м/с <sup>2</sup>	0.7м/с <sup>2</sup>
Желаемое торможение $b$	2.0м/с <sup>2</sup>	2.0м/с <sup>2</sup>
Фактор хладнокровия $c$	0.99	0.99

Таблица 3.1

## Параметры модели IDM

скорость, значение дисперсии принято за 0.3 средней скорости.

Модель Трайбера можно обобщить на двумерный случай. Для каждой АТС вычисляются следующие характеристики:

- Возможность смены полосы. Смена полосы возможна, если в непосредственной близости на полосе-приёмнике в зоне приёма не присутствует транспортное средство или оно не появится там за время перестройки.
- Необходимость смены полосы. Смена полосы необходима, если она служит способом достижения цели. Например, если на перекрёстке поворот налево возможен только из крайней левой полосы (полосы номер 0), а АТС в настоящее время движется по полосе номер 2, то имеется необходимость перестроения сначала в полосу номер 1, а затем в полосу номер 0.

Смена полосы — вероятностное событие, вероятность попытки которого увеличивается по мере приближения АТС к целям. Граница (расстояние до цели), при которой вероятность попытки перестроения становится единицей, определена эмпирически и составляет 75 — 200 метров [155, 158]. Если АТС уже движется по целевой полосе, то вероятность перестроения есть  $1 - p$ , где  $p$  - вероятность перестроения на целевую полосу. Если после пересечения границы АТС всё ещё не находится на нужной полосе, оно может остановиться в ожидании перестроения. Алгоритм перестроения отражён на блок-схеме на рисунке 3.1.

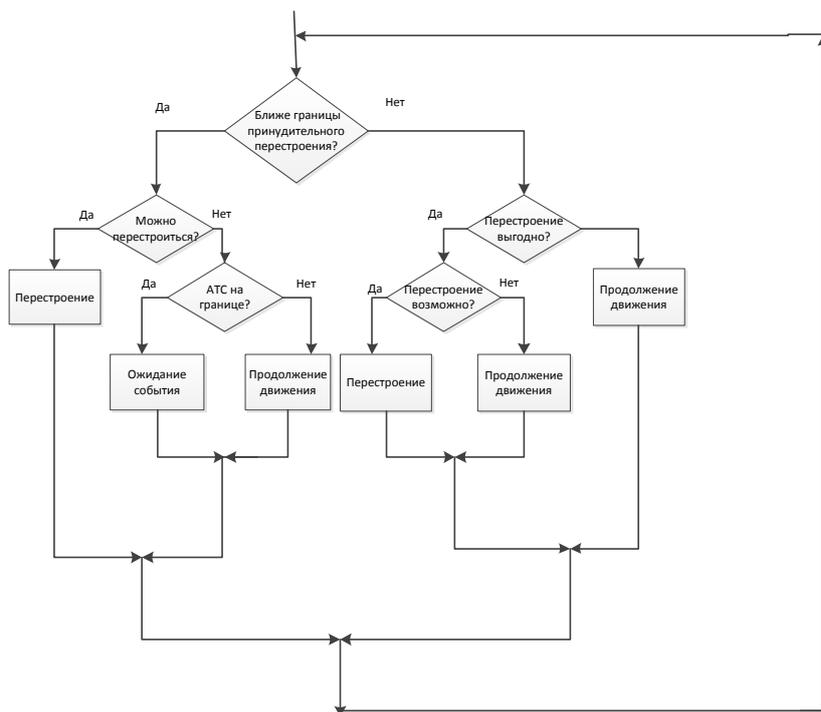


Рис. 3.1. Блок-схема процесса принятия решения при перестроении.

В алгоритме все АТС, движущиеся по полосе представлены двусвязным списком, отсортированным по возрастанию дистанций. Определение достаточного зазора при перестроении есть просмотр списка целевой полосы вблизи точки назначения. Для точки назначения на целевой полосе определяют первое транспортное средство, находящееся сзади этой точки (*backward*) и первое транспортное средство, находящееся перед этой точкой (*forward*). Перестроение возможно при совместном удовлетворении следующих требований:

- Время встречи текущего АТС (*current*) с *backward* в предположении, что АТС сохраняют скорости движения должно быть больше критического времени  $T_{back}$ , принятого равным за 5 секунд. Это означает, что если скорость *backward* меньше скорости *current*, то это условие

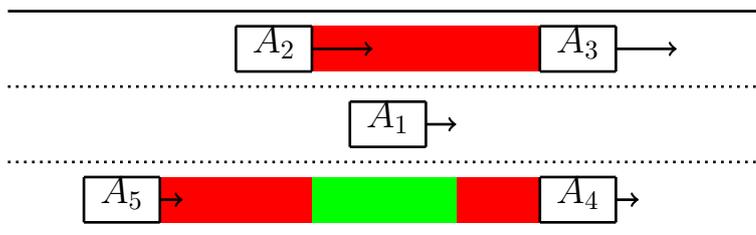


Рис. 3.2. Допустимость перестроения на соседнюю полосу при движении

истинно.

- Время встречи *current* с *forward* в предположении, что АТС сохраняют свои скорости, должно быть большим  $T_{forw}$ , принятого равным 3 секундам. Это означает, что если скорость *forward* больше скорости *current*, то это условие истинно.
- Промежуток для перестроения (расстояние между *current* и *forward*) принят равным 5 длинам *current*.

Допустимость перестроения проиллюстрирована на рисунке 3.1.1..

Наличие хотя бы одного пункта с ложным значением запрещает перестроение.

При перестроении:

1. Текущее АТС меняет номер полосы.
2. На исходной полосе АТС удаляется из двусвязного списка.
3. На целевой полосе АТС вставляется в двусвязный список, при этом должна сохраняться упорядоченность по дистанции всех элементов списка.

Существуют несколько границ, при которых поведение АТС изменяется.

- Граница перестроения перед светофором. После достижения данной границы скорость АТС снижается до  $V_{change}$ .
- Точка поворота. Скорость в этот момент времени равна нулю.
- Граница снижения скорости при красном свете светофора. После достижения данной границы скорость снижается до  $V_{red1}$ .

- Граница торможения при красном свете светофора. После достижения данной границы скорость снижается до  $V_{red2}$ .

После поворота моделируемое АТС перемещается на полосу другой дороги и, если требуется, участвует в дальнейшем процессе моделирования.

Существующая модель была исследована на влияние наличия грузовых автомобилей, отличающихся от легковых: распределением скоростей (для грузовых автомобилей оно меньше, чем у легковых автомобилей), безопасным расстоянием (для грузовых автомобилей оно больше легковых автомобилей), длиной автомобиля (длина грузового автомобиля больше длины легкового), желаемым ускорением (для грузовых автомобилей оно меньше, чем для легковых автомобилей). В программе, реализующей модель, можно задать вероятность появления грузовых автомобилей на полосе.

Для рассмотренных методов были разработаны компьютерные программы, реализующие математические модели.

## **3.2. Программная реализация методов: микроскопическое моделирование, программа VTSSIM**

### **3.2.1. Программная модель**

Программная модель микроскопического имитационного моделирования основана на модели поведения водителя Трайбера и предназначена для решения следующих проблем:

1. определения пропускной способности многополосной дороги;
2. определения пропускной способности Т-образного перекрёстка, регулируемого светофором;
3. определения пропускной способности обыкновенного перекрёстка, регулируемого светофором;
4. моделирования локального расширения дороги вблизи светофора;

5. определения эффективной пропускной способности многополосной дороги.

### 3.2.2. Структура программы

Первые версии программы были реализованы на языке Java, однако, тестовая эксплуатация программы выявила несколько проблем:

- невозможность исполнения программ на вычислительных системах, на которых не установлена исполнительная система языка Java, например, на вычислительных кластерах;
- сравнительно низкая производительность исполняемого кода;
- отсутствие в языке Java примитивов, аналогичных MPI, что затрудняет использование инфраструктуры распределённых вычислений.

Поэтому в качестве языка реализации программной части был выбран язык C++, как:

- имеющий в наличие компилятор для большинства вычислительных кластеров;
- имеющий компиляторы, продуцирующие эффективный исполняемый код;
- имеющий доступ к подсистемам OpenMP и MPI, что позволяет эффективно использовать распределённые вычисления.

Функции программы определяются из двух источников:

1. конфигурационного файла, в котором описываются основные параметры модели, а также неизменяемые для группы прогонов программы данные;
2. аргументов командной строки, в которой вводятся изменяемые для группы прогонов данные.

Вот пример конфигурационного файла:

```
;ModellingMode=LLE | L3W | L4W
ModellingMode=T
ServerIP=127.0.0.1
ServerUpdateTime=0.01
DebugMode=Two
MPI=0
Debug=-+@
;lrsndu
;t - Triber
;l - Lines
;r - Road
;s - Speeds
TightDistance=3
TimeToStartMeasuresTights=700
LocalRoadExtensionFlag=0
RoadExtensionStart=2800
RoadExtensionLength=500
LightsPosition=3000
RoadExtensionStart.First=2500
RoadExtensionStart.Last=2900
RoadExtensionStart.Step=50
RoadExtensionLength.First=200
RoadExtensionLength.Last=800
RoadExtensionLength.Step=100
CarsPerMinute.First=1
CarsPerMinute.Last=80
CarsPerMinute.Step=3
TruckPercent.First=5
TruckPercent.Last=5
TruckPercent.Step=1
CarsPerMinute=58
TrucksPercent=4
Step=0.01
ModelingTime=1500
DisableChangingLines=0
```

RunningThreads=1  
Phase0.Time=40  
Phase1.Time=20  
Phase2.Time=30  
Phase3.Time=30  
Phase0.Targets=2  
Phase1.Targets=2  
Phase2.Targets=3  
Phase3.Targets=3  
TotalPhases=0  
Lights0.UpCPM=58  
Lights0.LeftCPM=88  
Lights0.RightCPM=87  
Lights0.DownCPM=86  
MinSpeedRatio=0.3  
Car.ComfortSpeed=72  
Car.Length=4.5  
Car.MinDistance=2  
Car.MaximalAcceleration=1.4  
Car.MaximalSpeed=120  
Car.BrakeAcceleration=2.0  
Car.Width=1  
Car.MeanInitialSpeed=60  
Car.TimeGap=3.5  
Truck.ComfortSpeed=54  
Truck.Length=12  
Truck.MinDistance=4  
Truck.MaximalAcceleration=0.7  
Truck.MaximalSpeed=90  
Truck.BrakeAcceleration=0.7  
Truck.Width=1  
Truck.MeanInitialSpeed=54  
Truck.TimeGap=4.0  
Road.Length=16000  
Road.ClusterSnapshot=3000

```
Road.TimeToStartMeasure=400
```

```
Road.Start=0
```

```
Road.XroadOffset=7000
```

```
Road.T=3
```

```
Road.MaximalSpeed=90
```

В нём описываются: режим работы программы (решаемая проблема), параметры среды исполнения (наличие или отсутствие MPI, количество потоков, наличие сервера оперативной визуализации результатов), описание дороги как набора полос, плотности потоков, характеристики транспортных средств разных типов и прочее.

Ряд параметров, заданных в конфигурационном файле, может быть изменён в аргументах командной строки.

После запуска и анализа командной строки программа порождает требуемое количество вычислительных потоков. Программа может исполняться в нескольких режимах:

- Режим MPI, при котором исполнительная система, возможно, кластера, порождает требуемое количество идентичных копий программы, каждая из которых исполняется на собственном вычислительном узле. Каждая из копий, в свою очередь, может использовать самостоятельно несколько вычислительных потоков (этот режим более эффективен, чем порождение на каждом узле процессов, количество которых равно количеству исполнительных ядер узла, но не может быть проконтролирован системой очередей кластера, поэтому должен применяться с осторожностью). Процесс под номером 0 собирает информацию со всех запущенных процессов и консолидирует результаты.
- Автономный режим, при котором программа запускает нужное количество вычислительных потоков, один из которых управляет другими и консолидирует результаты.

- Режим GRID-вычислений, при котором программа выступает в качестве узла распределённой метасистемы. Метасервер этой метасистемы планирует исполнение ряда программ (подзадач). Каждый из экземпляров программы, работающий в режиме GRID, обращается к метасерверу за своей подзадачей, передавая тому результаты исполнения. Этот режим удобен при наличии вычислительных узлов, располагающихся физически в разных местах а так же при наличии некоторого количества узлов под управлением разных операционных систем (например, Windows, Linux и OS X).

Несмотря на применение термина GRID, программа не реализует режим полного вхождения в GRID систему (которая требует наличия собственной инфраструктуры). Правильнее сказать, что программа реализует проблемную сущность метакомпьютинга.

### 3.2.3. Основные классы программы

Программа состоит из следующих основных классов языка C++, моделирующих математическую и вычислительную сущности:

- **Model** Данный класс инкапсулирует в себе основные свойства модели и является контейнером для большинства остальных классов. Именно в модели хранятся такие параметры, как интенсивности потоков, количество и параметры дорог, начальный шаг и полное время моделирования, режим моделирования.
- **Config** Класс предназначен для считывания структурированной информации из внешних файлов. Каждый квант информации содержит тип объекта, его свойства и назначаемое этому свойству значение.
- **Runner2** Этот класс представляет собой моделирование ровно одной дорожной ситуации от начала до конца. Для статистической обработки требуется исполнить несколько экземпляров прогона.

- **Vehicle** Этот класс содержит общие свойства различных транспортных средств, таких, как комфортная и максимальная скорости, длина АТС, значения максимального ускорения и замедления, а так же других свойств.
- **Source** Класс, отвечающий за источник появления АТС на дороге. Появление АТС моделируется с помощью генератора случайных чисел. Скорость АТС назначается по распределению Гаусса с заданным математическим ожиданием и дисперсией и ограничениями снизу и сверху. Если генератор скорости выдал скорость выше наибольшего допустимого значения, скорость принимается равной наибольшему допустимому значению; если генератор скорости выдал скорость меньше допустимого значения, скорость принимается равной наименьшему допустимому значению.
- **Road** Содержит несколько полос и управляет переходом транспортных средств с полосы на полосу.
- **Line** Представляет из себя модель одиночной полосы, включающей в себя управляющие светофоры. Реализует основную модель поведения водителя на дороге (модель Трайбера), определяет возможность обгонов.
- **Car** Содержит текущие изменяемые значения параметров АТС.
- **Random** Данный класс реализует несколько видов генераторов случайных чисел: генератор равномерно распределённых чисел в заданном диапазоне, генератор вещественных чисел, распределённых по Гауссу с заданным математическим ожиданием и дисперсией, генератор целых чисел в заданном диапазоне и генератор логических значений с заданной вероятностью распределения. Для вычислительных систем, основанных на архитектурах IA32 и AMD64, для эффективности применялся вариант, использующий инструкции SSE2. Распределение Гаусса реализуется с помощью метода Бокса-Мюллера.

- **GraphicsClient** Класс, который выводит текущее состояние системы по протоколу RPC на внешний сервер с графическим представлением. Особенно удобно использование этого класса при исполнении программы в режиме MPI, поскольку позволяет непосредственно наблюдать за модельной дорожной ситуацией. Идеи, которые легли в проектировании данной части программы были навеяны книгами [159–162].
- **GridClient** Класс, который позволяет программе становиться членом вычислительного сообщества в роли метаклиента, управляемого метасервером.
- **GridServer** Класс, который позволяет конкретному экземпляру программы в распределённой вычислительной системе становиться управляющим узлом, метасервером. Этот класс координирует действия программ метаклиентов. В качестве основного алгоритма оптимизации применялся многократный расчёт по сетке параметров.

Отдельно применялась программа **GraphicsServer**, исполняющаяся на одном из вычислительных узлов (управляющем узле), которая визуализировала текущий процесс исполнения метапрограммы и результаты её работы.

