

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
им. М.В. Келдыша РАН

*На правах рукописи*

Прилепский Илья Владимирович

**ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ И ПОЛУНАТУРНОЙ ОТРАБОТКИ  
СИСТЕМ ОРИЕНТАЦИИ СПУТНИКОВ**

Специальность 01.02.01 – теоретическая механика

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
профессор, д.ф.-м.н. С.А. Мирер

Москва - 2011

Введение.....	3
Глава 1. Исследование динамики системы спутник-стабилизатор.....	9
1.1. Система спутник-стабилизатор.....	9
1.2. Первый этап оптимизации.....	12
1.2.1. Две пары комплексно сопряжённых корней с одинаковыми вещественными частями.....	15
1.2.2. Кратные корни.....	17
1.2.3. Три корня с одинаковой вещественной частью.....	20
1.2.4. Случай $d'(k)=0$ .....	25
1.2.5. Результаты первого этапа оптимизации.....	31
1.3. Второй этап оптимизации.....	34
Глава 2. Оптимальные параметры спутника с модельным демпфированием. ...	41
2.1. Постановка задачи.....	41
2.2. Оптимизация степени устойчивости.....	46
Глава 3. Задачи полунатурной отработки алгоритмов ориентации спутника на стенде.....	58
3.1. Постановка задачи и уравнения движения.....	59
3.2. Численное исследование эффективности магнитных алгоритмов.....	66
3.2.1. Влияние параметров алгоритма управления.....	68
3.2.2. Влияние длины стержня, смещения точки подвеса от центра масс, инерционных характеристик макета.....	69
3.3. Аналитическое исследование эффективности алгоритмов.....	71
3.3.1. Исследование эффективности маховичного алгоритма.....	72
3.3.2. Исследование магнитного алгоритма «2».....	74
3.3.3. Исследование магнитного алгоритма «1».....	76
3.4. Задача о сопоставлении динамики макета на стенде и спутника на орбите .....	81
3.4.1. Случай плоских колебаний.....	82
3.4.2. Малые пространственные колебания в окрестности положения равновесия.....	85
Заключение.....	88
Литература.....	90

## **Введение**

Одним из важных направлений развития космической техники является создание и совершенствование систем ориентации искусственных спутников Земли и других планет. В зависимости от требований к системам ориентации, таких как характер ориентации, длительность работы спутника, энергоемкость, необходимая точность ориентации, они могут быть реализованы на основе активных или пассивных методов. Так, в случае, если для нормального функционирования аппарата необходимо ориентировать его с точностью до нескольких угловых минут, используют активные системы ориентации, включающие датчики ориентации и специальные исполнительные органы для создания управляющих моментов. Работа таких систем сопряжена с расходом энергии и/или рабочего тела. Напротив, пассивные системы ориентации, которые могут использоваться при менее строгих требованиях к точности ориентации, способны функционировать продолжительное время без расхода энергии. Работа таких систем основана на возможности существования устойчивых положений спутника в орбитальной системе координат; восстанавливающие моменты при этом могут быть обусловлены взаимодействием с окружающими силовыми полями, например, гравитационным или магнитным полями Земли, или набегающим потоком воздуха при движении в верхних слоях атмосферы.

При использовании пассивных системы ориентации важной задачей является демпфирование собственных колебаний спутника в окрестности положения равновесия. Демпфирование может быть пассивным (например, обеспечиваемым за счет относительного движения элементов системы, как в системе спутник-стабилизатор [16]), полупассивным (примером такой системы может служить гиродемпфер [10, 20, 34]) или активным (например, активная магнитная система демпфирования, использующая взаимодействие управляемого магнитного момента токовых катушек с магнитным полем Земли [31]). Независимо от способа демпфирования, важной задачей при разработке систем ориентации является минимизация времени приведения

спутника в рабочее состояние (асимптотически устойчивое положение равновесия) после того, как он был выведен из него вследствие внешнего возмущения. Для оценки времени протекания соответствующего переходного процесса можно воспользоваться величиной степени устойчивости системы [28] – взятой с обратным знаком вещественной части корня характеристического уравнения линеаризованной системы уравнений движения, лежащего ближе всего к мнимой оси. Возможно применение и других критериев (например, времени установления при импульсном воздействии), однако степень устойчивости является, по-видимому, наиболее удобным индикатором скорости протекания переходного процесса. Оптимизация степени устойчивости для различных пассивных систем ориентации являлась предметом рассмотрения в большом числе работ. Для систем, имеющих значительное число степеней свободы (и, соответственно, высокий порядок характеристического уравнения), такая оптимизация проводилась, в основном, численно. Для систем с более низким порядком (3-4) существует ряд работ, в которых оптимизация проводится аналитически; в первую очередь, следует упомянуть [25], в которой рассмотрены часто встречающиеся в приложениях виды характеристических уравнений. В статье [30] были независимо получены некоторые из результатов [25], а в работе [26] для системы с характеристическим уравнением произвольного четного порядка было показано, что конфигурация корней, отвечающая подравнению всех их вещественных частей, доставляет локальный максимум степени устойчивости. Важным преимуществом аналитического подхода является возможность применения получаемых результатов для широкого класса систем, имеющих аналогичный вид характеристического уравнения. Так, полученные в [25] выражения для оптимальных параметров в дальнейшем были использованы при изучении многих систем с пассивным и полупассивным демпфированием [10, 11, 13, 34, 35]. При этом можно констатировать, что представляющие интерес с точки зрения практических приложений задачи аналитической оптимизации степени устойчивости не

ограничиваются рассмотренными в [25, 26, 30]: так, рассмотренный в [25] характеристический многочлен 4-го порядка остается устойчивым и при отсутствии восстанавливающего момента упругих сил; следовательно, из описываемых им систем принципиально можно исключить упругие элементы и проводить оптимизацию только по коэффициенту демпфирования. Отметим, что важность решения подобной задачи обусловлена также тем, что результаты как численных [20, 23, 29], так и аналитических [10, 11, 13, 34, 35] исследований указывают на следующую тенденцию: в точке экстремума наблюдается подравнивание вещественных частей некоторой группы корней характеристического уравнения, что обуславливает неаналитичность степени устойчивости в точке экстремума и затрудняет применение традиционных (например, градиентных, методов). В связи с этим для нужд численных исследований был разработан специальный метод, учитывающий эту тенденцию и редуцирующий задачу оптимизации на многообразии меньшей размерности [24].

Задача оптимизации степени устойчивости представляет интерес и в случае использования систем с активным демпфированием, особенно если в число определяемых параметров не входят переменные, связанные с затратами энергии или рабочего тела. Численное рассмотрение подобной задачи проводилось, в частности, в [8] для системы с так называемым модельным демпфированием (демпфирующий механический момент пропорционален угловой скорости вокруг оси управляющего моментного устройства); кроме того, определение степени устойчивости для подобной системы проводилось в [9].

При создании аппаратов с активной системой ориентации (или с активной системой демпфирования) важной задачей является обеспечение отработки соответствующих алгоритмов в лабораторных условиях. При этом используются различные установки – испытательные стенды, на которых должны обеспечиваться условия, максимально приближенные к условиям реального полета. Принципиально реализации таких условий (в частности,

точной имитации гравитационного момента) позволяет, например, добиться пружинный стенд, описанный в [1]. Вместе с тем, могут использоваться и более простые стенды [7], основанные на использовании струнного подвеса. Это обусловлено тем, что такой подвес достаточно прост и обеспечивает высокую свободу движения тела относительно центра масс, что крайне важно при отработке и тестировании алгоритмов управления ориентацией спутника. Динамика твердого тела на струнном подвесе является глубоко разработанным разделом теоретической механики, как с точки зрения рассмотрения общего случая движения и малых колебаний в окрестности положения равновесия [5], так и точки зрения исследования различных типов стационарных движений [12]. Рассмотрение динамики макета спутника под воздействием алгоритмов активного управления приводит к появлению новых задач. С одной стороны, задачей отработки является проверка адекватности функционирования всей системы датчиков и исполнительных элементов; с этой целью можно, в частности, провести сопоставление реального движения аппарата и движения, предсказанного на основе численного и/или аналитического моделирования. Дополнительной задачей при этом может являться улучшение демпфирующих свойств используемых алгоритмов, поскольку малое время переходного процесса позволяет свести к минимуму воздействие на систему возмущений, неизбежно возникающих в лабораторных условиях и с трудом поддающихся учету в используемых моделях (например, связанных с трением макета о воздух). Среди работ, в которых такая задача решается применительно к макету спутника на струне, можно указать [3]. С другой стороны, задачей отработки может быть имитация углового движения спутника при его орбитальном движении, например, при выводе ее на некоторую желаемую фазовую траекторию. В этом случае требуется определение параметров стенда и макета, позволяющих добиться такой имитации в определенном смысле (например, в смысле подобия уравнений, описывающих угловое движение). При использовании струнного подвеса в общем случае такого подобия добиться не удастся, так что необходимо выявление класса движений и

последующая оценка параметров системы, при которых такое сопоставление возможно.

Перейдем к описанию содержания диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Во введении обосновывается актуальность темы, дается краткий исторический обзор и краткое содержание диссертации.

В первой главе решается задача оптимизации степени устойчивости для характеристического уравнения 4-го порядка специального вида. Такая задача возникает, например, при рассмотрении колебаний системы спутник-стабилизатор без упругой связи в окрестности асимптотически устойчивого положения равновесия в плоскости круговой орбиты. Определяется максимум степени устойчивости по коэффициенту демпфирования. Производится разбиение пространства безразмерных параметров, определяемых остальными параметрами системы, на подобласти, в каждой из которых оптимум достигается на определенной конфигурации корней характеристического уравнения. В зависимости от рассматриваемой подобласти, оптимальные значения коэффициента демпфирования и степени устойчивости выписаны в явном виде либо в виде функций от корней уравнений 3-4 порядка. Результаты оптимизации отличаются значительной степенью общности и могут использоваться для любой системы, характеристическое уравнение которой имеет указанный вид. В данной работе они используются для определения всех оптимальных параметров (включая инерционные) для системы спутник-стабилизатор. Показано, что этот оптимум достигается в случае совпадения всех корней характеристического уравнения, что отвечает отмеченной в литературе тенденции к подравниванию вещественных частей в оптимуме.

Во второй главе проведена оптимизация степени устойчивости для системы «твердое тело с (активным) модельным демпфированием»; в качестве такого твердого тела, в частности, может рассматриваться спутник на столь высокой орбите, что влиянием гравитационного момента можно пренебречь. Параметрами оптимизации являются направления осей демпфирования в теле

спутника и коэффициенты демпфирования. Строго показано, что как в случае, когда максимально достижимые коэффициенты демпфирования заданы в явном виде, так и в случае, когда они пропорциональны моментам инерции вдоль осей демпфирования, оптимум степени устойчивости достигается при совмещении последних с главными центральными осями инерции спутника.

Предметом рассмотрения в третьей главе является угловое движение макета малого спутника на лабораторном стенде. Макет с установленными на нем управляющими элементами, позволяющими реализовывать алгоритмы активной магнитной и маховичной ориентации, с использованием струнного подвеса помещается в рабочую область имитатора геомагнитного поля. Предложена математическая модель подобной системы. Оценивается скорость демпфирования колебаний при использовании магнитных алгоритмов типа « $\dot{V}$ » [4,14] или алгоритма маховичной ориентации типа « $pd$ -регулятор» [6, 27]. По итогам этого исследования сформулированы рекомендации по выбору параметров стенда и макета, обеспечивающих максимальную степень устойчивости. Для случая малых колебаний получены соотношения между параметрами макета и реального спутника, позволяющие обеспечить подобие движений.

## Глава 1. Исследование динамики системы спутник-стабилизатор.

В настоящей главе проводится оптимизация степени устойчивости для характеристического уравнения 4-го порядка специального вида, которое возникает, например, при исследовании колебаний системы спутник-стабилизатор без упругой связи в плоскости круговой орбиты. Полученные результаты в дальнейшем используются при определении оптимальных с точки зрения степени устойчивости инерционных параметров тел системы.

### 1.1. Система спутник-стабилизатор

Система спутник-стабилизатор является одной из наиболее известных и хорошо изученных пассивных систем ориентации. Ее принципиальная схема, впервые описанная в [16], включает два тела, соединенные посредством сферического шарнира, в котором имеется вязкое трение, а также, возможно, упругой связи (рис. 1.1). Равновесные конфигурации такой системы и ее колебания в окрестности устойчивых равновесий изучались в [19, 36]; кроме того, существует широкий спектр работ, посвященных оптимизации степени устойчивости по коэффициентам демпфирования и упругости при введении различных предположений о положении шарнира относительно центров масс тел системы [21, 22, 35, 36, 38].

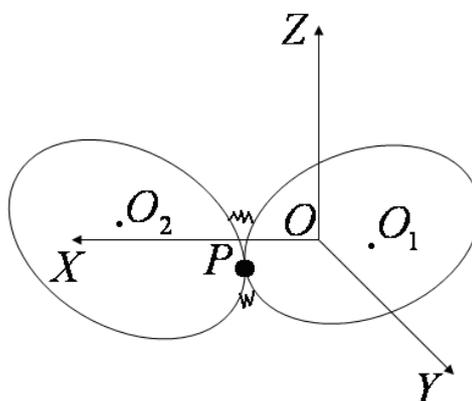


Рис. 1.1. Система спутник-стабилизатор

При рассмотрении системы спутник-стабилизатор используются следующие системы координат:

$OXYZ$  - орбитальная система координат (ОСК): ось  $OZ$  направлена по местной вертикали,  $OY$  - по нормали к плоскости орбиты,  $OX$  дополняет систему до правой ортогональной;

$O_i x_i y_i z_i$ ,  $i=1,2$  - связанные системы координат (ССК), являются главными центральными системами координат для входящих в спутниковую систему твердых тел.

Связь между системами координат  $OXYZ$  и  $O_i x_i y_i z_i$  задается набором самолетных углов  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  (рис. 1.2). Переход от системы  $OXYZ$  к системе  $O_i x_i y_i z_i$  происходит посредством трех последовательных поворотов: первый поворот осуществляется вокруг оси  $O_i Y$  на угол  $\alpha_i$ , второй – вокруг  $O_i z_i'$  (ось, в которую после поворота переходит  $O_i Z$ ) на угол  $\beta_i$ , третий – вокруг  $O_i x_i$  на угол  $\gamma_i$ .

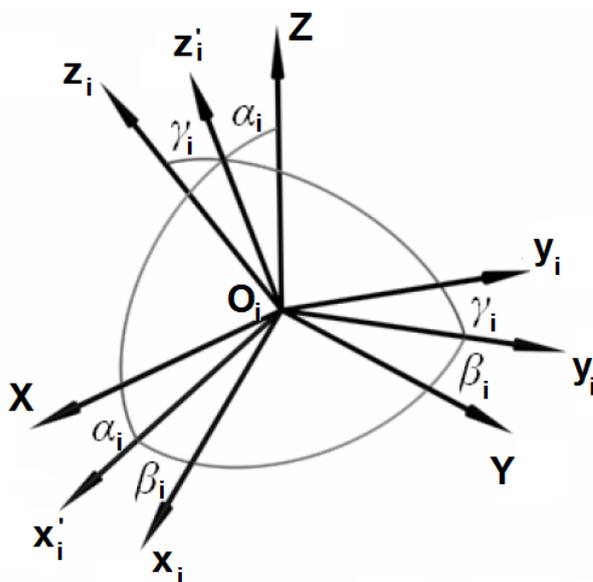


Рис. 1.2. Самолетные углы

Для практических приложений значительный интерес представляет полученное в [36] так называемое горизонтальное положение равновесия системы спутник-стабилизатор в плоскости круговой орбиты. При этом шарнир  $P$  находится на пересечении осей  $O_1x_1$  и  $O_2x_2$ , которые, в свою очередь, направлены вдоль трансверсали к орбите.

Линеаризованные уравнения колебаний в плоскости орбиты в окрестности этого равновесия были получены в [36] и имеют вид

$$\begin{aligned} & (B_1 + M\bar{a}_1^2)\ddot{\alpha}_1 - M\bar{a}_1\bar{a}_2\ddot{\alpha}_2 + 3[(A_1 - C_1) - M\bar{a}_1^2]\omega_0^2\alpha_1 + \\ & \quad + 3M\bar{a}_1\bar{a}_2\omega_0^2\alpha_2 + \bar{K}_1(\dot{\alpha}_1 - \dot{\alpha}_2) + \bar{K}_2(\alpha_1 - \alpha_2) = 0, \\ & -M\bar{a}_1\bar{a}_2\ddot{\alpha}_1 + (B_2 + M\bar{a}_2^2)\ddot{\alpha}_2 + 3M\bar{a}_1\bar{a}_2\omega_0^2\alpha_1 + \\ & \quad + 3[(A_2 - C_2) - M\bar{a}_2^2]\omega_0^2\alpha_2 - \bar{K}_1(\dot{\alpha}_1 - \dot{\alpha}_2) - \bar{K}_2(\alpha_1 - \alpha_2) = 0. \end{aligned}$$

Здесь  $M = M_1M_2/(M_1 + M_2)$ ;  $M_i, A_i, B_i, C_i$  - массы и главные центральные моменты составляющих систему тел;  $\bar{a}_i$  - смещения шарнира относительно центров масс;  $\bar{K}_1$  - коэффициент вязкого трения,  $\bar{K}_2$  - коэффициент упругости,  $\omega_0$  - угловая скорость движения центра масс системы по круговой орбите.

После перехода к безразмерному времени  $\tau = \omega_0 t$  и безразмерным параметрам

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{A_1 - C_1}{B_1}, \quad \lambda_2 = \frac{A_2 - C_2}{B_2}, \quad \mu = \sqrt{\frac{B_2}{B_1}}, \quad k_1 = \frac{\bar{K}_1}{\omega_0 B_1}, \\ k_2 &= \frac{\bar{K}_2}{\omega_0^2 B_1}, \quad s_1 = \bar{a}_1 \sqrt{\frac{M}{B_1}}, \quad s_2 = \bar{a}_2 \sqrt{\frac{M}{B_2}} \end{aligned}$$

характеристическое уравнение принимает вид

$$a_0(x)p^4 + k_1 a_1(x)p^3 + [k_2 a_1(x) + a_2(x)]p^2 + k_1 a_3(x) + [k_2 a_3(x) + a_4(x)] = 0; \quad (1.1)$$

здесь  $x = (\mu, s_1, s_2, \lambda_1, \lambda_2)$  - вектор безразмерных параметров системы;

коэффициенты уравнения (1.1)  $a_i$  имеют вид

$$\begin{aligned} a_0 &= \mu^2 (1 + s_1^2 + s_2^2), \quad a_1 = 1 + \mu^2 + (s_1 - \mu s_2)^2, \\ a_2 &= 3\mu^2 (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_1 s_2^2 + \lambda_2 s_1^2 - s_1^2 - s_2^2), \\ a_3 &= 3[\lambda_1 + \mu^2 \lambda_2 - (s_1 - \mu s_2)^2], \quad a_4 = 9\mu^2 (\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1 s_2^2 - \lambda_2 s_1^2). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Задача определения оптимальных (с точки зрения максимизации степени устойчивости параметров)  $k_1, k_2$  для уравнения вида (1.1) была решена в [25] и, независимо, в [30], после чего эти результаты были использованы в [25] для проведения глобальной оптимизации.