Операционными системами, на которых исполнялись метаклиенты были Windows7 64 bit, Centos Linux 6.2, OS X. Графический сервер исполнялся на вычислительном узле под управлением Windows7 64 bit. Расчёты в MPI режиме исполнялись на вычислительном кластере под управлением Centos.

### 3.3. Апробация математической модели, реализованной в программе

Было изучено влияние изменения дорожной разметки на среднее относительных скоростей АТС от их желаемых скоростей  $V$ . Рассматривались два случая — с разрешённым перестроением и с запрещённым перестроением. Моделировалась двухполосная дорога.

Рассмотрим случай, когда доля грузовиков составляет 4% от всех АТС.

На рисунке 3.3 показаны зависимости  $V$ , скорости потока, от  $CPM$ , интенсивности входящего потока. Представлены два варианта с разрешённым и запрещённым перестроением. Входящая интенсивность потока в АТС/мин – горизонтальная ось, среднее отношение (по всему времени и всем АТС) текущей скорости АТС к желаемой – вертикальная ось.

Для просчётов по программе использовался кластер из 6-ти компьютеров, каждый из которых имел 2 процессора Intel Xeon 2670, содержащих по 8 физических ядер и допускающих 16 виртуальных вычислительных потоков, оперативная память одного узла – 128Gb. Каждая точка графике есть результат усреднения 32-х независимых расчётов.

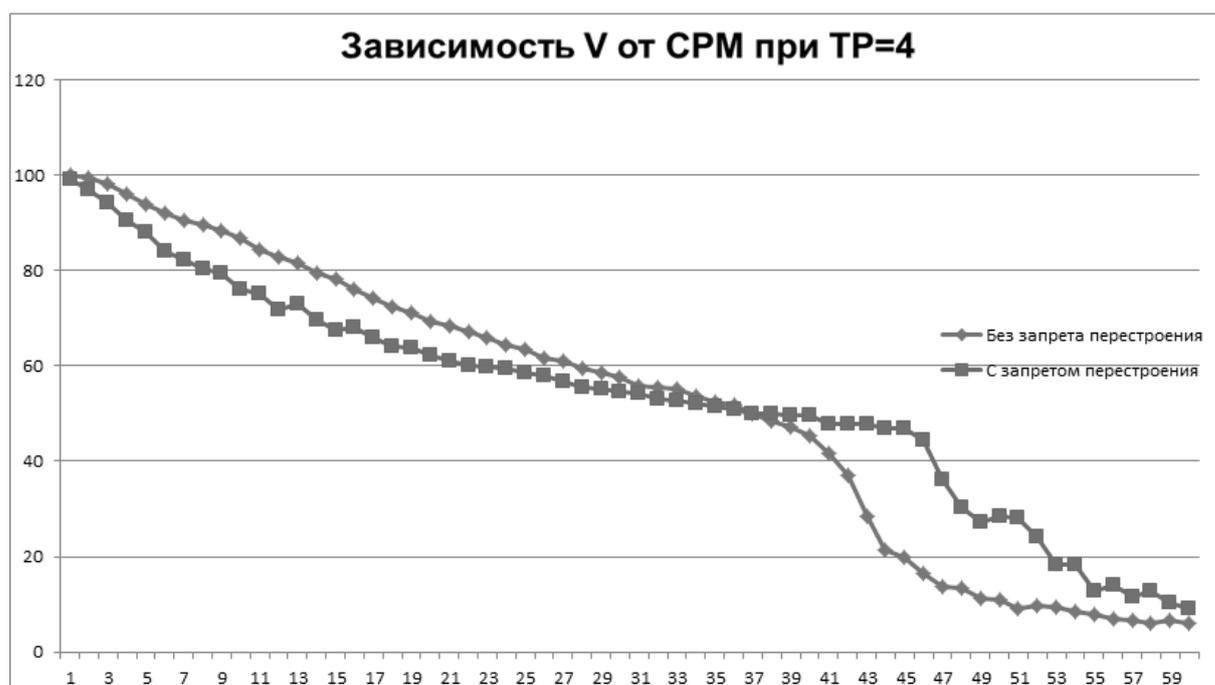


Рис. 3.3. Зависимость  $V$  потока, %, от интенсивности входящего потока, АТС/мин

Состояние автомобильного потока на трассе было исследовано с точки зрения «эмпирической теории трех фаз Кёрнера».

В данном случае фаза  $F$  длится до момента, пока интенсивность входящего потока не станет равной 19 АТС/мин для случая запрещённого перестроения.

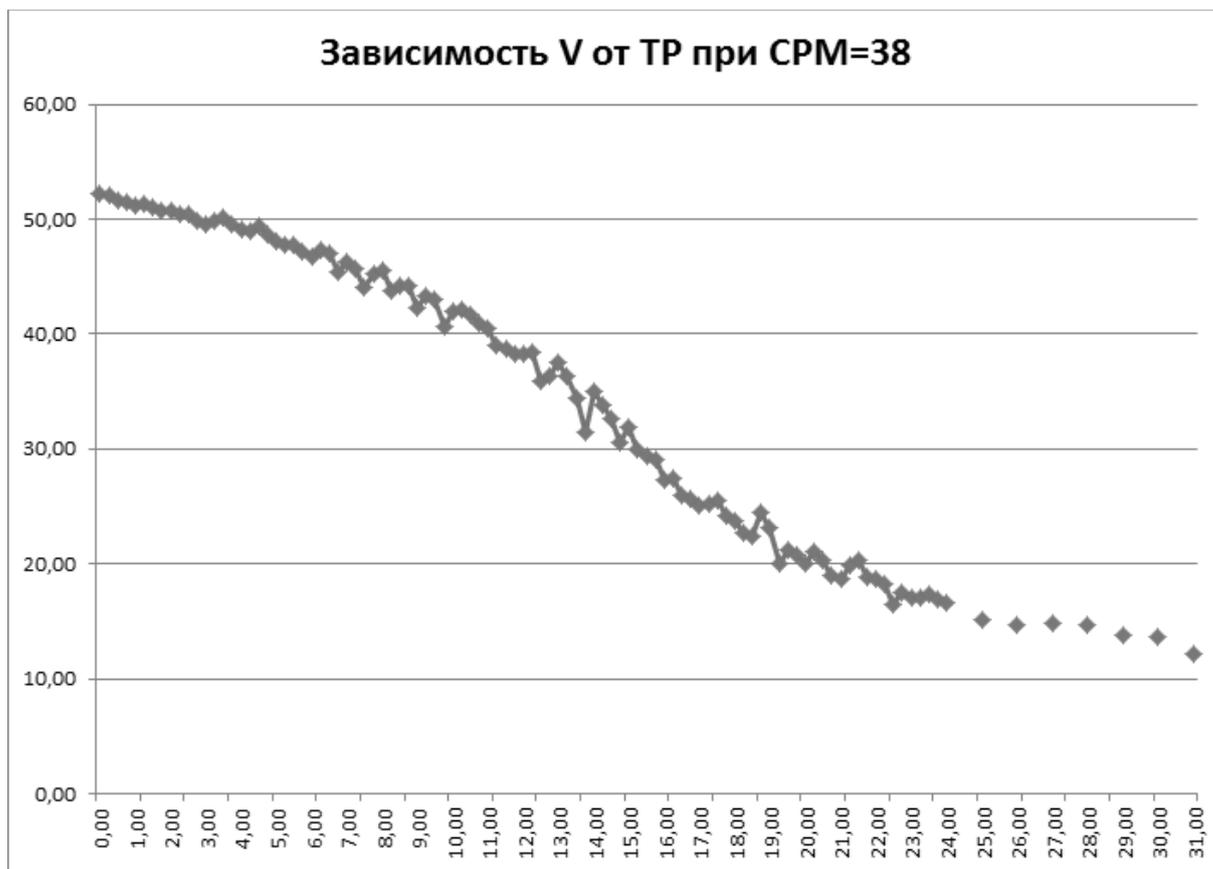


Рис. 3.4. Зависимость V потока, %, от TP потока, %

Для исследования наличия или отсутствия фазового перехода в зависимости скорости потока от процента грузовиков во входящем потоке ( $TP$ ) при постоянной интенсивности входящего потока был построен график этой зависимости для  $CPM = 38$  (рисунок 3.4).

В данном случае фазовый переход выражен менее явно, но, в то же время, при значении  $TP = 12.00$  выражена неустойчивость, переходящая в более резкое ухудшение транспортной ситуации.

### 3.3.1. Компьютерное микроскопическое моделирование движения на перекрёстке

Рассмотренная микроскопическая модель была использована для решения задачи о движении АТС на регулируемом перекрёстке. Рассматривается движение АТС на перекрёстке с заранее заданными неоднородными много-

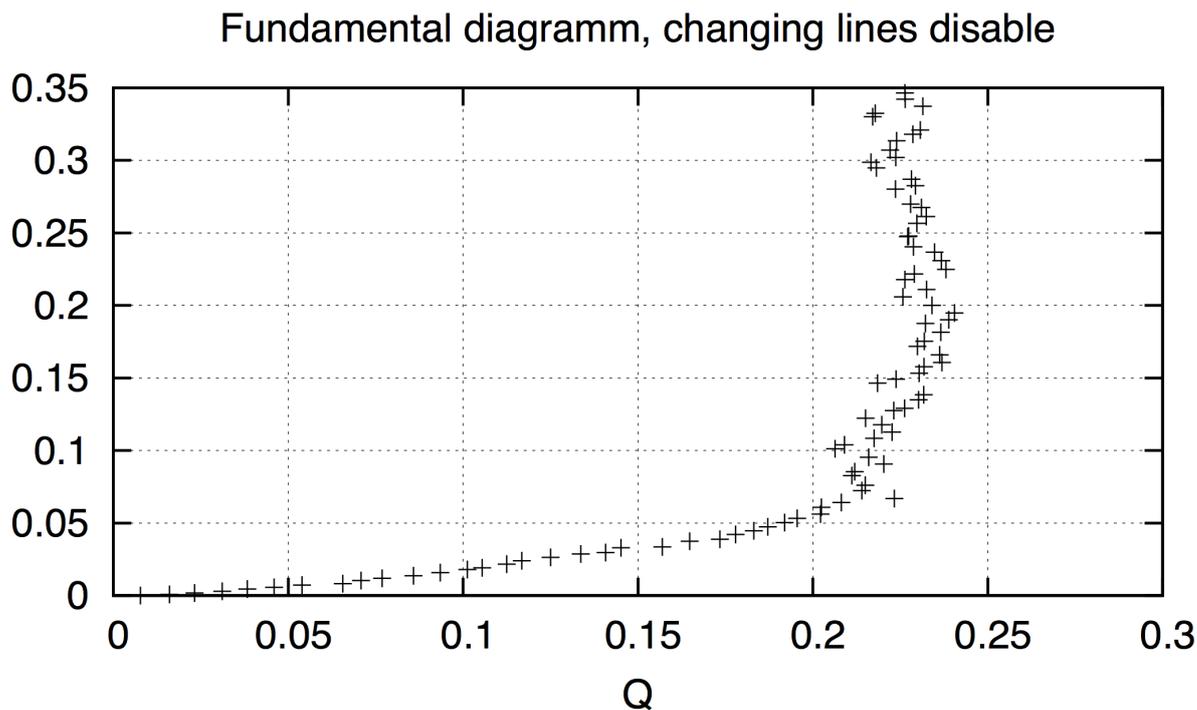


Рис. 3.5. Фундаментальная диаграмма

целевыми потоками.

Требуется оптимизировать светофорный режим, а именно, определить длительности фаз светофоров, обеспечивающих максимальную пропускную способность перекрёстка.

Был рассмотрен перекресток, рассмотренный в работе [155] с приведёнными там значениями неравномерных потоков (рисунок 3.6).

Указанный светофор управляется 4-мя режимами работы, показанными на рисунке 3.7.

Для верхней дороги:

- $q=0,16$  автомобилей/сек,
- Фаза 1 запрещает движение,
- Фаза 2 запрещает движение,
- Фаза 3 запрещает движение,
- Фаза 4 разрешает движение автомобилей по всем направлениям.

Результаты моделирования представлены в таблице 3.2.

Для левой дороги:

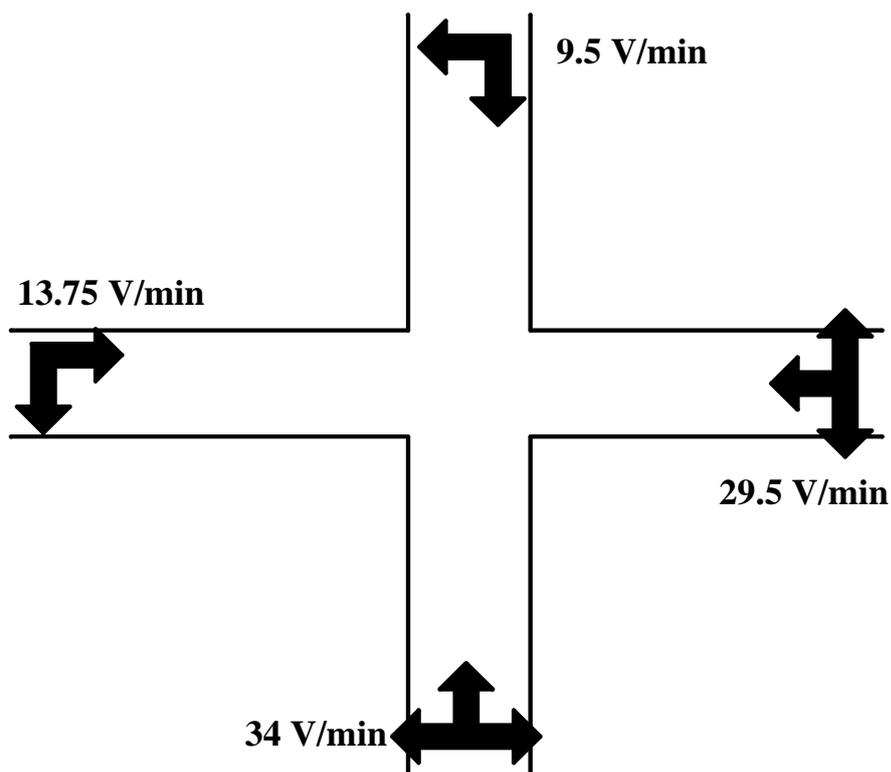


Рис. 3.6. Распределение потоков перекрёстка

- $q=0,23$  автомобилей/сек,
- Фаза 1 запрещает движение,
- Фаза 2 запрещает движение,
- Фаза 3 разрешает движение автомобилей по всем направлениям,
- Фаза 4 запрещает движение.

Результаты моделирования представлены в таблице 3.3.

Для правой дороги:

- $q=0,492$  автомобилей/сек,
- Фаза 1 разрешает движение автомобилей по всем направлениям,
- Фаза 2 разрешает движение вверх и направо,
- Фаза 3 разрешает движение только налево,
- Фаза 4 запрещает движение.

Результаты моделирования представлены в таблице 3.4.

Для нижней дороги:

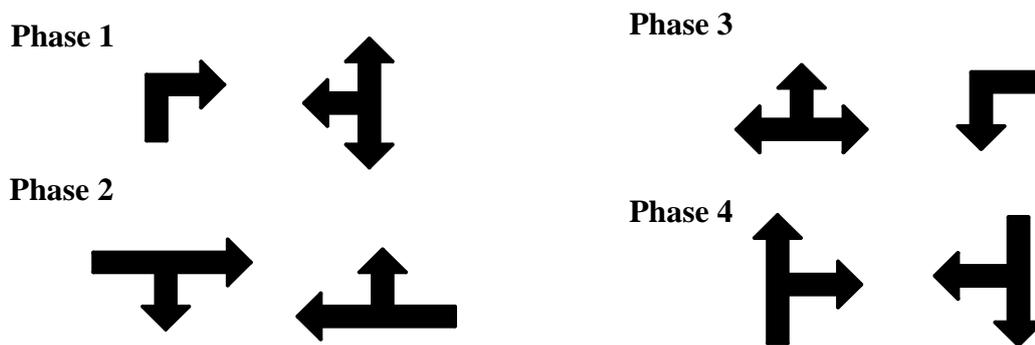


Рис. 3.7. Режимы работы светофора

Фаза 1, сек	Фаза 2, сек	Фаза 3, сек	Фаза 4, сек	CPT
90	90	45	45	0.11
60	60	60	60	0.14
90	60	90	60	0.12
45	45	90	90	0.14
45	45	60	60	0.15

Таблица 3.2

Для верхней дороги

- $q=0,57$  автомобилей/сек,
- Фаза 1 разрешает движение только направо,
- Фаза 2 разрешает движение автомобилей по всем направлениям,
- Фаза 3 запрещает движение,
- Фаза 4 разрешает движение вверх и направо.