Отметим, что анализ условий Рауса-Гурвица для уравнения (1.1) показывает, что асимптотическая устойчивость положения равновесия может быть обеспечена и в отсутствие упругой связи ( $k_2 = 0$ ). С учетом того, что система без упругой связи является более простой с точки зрения технической реализации, интерес представляет задача оптимизации степени устойчивости для характеристического уравнения вида

$$a_0(x)p^4 + ka_1(x)p^3 + a_2(x)p^2 + ka_3(x)p + a_4(x) = 0, \quad (1.3)$$

которая и является основным предметом рассмотрения в данной главе. Отметим, что такой же вид характеристического уравнения имеет и для ряда других систем – например, для системы с маятниковым демпфером [13] при отсутствии упругой связи.

На первом этапе решается задача максимизации степени устойчивости по  $k$ : устанавливаются все конфигурации корней (1.3), на которых может достигаться оптимум; для каждой конфигурации определяются области в пространстве безразмерных параметров системы, где она является оптимальной, т.е. на ней достигается максимум степени устойчивости; получается значение максимальной по  $k$  степени устойчивости и определяется оптимальное значение параметра  $k$ . На втором этапе определяются оптимальные значения всех остальных безразмерных параметров системы спутник-стабилизатор для частного случая, когда шарнир совпадает с центрами масс обоих тел системы.

## **1.2. Первый этап оптимизации**

Положение равновесия системы является асимптотически устойчивым, если все корни уравнения (1.3) имеют отрицательные вещественные части. Это

накладывает ограничения на коэффициенты  $a_i(x), i = \overline{0,4}$ . В соответствии с критерием Рауса-Гурвица (полагаем  $a_0 > 0, a_1 > 0$ ) имеем

$$k > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_4 > 0, \quad a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_3^2 a_0 > 0. \quad (1.4)$$

Введем параметры  $\theta = \frac{a_0 a_3}{a_1 a_2}, \gamma = \frac{a_1 a_4}{a_2 a_3}$ . Тогда, в соответствии с (1.4),

$$\theta > 0, \quad \gamma > 0, \quad \theta + \gamma < 1. \quad (1.5)$$

Соответствующая область на рис. 1.3 выделена светло-серым цветом.

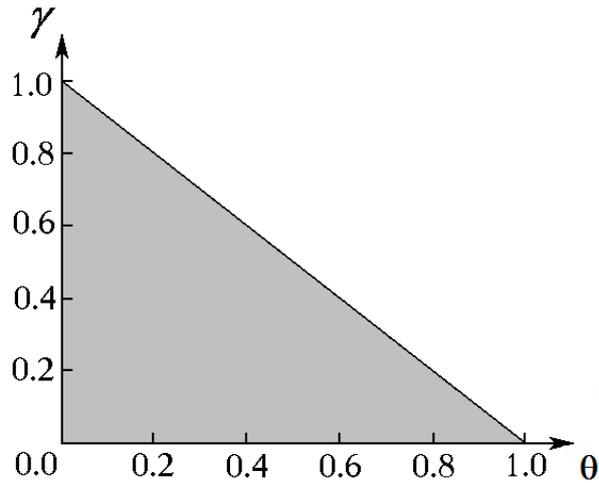


Рис. 1.3: Допустимая область изменения параметров  $\theta, \gamma$

Обозначим

$$f(p, k) = a_0(x)p^4 + ka_1(x)p^3 + a_2(x)p^2 + ka_3(x)p + a_4(x).$$

Известно, что комплекснозначные функции  $p_i(k), i = \overline{1,4}$ , неявно определяемые уравнением (1.3), непрерывны. Они также дифференцируемы, за исключением, быть может, точек, где

$$\frac{\partial f}{\partial p} = 4a_0 p^3 + 3ka_1 p^2 + 2a_2 p + ka_3 = 0,$$

что соответствует случаю, когда уравнение (1.3) имеет кратный корень.

Аналогичные утверждения справедливы для  $d_i(k) = -\operatorname{Re} p_i(k), i = \overline{1,4}$ .

Поскольку степень устойчивости определяется выражением  $\xi(k) = \min \{d_i(k)\}$ ,

то её экстремальное значение достигается в точке, где  $\xi'(k) = 0$  (т.е. в точке, где  $d_i'(k) = 0$  для некоторого  $i$ ), либо в точке недифференцируемости  $\xi(k)$ , либо на границе интервала изменения  $k$  (при  $k = 0$  или  $+\infty$ ).

При  $k = 0$  уравнение (1.3) принимает вид  $a_0 p^4 + a_2 p^2 + a_4 = 0$ , откуда

$$p^2 = -\frac{a_2}{2a_0} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4a_0 a_4}{a_2^2}} \right) = -\frac{a_2}{2a_0} (1 \pm \sqrt{1 - 4\theta\gamma}).$$

Но, в силу (1.5),

$$1 > 1 - 4\theta\gamma = (1 - 2\theta)^2 + 4\theta(1 - \theta - \gamma) > (1 - 2\theta)^2 > 0,$$

т.е.  $p^2 < 0$ . Следовательно, все корни чисто мнимые и  $\xi = 0$ .

Если  $k \rightarrow +\infty$ , то легко показать, что один из корней уравнения (1.3) имеет вид  $p = -a_4/ka_3 + o(1/k)$ , и поэтому с ростом  $k$   $\xi(k) \rightarrow 0$ . В свою очередь, точки недифференцируемости  $\xi(k)$  лежат среди точек недифференцируемости  $d_i(k)$  (соответствующих кратному корню уравнения (1.3)), а также точек, где кривые  $d_i(k)$  пересекаются под ненулевым углом. Таким образом, максимальная по  $k$  степень устойчивости может достигаться в следующих случаях:

- совпадают действительные части у двух пар комплексно сопряжённых корней:  $p_{1,2} = -d \pm i\omega_1$ ,  $p_{3,4} = -d \pm i\omega_2$ ,  $\omega_1 \neq 0$ ,  $\omega_2 \neq 0$ ;
- совпадают действительные части у двух вещественных корней (кратный вещественный корень,  $p_1 = p_2 = -d$ );
- совпадают вещественные части у пары комплексно сопряжённых корней и одного вещественного корня:  $p_{1,2} = -d \pm i\omega$ ,  $p_3 = -d$ ;
- для действительной части одного из корней выполнено условие экстремальности:  $d_i'(k) = 0$ .

Проанализируем далее каждую из перечисленных возможностей.

### 1.2.1. Две пары комплексно сопряжённых корней с одинаковыми вещественными частями

Пусть при  $k = k_0$  корни уравнения (1.3) имеют вид  $p_{1,2} = -d \pm i\omega_1$ ,  $p_{3,4} = -d \pm i\omega_2$  (для определенности,  $\omega_1^2 \geq \omega_2^2$ ). Представляя уравнение (1.3) в виде

$$a_0 \left[ (p+d)^2 + \omega_1^2 \right] \left[ (p+d)^2 + \omega_2^2 \right] = 0 \quad (1.6)$$

и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $p$  в (1.3) и (1.6), получаем

$$\begin{aligned} 4a_0d &= k_0a_1, & a_0(6d^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2) &= a_2, \\ 2a_0d(2d^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2) &= k_0a_3, & a_0(d^2 + \omega_1^2)(d^2 + \omega_2^2) &= a_4, \end{aligned} \quad (1.7)$$

откуда

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{\frac{a_2(1-2\theta)}{4a_0}}, & k_0^2 &= \frac{4a_0a_2(1-2\theta)}{a_1^2}, \\ \omega_{1,2}^2 &= \frac{a_2}{4a_0} \left( 6\theta - 1 \pm 4\sqrt{\theta(\theta - \gamma)} \right). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Принимая во внимание неотрицательность  $k_0^2$  и  $\omega_{1,2}^2$ , получаем условия

$$\theta < \frac{1}{2}, \quad \gamma \leq \theta, \quad \gamma > \frac{(10\theta - 1)(1 - 2\theta)}{16\theta}, \quad (1.9)$$

при которых такая конфигурация корней возможна (темно-серая область на рис. 1.4).

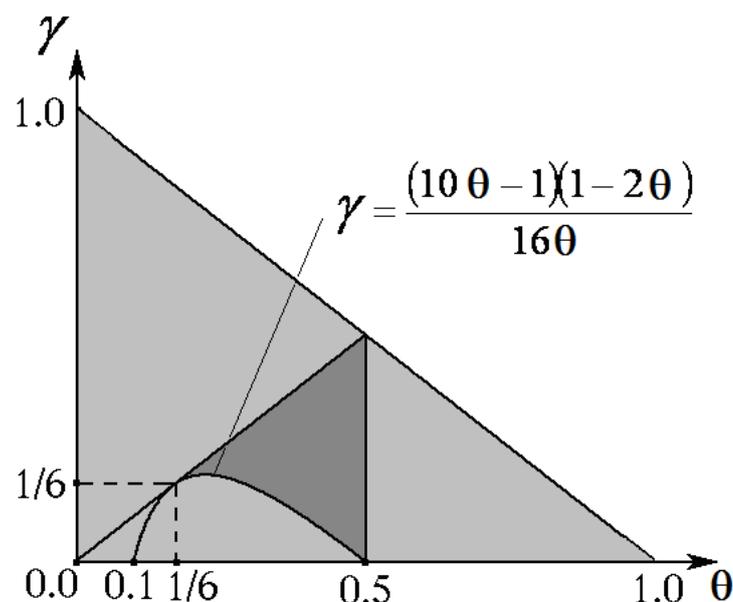


Рис. 1.4

Теперь определим область, в которой  $k_0$  действительно является оптимальным. Для этого перепишем (1.3) в виде

$$a_0 \left[ (p+d)^2 + \omega_1^2 \right] \left[ (p+d)^2 + \omega_2^2 \right] + (k-k_0)(a_1 p^3 + a_3 p) = 0$$