Результаты моделирования представлены в таблице 3.5.

Наибольший интерес представляет общая пропускная способность перекрестка, поэтому вычисляются суммы всех  $CPT$  по различным направлениям (таблица 3.6).

Меняя длительность светофорных режимов, можно повысить пропускную способность перекрестка, то есть увеличить среднее количество автомобилей, пересёкших перекресток за 1 секунду. Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы: одинаковая продолжительность всех светофорных режимов не обеспечивает максимальную пропускную способность.

Фаза 1, сек	Фаза 2, сек	Фаза 3, сек	Фаза 4, сек	СРТ
90	90	45	45	0.12
60	60	60	60	0.15
90	60	90	60	0.19
45	45	90	90	0.21
45	45	60	60	0.18

Таблица 3.3

Для левой дороги

Фаза 1, сек	Фаза 2, сек	Фаза 3, сек	Фаза 4, сек	СРТ
90	90	45	45	0.27
60	60	60	60	0.21
90	60	90	60	0.25
45	45	90	90	0.13
45	45	60	60	0.19

Таблица 3.4

Для правой дороги

Кроме того, режим 1 разрешает пересечение перекрёстка автомобилям, движущимся по направлениям с максимальными входными потоками, однако значительное относительное увеличение длительности этого режима не ведёт к увеличению пропускной способности перекрёстка (можно сравнить строки 1 и 4).

В отличие от подобной ситуации, рассмотренной в статье [155], оптимальным из рассмотренных режимов работы светофора является режим 3 (длительность фаз 90-60-90-60).

При наличии грузовых автомобилей в количестве, равном 4 процентам, были построены зависимости пропускной способности перекрестка от длительности светофорных фаз. Длину дороги в данном случае полагали равной 2 км, расстояние принудительного перестраивания — 200 метров.

Для каждого из направлений перекрёстка, рассмотренного в предыдущем разделе, произведены вычислительные эксперименты. Была выбрана сетка значений длительности каждой фазы в 30, 45, 60, 75 и 90 секунд. Таким об-

Фаза 1, сек	Фаза 2, сек	Фаза 3, сек	Фаза 4, сек	СРТ
90	90	45	45	0.17
60	60	60	60	0.19
90	60	90	60	0.24
45	45	90	90	0.26
45	45	60	60	0.23

Таблица 3.5

Для нижней дороги

Фаза 1, сек	Фаза 2, сек	Фаза 3, сек	Фаза 4, сек	СРТ
90	90	45	45	0.67
60	60	60	60	0.68
90	60	90	60	0.80
45	45	90	90	0.74
45	45	60	60	0.75

Таблица 3.6

Для всех дорог

разом, вычислительный эксперимент проводился для 625 различных комбинаций фаз светофора. Плотности потоков не были изменены по сравнению с предыдущим разделом. Моделирование производилось по 10 раз для каждой комбинации фаз, в итоговую таблицу заносилось среднее значение.

Таблица 3.7 представляет из себя фрагмент полной отсортированной по убыванию общей пропускной способности таблицы результатов вычислительного эксперимента, состоящей из 625 строк. В данном фрагменте приведены несколько результатов из верхней части — для наибольших значений, и нижней части — для наименьших.

Сравним порядок величин пропускной способности перекрестка в лучшем и худшем случаях. Найдём среднюю пропускную способность перекрестка за 25 минут, то есть, 1500 секунд модельного времени.

Полученная разница в 25% играет достаточно большое влияние на указанных интенсивностях потоков, что показывает, что оптимальное управление светофорными фазами может значительно улучшить транспортную картину.

Фаза 1, сек	Фаза 2, сек	Фаза 3, сек	Фаза 4, сек	CPT
60	30	45	30	0.737
45	30	30	30	0.737
30	75	45	30	0.737
45	60	45	30	0.736
45	45	45	30	0.735
75	30	45	30	0.735
90	60	45	30	0.734
60	30	30	30	0.734
90	75	30	30	0.733
45	30	45	30	0.731
75	30	45	45	0.731
30	45	45	30	0.730
30	30	30	30	0.729
45	75	45	30	0.729
75	60	30	30	0.728
30	30	45	30	0.727
...	...	...	...	...
45	45	30	90	0.585
30	30	45	90	0.584
30	30	60	90	0.584
45	30	30	90	0.566
30	30	30	90	0.560

Таблица 3.7

Зависимость совокупной пропускной способности потока для перекрёстка, сортировка по убыванию параметра CPT

Полученные распределения фаз, как близкие к оптимальным, так и близкие к неоптимальным, при заданных входящих потоках было решено проверить на устойчивость к небольшим изменениям интенсивностей входящих потоков с различных сторон. Данные, указанные в таблице, показывают, что пропускная способность перекрестка изменяется при данных изменениях не очень сильно (данные, которые показывали оптимальные распределения фаз — продолжают их показывать). Поэтому наиболее оптимальными в плане как устойчивости, как и пропускной способности, стоит выбирать варианты, показывающие наилучший результат на изначальных интенсивностях потоков.

Таблица 3.8 показывает, что при колебаниях плотностей потока изменение

Фаза 1	Фаза 2	Фаза 3	Фаза 4	Orig	p2-2	p3-5	p3+5	p4-5	p4+5
30	30	30	30	0.729	0.755	0.724	0.740	0.740	0.733
30	30	30	75	0.594	0.591	0.597	0.589	0.588	0.584
30	30	30	90	0.560	0.565	0.562	0.563	0.568	0.562
30	30	45	30	0.727	0.740	0.732	0.721	0.720	0.720
30	45	30	30	0.716	0.721	0.724	0.724	0.734	0.735
30	45	45	30	0.730	0.738	0.736	0.736	0.734	0.728
30	60	30	90	0.587	0.588	0.588	0.588	0.594	0.580
45	30	30	30	0.737	0.727	0.732	0.731	0.734	0.731
45	30	30	90	0.566	0.576	0.577	0.569	0.575	0.568
45	30	45	30	0.731	0.734	0.735	0.734	0.728	0.725
45	45	45	30	0.735	0.728	0.731	0.716	0.728	0.717
45	45	90	90	0.629	0.639	0.624	0.629	0.629	0.631
90	90	60	60	0.700	0.690	0.700	0.695	0.694	0.688

Таблица 3.8

Зависимость совокупной пропускной способности потока от вариации потока пропускной способности невелико, то есть, моделируемая система ведёт себя устойчиво.

Для данной задачи было решено рассчитать оптимальное распределение фаз светофора в зависимости от входящих потоков. Решение этой проблемы помогло бы создать интеллектуальное управление светофорными режимами, ориентируясь на статистические данные потоков, движущихся по каждому из направлений.

Расчеты проводились по сетке 30-45-60-75-90 секунд для каждого направления. Вычисления проводились на кластере. По каждому направлению было проведено 16 независимых расчётов, которые затем усреднялись. В таблице 3.9 приведены некоторые полученные результаты для утренних часов, а в таблице 3.10 — для вечерних часов.

Оптимальные длительности светофорных фаз в обоих случаях совпадают и составляют 30-90-30. Разброс между наилучшим и наихудшим вариантом составляет 35 процентов для утренних часов пик и 37 процентов для вечерних часов пик, что для данных потоков обозначает разницу в 914 АТС/час

Фаза 1, сек	Фаза 2, сек	Фаза 3, сек	CPT
30	90	30	0.725
45	90	30	0.715
30	75	30	0.706
60	90	30	0.702
30	60	30	0.691
45	75	30	0.687
30	90	45	0.684
45	90	45	0.682
75	90	30	0.680
60	75	30	0.669
...	...	...	...
75	30	90	0.478
45	30	90	0.477
90	30	30	0.475
30	30	90	0.471

Таблица 3.9

Зависимость совокупной пропускной способности потока T-образного перекрёстка, утренние часы, сортировка по убыванию параметра CPT

и 1033 АТС/час соответственно. Это изменение пропускной способности играет очень большую роль в образовании автомобильных заторов, поэтому целесообразность моделирования перекрестков для вычисления оптимальной длительности светофорных фаз очевидна.

### 3.3.2. Сопоставление аналитического решения задачи и результатов имитационного моделирования

Решение задачи о перекрёстке на рисунке 2.3 проведено аналитическим методом. Оптимальное распределение фаз для заданных плотностей транспортных потоков представлено в таблице 3.11.

При численном расчёте методом микромоделирования наибольшее значение пропускной способности составляло 0.737 CPT (таблица 3.7). Результат, полученный аналитически, превосходит этот результат на 4%, требуя несоизмеримо меньшее количество вычислительных ресурсов.

Фаза 1, сек	Фаза 2, сек	Фаза 3, сек	СРТ
30	90	30	0,775
30	75	30	0,770
45	90	30	0,769
60	90	30	0,758
30	60	30	0,755
45	75	30	0,746
45	90	45	0,740
30	90	45	0,739
45	60	30	0,730
60	75	30	0,730
...	...	...	...
90	30	75	0,505
90	30	60	0,504
90	30	45	0,492
90	30	30	0,488

Таблица 3.10

Зависимость совокупной пропускной способности потока Т-образного перекрёстка, вечерние часы, сортировка по убыванию параметра СРТ

Фаза 1, сек	Фаза 2, сек	Фаза 3, сек	Фаза 4, сек	СРТ
35	61.5	38.4	32.5	0.761

Таблица 3.11

Оптимальные длины фаз для перекрёстка, полученные аналитически

### 3.3.3. Численные методы расчёта эффективного числа полос

Рассчитаем эффективное число полос с помощью численных экспериментов, проведённых с помощью ранее описанной модели.

На графике отражена зависимость между отношением текущего проходящего через перекрёсток потока к максимально возможному (когда всем АТС разрешено продолжение движения) и процентом АТС, которые могут продолжать движение при данной светофорной фазе для одной многополосной дороги.

Каждая точка на графике получена усреднением 64 измерений.

Таким образом явно прослеживается линейная зависимость. Математиче-

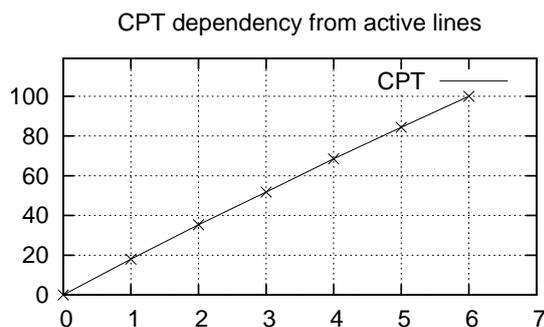


Рис. 3.8. Зависимость отношения проходящего потока к максимальному от процента АТС, которые могут продолжать своё движение

ское ожидание проходящего потока, таким образом, можно выразить следующей формулой:

$$E[S_k] = S \cdot \frac{k}{q}, \quad (3.1)$$

где  $k$  — поток АТС, которые могут продолжать движение на текущей фазе,  $q$  — поток АТС,  $S$  — поток АТС через перекрёсток в случае, когда нет запретов на движение.

### 3.3.4. Применение компьютерного микроскопического моделирования для оптимизации дорожного движения

В 2012 году при въезде будним днём в город Королёв (Московская область) на ул. Пионерская каждый вечер наблюдалась серьезная пробка, обусловленная работой светофора, расположенного в двух километрах от въезда в город на площади Мозжорина. Работа светофора на этом перекрестке организована таким образом, что во время горения зелёного света по прямому направлению по улице Пионерская, поворот налево невозможен. Как следствие, левая полоса из двух оказывается постоянно занята, что снижает эффективное число полос в режиме прямого движения во время зелёного сигнала светофора (рисунок 3.9).

Подобные ситуации весьма распространены. В городе Королёв, например, имеется нерегулируемый Т-образный перекресток на пересечении улиц Стан-

ционной и Московской, работающий также неэффективно. Съезды с крупных магистралей (МКАД, шоссе) тоже страдают от того, что затор на дороге, на которую ведет съезд, приводит к затору на рассматриваемой дороге.

Известно, что локальные расширения часто приносят негативный эффект. В рассматриваемом же примере наблюдается обратный эффект. В данном перекрестке в г. Королёв потоки распределены в отношении 2:5, при интенсивных потоках вследствие этого остаётся одна эффективная полоса.

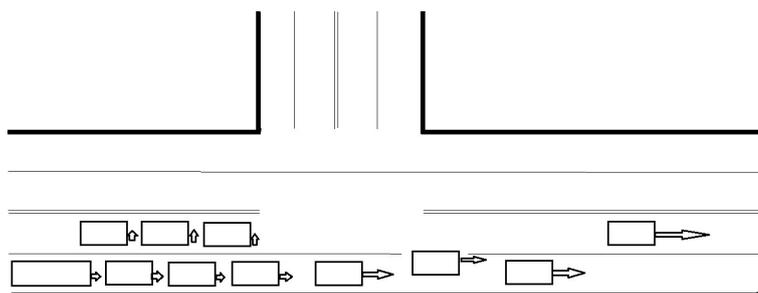


Рис. 3.9. Схема движения в г. Королёв, перекрёсток ул. Пионерская и ул. Терешковой

В работе автора данной диссертации [4] предложена модификация дорожного движения. Предложено увеличить число полос на ул. Пионерская в окрестности этого перекрестка (рисунок 3.10).

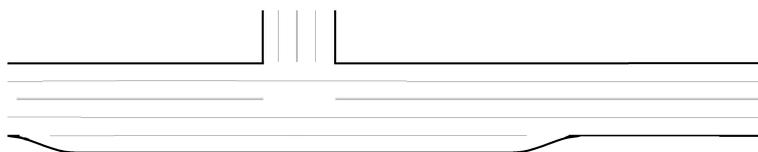


Рис. 3.10. Схема предлагаемого локального расширения в г. Королёв, перекрёсток ул. Пионерская и ул. Терешковой

Для моделирования ситуации была использована модель, описанная на стр. 52, были произведены расчеты того, каким именно образом стоит расширять число полос (на каком расстоянии от светофора сделать расширение, какой длины должно быть расширение).

Было просчитано несколько вариантов расположения. Отношение числа поворачивающих АТС и продолжающих движение прямо было принято как

2:5. В таблице 3.12 показаны результаты расчётов программы, описанной в 3.2.. В качестве критерия оптимальности была принята средняя длина очереди в установившемся режиме. Интенсивность входящего потока была принята за 88 АТС / мин. Длительности обеих фаз светофора были приняты за 30 секунд каждая. Модельное время составляло 900 секунд. При достижении установившегося режима от начального времени 400 секунд до конечного времени подсчитывалась длина очереди. В таблицу заносились результаты усреднения 128 расчётов программы. При данных начальных значениях расчётная длина очереди АТС составляла 6.3 единицы.

Начало/конец, м	100	110	120	130	140	150	160	200	300	400
-400	3.43	1.57	1.44	1.36	1.29	1.26	1.25	1.17	1.08	1.07
-300	3.61	1.69	1.48	1.44	1.38	1.33	1.33	1.24	1.15	1.13
-200	3.50	1.45	1.34	1.27	1.24	1.21	1.17	1.14	1.11	1.10
-160	3.25	1.41	1.34	1.28	1.29	1.22	1.25	1.16	1.10	1.05
-150	3.21	1.40	1.34	1.27	1.23	1.23	1.22	1.16	1.13	1.11
-140	2.99	1.39	1.34	1.28	1.25	1.25	1.25	1.18	1.14	1.10
-130	2.88	1.38	1.35	1.31	1.30	1.27	1.25	1.20	1.13	1.11
-120	2.64	1.34	1.30	1.29	1.27	1.24	1.24	1.20	1.16	1.14
-110	2.25	1.28	1.23	1.19	1.21	1.24	1.20	1.16	1.15	1.13
-100	1.84	1.15	1.12	1.09	1.09	1.11	1.11	1.11	1.05	1.09

Таблица 3.12

Зависимость средней длины очереди АТС от параметров локального расширения, *СРМ*

Расчёты показывают, что расположение начала и конца расширения, как и ожидалось, оказывают наиболее значимый эффект. При длине отрезка расширения в 110 метров в обе стороны наблюдается фазовый переход, после которого дальнейшее увеличение длины отрезка не приводит к значимому уменьшению очереди.

### 3.4. Резюме

Была построена микроскопическая модель движения АТС на изолированной дороге и на перекрёстке. Эта модель была основана на модели Трайбера и обобщена на случай многополосных дорог и перекрёстков.

Рассматривались программные аспекты построения математических моделей задач микроскопического моделирования.

Для задач микроскопического моделирования были разработаны программы численного моделирования, основанные на обобщении модели разумного водителя Трайбера, для решения нескольких проблем, таких как определение пропускной способности многополосной дороги, Т-образного и обычных перекрёстков, моделирования локального расширения дороги перед светофором и определения эффективной пропускной способности многополосной дороги.

Особенностью задачи был факт, что для получения значимых результатов требовалось значительное количество исполнений основного алгоритма моделирования и, следовательно, значительное количество процессорного времени. Для получения реальных результатов в ограниченное время программа использует параллельные вычислительные потоки, она может использовать инфраструктуру MPI для работы на кластере или подобных гомогенных высокопроизводительных вычислительных системах, а так же она способна использовать гетерогенные многоагентные среды, применяя принцип метакомпьютинга (GRID).

Результаты численных расчётов по оптимизации фаз светофора с достаточной точностью совпали с аналитически полученными результатами.

## Глава 4

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ НА КОЛЬЦЕВОЙ АВТОСТРАДЕ

Одной из популярных задач математического моделирования транспортных потоков является моделирование движения на автостраде, в том числе, кольцевой. Одним из удобств для моделирования кругового движения является его замкнутость, что позволяет рассматривать поведение модели в долгосрочной перспективе [49, 50, 59, 163, 164].

### 4.1. Описание модели кольцевой автострады с односторонним движением.

Обобщим полученную в предыдущих частях данной диссертации модель на случай автострады.

Наиболее простой моделью для рассмотрения будет кольцевая автострада, закрученная в одну сторону. Данное моделирование имеет смысл, так как подобные автострады существуют: например, The Watford Ring Road в городе Уотфорд и B4160 (Redditch Ringway) в городе Реддич в Великобритании, Charleroi Ring в городе Шарлеруа в Бельгии и множество других.

Представим рассматриваемую автостраду в виде, рассмотренном на рисунке 4.1.

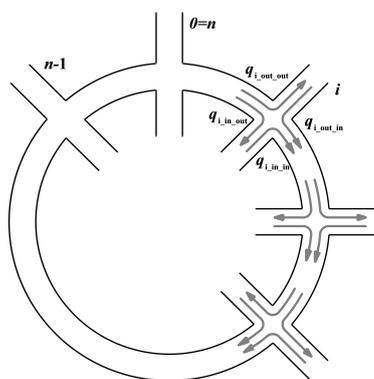


Рис. 4.1. Кольцевая автострада

Здесь под  $q_i$  подразумевается поток трафика от узла с номером  $i$  к узлу с номером  $i + 1$ . Под  $q_{i,out,out}$  — поток исходящего трафика из  $i$ -того узла в направлении от кольца. Под  $q_{i,in,out}$  — поток исходящего трафика из  $i$ -того узла в направлении внутрь кольца. Под  $q_{i,out,in}$  — поток входящего трафика из  $i$ -того узла в направлении от кольца. Под  $q_{i,in,in}$  — поток входящего трафика из  $i$ -того узла в направлении внутрь кольца.

Так как все узлы кольцевой автострады связаны друг с другом, будем считать предопределёнными следующие условия:

- $q_0 = q_n$  — изначальный поток в замкнутой стационарной модели кольцевой автострады.
- $q_{i,out,in}$  и  $q_{i,in,in}$  — входящие трафики на каждом узле.

Для каждого АТС будем задавать *параметр цели*. Это не то, направо, налево, или прямо собирается он повернуть, а узел исхода и направление.

Будем осуществлять моделирование движения для некоторой «матрицы корреспонденций»  $Q$ , имеющей следующий вид

	$0_{in}$	$0_{out}$	...	...	$(n - 1)_{out}$
$0_{in}$	×	$Q[0, in, 0, out]$			
$0_{out}$	$Q[0, out, 0, in]$	×			
⋮			×		
⋮					
$(n - 1)_{out}$					×

Таблица 4.1

Матрица корреспонденций для кольцевой автострады

Для удобства вычислений, будем рассматривать нумерацию ячеек не в виде  $2n$  на  $2n$ , а в виде  $Q[i, in/out, j, in/out]$ , то есть, представим матрицу корреспонденции в виде четырёхмерной матрицы  $n \times 2 \times n \times 2$ . Для численной записи в данной матрице  $in$  будет обозначать 0, а  $out$  будет обозначать 1.

Под  $Q[i, in, j, out]$ , например, будет подразумеваться число АТС в единицу времени, желающих попасть с внутренней дороги  $i$ -го узла на внешнюю

дорогу  $j$ -го узла.  $Q[i, in, i, in]$  и  $Q[i, out, i, out]$  всегда равны 0, во избежании противоречивости модели (маловероятно, что какой-либо водитель захочет заехать на кольцевую автостраду только для того, чтобы сделать по ней круг и вернуться в то же место).  $Q[i, in, i, out]$  и  $Q[i, out, i, in]$ , конечно же, могут быть ненулевыми.

Также зададим  $N_i$  — число полос у соответственных побочных дорог и  $N$  — число полос на кольцевой автостраде. Число полос у въездов будем полагать всегда достаточной для пропуска всех желающих в случае полностью зелёного сигнала, в таком случае можно пользоваться упрощённым следствием из следствия об эффективном числе полос. Автостраду принимается имеющей постоянную ширину, максимальная пропускная способность одной полосы — константа, равная  $S$ . Для моделирования движения на перекрёстках можно не рассматривать движение на свободной дороге, полагая только, что расстояния между узлами хватает для вмещения очереди, образовавшейся на них. Сдвиги светофорных фаз друг относительно друга, необходимые для программирования так называемой *зелёной волны* — это отдельная задача, которую будет рассмотрена позднее.

Для того, чтобы рассмотренная модель имела смысл, поставим начальным данным условие, что поток желающих выехать с каждого направления не превосходит максимальной пропускной способности исходящей дороги данного направления:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^1 Q[i, k, j, l] \leq S \cdot N_{j_i}.$$

В противном случае в долгосрочной перспективе данная автострада полностью замкнётся из-за стоящих АТС и дальнейшее моделирование станет бессмысленным.

Существует 2 основных схемы минимизации задержек. Первый путь — минимизирование задержек на главной магистрали, рассматриваемый, например, Куржанским [49]. Второй — минимизация суммарных задержек. Рассматриваются и сравниваются оба этих метода, как с точки зрения решения задачи оптимизации, так и с точки зрения вычислительной сложности подоб-

ной задачи и возможности её использования в разработке интеллектуальных транспортных систем.

Для односторонней кольцевой магистрали могут быть поставлены следующие задачи оптимизации:

1. Максимизация её пропускной способности.
2. Минимизация суммы задержек АТС со всех направлений, возникающих при её преодолении.
3. Минимизация суммы задержек АТС на главной дороге, возникающих при её преодолении. То есть, для заезда на магистраль, возможно, потребуется больше времени, но зато на самой магистрали «пробок» уже не будет. Естественно, в данной формулировке задача не имеет смысла (потому что естественным решением будет полностью ограничить въезд на магистраль), поэтому данную задачу надо будет решать в ином виде.

#### 4.2. Максимизация пропускной способности кольцевой автострады с односторонним движением.

Рассмотрим  $i$ -тый узел кольцевой автострады.

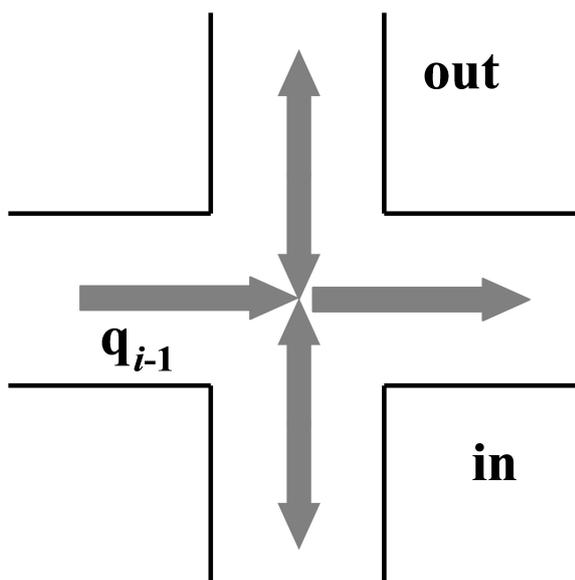


Рис. 4.2.  $i$ -тый узел

Рассчитаем задержки, возникающие в зависимости от светофорных режимов, установившихся на данном перекрёстке, а также зависимость  $q_i$  от  $q_{i-1}$  и светофорного цикла на этом узле.

В «идеальном», несуществующем случае, когда все дороги достаточно широкие для вмещения любых потоков, а все направления на перекрёстке открыты,

$q_{i_{\max}} = \sum_{k=i+2}^{i+n} \sum_{l=0}^1 \sum_{j=i+1}^{k-1} \sum_{u=0}^1 Q[k \bmod n, l, j \bmod n, u]$ , то есть сумме всех потоков, проходящих по данному ребру.

Для регулируемых светофоров на магистрали с односторонним движением обычно используется цикл из 3 светофорных фаз. По ГОСТу (пункты 7.1.2, 7.2.2) [165], из-за невозможности пересечения потоков пешеходов и АТС, а так же из-за невозможности пересечения потоков АТС в одной фазе, меньшим количеством фаз обойтись нельзя, а большее их количество будет нецелесообразным в связи с тем, что в реальной жизни движение АТС начинается не одновременно со сменой фаз.

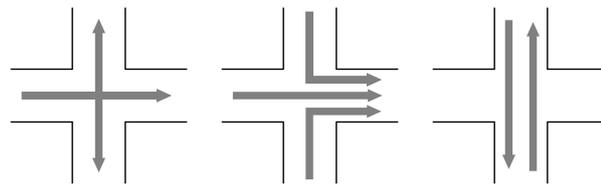


Рис. 4.3. Возможная схема организации движения на узле магистрали с односторонним движением.

В предыдущих частях данной диссертационной работы было рассмотрено движение на изолированном перекрёстке. Обобщим и расширим полученную ранее модель на данный случай.

Вернёмся к понятию эффективного числа полос, рассмотренному ранее. Если будет рассматриваться движение по ранее показанной схеме, то математическое ожидание максимального проходящего потока с главной дороги на  $n$ -той фазе вычисляется по формуле:  $E[S_i^n] = S \cdot N \cdot \frac{k_i^n}{q_{i-1}}$ .

Это же математическое ожидание с побочных дорог:  $E[S_{i,u}^n] = S \cdot N_i \cdot$

$\frac{k_{i,u}^n}{q_{away,i,u}}$ , для  $u = 0$  (внутреннего направления) и для  $u = 1$  (внешнего направления).

Здесь  $q_{away,i,u} = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{l=0}^1 Q[j, l, i, u]$  — поток АТС, желающий выехать на  $i$ -м узле в направлении  $u(in/out)$ .

$k_i^n$  — соответственные интенсивности потоков, которые могут продолжать движение в  $n$ -й фазе с главного направления,  $k_{i,u}^n$  — соответственные интенсивности потоков, которые могут продолжать движение в  $n$ -й фазе с побочного направления  $u(in/out)$ .

Теперь можно рассчитать  $q_i$ .

Далее, для упрощения вычислений, будем рассматривать светофорные фазы, отражённые на рисунке выше.

Положим  $q_{in,i,u}$  за поток, приходящий по второстепенной дороге узла  $i$  с направления  $u$ . Тогда  $q_{in,i,u} = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{l=0}^1 Q[i, u, j, l]$ .

В направлении главной дороги с главной на 1-й фазе проходит следующий максимальный поток:  $E[q_i^1] = S \cdot N \cdot \frac{q_{i-1} - q_{away,i,0} - q_{away,i,1}}{q_{i-1}}$ .

В направлении главной дороги с главной на 2-й фазе проходит следующий максимальный поток:  $E[q_i^2] = S \cdot N \cdot \frac{q_{i-1} - q_{away,i,0} - q_{away,i,1}}{q_{i-1}}$ .

В направлении главной дороги с главной на 3-й фазе проходит следующий максимальный поток:  $E[q_i^3] = 0$ .

В направлении главной дороги с  $u$ -й на 1-й фазе проходит следующий максимальный поток:  $E[q_{i,u}^1] = 0$ .

В направлении главной дороги с  $u$ -й на 2-й фазе проходит следующий максимальный поток:  $E[q_{i,u}^2] = S \cdot N_i \cdot \frac{q_{in,i,u} - Q[i, u, i, (u+1) \bmod 2]}{q_{in,i,u}}$ .

В направлении главной дороги с  $u$ -й на 3-й фазе проходит следующий максимальный поток:  $E[q_{i,u}^3] = 0$ .

Тогда

$$\begin{aligned}
c^i \cdot E[q_i] &= c_1^i \cdot (E[q_i^1] + E[q_{i,0}^1] + E[q_{i,1}^1]) + \\
&c_2^i \cdot (E[q_i^2] + E[q_{i,0}^2] + E[q_{i,1}^2]) + \\
&c_3^i \cdot (E[q_i^3] + E[q_{i,0}^3] + E[q_{i,1}^3]) = \\
&c_1^i \cdot (S \cdot N \cdot \frac{q_{i-1} - q_{away,i,0} - q_{away,i,1}}{q_{i-1}}) + \\
&c_2^i \cdot (S \cdot N \cdot \frac{q_{i-1} - q_{away,i,0} - q_{away,i,1}}{q_{i-1}} + \\
&+ S \cdot N_i \cdot \frac{q_{in,i,0} - Q[i, 0, i, 1]}{q_{in,i,0}} + \\
&+ S \cdot N_i \cdot \frac{q_{in,i,1} - Q[i, 1, i, 0]}{q_{in,i,1}}) + c_3^i \cdot 0
\end{aligned}$$

Таким образом, получается рекуррентное соотношение, позволяющее от  $i$ -го узла перейти к  $i + 1$ -му, что позволяет замкнуть модель.

Выразим  $q_i$  через матрицу  $Q$  и изначальный поток  $q_0$ .

Вообще говоря, потоки  $q_i$  не являются в общем виде Пуассоновскими из-за неодородности, возникающей при пересечении управляемых перекрёстков, но, так как решается задача высокой загрузки, то этим можно пренебречь. Также предполагается, что всюду на данной автостраде есть ненулевые очереди, в противном случае, установившиеся потоки были бы не максимальными и это привело бы немного к другой постановке задачи.