и сделаем подстановку  $s = p+d$ . Тогда получим

$$b_0 s^4 + b_1 s^3 + b_2 s^2 + b_3 s + b_4 = 0,$$

где

$$b_0 = a_0 > 0, \quad b_1 = a_1(k-k_0),$$

$$b_2 = a_0(\omega_1^2 + \omega_2^2) - 3(k-k_0)a_1 d,$$

$$b_3 = (k-k_0)(3a_1 d^2 + a_3),$$

$$b_4 = a_0 \omega_1^2 \omega_2^2 - (k-k_0)(a_1 d^2 + a_3) d.$$

Необходимые и достаточные условия устойчивости имеют вид

$$b_1 > 0, \quad b_3 > 0, \quad b_4 > 0, \quad b_1 b_2 b_3 - b_0 b_3^2 - b_1^2 b_4 > 0.$$

Из первого условия следует  $k-k_0 > 0$ , а четвертое условие приводится к виду

$$k-k_0 < \frac{a_2^2}{a_0 d (8a_1 d^2 + 2a_3)} \left[ (3\theta-1)(1-\theta) - \gamma\theta \right].$$

Отсюда следует, что при  $\gamma\theta > (3\theta - 1)(1 - \theta)$  (область I на рис. 1.5)  $k - k_0 < 0$ . Таким образом, в области I при  $k \neq k_0$  характеристическое уравнение имеет корни, лежащие правее прямой  $\text{Re } p = -d$ . Следовательно, при  $k = k_0$  действительно достигается максимум степени устойчивости и

$$\xi_{\max} = \sqrt{a_2(1 - 2\theta)/4a_0}.$$

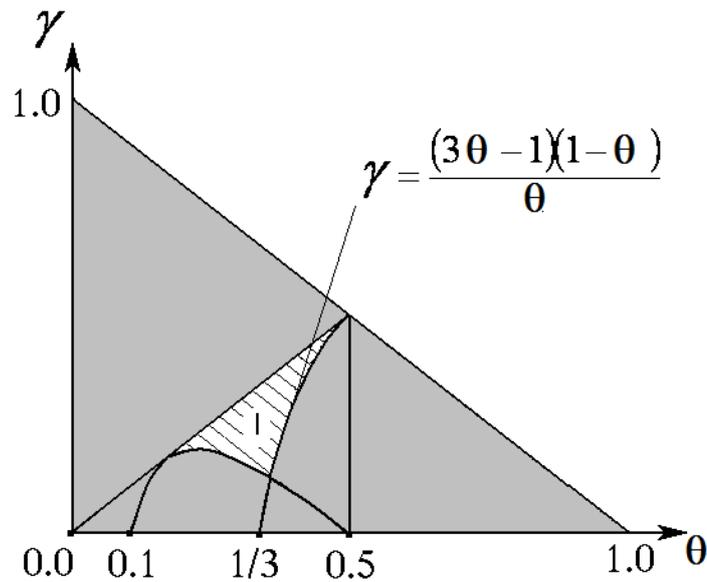


Рис. 1.5

### 1.2.2. Кратные корни

Проанализируем случай кратных вещественных корней  $p_1 = p_2 = -d$ , при этом другие два корня ( $p_3$  и  $p_4$ ) могут быть вещественными или комплексно сопряженными. Случай кратных комплексно сопряженных корней ( $p_{1,2} = p_{3,4} = -d \pm i\omega$ ) отдельно не исследуется, поскольку при  $\omega_1^2 = \omega_2^2$  он сводится к уже рассмотренному в предыдущем разделе случаю (такая конфигурация корней имеет место на границе  $\gamma = k$  темно-серой области на рис. 1.4).

Кратный корень  $p = -d$  удовлетворяет уравнению (1.3) и уравнению

$$-4a_0d^3 + 3ka_1d^2 - 2a_2d + ka_3 = 0. \quad (1.10)$$

Выражая из (1.10)  $k = \frac{2d(2a_0d^2 + a_2)}{3a_1d^2 + a_3}$  и вводя обозначение  $\chi = d^2 \frac{a_0}{a_2}$ ,

преобразуем (1.3) к виду

$$h(\chi) = \chi^3 + (3\theta - 1)\chi^2 + (\theta - 3\gamma\theta)\chi - \gamma\theta^2 = 0. \quad (1.11)$$

Заметим, что уравнение (1.11) всегда имеет хотя бы один положительный корень.

Определим, при каких условиях максимальная степень устойчивости достигается на кратном корне. Для этого перепишем уравнение (1.3) в виде

$$a_0(p + d)^2(p - p_3)(p - p_4) + (k - k_0)(a_1p^3 + a_3p) = 0.$$

Здесь  $k_0$  - значение  $k$ , соответствующее кратному корню. Если  $d < -\operatorname{Re} p_3$  и  $d < -\operatorname{Re} p_4$ , то при  $k = k_0$  степень устойчивости равна  $d$ . Если сделать замену  $s = p + d$ , то в получившемся уравнении коэффициент  $(k - k_0)(3a_1d^2 + a_3)$  при  $s$  в первой степени и свободный член  $-(k - k_0)d(a_1d^2 + a_3)$  оказываются противоположных знаков, т.е. нарушаются необходимые и достаточные условия устойчивости. Таким образом, показано, что  $\xi_{\max}$  достигается на кратном корне, если  $-\operatorname{Re} p_3 > d$ ,  $-\operatorname{Re} p_4 > d$ .

При поиске области на плоскости  $(\theta, \gamma)$ , где эти условия выполнены, удобно разделить всю допустимую область изменения параметров  $(\theta, \gamma)$  на две подобласти: в одной уравнение (1.3) может иметь кратные корни при трёх значениях параметра  $k$  (т.е. (1.11) имеет три положительных корня), в другой – только при одном значении  $k$  (т.е. (1.11) имеет один положительный корень). На границе, разделяющей эти области, уравнение (1.11) имеет два положительных корня. Для нахождения границы необходимо разрешить систему двух уравнений – уравнения (1.11) и уравнения  $h'(\chi) = 0$ , имеющего вид

$$3\chi^2 + (6\theta - 2)\chi + (\theta - 3\gamma\theta) = 0. \quad (1.12)$$

Исключая из (1.11), (1.12)  $\chi$ , получаем

$$-9\theta^2(\gamma+\theta-1)[108\theta\gamma^2+(108\theta^2-108\theta+9)\gamma+9\theta-1]=0. \quad (1.13)$$

В допустимой области  $\theta > 0$ ,  $\theta + \gamma < 1$ , поэтому (1.13) эквивалентно

$$108\theta\gamma^2+(108\theta^2-108\theta+9)\gamma+9\theta-1=0,$$

откуда

$$\gamma_{\pm} = \frac{-36\theta^2+36\theta-3 \pm (1-6\theta)\sqrt{3(1-6\theta)(3-2\theta)}}{72\theta}, \quad \theta < \frac{1}{6}. \quad (1.14)$$

Заметим, что на кривых (1.14) кратные корни ( $\chi$ ) действительно положительны, поскольку коэффициент при  $\chi$  в уравнении (1.12) отрицателен, а свободный член положителен.

Можно показать, что условие  $-\operatorname{Re} p_3 > d$ ,  $-\operatorname{Re} p_4 > d$  выполнено всюду в области существования трёх положительных корней уравнения (1.11), включая её границы (рис. 1.6, область между кривыми  $\gamma_+$  и  $\gamma_-$ ; здесь  $d$  понимается как минимальный из модулей кратных корней), а также в области  $\gamma < (10\theta-1)(1-2\theta)/16\theta$ , где уравнение (1.11) имеет один положительный корень. На рис. 1.7 вертикальной штриховкой показаны области, где оптимум достигается на кратном корне, наклонной – где оптимум достигается в случае двух пар комплексно сопряжённых корней с одинаковой вещественной частью. Остается еще проанализировать случаи трех корней с одинаковой вещественной частью и экстремума вида  $d_i'(k) = 0$ .

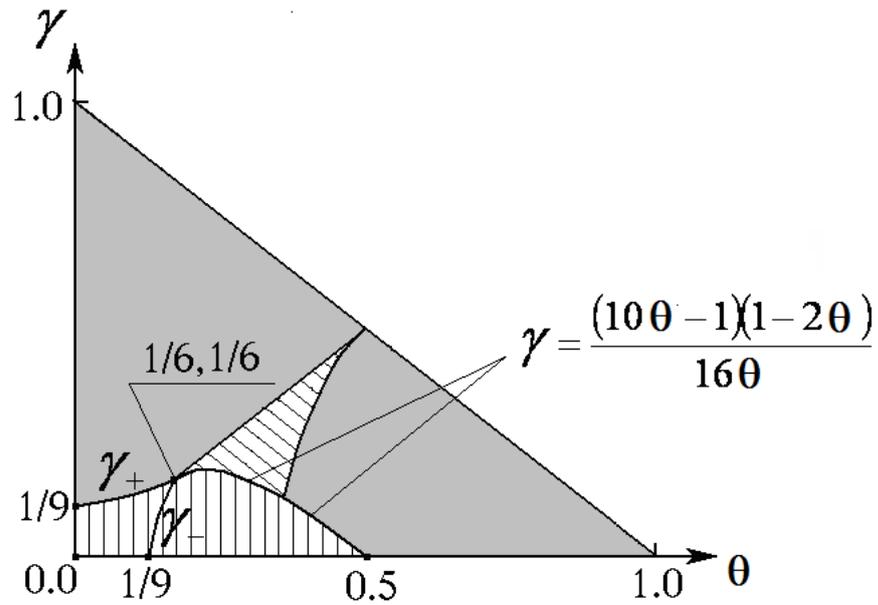


Рис. 1.6

### 1.2.3. Три корня с одинаковой вещественной частью

Обозначим корни характеристического уравнения  $p_{1,2} = -d \pm i\omega$ ,  $p_3 = -d$ ,  $p_4 = -d_1$ . Тогда уравнение (1.3) можно записать в виде

$$a_0(p^2 + 2dp + d^2 + \omega^2)(p + d)(p + d_1) = 0.$$

Приравнявая коэффициенты при соответствующих степенях  $p$ , получаем

$$3d + d_1 = \frac{ka_1}{a_0}, \quad 2d^2 + 3dd_1 + d^2 + \omega^2 = \frac{a_2}{a_0},$$

$$(d + d_1)(d^2 + \omega^2) + 2d^2d_1 = \frac{ka_3}{a_0}, \quad (d^2 + \omega^2)dd_1 = \frac{a_4}{a_0}.$$