Таким образом,

$$\begin{aligned}
c^i \cdot E[q_i] &= (c_1^i + c_2^i) \cdot (S \cdot N \cdot \frac{q_{i-1} - \sum_{u=0}^1 q_{away,i,u}}{q_{i-1}}) + \\
&+ c_2^i \cdot (S \cdot N_i \cdot \frac{q_{in,i,0} - Q[i, 0, i, 1]}{q_{in,i,0}} + S \cdot N_i \cdot \frac{q_{in,i,1} - Q[i, 1, i, 0]}{q_{in,i,1}}).
\end{aligned}$$

Введём следующие упрощающие функции, зависящие только от постоян-

ной матрицы  $Q$  и постоянных  $N_i$  и  $S$ :

$$\begin{aligned} Into(i) &= (S \cdot N_i \cdot \frac{q_{in,i,0} - Q[i, 0, i, 1]}{q_{in,i,0}} + S \cdot N_i \cdot \frac{q_{in,i,1} - Q[i, 1, i, 0]}{q_{in,i,1}}); \\ Away(i) &= S \cdot N \cdot \sum_{u=0}^1 q_{away,i,u}. \end{aligned}$$

Тогда

$$c^i \cdot E[q_i] = (c_1^i + c_2^i) \cdot (S \cdot N - \frac{Away(i)}{q_{i-1}}) + c_2^i \cdot Into(i)$$

В принципе, для расчётов численного моделирования данной формулы достаточно. Аналитический вид для данных выражений в общем виде получить не представляется возможным из-за возможности различной работы светофорных циклов на различных узлах.

Для частного случая, например, для случая полной симметрии, когда матрица корреспонденций состоит из одинаковых чисел, все  $N_i$  равны и установлен единый светофорный режим:

$$\text{Тогда } Into(i) = const = Into; \quad Away(i) = const = Away.$$

В случае симметрии для установления стационарного режима необходимо соблюдение условия  $q_i = q_{i-1}$ , что достигается при:

$$q^* = \frac{c_1+c_2}{c} \cdot (SN - \frac{Away}{q^*}) + \frac{c_2}{c} \cdot Into.$$

Таким образом, поток в стационарном состоянии устремляется к

$$\begin{aligned} D(c_1/c, c_2/c) &= (\frac{c_1+c_2}{c} SN + \frac{c_2}{c} \cdot Into)^2 - 4 \frac{c_1+c_2}{c} \cdot Away, \\ q^* &= \frac{1}{2} (\frac{c_1+c_2}{c} SN + \frac{c_2}{c} \cdot Into \pm \sqrt{D(c_1/c, c_2/c)}). \end{aligned}$$

Видно, что при одних и тех же длинах светофорного цикла существует 2 равновесных потока. Одна из целей, возникающих при моделировании подобного движения — чтобы установился больший из этих равновесных потоков.

Для данной задачи необходимо максимизировать  $q$  в зависимости от  $c_1/c$  и  $c_2/c$ . Этим будет достигнута максимальная пропускной способности кольцевой автострады в стационарном случае.

Сделаем замены для упрощения читаемости текста:  $c_1/c = x_1$  и  $c_2/c = x_2$ ,  $Away = A$ ,  $Into = I$ .

Нам надо найти максимум  $q^*$  в следующем выражении:

$$q^* = (x_1 + x_2) \cdot (SN - \frac{Away}{q^*}) + x_2 \cdot Into.$$

Тогда

$$2q^*(x_1, x_2) = ((x_1 + x_2)SN + x_2I) + \sqrt{((x_1 + x_2)SN + x_2I)^2 - 4(x_1 + x_2)A}$$

на треугольнике  $x_1 + x_2 \leq 1$ ;  $x_1 \geq 0$ ;  $x_2 \geq 0$ .

Найдя частные производные и попытавшись решить данную задачу максимизации, получим, что в общем виде данная задача не имеет решения, а значит, при решении данной задачи целесообразны, скорее всего, только численные методы.

Пойдём другим путём. На самом деле, достаточно очевидно, что максимальный поток установится в ситуации, когда  $c_3 = 0$ . Это следует из того, что на третьей фазе поток АТС по магистрали полностью перекрыт. Но в этом варианте сквозной проезд АТС через кольцевую автостраду перекрыт и на побочных дорогах наступят очереди бесконечной длины, которые, опять же, перекроют дорогу желающим повернуть на автостраду с побочных дорог, что в долгосрочной перспективе сильно уменьшит и устремит к 0 поток АТС по главной дороге по свойству о равновесной максимальной пропускной способности на управляемом перекрёстке.

Если положить, что  $c_3 = const$ , то при замене  $S \cdot N \cdot (x_1 + x_2)$  на  $M$ , задача сведётся к задаче максимизации

$$2q^*(x_2) = (M + x_2I) + \sqrt{(M + x_2I)^2 - 4x_2A}$$

на интервале  $x \in (0; 1 - \frac{c_3}{c})$ .

Сделаем замену  $M + x_2 I = t$ :

$$2q^* = t + \sqrt{t^2 - 4A \cdot (t - M)/I}$$

Временно примем, что  $4A/I = K$ :

$$2q^* = t + \sqrt{t^2 - K \cdot (t - M)}$$

Найдём максимум данной функции одной переменной:

$$\frac{2dq}{dt} = 1 + \frac{2t - K}{2\sqrt{t^2 - K \cdot (t - M)}} = 0,$$

$$2\sqrt{t^2 - K \cdot (t - M)} = K - 2t,$$

откуда, возведя обе части в квадрат и сократив подобные слагаемые, получим  $4KM = K^2$ , то есть, что данная функция монотонна. Отсюда получается, что, несмотря на то, что несмотря на наложенные ограничения на длительность третьей фазы, функция всё равно себя ведёт достаточно предсказуемо — устремляется к максимуму на максимальной длине второй фазы. Но, при таком случае, АТС, которые хотят свернуть на  $i$ -х узлах, не смогут этого сделать, что приведёт к увеличению очереди из АТС и, опять же, по следствию об равновесной максимальной пропускной способности на управляемом перекрёстке, движение на перекрёстке будет заблокировано.

Отсюда получается, что максимизация пропускной способности кольцевой автострады имеет смысл только в виде максимизации входящих и исходящих потоков, так как иначе данная задача превращается в задачу «запустить как можно больше АТС на автостраду и пусть они создают большой псевдоэффективный поток на ней», что иногда происходит и в реальной жизни (в рамках того, что поток АТС по трассе является огромным, но представляет на самом деле из себя огромную пробку).

### 4.3. Задача минимизации суммарных задержек АТС, возникающих при преодолении односторонней кольцевой автострады.

Рассмотрим вторую задачу оптимизации движения по кольцевой магистрали.

Перейдём к расчёту задержек, возникающих при пересечении  $i$ -го узла. Рассчитаем максимальные проходящие потоки с каждого направления для каждой фазы.

С направления главной дороги на 1-й фазе:  $E[S_i^1] = S \cdot N$ .

С направления главной дороги на 2-й фазе:

$$E[S_i^2] = S \cdot N \cdot \frac{q_{i-1} - q_{away,i,0} - q_{away,i,1}}{q_{i-1}}.$$

С направления главной дороги на 3-й фазе:  $E[S_i^2] = 0$ .

С направления  $u$ -й дороги на 1-й фазе:  $E[S_{i,u}^1] = 0$ .

С направления  $u$ -й дороги на 2-й фазе:

$$E[S_{i,u}^2] = S \cdot N_i \cdot \frac{q_{in,i,u} - Q[i, u, i, (u + 1) \bmod 2]}{q_{in,i,u}}.$$

С направления  $u$ -й дороги на 3-й фазе:

$$E[S_{i,u}^3] = S \cdot N_i \cdot \frac{Q[i, u, i, (u + 1) \bmod 2]}{q_{in,i,u}}.$$

Аналогично предыдущим частям, введём так называемые «избыточные потоки» с каждого направления для каждой фазы:

$$P_i^n = \max(q_{i-1} - E[S_i^n], 0),$$

$$P_{i,u}^n = \max(q_{i,u} - E[S_{i,u}^n], 0).$$

Подставив найденные значения, а также рекуррентно получив  $q_{i-1}$ , получается зависимость  $P$  от  $Q$  и  $q_0$ .

Из предыдущих частей данной работы,

$$E[W] = c\Omega_0 + \frac{P_1c_1^2}{2} + \frac{P_2c_2^2}{2} + c_2P_1c_1 + \frac{P_3c_3^2}{2} + c_3(P_1c_1 + P_2c_2) + \frac{P_4c_4^2}{2} + c_4(P_1c_1 + P_2c_2 + P_3c_3) + c/2.$$

В терминологии данной части и для описанного выше светофорного режима, задержка, возникающая при пересечении  $i$ -го узла АТС, находящимися на магистрали, равна:

$$E[W_i] = c^i\Omega_{0_i} + \frac{P_i^1c_1^2}{2} + \frac{P_i^2(c_2^i)^2}{2} + c_2^iP_i^1c_1^i + \frac{P_i^3(c_3^i)^2}{2} + c_3^i(P_i^1c_1^i + P_i^2c_2^i)$$

Рассмотрим задачу минимизации всех задержек по всем направлениям кольцевой магистрали с односторонним движением.

Суммарная задержка, возникающая при пересечении  $i$ -го узла с направления  $u$ , равна:

$$E[W_{i,u}] = c^i\Omega_{0_i,u} + \frac{P_{i,u}^1(c_1^i)^2}{2} + \frac{P_{i,u}^2(c_2^i)^2}{2} + c_2^iP_{i,u}^1c_1^i + \frac{P_{i,u}^3(c_3^i)^2}{2} + c_3^i(P_{i,u}^1c_1^i + P_{i,u}^2c_2^i).$$

Для улучшения читаемости дальнейших формул, аналогично предыдущим частям, введём следующие сокращения, обозначающие суммы *избыточных потоков* с направлений узла  $i$  на каждом фазах, а также суммарную начальную очередь вначале светофорного цикла:

$$\begin{aligned} \Omega_{sum0_i} &= \Omega_{0_i} + \Omega_{0_i,0} + \Omega_{0_i,1}, \\ P_{sum1_i} &= P_i^1 + P_{i,0}^1 + P_{i,1}^1, \\ P_{sum2_i} &= P_i^2 + P_{i,0}^2 + P_{i,1}^2, \\ P_{sum3_i} &= P_i^3 + P_{i,0}^3 + P_{i,1}^3. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Тогда

$$E[W_{sum}^i] = c\Omega_{sum0_i} + \frac{P_{sum1_i}(c_1^i)^2}{2} + \frac{P_{sum2_i}(c_2^i)^2}{2} + c_2^i P_{sum1_i} c_1^i + \frac{P_{sum3_i}(c_3^i)^2}{2} + c_3(P_{sum1_i} c_1^i + P_{sum2_i} c_2^i). \quad (4.2)$$

Если же требуется найти сумму задержек по всем направлениям по всем узлам, важно будет учесть, что «избыточные потоки» для данной ситуации зависят от потоков по главным дорогам, зависящих от сигнального цикла, а также, что, в отличие от задачи об изолированном перекрёстке, изначальные очереди в общем виде зависят от ранее лежащих узлов, а, значит, и от сигнального цикла.

Решение задачи оптимизации как в общем виде, так и в частных случаях, аналитически не целесообразно. Была написана компьютерная программа, которая решает данную задачу.

#### 4.4. Программная реализация методов: моделирование движения на кольцевой автостраде

Вторая группа реализованных программ реализует математические модели, рассмотренные в разделе 4.

Программная модель движения на кольцевой дороге основана на формулах (4.1)-(4.2) и предназначена для определения оптимальных фаз светофоров, расположенных на кольцевой дороге.

Программа имеет два режима работы:

1. нахождения оптимального решения в предположении, что все светофоры на кольцевой дороге имеют одинаковое распределение фаз, называемого в дальнейшем режим *Optim1*,
2. нахождения оптимального решения в предположении, что для каждого из светофоров определяются собственные распределения фаз. Этот режим называется *Optim2*.

Входными данными программы являются значения коэффициентов  $\Omega_{i,j}$ , где  $i \in \{1, \dots, N\}$  и  $j \in \{In, Out\}$ , а так же коэффициентов  $Q_{i,j,k,l}$ , где  $i, k \in 1, \dots, N$ ;  $j, l \in \{in, out\}$  и коэффициентов  $q_{0i}$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ .

Первый режим работы заключается в нахождении вектора коэффициентов  $(c_1, c_2, c_3)$ , связанных условием  $c_1 + c_2 + c_3 = 1$ , при заданных значениях коэффициентов  $\Omega_{i,j}$ ,  $Q_{i,j,k,l}$  и  $q_{0i}$ , который минимизирует функцию задержек (4.2). Эта задача решается методом расчёта по сетке возможных значений  $c_1, c_2, c_3$  с заданным шагом дискретизации.

Второй режим работы заключается в определении набора векторов  $(c_{1,i}, c_{2,i}, c_{3,i}, i \in \{1, \dots, N\})$  при тех же исходных данных, минимизирующего функцию задержек (4.2). Данная задача есть задача оптимизации функции с  $2 \cdot N$  переменными (переменная  $c_{3,i}$  связана с остальными переменными выражением  $c_{3,i} = 1 - c_{1,i} - c_{2,i}$ ).

Второй режим работы имеет дополнительный подрежим метакомпьютинга, при котором все вычисления значений функции (4.2) вычисляются в групповом режиме на метаклиентах. В этом случае один из вычислительных узлов исполняет роль метасервера, который реализует сам алгоритм дифференциальной эволюции, а остальные — метаклиентов, вычисляющих значения целевой функции.

Данный метод оптимизации хорошо подходит для задач многомерной нелинейной оптимизации с большим количеством параметров и, обычно, даёт приемлемое решение. На роль метода оптимизации претендовал метод сопряжённых градиентов, однако, при таком большом количестве переменных, начинала играть роль дискретизация, связанная с представлением вещественных чисел в вычислительных системах, в результате которой целевая функция оказывалась зашумленной ошибками дискретизации и вычисление частных производных по направлениям давало значительную погрешность. Вторая причина выбора данного метода заключалась в том, что этот метод хорошо распараллеливается по вычислительным узлам, что для решения

данной задачи оказалось важным.

Основным классом данной программы является класс **Model**, включающий в себя все вводимые исходные параметры и включающий в себя метод **solve**, входными параметрами которого являются вектор пробные значения коэффициентов  $(c_{1,i}, c_{2,i}, c_{3,i}, i \in \{1, \dots, N\})$ , а на выходе — суммарное значение задержек.

В данной программе также применялись классы **Config**, **GridClient**, **GraphicsClient**, **GridServer**, описанные в предыдущем разделе.

#### 4.5. Понятие *зелёной волны* для кольцевой автострады с односторонним движением.

Достаточно давно в крупных городах, в основном, Европы, Японии и США [166, 167] для управления транспортными потоками применяется так называемая *зелёная волна*. Её суть — в обеспечении безостановочного движения транспорта за счёт синхронного включения зелёного света на перекрёстках. Время смены сигналов светофоров может как быть заранее запланированным в связи со статистическими данными по движению на данной дороге в определённое время, так и включаться по специальным датчикам, в том числе, например, для проезда машин скорой помощи. Также одна из весьма обсуждаемых тем — создание *зелёной волны*, по крайней мере, для некоторых маршрутов общественного транспорта.

Понятие *зелёной волны* в городе было введено в США в 1920-х годах [168].

В СССР еще в довоенные годы зелёная волна была экспериментально проверена на одной из улиц Москвы, а в 1955 г. в режим зелёной волны были включены пять перекрестков на Садовом кольце [169].

При корректной работе зелёной волны, АТС, движущиеся в потоке в некотором малом коридоре скоростей, будут, подходя к последующим перекрёсткам, попадать на зелёный свет. Это позволяет не только ускорить движение

по магистрали, но и уменьшить выбросы выхлопных газов, что также достаточно актуально в условиях экологии крупных городов.

К сожалению, в реалиях современных мегаполисов неудачно реализованная зелёная волна может не только не улучшить, но и ухудшить ситуацию. Рассмотрим ситуацию, когда, например, из-за небольшой разницы в скоростях часть транспортного потока не успевает проехать на зелёный и вынужденно останавливается на перекрёстке. С течением времени количество «опоздавших» машин увеличивается, и в результате движение затрудняется. Рано или поздно это может вылиться, и выливается, в серьёзную пробку. Подробный анализ ситуаций срыва зелёной волны был рассмотрен, например, в [170].

С точки зрения теории трёх фаз транспортного потока Кёрнера, описанной ранее, срыв зелёной волны происходит в результате одного или нескольких переходов между фазами движения. К примеру, это может случиться из-за нарушения расчётного скоростного режима транспортных средств, вызванного, например, въездом автомобилей со второстепенной дороги на главную. Кёрнер полагает, что дальнейший анализ изменений скорости движущихся автомобилей, а также изучение пространственно-временных структур в транспортном потоке поможет в установлении причин срыва зелёной волны. А зная их, теоретически можно будет разработать более эффективные алгоритмы управления движущимся потоком на магистралях.

Механизмы расчёта простой зелёной волны весьма просты и по сути учитывают только расчётное время движения между узлами магистрали. Гораздо труднее, во-первых, рассчитать зелёную волну, более устойчивую к небольшим изменениям, а, во-вторых, рассчитать поведение зелёных волн на большом графе и их устойчивое взаимодействие.

Зачастую, введение зелёной волны на одной из улиц города может ухудшить ситуацию на соседних с ней (и далее, по *цепной реакции*). Поэтому при расчётах о целесообразности введения зелёной волны в идеале должна решаться расширенная задача оптимизации в пределах хотя бы одного

района. Но это является в общем виде NP-сложной задачей, к тому же, требующей полноты всех связанных с передвижениями АТС данных. Наша цель — упростить решение данной задачи, по крайней мере, для частных случаев, и сравнить решение подобных задач с решением задачи минимизации общих задержек, возникающих при преодолении рассматриваемой магистрали.

Будем рассматривать кольцевую магистраль с односторонним движением, описанную ранее.

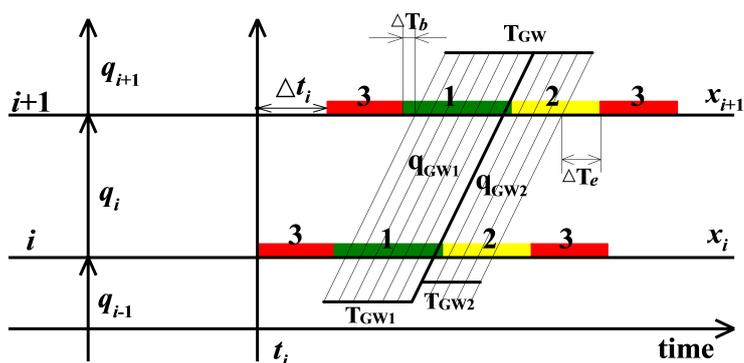


Рис. 4.4. Зелёная волна

Для зелёной волны должно выполняться, что АТС, проходящие  $i$ -й узел со скоростью  $V_{free}$  на временном промежутке  $t_i + c_3 + \Delta T_b \leq t \leq t_i + c_3 + \Delta T_b + T_{GW}$ , должны попасть в промежуток зелёной волны следующего перекрёстка.

$\Delta t_i = \frac{X_{i+1} - X_i}{V_{free}}$  — сдвиг во времени между началами светофорных циклов.

$V_{free}$  — скорость движения зелёной волны, задаваемая указанием скоростного режима на магистрали.

Естественно, чем меньше зазоры времён  $\Delta T_b$  и  $\Delta T_e$ , тем дольше длится зелёная волна и тем больше АТС в неё вовлечены. Но, так как существуют ещё и АТС, поворачивающие на/с автостреды, эти временные зазоры необходимы, иначе неизбежен крах зелёной волны.

В реальности, из-за вероятностной природы движения, АТС не могут на протяжении всего времени движения поддерживать скорость  $V_{free}$ .

Стабильность зелёной волны прямо связана с входящими и исходящими

потоками на узлах.

$$Q_{in,i,0} + Q_{in,i,1} = Q_{in,i},$$

$$Q_{away,i,0} + Q_{away,i,1} = Q_{away,i} < Q_{GW}.$$

Пусть  $q_i^* = \frac{1}{c} \int_0^c q_i(t) dt$  — среднее прибытие к узлу  $i$  за весь светофорный цикл.

Существует  $C_{\min}$ , для которой при  $q_i^* < C_{\min}$  зелёная волна стабильна.

При  $C_{\min} \leq q_i^* < C_{\max}$  в какой-то момент наступает разрушение зелёной волны, а при  $C_{\max} \leq q_i^*$  зелёная волна даже не может возникнуть.

Задача, поставленная автором — рассчитать  $C_{\min}$ , гарантирующую успешную работу зелёной волны.

Один из факторов, который может минимизировать вероятность краха зелёной волны - сделать длительности 1 и 2 фаз пропорциональными входящим и исходящим потокам соответственно для того, чтобы установить стационарный поток на кольце и минимизировать вероятность краха зелёной волны.

Для перекрёстков данного типа, фаза зелёной волны разбивается на две:  $T_{GW1}$  и  $T_{GW2}$ , на которых соответственно меняется максимальный проходящий поток.

Для рассматриваемых светофорных режимов,

$$q_{GW1} = S \cdot N, \quad q_{GW2} = S_{eff}^i \cdot N, \quad S_{eff}^i = S \cdot \frac{q_i - q_{out,i+1}}{q_i}$$

Рассчитаем устойчивость зелёной волны в стационарном состоянии.

$c_1^i/c_2^i = q_{in,i}/q_{out,i}$ , но, так как зелёная волна будет стабильно работать только при едином светофорном режиме, а входящие и исходящие потоки в сумме равны друг другу (АТС хотят преодолеть кольцевую магистраль и уехать), то, следовательно, выгодно положить, что  $c_1^i = c_1 = c_2 = c_2^i = c_y$ .

В таком случае,

$$\begin{aligned} \max(E[q_i \cdot c]) &= \max(E[q_{GW} \cdot (c_1 + c_2)]) = \\ &= \max(q_{GW1} \cdot c_1 + q_{GW2} \cdot c_2) = \\ &= cy \cdot S \cdot N \cdot \left(1 + 1 - \frac{q_{out,i+1}}{q_i}\right). \end{aligned}$$

Очевидно, что стационарное состояние будет возникать только при условии, что исходящие потоки на узлах примерно совпадают. В этом случае,  $q_{out,i} = q_{out}$ .

В таком случае,

$$c \cdot \max(E[q_i]) = cy \cdot S \cdot N \cdot \left(2 - \frac{q_{out}}{q_i}\right)$$

Если требуется найти решение задачи в случае максимального потока, данное выражение не требует модификации.

Рассмотрим случай, когда поток не является максимальным. Тогда

$$q_{GW1} = q_i, \quad q_{GW2} = f(S_{eff}^i \cdot N, q_i) = \min(S_{eff}^i \cdot N, q_i - q_{out,i+1}).$$

Данная функция обозначает, что для малых потоков и при малой доле поворачивающих АТС, поток АТС на второй фазе светофора, продолжающий движение вперёд, равен  $q_i - q_{out,i+1}$ . При большом потоке, поток устанавливается равным  $S_{eff}^i \cdot N$ . Естественно, подразумевается наличие полной симметрии входящих и исходящих потоков, в таком случае «поворотные» полосы заняты то поворачивающими, то прибывающими АТС поочередно.

По сути, поток самой зелёной волны, проходящей по магистрали, при условии симметрии потоков, равен

$$q_{GW} = \min(S_{eff}^i \cdot N, q_i - q_{out,i+1}).$$

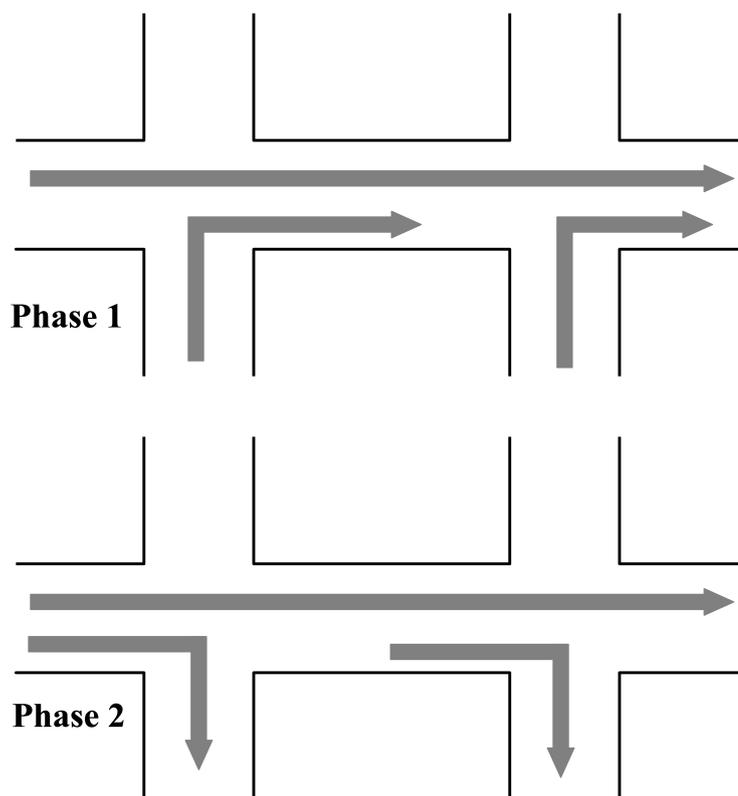


Рис. 4.5. Повороты на магистрали

Будем рассматривать три случая, описанные ниже:

1. Низкая загрузка
2. Высокая загрузка
3. Средняя загрузка

Наибольший интерес для нас представляют случаи высокой и средней загрузки, а также возможность исследования возникающих зелёных волн на устойчивость.

#### 4.5.1. Исследование и расчёт Зелёной волны при низкой загрузке

Так как  $q_{GW1} = q_i$ ,  $q_{GW2} = \min(S_{eff}^i \cdot N, q_i)$ , то, при низкой загрузке и малой доле поворачивающих АТС,  $q_{GW2} = q_i - q_{out,i+1} < q_i$ , то есть, по сути, сворачивающие АТС занимают отдельную полосу, что не мешает АТС с параметром цели «прямо». Естественно, данное соотношение верно только

для тех случаев, когда главная дорога имеет достаточно большое количество полос. Будем называть такое состояние случаем «низкой загрузки».

Таким образом, в случае «низкой загрузки», механизм образования зелёной волны не отличается от случая двухфазного (трёхфазного) светофора с режимами «красный-зелёный» («красный-жёлтый-зелёный»), описанного и рассмотренного в множестве источников [170–172, 172].

Для конкретной автострады, описанной в рамках данной модели, обобщим и рассчитаем параметры зелёной волны.

$C_{min} = C_{cl} = q_{sat} \cdot T_G^{eff} / c$ , где  $q_{sat}$  — насыщенный поток, возникающий при движении без ограничений с установившейся скоростью  $V_{free}$ ,  $T_G^{eff}$  — эффективное время зелёной фазы, то есть время, в течение которого возможно свободное движение АТС.

В таком случае,  $q_i^* = \frac{1}{c} \int_0^c q_i(t) dt < \frac{2cy}{c} q_i$ ,

$C_{min} = q_{sat} \cdot 2cy/c \geq \frac{2cy}{c} q_i$ , а значит,  $q_{sat} \geq q_i$ . Таким образом, по исследованиям из [170], данная зелёная волна будет устойчивой для скоростных режимов, для которых насыщенный поток будет превышать поток АТС по автостраде.

#### 4.5.2. Исследование и расчёт Зелёной волны при высокой загрузке

Рассмотрим случай, когда проходящие потоки приближены к максимально возможным по данной магистрали (обычно, на свободной дороге это составляет около 1600-1800 АТС/час).

Как уже было получено,

$$c \cdot \max(E[q_i]) = cy \cdot S \cdot N \cdot \left(2 - \frac{q_{out}}{q_i}\right).$$

В данном случае, плотность потока распределена очень неравномерно и сконцентрирована исключительно по 1 и 2 светофорной фазам.

Из-за того, что движение АТС имеет вероятностную природу, малые отклонения в скорости при таких потоках спровоцируют следующее:

Для стабильной работы зелёной волны должно выполняться, что:

$$C_{min} = q_{sat} \cdot 2cy/c \geq \frac{cy}{c} S \cdot N \cdot (2 - \frac{q_{out}}{q_i}),$$

$$q_{sat} \cdot 2 \geq S \cdot N \cdot (2 - \frac{q_{out}}{q_i}).$$

Если учесть, что поток на автостраде в таком случае устанавливается равным  $q_i = S \cdot N$ , то,

$$q_{sat} \cdot 2 \geq S \cdot N \cdot (2 - \frac{q_{out}}{S \cdot N}),$$

то есть, чем больше исходящие потоки на узлах (чем «короче» зелёная волна), тем менее вероятен крах зелёной волны. Скоростные режимы на данном насыщенном потоке зависят от исходящих и проходящих потоков на кольце.

К сожалению, так как зелёная волна на насыщенном потоке представляет из себя плотный поток, и, с точки зрения теории трёх фаз Кёрнера, любое вероятностное отклонение по скорости или входящему/исходящему потоку, спровоцирует  $S \rightarrow J$  переход. Соответственно, создание зелёной волны на перенасыщенных магистралях не представляется возможным.

Единственный возможный случай для стабильной работы зелёной волны в данном случае — ограничение входящих потоков на магистраль, спровоцированное, например, локальным уменьшением числа полос на входящих дорогах, или же светофорным режимом.

Данный случай будет рассмотрен в следующем разделе.

#### 4.5.3. Исследование и расчёт Зелёной волны при средней загрузке

Назовём «средней загрузкой» наиболее интересующий нас случай — когда потоки не настолько велики, чтобы это вызвало крах зелёной волны, но когда входящие и исходящие потоки достаточно велики, чтобы их требовалось принимать во внимание.

Также, например, ситуация «средней загрузки» возникает, когда искусственным образом уменьшаются входящие потоки на узлах.

Наша цель — узнать, какой может быть максимальный входящий поток, чтобы зелёная волна была устойчивой к малым колебаниям потоков и скоростей.

Пусть поток по автостраде установился равным  $q$ , входящие потоки равны  $q_{in}$ .

В ситуации, когда для поворачивающих АТС выделены отдельные полосы и расстояние между узлами достаточно велико, чтобы все желающие АТС могли успеть перестроиться, ситуация стабильна для следующих потоков:

$$q_{in} < S_{sat} \cdot N_{turn}, \quad q < S_{sat} \cdot (N - N_{turn}).$$

В данном случае важно, чтобы исходящие потоки были не меньше, чем входящие. Для случая полной симметрии, это, конечно, работает. Но в реальности, в условиях несимметричности потоков, необходимо выделить для поворачивающих АТС количество полос, соответствующее максимальному исходящему потоку в условиях ограничения входящего потока. Соответственно, это сужает число полос, на которых может работать зелёная волна, как и уменьшает общую пропускную способность автострады.

Конкретные коэффициенты сужений и целевых полос могут быть рассчитаны только с учётом реальных данных, так как случай полной симметрии несёт чисто научный, а не практический, интерес.

#### 4.6. Резюме

В данной главе было рассмотрено движение АТС на кольцевой автостраде, закрученной в одну сторону. В зависимости от матрицы корреспонденции, описывающей распределение потоков по данной автостраде, а также светофорных режимов на узлах магистрали, были рассчитаны потоки проходящих

АТС.

Была разработана компьютерная программа, отображающая моделируемую ситуацию, а также различными методами были вычислены оптимальные длительности фаз, позволяющие минимизировать общие задержки, возникающие при преодолении данной автострады.