Вводя обозначение  $\chi = a_0d^2/a_2$ , после преобразований получаем

$$8\chi^4 + (26\theta - 8)\chi^3 + (21\theta^2 - 11\theta + 2 - 9\gamma\theta)\chi^2 - \theta(-3\theta + 1 + 14\gamma\theta - 5\gamma)\chi + \gamma\theta^2(3\gamma - 1 + \theta) = 0, \quad (1.15)$$

а также

$$\omega^2 = \frac{a_2}{a_0} \frac{3\chi^2 + (6\theta - 2)\chi + \theta - 3\gamma\theta}{\chi + \theta} = \frac{a_2}{a_0} \psi. \quad (1.16)$$

Нас интересуют положительные корни (1.15), для которых  $\omega^2 > 0$ . Найдём сначала кривую, на которой  $\omega^2 = 0$ . Выразив из этого условия

$$\chi = \frac{1}{3} \left( 1 - 3\theta \pm \sqrt{1 - 9\theta + 9\theta^2 + 9\gamma\theta} \right)$$

и подставив в (1.15), получим уравнение

$$(\gamma + \theta - 1)^2 [108\theta\gamma^2 + (108\theta^2 - 108\theta + 9)\gamma + 9\theta - 1] = 0,$$

эквивалентное (1.13). Следовательно,  $\omega^2 = 0$  на кривых (1.14);  $\omega^2 > 0$  имеет место вне ограниченной этими кривыми области, т.е. в области, где уравнение (1.3) имеет кратные вещественные корни при одном значении  $k$ .

Далее, рассмотрим вопрос о числе положительных корней уравнения (1.15). Очевидно, (1.15) имеет положительный корень при  $\gamma < (1 - \theta)/3$ . При этом на самой прямой  $\gamma = (1 - \theta)/3$  уравнение (1.15) принимает вид

$$\chi P(\chi) = 0,$$

где

$$P(\chi) = 12\chi^3 + (39\theta - 12)\chi^2 + (36\theta^2 - 21\theta + 3)\chi + \theta(7\theta^2 - 5\theta + 1).$$

Результаты численного решения уравнения  $P(\chi) = 0$  показывают, что в допустимой области оно имеет только отрицательные и комплексные корни. Кроме того, можно показать, что (1.15) не имеет кратных положительных корней в области, где  $\omega^2 > 0$ . Отсюда следует, что при  $\gamma < (1 - \theta)/3$  уравнение (1.15) имеет положительный корень, и притом единственный, а в оставшейся части области положительных корней нет. Таким образом, рассматриваемая конфигурация корней возможна в темно-серой области на рис. 1.7.

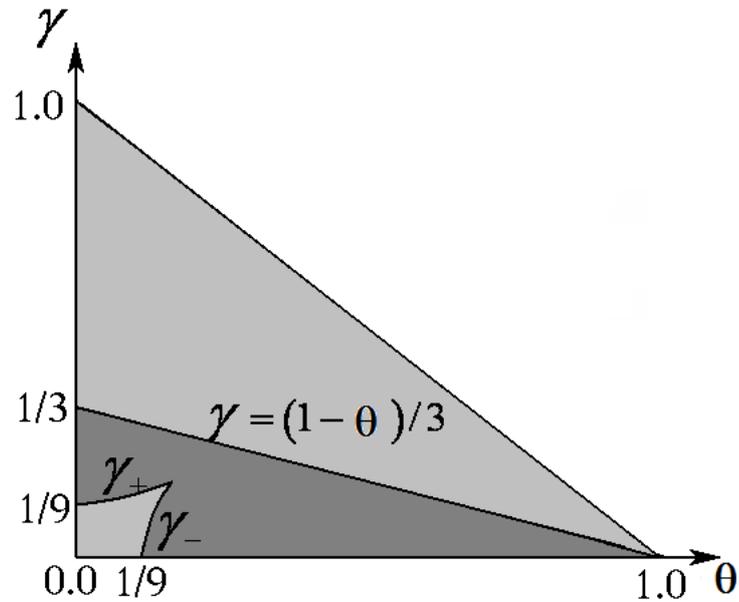


рис. 1.7.

Теперь определим область, где данная конфигурация корней является оптимальной. Перепишем уравнение (1.3) в виде

$$a_0(p^2 + 2dp + d^2 + \omega^2)(p + d)(p + d_1) + (k - k_0)(a_1p^3 + a_3p) = 0,$$

где  $k_0$  - значение  $k$ , соответствующее рассматриваемой конфигурации корней.

Условие  $d_1 > d$  эквивалентно  $ka_1/a_0 - 4d > 0$ . Подставляя

$$k = \frac{a_0d^4 + a_2d^2 + a_4}{a_1d^3 + a_3d},$$

преобразуем это неравенство к виду  $-3\chi^2 + (1 - 4\theta)\chi + \gamma\theta > 0$ . Исключая  $\chi$  из  $-3\chi^2 + (1 - 4\theta)\chi + \gamma\theta = 0$  и (1.15), приходим к соотношению

$$\gamma\theta(16\gamma\theta + 1 - 12\theta + 20\theta^2)(\gamma - 1 + \theta)^2 = 0,$$

откуда

$$\gamma = (10\theta - 1)(1 - 2\theta)/16\theta.$$

Условие  $d_1 > d$  выполняется при

$$\gamma > \frac{(10\theta - 1)(1 - 2\theta)}{16\theta}.$$

Сделаем замену  $s = p + d$  и выпишем необходимые и достаточные условия устойчивости полученного в результате уравнения

$$\beta > \frac{3\chi^2 + (4\theta - 1)\chi - \gamma\theta}{\chi + \theta} = \beta_1, \quad (1.17.1)$$

$$\beta > \frac{3\chi^2 + (4\theta - 1)\chi - \gamma\theta}{\chi + \theta} \cdot \frac{3\chi^2 + (6\theta - 2)\chi + \theta - 3\gamma\theta}{(\chi + \theta)(3\chi + \theta)}, \quad (1.17.2)$$

$$\beta < 0, \quad (1.17.3)$$

$$\begin{aligned} \beta \cdot g_1(\beta) = & -2(\chi + \theta)^3 (4\chi + \theta)\beta^3 + \\ & + (\chi + \theta) \left[ 48\chi^3 + 2(56\theta^2 - 23\theta + 3 - 26\gamma\theta)\chi^2 + \right. \\ & + \theta(2\theta^2 + 13\theta - 3 - 74\gamma\theta + 15\gamma)\chi - \\ & \left. - \theta^2(\theta^2 + \theta - 9\gamma^2 + 4\gamma\theta + 3\gamma) \right] \beta^2 - \\ & - (3\chi^2 + 4\theta\chi - \chi - \gamma\theta) \left[ 24\chi^4 + (86\theta - 32)\chi^3 + \right. \\ & + (70\theta^2 - 44\theta + 10 - 44\gamma\theta)\chi^2 + \\ & + \theta(-10\theta^2 + 23\theta - 7 - 76\gamma\theta + 27\gamma)\chi + \\ & \left. + \theta^2(-\theta + 1 + 18\gamma^2 + 4\gamma\theta - 9\gamma) \right] \beta > 0. \end{aligned} \quad (1.17.4)$$

Здесь введено обозначение

$$\beta = (k - k_0) \frac{a_1}{\sqrt{a_0 a_2}} \sqrt{\chi}.$$

С учётом  $\beta < 0$ , (1.17.4) эквивалентно

$$\begin{aligned} g_1 = & -2(\chi + \theta)^3 (4\chi + \theta)\beta^2 + (\chi + \theta) \left[ 48\chi^3 + (112\theta^2 - 46\theta + 6 - \right. \\ & - 52\gamma\theta)\chi^2 + \theta(2\theta^2 + 13\theta - 3 - 74\gamma\theta + 15\gamma)\chi - \\ & \left. - \theta^2(\theta^2 - \theta - 9\gamma^2 + 4\gamma\theta + 3\gamma) \right] \beta - \\ & - (3\chi^2 + 4\theta\chi - \chi - \gamma\theta) \left[ 24\chi^4 + (86\theta - 32)\chi^3 + \right. \\ & + 2(35\theta^2 - 22\theta + 5 - 22\gamma\theta)\chi^2 - \\ & - \theta(10\theta^2 - 23\theta + 7 + 76\gamma\theta - 27\gamma)\chi - \\ & \left. - \theta^2(\theta - 1 - 18\gamma^2 - 4\gamma\theta + 9\gamma) \right] < 0, \end{aligned} \quad (1.17.5)$$

где

$$-3\chi^2 - (4\theta - 1)\chi + \gamma\theta = (\chi + \theta)(d_1 - d)a_0/a_2 > 0.$$

При этом

$$g_1(\beta_1) = (-3\chi^2 - 4\theta\chi + \chi + \gamma\theta)(-2\theta\chi + 2\chi - \theta + \theta^2 + 3\gamma\theta)^2 > 0.$$