Также было рассмотрено такое понятие, как зелёная волна в ситуациях высокой, средней и низкой загрузки. Были предложены методы моделирования и расчёта оптимальной длительности фаз и скоростных режимов для автострады.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной диссертационной работе исследовались аспекты математического моделирования транспортных потоков на микроуровне, в основном, в приложении к моделированию ситуаций, возникающих при движении на многополосных магистралях и при пересечении управляемых перекрёстков сложной структуры. В ходе работы получены теоретические, экспериментальные и практические результаты.

Основные результаты работы:

1. Теоретические результаты, включающие анализ и развитие существующих подходов к моделированию транспортных задач и оценка возможности применения механизма методов теории систем массового обслуживания для решения задач определения задержек АТС на управляемом перекрёстке сложной структуры.
2. Впервые построенные оригинальные модели движения АТС на сложных перекрёстках, основанные на методах теории систем массового обслуживания.
3. Разработанная по результатам теоретических исследований оригинальная методология моделирования транспортных потоков на микроуровне, развивающая модель Трайбера и включающая в себя подробное описание движения АТС на многополосных дорогах и управляемых перекрёстках сложной структуры.
4. Алгоритмы численного моделирования, ориентированные на использование в высокопроизводительных вычислительных комплексах.
5. Результаты вычислительных экспериментов по верификации предлагаемых математических моделей, подтверждающие возможность получения оптимальных и устойчивых решений задач управления движением на перекрёстках сложной структуры.

Практическая значимость работы подтверждена на основе прикладных исследований движения на реальных управляемых перекрёстках, разработаны практические рекомендации по использованию предлагаемых в диссертации методик.

Предложенные методы и алгоритмы реализованы в виде программного комплекса BTSSIM, зарегистрированного 24 сентября 2015 года в ФИПС отделение 17.

## Литература

1. Бабичева Т. С. Методы теории массового обслуживания при исследовании и оптимизации движения на управляемых перекрёстках // Труды МФТИ. — 2015. — Т. 7, № 2. — С. 119–130.
2. Бабичева Т. С. Обобщение модели равновесного распределения транспортных потоков Бэкмана на случай учета затрат на преодоление перекрестков / Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук. Часть VII Управление и прикладная математика. — М.-Долгопрудный : Труды 57-й научной конференции МФТИ, 2014.
3. О некоторых задачах математического моделирования транспортных потоков / А. В. Гасников, Ю. В. Дорн, Н. П. Ивкин и др. // Доклады 9-й международной конференции «Интеллектуализация обработки информации». — М. : Торус Пресс, 2012.
4. Обидина Т. С. О возможной реорганизации в строительстве перекрестков на примере г. Королев (МО) / Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук. Часть VII Управление и прикладная математика. — М.-Долгопрудный : Труды 55-й научной конференции МФТИ, 2012. — С. 47–48.
5. Обидина Т. С. Исследование задержек, возникающих при пересечении перекрестка, с точки зрения теории массового обслуживания / Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук. Часть VII Управление и прикладная математика. — М.-Долгопрудный : Труды 56-й научной конференции МФТИ, 2013. — С. 82–83.
6. Обидина Т. С. Применение методов микроскопического моделирования для решения задач о запрете перестроения и перекрёстке / ORM-2013. — М. : VII Московская международная конференция по исследованию операций ORM. Сборник тезисов., 2013. — Октябрь. — С. 210–211.

7. Babicheva T. S. The use of queuing theory at research and optimization of traffic on the signal-controlled road intersections // 3rd International Conference on Information Technology and Quantitative Management. — 2015. — Vol. 55. — P. 469–478.
8. Двухстадийная модель равновесного распределения транспортных потоков / Т. С. Бабичева, А. В. Гасников, А. А. Лагуновская, М. А. Мендель // Труды МФТИ. — 2015. — Vol. 7, no. 3(27). — P. 31–41.
9. Бабичева Т. С., Бабичев С. Л., Осипов В. П. Архитектура и методическое обеспечение модуля имитационного моделирования транспортных процессов в сетевой компьютерной лаборатории // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. — 2015. — № 85. — С. 28. — URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-85>.
10. История городского дорожного строительства. — URL: <http://www.stroitelstvo-new.ru/dorog/istoria.shtml>.
11. Laurence R. The roads of Roman Italy: mobility and cultural change. — Routledge, 1999.
12. Heinz, Werner. Reisewege der Antike. Unterwegs im Römischen Reich. — Stuttgart : Theiss, 2003. — P. 128.
13. Дубелир Г. Д. Городские улицы и мостовые. — Киев, 1912.
14. Заблоцкий Г. А. Методы расчета потоков пассажиров и транспорта в городах. — Стройиздат, 1968.
15. Johannesson S. Highway economics / Highway Res. Board Proc. — Vol. 8. — 1928.
16. Greenshields B. D. / Highway Res. Board Proc. — Vol. 13. — 1933.
17. Иносэ Х., Хамада Т. Управление дорожным движением. — М. : Транспорт, 1983. — С. 248.
18. Adams W. F. Road traffic considered as a random series // J.Inst. Civil Rengrs. — 1936. — Vol. 4. — P. 121–130.

19. Gerlough D. L. The Use of the Poisson Distribution in Hightway Traffic. — Connecticut, 1955.
20. Lighthill M. J., Whitham G. B. On kinematic waves: Ii. theory of traffic flow on long crowded roads / Proc. R. Soc. London, Ser. A. — Vol. 229. — 1955. — P. 281–345.
21. Richards P. I. Shock waves on the highway // Oper. Res. — 1956. — Vol. 4. — P. 42–51.
22. Введение в математическое моделирование транспортных потоков. / Под ред. А. В. Гасников. — М. : МЦНМО, 2012.
23. Введение в математическое моделирование транспортных потоков / А. В. Гасников, С. Л. Кленов, Е. А. Нурминский и др. ; Под ред. А. В. Гасников. 2. — М. : МЦНМО, 2013.
24. Neal H. E. Reaction time // Highway Res. Abstr. — 1946. — Vol. 134. — P. 6–7.
25. Sheffi Y. Urban transportation networks. — New Jersey : Prentice-Hall, 1985. — P. 399.
26. Хейт Ф. Математическая теория транспортных потоков. — Москва : Мир, 1966.
27. Hurst P. H. Errors in Driver Risk-taking / Division of Highway Studies. — Institute for Research, State College, Passadina, 2002.
28. Perchonok K. The measurement of driver errors.
29. Дрю Д. Теория транспортных потоков и управление ими. — М. : «Транспорт», 1972.
30. Hulbert S., Wojcik C. Driving simulator reseach // Highway Res. Board Bull. — 1960. — Vol. 261. — P. 1–13.
31. Швецов В. И. Математическое моделирование транспортных потоков // Автоматика и телемеханика. — 2003. — Т. 11. — С. 3–46.

32. Погребняк Е. Б., И. С. Н. Анализ методов формирования матрицы корреспонденций транспортной сети города // Коммунальное хозяйство городов, Научно-технический сборник. — 2006. — Т. 69.
33. Сухарев А. Г., Тимохов А. В., Фёдоров В. В. Курс методов оптимизации. — М. : Физматлит, 2008. — 368 с.
34. Чалая Е. В. Построение матрицы корреспонденций для транспортной сети г. Владивостока, дипломная работа ДвГУ. — 2009. — URL: <http://www.iep.ru/files/text/diplom/2009/Chalaya.pdf>.
35. Bert E. Dynamic Urban Origin-Destination Matrix Estimation Methodology : Pour l'obtention du grade docteur és sciences / E. Bert ; École polytechnique fédérale de Lausanne. — Suisse, 2009. — P. 192.
36. de Dios Ortúzar J., Willumsen L. G. Modelling transport. — A John Wiley and Sons, Ltd., Publication, 2011. — P. 586.
37. Sanandaji B. M., Varaiya P. Compressive origin-destination estimation. — P. 8. — arXiv:submit/0980599 [cs.SY] 16 May 2014.
38. Вильсон А. Д. Энтропийные методы моделирования сложных систем. — М. : Наука.
39. Digital simulation of freeway merging operation : Rep. ; Executor: D. R. Drew, T. C. Meserolo, J. H. Buhr : 1967.
40. Шеннон Р. Имитационное моделирование систем — искусство и наука. — М. : Мир, 1978.
41. Морозов И. И. Численное исследование транспортных потоков на основе гидродинамических моделей : Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук / И. И. Морозов. — М., 2011. — С. 115.
42. Кисляков В. М., Филиппов В. В., Школяренко И. А. Математическое моделирование и оценка условий движения автомобилей и пешеходов. — М. : Транспорт, 1979. — С. 200.

43. Papageorgiou M., Barnhart C., Laporte G. ITS and Traffic Management // Handbook in OR & MS. — 2007. — Vol. 14.
44. Бекмагамбетов М. М., Кочетков А. В. Анализ современных программных средств транспортного моделирования // Исследования, конструкции, технологии. — 2012. — Т. 6(77). — С. 25–34.
45. VISUM PTV Vision. VISUM 12 Fundamentals. User guide.
46. Гоголь Н. В. Ревизор. — М. : Художественная литература, 1967. — Т. Собрание сочинений в 7-ми томах.
47. Живоглядов В. Г. Методология повышения эффективности управления дорожным движением. Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора технических наук. — 2008.
48. Varaiya P. Max pressure control of a network of signalized intersections // Transportation Research Part C. — 2013. — Vol. 36. — P. 177–195.
49. Kurzhanskiy A. A., Varaiya P. Active traffic management on road networks: a macroscopic approach // Philosophical Transactions of The Royal Society, Part A. — 2010. — Vol. 368. — P. 4607–4626.
50. Maximum pressure controller for stabilizing queues in signalized arterial networks / A. Kouvelas, J. Lioris, S. A. Fayazi, P. Varaiya. — 2013. — P. 9.
51. Muralidharan A., Pedarsani R., Varaiya P. Analysis of ft control. — P. 12.
52. Гасников А., Дорн Ю., Прохоров А., Швецов В. Как бороться с пробками? — 2012.
53. О трехстадийной версии модели стационарной динамики транспортных потоков / А. В. Гасников, Ю. В. Дорн, Ю. Е. Нестеров, С. В. Шпирко // Математическое моделирование. — 2014. — Т. 26, № 6. — С. 34–70.
54. Колесниченко А. В. Конструирование энтропийной транспортной модели на основе статистики Тсаллиса / Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. — 2013. — URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-33>.

55. Analysis of lwr model with fundamental diagram subject to uncertainties :  
Rep. ; Executor: J. Li, Q.-Y. Chen, H. Wang, D. Ni : 2011.
56. Уизем Д. Линейные и нелинейные волны. — М. : Мир, 1977.
57. Payne H. J. Freflo: A macroscopic simulation model for freeway traffic //  
Transportation Research Record. — 1979. — Vol. 722. — P. 68–77.
58. Payne H. J. Models of freeway traffic and control / Simulation Council  
Proc. — Vol. 1. — 1971. — P. 51–61.
59. Garavello M., Piccoli B. Traffic flow on a road network using the aw-rascle  
model // Comm. Partial Differential Equations. — 2006. — Vol. 31, no. 2. —  
P. 243–275.
60. Aw A. ans Rascle M. Resurrection of «second order» models of traffic  
flow? // SIAM J. APPL. MATH. — 1999. — Vol. 60. — P. 916–938.
61. Prigogine I., Andrews F. C. A boltzmann-like approach for traffic flow //  
Opns Res. — 1960. — Vol. 8. — P. 789–797.
62. Breiman L. Point and trajectory processes in one-way traffic flow // Transpn  
Res. — 1969. — Vol. 3. — P. 251–264.
63. Prigogine I., Herman R. Kinetic Theory of Vehicular Traffic. — New York :  
American Elsevier Publishing Co, 1971.
64. Lampis M. On the prigogine theory of traffic flow: Driver's program  
independent of concentration // Meccanica. — 1977. — December. — Vol. 12,  
no. 4. — P. 187–193.
65. Nelson P. Kinetic Theories // Traffic Flow Theory. A State-of-the-Art  
Report. Revised. / Organized by the Committee on Traffic Flow Theory  
and Characteristics (AHB45). — 2001.
66. Paveri-Fontana S. L. On boltzmann-like treatments for traffic flow: A critical  
review of the basic model and an alternative proposal for dilute traffic  
analysis // Transportation Research. — 1975. — Vol. 9. — P. 225–235.

67. Helbing D. Gas-kinetic derivation of Navier-Stokes-like traffic equations. — 1998. — arXiv:cond-mat/9806026 [cond-mat.stat-mech].
68. Alberti E., Belli G. // *Transportation Research*. — 1978. — Vol. 12, no. 33.
69. Nelson P. *Transport theory and statistical physics*. — 1995. — Vol. 24. — P. 383.
70. Четверушкин Б. Н. Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. — М. : МАКС Пресс, 2004.
71. Двумерная макроскопическая модель транспортных потоков / А. Б. Сухинова, М. А. Трапезникова, Б. Н. Четверушкин, Н. Г. Чурбанова // *Математическое Моделирование*. — 2009. — Т. 21, № 2. — С. 118–126.
72. Макро- и микроскопические модели для описания движения автотранспорта на многополосных магистралях / Б. Н. Четверушкин, М. А. Трапезникова, И. Р. Фурманов, Н. Г. Чурбанова // *ТРУДЫ МФТИ*. — 2010. — Т. 2, № 4.
73. Pipes L. A. An operational analysis of traffic dynamics // *Journal of Applied Physics*. — 1953. — Vol. 24. — P. 274–281.
74. Reuschel R. Fahrzeugbewegungen in der kolonne // *Osterreichisches Ingenieur Archiv*. — 1950. — Vol. 4. — P. 193–215.
75. Mason A. D., Woods A. W. Car-following model of multispecies systems of road traffic // *Physical Review E*. — 1997. — Vol. 55, no. 3. — P. 2203.
76. Brackstone M., McDonald M. Car-following: a historical review // *Transportation Research*. — 1999. — Vol. 2, no. Part F. — P. 181–196.
77. Toledo T. Driving behaviour: Models and challenges // *Transport Reviews: A Transnational Transdisciplinary Journal*. — 2007. — Vol. 27, no. 1. — P. 65–84. — DOI: 10.1080/01441640600823940.
78. Gazis D. C., Herman R., Rothery R. W. Nonlinear follow-the-leader models of traffic flow // *Oper. Res.* — 1961. — Vol. 9. — P. 545–567.

79. May A. D. J., Keller H. E. M. Non-integer car-following models // *Highw. Res. Rec.* — 1967. — Vol. 199, no. 19.
80. Helbing D. Traffic and related self-driven many-particle systems // *REVIEWS OF MODERN PHYSICS.* — 2001. — OCTOBER. — Vol. 73.
81. Kühne R. D., Rödiger M. B. Macroscopic simulation model for freeway traffic with jams and stop-start waves / Ed. by B. L. Nelson, W. D. Kelton, G. M. Clark Clark ; Proceedings of the 1991 Winter Simulation Conference (Society for Computer Simulation International. — Phoenix, AZ, 1991. — P. 762–770.
82. Helbing D. Characteristic speeds faster than the average vehicle speed do not constitute a theoretical inconsistency of macroscopic traffic models. — arXiv:0805.3402 [physics.soc-ph].
83. Yang Q., Koutsopoulos H. N. A microscopic traffic simulator for evaluation of dynamic traffic management systems // *Transp. Res.* — 1996. — Vol. 4C(3). — P. 113–129.
84. Traffic simulation with mitsimlab / M. Ben-Akiva, H. N. Koutsopoulos, T. Toledo et al. // *Fundamentals of Traffic Simulation, International Series in Operations Research Management Science.* — 2010. — Vol. 145. — P. 233–268.
85. Treiber M., Hennecke A., Helbing D. Congested traffic states in empirical observations and microscopic simulations // *PHYSICAL REVIEW E.* — 2000. — AUGUST. — Vol. 62, no. 2. — P. 1805–1824.
86. Gipps P. G. A behavioural car-following model for computer simulation // *Transportation Research II.* — 1981. — Vol. 15B. — P. 105–111.
87. Benekohal R. F., Treiterer J. Carsim: Car-following model for simulation of traffic in normal and stop-and-go conditions // *Transportation research record.* — 1988. — Vol. 1194.