Поскольку график  $g_1(\beta)$  есть парабола, направленная ветвями вниз, условия устойчивости несовместны тогда и только тогда, когда  $g_1(0) \geq 0$ . Тем самым, для нахождения границы соответствующей области нужно решать совместно (1.15) и уравнение

$$24\chi^4 + (86\theta - 32)\chi^3 + 2(35\theta^2 - 22\theta + 5 - 22\gamma\theta)\chi^2 - \theta(10\theta^2 - 23\theta + 7 + 76\gamma\theta - 27\gamma)\chi - \theta^2(\theta - 1 - 18\gamma^2 - 4\gamma\theta + 9\gamma) = 0. \quad (1.18)$$

Исключая  $\chi$ , приходим к уравнению

$$\begin{aligned} & -2116\gamma^4\kappa^2 + \kappa(364\kappa^2 + 2628\kappa - 31)\gamma^3 + (2980\kappa^4 - 2408\kappa^3 - 199\kappa^2 - \\ & - 233\kappa + 40)\gamma^2 + (500\kappa^5 - 940\kappa^4 + 227\kappa^3 + 214\kappa^2 + 7\kappa - 8)\gamma - \\ & - 9\kappa(5\kappa^3 - 11\kappa^2 + 7\kappa - 1) = 0. \end{aligned}$$

Его решения показаны на рис. 1.8 сплошными линиями (как и граница допустимой области); штриховыми линиями показаны границы области существования исследуемой конфигурации корней, а также кривая, где выполнено условие  $d_1 = d$ . Область, в которой рассматриваемая конфигурация корней является оптимальной, на рис. 1.8, 1.9 отмечена более плотной наклонной штриховкой. Левая и правая части верхней границы этой области обозначены  $\gamma_L$  и  $\gamma_R$ , соответственно.

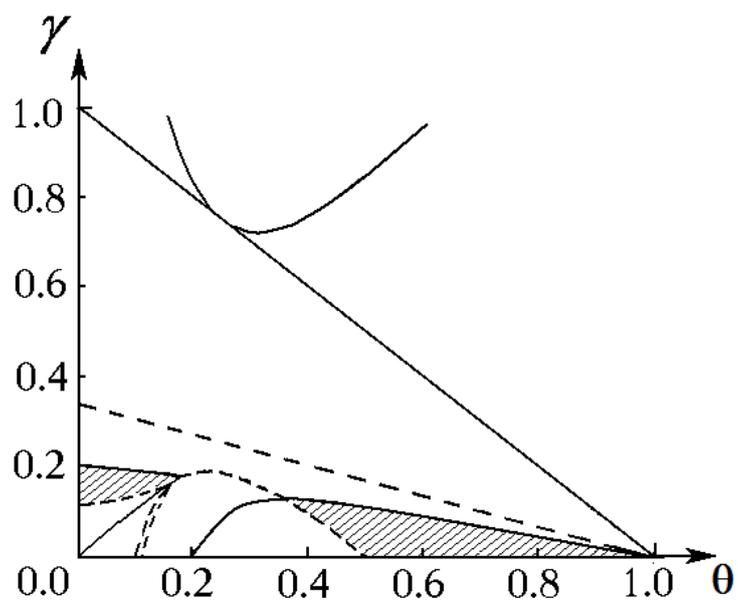


Рис. 1.8.

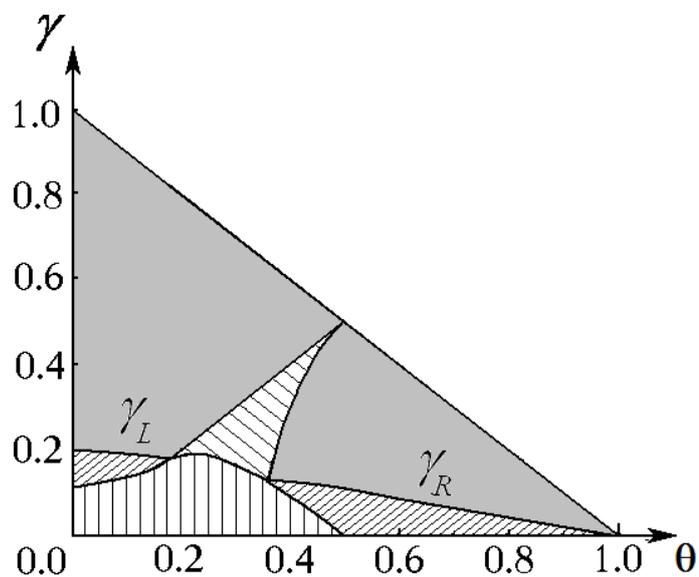


Рис. 1.9.

#### 1.2.4. Случай $d'(k)=0$

Предметом рассмотрения в данном разделе являются точки, в которых выполняется необходимое условие внутреннего экстремума  $d'(k)=0$ , где  $d(k)$  - действительная часть корня уравнения (1.3), взятая с обратным знаком. Покажем сначала, что это условие не может выполняться на вещественном корне  $p = -d$ .

Действительно, для вещественного корня уравнения (1.3) имеет место

$$a_0 d^4 - k a_1 d^3 + a_2 d^2 - k a_3 d + a_4 = 0. \quad (1.19)$$

Дифференцируя по  $k$ , получаем

$$d'(k) [4a_0 d^3 - 3k a_1 d^2 + 2a_2 d - k a_3] - d(a_1 d^2 + a_3) = 0.$$

Таким образом,  $d'(k) = 0$  влечёт  $d(a_1 d^2 + a_3) = 0$ . Однако  $a_1 d^2 + a_3 > 0$ , а  $d = 0$  противоречит предположению об устойчивости решения.

Поэтому далее будем рассматривать условие  $d'(k) = 0$  только для пары комплексно сопряженных корней  $-d \pm i\omega$ . Перепишем уравнение (1.3) в виде

$$[p^2 + 2dp + d^2 + \omega^2][p^2 - (p_3 + p_4)p + p_3 p_4] = 0.$$

Приравнявая коэффициенты при соответствующих степенях  $p$ , получаем

$$\begin{aligned} 2d - p_3 - p_4 &= \frac{k a_1}{a_0}, \\ 2d(-p_3 - p_4) + p_3 p_4 + d^2 + \omega^2 &= \frac{a_2}{a_0}, \\ (-p_3 - p_4)(d^2 + \omega^2) + 2d p_3 p_4 &= \frac{k a_3}{a_0}, \\ p_3 p_4 (d^2 + \omega^2) &= \frac{a_4}{a_0}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Обозначим  $\zeta = d^2 + \omega^2$ ,  $\eta = p_3 p_4$ . Тогда из (1.20) находим

$$\begin{aligned} \zeta, \eta &= -d \left( \frac{k a_1}{a_0} - 2d \right) + \frac{a_2}{2a_0} \pm \sqrt{\left[ \frac{a_2}{2a_0} - d \left( \frac{k a_1}{a_0} - 2d \right) \right]^2 - \frac{a_4}{a_0}}, \\ \left( \frac{k a_1}{a_0} - 4d \right)^2 \left\{ \left[ \frac{a_2}{2a_0} - d \left( \frac{k a_1}{a_0} - 2d \right) \right]^2 - \frac{a_4}{a_0} \right\} &= \left[ \frac{k a_3}{a_0} - \frac{k a_1 a_2}{a_0^2} - \frac{k a_1 d}{a_0} \left( 2d - \frac{k a_1}{a_0} \right) \right]^2. \end{aligned}$$

Обозначая

$$\psi = \frac{2a_0 d}{a_2} \left( 2d - \frac{k a_1}{a_0} \right),$$

получаем

$$k^2 = \frac{a_2^2}{a_1 a_3} \frac{\psi(\psi^2 + 2\psi + 1 - 4\gamma\theta)}{-\psi - 1 + \theta + \gamma}.$$

Переменная  $\psi$  изменяется в интервале от  $x = \theta + \gamma - 1$  до 0; квадратичный сомножитель в числителе обращается в нуль в точках  $-1 \pm 2\sqrt{\gamma\theta}$ , лежащих вне этого интервала (поскольку  $\theta + \gamma \geq 2\sqrt{\gamma\theta}$ );  $d$  имеет вид

$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{4} \left( \frac{ka_1}{a_0} \pm \sqrt{\frac{k^2 a_1^2}{a_0^2} + 4 \frac{a_2}{a_0} \psi} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{a_2}{a_0 \theta}} \sqrt{\frac{-\psi}{\psi - x}} \left[ \sqrt{\psi^2 + 2\psi + 1 - 4\gamma\theta} + (\psi + 1 - 2\theta) \text{sign}(\theta - \gamma) \right]. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Ответ на вопрос, почему рассматриваются только зависимости  $d(\psi)$ , соответствующие зависимостям  $p(\psi)$ , остающимся комплексными при всех значениях  $\psi$  (т.е.  $\text{Im } p(\psi) \neq 0 \quad \forall \psi \in [x, 0]$ ); для таких ветвей выполнено условие  $d(k = +\infty) = d(\psi = \theta + \gamma - 1) = 0$ , дают следующие два утверждения:

**Утверждение 1:** Луч  $d = d_0$ ,  $\omega > 0$  на комплексной плоскости пересекает кривые  $p(k)$  (решения (1.3)) не более трёх раз.

Для доказательства подставим в (1.3)  $p = d_0 + i\omega$  и выделим действительную и мнимую части. Получим два уравнения:

$$\begin{aligned} a_0 \omega^4 - (6a_0 d_0^2 + 3ka_1 d_0 + a_2) \omega + a_0 d_0^4 + ka_1 d_0^3 + a_2 d_0^2 + ka_3 d_0 + a_4 &= 0, \\ -(4a_0 d_0 + ka_1) \omega^3 + (4a_0 d_0^3 + 3ka_1 d_0^2 + 2a_2 d_0 + ka_3) \omega &= 0. \end{aligned}$$

Из второго уравнения (с учётом  $\omega > 0$ ) выражаем

$$\omega^2 = \frac{4a_0 d_0^3 + 3ka_1 d_0^2 + 2a_2 d_0 + ka_3}{4a_0 d_0 + ka_1}$$

и подставляем в первое уравнение. Обозначая

$$s = 2d_0 \sqrt{a_0/a_2}, \quad \bar{k} = k a_1 / \sqrt{a_0 a_2},$$

приходим к кубическому по  $\bar{k}$  уравнению

$$s^6 + 3\bar{k}s^5 + (3\bar{k}^2 + 2)s^4 + (\bar{k}^3 + 4\bar{k})s^3 + [(\theta + 2)\bar{k}^2 + 1 - 4\gamma\theta]s^2 + [\theta\bar{k}^3 + (1 - 4\gamma\theta)\bar{k}]s + \theta\bar{k}^2(1 - \theta - \gamma) = 0,$$

что и доказывает утверждение.

**Утверждение 2:** Если условие  $d'(k) = 0$  выполнено на ветви  $p(k)$ , содержащей кратный вещественный корень, то оптимум степени устойчивости в этой точке не достигается.

Предположим, что на ветви, содержащей кратный вещественный корень,  $d'(k) = 0$ . Заметим, что достаточно ограничиться подобластью, где конфигурация «кратный вещественный корень» достигается при единственном значении  $k$  (в противном случае оптимум всегда достигается на минимальном по модулю кратном корне). Для того, чтобы условие  $d'(k) = 0$  обеспечивало максимум степени устойчивости, необходимо, чтобы, во-первых,  $d''(k) > 0$ , а во-вторых, чтобы два остальных корня лежали левее этой точки (они лежат на «чисто комплексных» ветвях, точка  $C$  в верхней полуплоскости и симметричная точка в нижней, рис. 1.10).

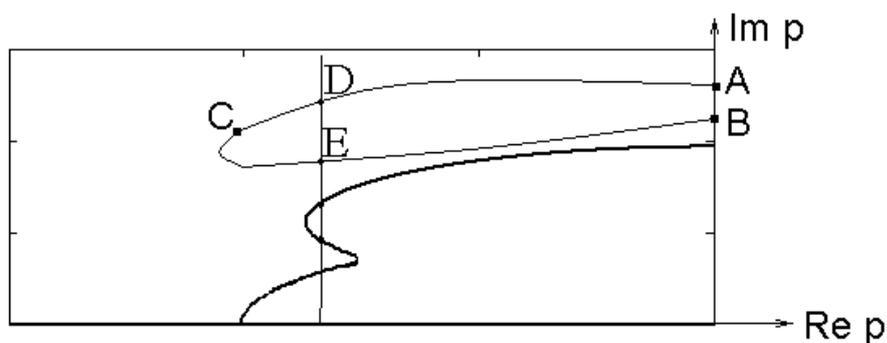


Рис. 1.10.

Но тогда, очевидно, «чисто комплексная» ветвь (начинающаяся в  $A$  и заканчивающаяся в  $B$ ) пересекает луч  $d = d_0 + \varepsilon, \omega > 0$  в двух точках ( $D$  и  $E$ ); в результате будет, по меньшей мере, 4 пересечения, что противоречит *Утверждению 1*.

Вернемся к поиску экстремума. Поскольку  $k'(\psi) = \infty$  только при  $k = 0$  и  $k = +\infty$ , т.е. на границе области определения, то условие  $d'(k) = 0$  эквивалентно условию  $d'(\psi) = 0$ . Последнее, в свою очередь, сводится к уравнению

$$f(\psi) = 2\psi^3(x+y+1) - x\psi^2(3x+2y+6) + 2x\psi(3x-2xy-y^2) - x^2(2x-y^2-2xy) = 0, \quad (1.22)$$

где  $y = 1 - 2\theta$ . Поскольку  $f(0) = x^2(1 - 4\gamma\theta) > 0$  в допустимой области ( $1 - 4\gamma\theta > 1 - 4\theta + 4\theta^2 \geq 0$ ), а  $f(x) = -x^2(x+y)^2 < 0$ , то на допустимом интервале существует от одного до трех экстремумов. В случае 3-х экстремумов рассматривается тот, для которого соответствующее  $d$  минимально; это правомерно, поскольку, в силу *Утверждения 2*, достаточно рассматривать «чисто комплексные» ветви; в силу *Утверждения 1* они имеют единственный экстремум (в противном случае, было бы, по меньшей мере, пять пересечений); в силу того же *Утверждения 1*, если экстремумов больше одного, то минимальный находится на «чисто комплексной» ветви (в противном случае было бы пять пересечений).

Найдём область оптимальности данной конфигурации. Представим (1.3) в виде

$$a_0(p^2 + 2dp + d^2 + \omega^2)[p^2 - (p_3 + p_4)p + p_3p_4] + (k - k_0)p(a_1p^2 + a_3) = 0,$$

где  $k_0$  - значение  $k$ , соответствующее рассматриваемой конфигурации корней. Будем предполагать, что  $-\operatorname{Re} p_3 > d$ ,  $-\operatorname{Re} p_4 > d$ . Сделаем замену  $s = p + d$  и выпишем два из необходимых и достаточных условий устойчивости, а именно, условия  $b_1 > 0$  и  $b_1b_2b_3 - b_0b_3^2 - b_1^2b_4 > 0$  (здесь  $b_i$  обозначают коэффициенты полученного уравнения,  $\hat{k} = k - k_0$ ). Имеем

$$\begin{aligned} \hat{k} &> -\frac{a_0}{a_1}(-p_3 - p_4 - 2d) = \hat{k}_1 < 0, \\ g_2(\hat{k}) &= \alpha_1\hat{k}^3 + \alpha_2\hat{k}^2 + \alpha_3\hat{k} > 0, \end{aligned} \quad (1.23)$$

где

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= -8a_1d^3 - 2a_1^2a_3d < 0, \\ \alpha_3 &= a_1\omega^4 + \left[-2da_1(-p_3 - p_4) + 2a_1d^2 - a_1p_3p_4 - a_3\right]\omega^2 + \\ &\quad + a_1d^4 + 3a_1d^2p_3p_4 - 2d^3a_1(-p_3 - p_4) - a_3d^2 + a_3p_3p_4.\end{aligned}\tag{1.24}$$

При этом оказывается, что

$$g_2(\hat{k}_1) = -\frac{a_0^3}{a_1^2}(-p_3 - p_4 - 2d)^2(a_3 - a_1\omega^2 + 3a_1d^2)^2 < 0.$$

Кроме того, дифференцируя выражения (1.20) по  $k$ , исключая производные

$$\frac{d(-p_3 - p_4)}{dk}, \quad \frac{d(\omega^2)}{dk}, \quad w = \frac{d(p_3p_4)}{dk}$$

и учитывая, что  $d'(k) = 0$ , получаем  $\alpha_3 = 0$ .

Таким образом, имеем

$$g_2(\hat{k}) = \alpha_1\hat{k}^3 + \alpha_2\hat{k}^2, \quad \alpha_1 < 0, \quad \hat{k}_1 < 0, \quad g_2(\hat{k}_1) < 0.$$

Это означает, что необходимые и достаточные условия устойчивости несовместны (см. рис. 1.11).

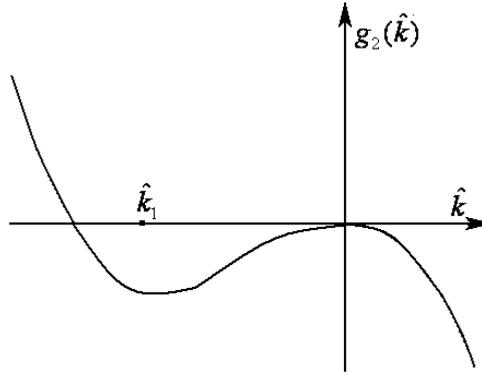


Рис. 1.11

Следовательно, оптимум достигается в точке внутреннего экстремума только при  $-\operatorname{Re} p_3 > d, -\operatorname{Re} p_4 > d$ . При этом на границах с областью, где оптимальной является конфигурация «две пары комплексно сопряжённых корней с одинаковой вещественной частью», имеет место  $d = -\operatorname{Re} p_3 = -\operatorname{Re} p_4$ .

На границах с областью, где оптимальной является конфигурация «три корня с одинаковой вещественной частью», имеет место  $d = -\operatorname{Re} p_3 < -\operatorname{Re} p_4$ . Во всех точках внутри области  $-\operatorname{Re} p_3 > d, -\operatorname{Re} p_4 > d$ .

### 1.2.5. Результаты первого этапа оптимизации

Подводя итог первого этапа оптимизации, сформулируем полученные результаты. Плоскость параметров  $(\theta, \gamma)$  разбита на области, в каждой из которых максимум степени устойчивости достигается на определенной конфигурации корней (см. Таблицу, рис. 1.12).