88. Benekohal R. F., El-Zohairy Y. M. Multi-regime arrival rate uniform delay models for signalized intersections // *Transportation Research Part A: Policy and Practice*. — 2001. — Vol. 35, no. 7. — P. 625–667.
89. A generic class of first order node models for dynamic macroscopic simulation of traffic flows / C. M. J. Tampère, R. Corthout, D. Cattrysse, I. H. Immers // *Transportation Research Part B*. — 2011. — Vol. 45. — P. 289–309.
90. del Castillo J. M. Propagation of perturbations in dense traffic flow: a model and its implications // *Transportation Research Part B: Methodological*. — 2001. — Vol. 35, no. 4. — P. 367–389.
91. Newell G. F. Nonlinear effects in the dynamics of car following // *Operations research*. — 1961. — Vol. 9, no. 2. — P. 209–229.
92. Bando M. e. a. Dynamical model of traffic congestion and numerical simulation // *Physical Review E*. — 1995. — Vol. 51, no. 2. — P. 1035.
93. Helbing D., Tilch B. Generalized force model of traffic dynamics // *Physical Review E*. — 1998. — Vol. 58, no. 1. — P. 133.
94. Traffic simulation with artist / W. Krautter, T. Bleile, D. Manstetten, T. Schwab / *ITSC'97*. — IEEE Conference, 1997. — P. 472–477.
95. Manstetten D., Krautter W., Schwab T. Traffic :simulation supporting urban control system development / *Proc. 4th World Congress on Intelligent Transport Systems*. — Berlin, 1997. — Oct.
96. Krauss S., Wagner P., Gawron C. Continuous limit of the nagel-schreckenberg model // *Physical Review E*. — 1996. — Vol. 54, no. 4. — P. 3707.
97. Krauss S., Wagner P., Gawron C. Metastable states in a microscopic model of traffic flow // *Physical Review E*. — 1997. — Vol. 55, no. 5. — P. 5597.
98. Helbing D. *Verkehrsdynamik*. — Springer-Verlag, 1997.

99. Necoara B., de Schutter, J. H. Structural properties of helbing's traffic flow model // *Transportation Research Record*. — 2004. — Vol. 1883. — P. 21–30.
100. Treiber M., Hennecke A., Helbing D. Derivation, properties, and simulation of a gas-kinetic-based, nonlocal traffic model // *Physical Review E*. — 1999. — Vol. 59, no. 1. — P. 239.
101. Helbing D., Treiber M. Numerical simulation of macroscopic traffic equations // *Computing in Science & Engineering*. — 1999. — Vol. 1, no. 5. — P. 89–98.
102. Micro-and macro-simulation of freeway traffic / D. Helbing, A. Hennecke, V. Shvetsov, M. Treiber // *Mathematical and computer modeling*. — 2002. — Vol. 35, no. 5. — P. 517–547.
103. Kesting A., Treiber M., Helbing D. General lane-changing model mobil for car-following models // *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board*. — 2007. — Vol. 1999, no. 1. — P. 86–94.
104. Kesting A., Treiber M., Helbing D. Enhanced intelligent driver model to access the impact of driving strategies on traffic capacity // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. — 2010. — Vol. 368, no. 1928. — P. 4585–4605.
105. Cremer M., May A. D. An extended traffic flow model for inner urban freeways. — 1987.
106. Nagel K., Schreckenberg M. A cellular automaton model for freeway traffic // *Journal de physique I*. — 1992. — Vol. 2, no. 12. — P. 2221–2229.
107. Barlovic R. e. a. Metastable states in cellular automata for traffic flow // *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*. — 1998. — Vol. 5, no. 3. — P. 793–800.
108. Benjamin S. C., Johnson N. F., Hui P. M. Cellular automata models of traffic flow along a highway containing a junction // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. — 1996. — Vol. 29, no. 12. — P. 3119.

109. Nagel K., Paczuski M. Emergent traffic jams // *Physical Review E*. — 1995. — Vol. 51, no. 4. — P. 2909.
110. Nagel K. Life times of simulated traffic jams // *International Journal of Modern Physics C*. — 1994. — Vol. 5, no. 03. — P. 567–580.
111. Nagel K., Rasmussen S. Traffic at the edge of chaos / *Artificial Life IV: Proceedings of the Fourth International Workshop on the Synthesis and Simulation of Living Systems*. — Vol. 4. — MIT Press, 1994. — P. 222.
112. Nagel K. Experiences with iterated traffic microsimulations in dallas. — P. 16. — arXiv:adap-org/9712001.
113. Two-lane traffic rules for cellular automata: A systematic approach / K. Nagel, D. E. Wolf, P. Wagner, P. Simon. — P. 29. — arXiv:cond-mat/9712196 [cond-mat.stat-mech].
114. Brilon W., Wu N. Evaluation of cellular automata for traffic flow simulation on freeway and urban streets. — Berlin Heidelberg : Springer, 1999. — P. 163–180.
115. Brilon W., Wu N. Capacity at unsignalized two-stage priority intersections // *Transportation Research Part A: Policy and Practice*. — 1999. — Vol. 33, no. 3. — P. 275–289.
116. Takayasu M., Takayasu H.  $1/f$  noise in a traffic model // *Fractals*. — 1993. — Vol. 1, no. 04. — P. 860–866.
117. Nagel K., Herrmann H. J. Deterministic models for traffic jams // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. — 1993. — Vol. 199, no. 2. — P. 254–269.
118. Sauer mann G., Herrmann H. J. A 1d traffic model with threshold parameters. — 1997. — arXiv preprint cond-mat/9712077.
119. Krauss S. Microscopic traffic simulation: Robustness of a simple approach. — Duisburg : Traffic and Granular Flow, 1997.

120. Krauss S. Microscopic modeling of traffic flow: Investigation of collision free vehicle dynamics : Phd dissertation / S. Krauss ; Universitat zu Koln. — 1998.
121. Yukawa S., Kikuchi M. Coupled-map modeling of one-dimensional traffic flow // Journal of the Physical Society of Japan. — 1995. — Vol. 64, no. 1. — P. 35–38.
122. Tadaki S., et al. Noise induced congested traffic flow in coupled map optimal velocity model // Journal of the Physical Society of Japan. — 1999. — Vol. 68, no. 9. — P. 3110–3114.
123. Tadaki S., et al. Coupled map traffic flow simulator based on optimal velocity functions // Journal of the physical society of Japan. — 1998. — Vol. 67, no. 7. — P. 2270–2276.
124. Fukui M., Ishibashi Y. Traffic flow in 1d cellular automaton model including cars moving with high speed // Journal of the Physical Society of Japan. — 1996. — Vol. 65, no. 6. — P. 1868–1870.
125. Ca models for traffic flow: Comparison with empirical single-vehicle data / W. Knospe, L. Santen, A. Schadschneider, M. Schreckenberg. — P. 6. — arXiv:cond-mat/0001276 [cond-mat.stat-mech].
126. Lübeck S., Schreckenberg M., Usadel K. D. Density fluctuations and phase separation in a traffic flow model. — P. 6. — arXiv:cond-mat/9801220 [cond-mat.stat-mech].
127. Helbing D. Schreckenberg M. Cellular automata simulating experimental properties of traffic flow // Physical review E. — 1999. — Vol. 59, no. 3. — P. 2505.
128. Вероятностные и имитационные подходы к оптимизации дорожного движения. / А. П. Буслаев, А. В. Новиков, В. М. Приходько и др. ; Под ред. В. М. Приходько. — М. : Мир, 2003. — С. 368.

129. Таташев А. Г., Ярошенко А. М. Основы теории вероятностей, случайных процессов и приложения к стохастическим моделям движения: учебное пособие для вузов. — М. : МАДИ, 2012. — С. 92.
130. Бугаев А., Буслаев А. П., Таташев А. Г. О моделировании сегрегации двухполосного потока частиц // Математическое моделирование. — 2008. — Т. 20, № 9. — С. 111–119.
131. Некоторые математические и информационные аспекты моделирования трафика / А.С. Бугаев, А. П. Буслаев, В. В. Козлов, М. В. Яшина // Т-Comm. — 2011. — Т. 4. — С. 29–31.
132. Буслаев А. П., Проворов А. В., Яшина М. В. Современные подходы к исследованию поведения связного потока частиц с мотивацией // Т-Comm. — 2012. — Т. 2. — С. 61–62.
133. Kerner B. S. Control of spatial-temporal congested traffic patterns at highway bottlenecks. — 2008.
134. Kerner B. S., Klenov S. L. Phase transitions in traffic flow on multilane roads // Phys. Rev. E. — 2009. — Vol. 80, no. 056101. — <http://journals.aps.org/pre/abstract/10.1103/PhysRevE.80.056101>.
135. Kerner B. S. The Physics of Traffic. — Berlin, New York : Springer, 2004.
136. Kerner B. S. Introduction to Modern Traffic Flow, Theory and Control. — Berlin, New York : Springer, 2009.
137. Кленов С. Л. Теория Кернера трех фаз в транспортном потоке - новый теоретический базис для интеллектуальных транспортных технологий. — Т. 2. — М., 2010. — С. 75–89.
138. Leutzbach W. An Introduction to the Theory of Traffic Flow. — Berlin, Germany : Springer-Verlag, 1988.
139. May A. D. Traffic Flow Fundamentals. — Englewood Cliffs, NJ : Prentice Hall, 1990.

140. Kerner B. S. Three-phase traffic theory and highway capacity. — P. 79. — arXiv:cond-mat/0211684 [cond-mat.stat-mech].
141. Kerner B. S., Klenov S. L. Probabilistic breakdown phenomenon at on-ramp bottlenecks in three-phase traffic theory. — P. 29. — arXiv:cond-mat/0502281 [cond-mat.stat-mech].
142. Kerner B. S., Klenov S. L., Hiller A. Criterion for traffic phases in single vehicle data and empirical test of a microscopic three-phase traffic theory. — P. 27. — arXiv:physics/0507094 [physics.soc-ph].
143. Microscopic features of moving traffic jams / B. S. Kerner, S. L. Klenov, A. Hiller, H. Rehborn. — P. 19. — arXiv:physics/0510167 [physics.soc-ph].
144. Kerner B. S., Klenov S. L. Deterministic approach to microscopic three-phase traffic theory. — P. 40. — arXiv:physics/0507120 [physics.soc-ph].
145. Kerner B. S. Features of traffic congestion caused by bad weather conditions or accidents. — arXiv:0712.1728 [physics.soc-ph].
146. Kerner B. S., Klenov S. L., Brakeimer A. Testbed for wireless vehicle communication:a simulation, approach based on three-phase traffic theory. — 2007. — arXiv: 0712.2711.
147. Jiang R., Wu Q.-S. Toward an improvement over kerner-klenov-wolf three-phase cellular automaton model // PHYSICAL REVIEW E. — 2005. — Vol. 72, no. 067103.
148. Kerner B. S., Klenov S. L., Wolf D. E. Cellular automata approach to three-phase traffic theory // Journal of Physics A: Mathematical and General. — 2002. — Vol. 35, no. 47. — P. 9971.
149. Moutari S., Rascle M. A hybrid lagrangian model based on the aw-rascle traffic flow model // SIAM Journal on Applied Mathematics. — 2007. — Vol. 68, no. 2. — P. 413–436.
150. Zhang H., Ritchie S. G., Lo Z.-P. Macroscopic modeling of freeway traffic using an artificial neural network // TRANSPORTATION RESEARCH RECORD. — Vol. 1588, no. CS7092. — P. 10.

151. Zhang L., Ma Y., L. S. A hybrid traffic flow model for real time freeway traffic simulation // KSCE Journal of Civil Engineering. — 2014. — Vol. 18, no. 4. — P. 1160–1164.
152. Афанасьева Л. Г., Руденко И. В. Системы обслуживания  $gi|g|_{\infty}$  и их приложения к анализу транспортных моделей // Теория вероятностей и её применения. — 2012. — Т. 57, № 2. — С. 1–27.
153. Афанасьева Л. Г., Булинская Е. В. Математические модели транспортных систем, основанные на теории очередей // Transportation Research Record. — 2008. — Т. 2088. — С. 148–156.
154. Traffic flow at signalized intersections : Rep. ; Executor: N. Roupail, A. Tarko, Li Jing : TRB Special Report 165: Traffic Flow Theory, 1975.
155. Моделирование многополосного движения автотранспорта на основе теории клеточных автоматов. / М. А. Трапезникова, И. Р. Фурманов, Н. Г. Чурбанова, Р. Липп // МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ. — 2011. — Т. 23, № 6. — С. 133–146.
156. Моделирование и прогнозирование движения транспортных потоков на перекрёстке ул. Уральская - ул. Крупской. — URL: <http://road.perm.ru/index.php?id=894>.
157. Kesting A., Treiber M. Calibrating car-following models by using trajectory data:methodological study // Transportation Research Record. — 2008. — Vol. 2088. — P. 148–156.
158. Математическое моделирование движения автотранспортных потоков методами механики сплошной среды. Двухполосный транспортный поток: модель Т-образного перекрестка, исследование влияния перестроений транспортных средств на пропускную способность участка магистрали / Н. Н. Смирнов, А. Б. Киселев, В. Ф. Никитин, А. В. Кокорева // ТРУДЫ МФТИ. — 2010. — Т. 2, № 4. — С. 141–151.
159. Таненбаум Э. Компьютерные сети. — СПб. : Питер, 2002. — С. 848.

160. Тель Ж. Введение в распределённые алгоритмы. — М. : МЦНМО, 2009. — С. 616.
161. Алгоритмы. Построение и анализ / Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест, К. Штайн. — М. : Издательский дом Вильямс, 2013. — С. 1296.
162. Васильев А. Н., Тархов Д. А. Нейросетевое моделирование. Принципы. Алгоритмы. Приложения. — СПб. : Изд-во Политехнического ун-та, 2009.
163. Дорогуш Е. Г. Математический анализ модели транспортных потоков на автостраде и управления её состоянием : Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук / Е. Г. Дорогуш. — 2013.
164. A review of current traffic congestion : Rep. ; Executor: В. Fernando, E. Gray, J. Kellner. — Australian Government. Infrastructure Australia : 2013. — P. 13. — A report.
165. ГОСТ Р 52289-2004 «Технические средства организации дорожного движения. Правила применения дорожных знаков, разметки, светофоров, дорожных ограждений и направляющих устройств».
166. Kelly В. «green wave» reprieve. — 2011.
167. Cools S.-B., Gershenson C., D’Hooghe B. Self-organizing traffic lights: A realistic simulation. Self-Organization. — London : Springer, 2007. — P. 41–49. — arXiv:nlin/06100408.
168. Gartner N. H., Stamatiadis C. Traffic networks, optimization and control of urban // Encyclopedia of Complexity and Systems Science. — 2009. — P. 9470–9500. — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/978-0-387-30440-3\\_563](http://dx.doi.org/10.1007/978-0-387-30440-3_563).
169. Саулина Т. Ф. Знакомим дошкольников с правилами дорожного движения. — ФГОС ,М. : Мозаика–Синтез, 2014.
170. Kerner В. S. The physics of green-wave breakdown in a city // Europhysics Letter. — Vol. 102, no. 2013. — P. 28010.

171. Kerner B. S. The physics of green-wave breakdown in a city // A Letters Journal Exploring the Frontier of Physics. — 2013.
172. Gartner N. H. Traffic Networks, Optimization and Control of Urban // Meyers: Encyclopedia of Complexity and Systems Science.— 2008.— October.