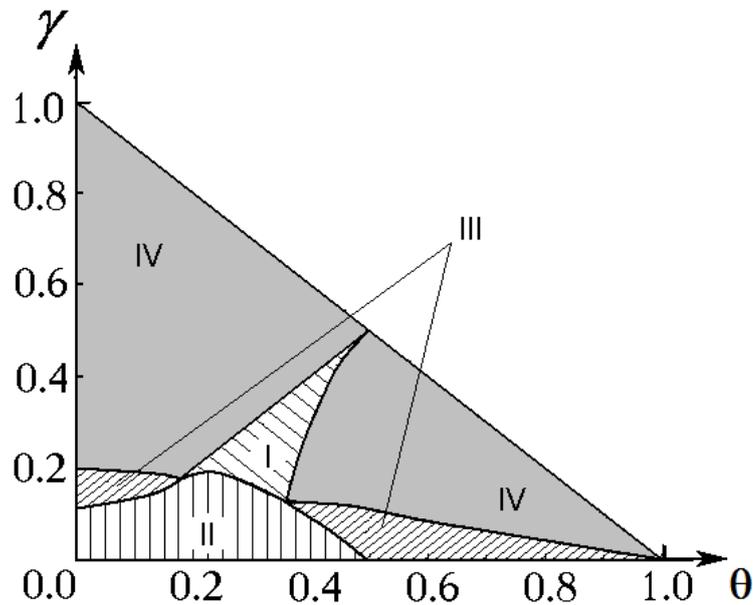


Рис. 1.12

Заметим, что в точках  $(1/6, 1/6)$  и  $(5/14, 9/70)$  сходятся все типы областей. В первом случае уравнение (1.3) имеет 4-х кратный вещественный корень, во втором вещественные части кратного корня и экстремума  $d'(k) = 0$  совпадают.

Поскольку оптимальное значение степени устойчивости всегда можно представить в виде  $g(\theta, \gamma)\sqrt{a_2/a_0}$ , интересно рассмотреть зависимости от  $\theta$

степени устойчивости при фиксированном значении  $a_2/a_0$  (положим его равным 1) и нескольких фиксированных значениях  $\gamma$  (рис. 1.13).

Таблица

	область	конфигурация корней
I	$\gamma > \max \left\{ \frac{(10\theta-1)(1-2\theta)}{16\theta}, \frac{(3\theta-1)(1-\theta)}{\theta} \right\}$ $\gamma < \theta$	$p_{1,2} = -d \pm i\omega_1$ $p_{3,4} = -d \pm i\omega_2$
	$\xi_{\max} = \sqrt{\frac{a_2(1-2\theta)}{4a_0}}; \quad k = \frac{2\sqrt{a_0a_2(1-2\theta)}}{a_1}$	
II	$\gamma > 0, \quad \gamma < \gamma_+ \quad (\theta < 1/6)$ $\gamma < (10\theta-1)(1-2\theta)/16\theta, \quad \theta \geq 1/6$	$p_{1,2} = -d$ $-\operatorname{Re} p_3 > d, \quad -\operatorname{Re} p_4 > d$
	$\xi_{\max} = \sqrt{\chi a_2/a_0},$ <p><math>\chi</math> - минимальный положительный корень уравнения</p> $\chi^3 + (3\theta-1)\chi^2 + (\theta-3\gamma\theta)\chi - \gamma\theta^2 = 0;$ $k = d \frac{4a_0d^2 + 2a_2}{3a_1d^2 + a_3}$	
III	$\gamma_+ < \gamma < \gamma_L \quad \left( \theta < \frac{1}{6} \right)$ $\max \left\{ 0, \frac{(10\theta-1)(1-2\theta)}{16\theta} \right\} < \gamma < \gamma_R, \quad \theta > \frac{5}{14}$	$p_{1,2} = -d \pm i\omega, \quad p_3 = -d$ $p_4 = -d_1, \quad d_1 > d$
	$\xi_{\max} = \sqrt{\chi a_2/a_0}, \text{ где } \chi \text{ - положительный корень уравнения}$ $8\chi^4 + (26\theta-8)\chi^3 + (21\theta^2-11\theta+2-9\gamma\theta)\chi^2 +$ $+ \theta(3\theta-1-14\gamma\theta+5\gamma)\chi + \gamma\theta^2(3\gamma-1+\theta) = 0;$ $k = (a_0d^4 + a_2d^2 + a_4)/d(a_1d^2 + a_3)$	

	область	конфигурация корней
IV	$\gamma_L < \gamma < 1 - \theta \quad (\theta < 1/6)$ $\theta < \gamma < 1 - \theta \quad (1/6 \leq \theta < 1/2)$ $\gamma_R < \gamma < \max \left\{ 1 - \theta, \frac{(3\theta - 1)(1 - \theta)}{\theta} \right\}, \theta > \frac{5}{14}$	$p_{1,2} = -d \pm i\omega$ $-\text{Re } p_3 > d, -\text{Re } p_4 > d$ $d'(k) = 0$
	$\xi_{\max} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{a_2}{a_0}} \frac{1}{\sqrt{\theta}} \sqrt{\frac{-\psi}{\psi - x}} \left( \sqrt{\psi^2 + 2\psi + 1 - 4\gamma\theta} + (\psi + 1 - 2\theta)\text{sign}(\theta - \gamma) \right),$ <p><math>\psi</math> - корень уравнения</p> $2\psi^3(x + y + 1) - x\psi^2(3x + 2y + 6) +$ $+ x\psi(6x - 4xy - 2y^2) - x^2(2x - y^2 - 2xy) = 0,$ <p>лежащий в интервале <math>(x, 0)</math>, <math>x = \theta + \gamma - 1</math>, <math>y = 1 - 2\theta</math>;</p> $k = \sqrt{\frac{a_2^2}{a_1 a_3} \cdot \frac{\psi(\psi^2 + 2\psi + 1 - 4\gamma\theta)}{-\psi - 1 + \theta + \gamma}}$	

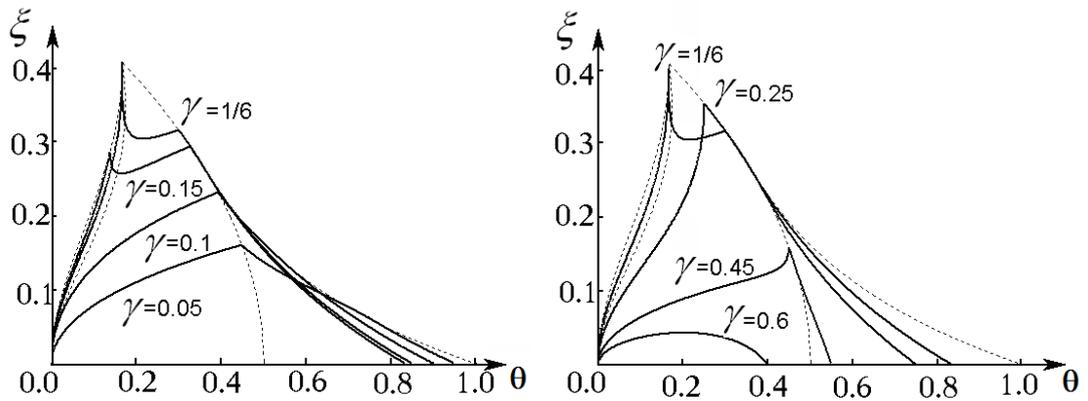


Рис. 1.13

На рис. 1.13 штриховыми линиями показаны образы границ областей I-IV (видно, что некоторые из них являются «оггибающими» графиков  $d(\theta)$ ; на некоторых происходит разрыв производной). Максимальное значение степени

устойчивости достигается при  $\theta = \gamma = 1/6$  и, согласно (9), составляет  $1/\sqrt{6}$ . Приведём также пример зависимости оптимального коэффициента демпфирования от  $\theta$  при фиксированном  $\gamma$  (на рис. 1.14, где  $\gamma = 1/6$ , штриховой линией обозначен образ области I).

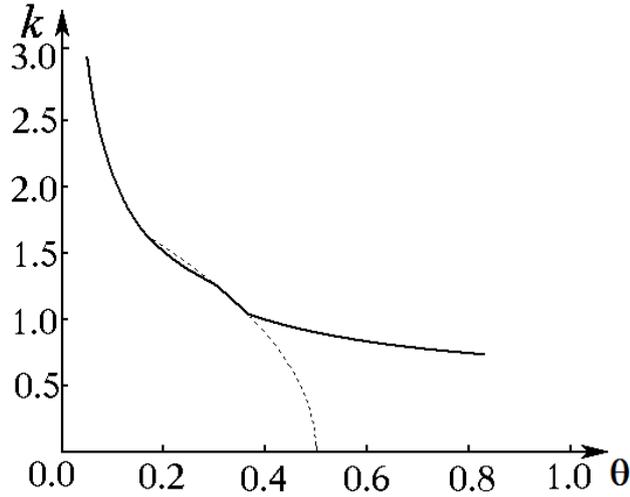


Рис. 1.14.

### 1.3. Второй этап оптимизации

На втором этапе определим оптимальные значения всех параметров системы спутник-стабилизатор для случая, когда шарнир совпадает с центром масс каждого из тел. В соответствии с (1.2), имеем

$$\begin{aligned} a_0 &= \mu^2, & a_1 &= 1 + \mu^2, & a_2 &= 3\mu^2(\lambda_1 + \lambda_2), \\ a_3 &= 3(\lambda_1 + \mu^2\lambda_2), & a_4 &= 9\mu^2\lambda_1\lambda_2. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Вместо использовавшихся выше параметров  $\theta, \gamma$  удобно перейти к таким параметрам  $\rho, \nu$ , что  $\rho$  зависит только от  $\mu$ , а  $\nu$  - только от  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ .

Например, введем параметры

$$\nu = \gamma\theta = \frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}, \quad \rho = \frac{\theta - \theta^2 - \nu}{1 - 4\nu} = \frac{\mu^2}{(1 + \mu^2)^2}. \quad (1.26)$$

На плоскости  $(\rho, \nu)$  допустимая область представляет собой квадрат  $0 < \rho, \nu < 0.25$ ; при этом каждой точке области соответствуют две точки области на плоскости  $(\theta, \gamma)$ , абсциссы которых симметричны относительно  $\theta = 0.5$ .

Заметим, что все полученные выше формулы для оптимальной степени устойчивости представимы в виде

$$\hat{d} = \tilde{g}(\theta, \gamma) \sqrt{a_2/a_0} = g(\rho, \nu) \sqrt{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

При этом величина  $\nu$  определяется лишь отношением  $\lambda_1/\lambda_2$ . Поэтому очевидно, что максимум степени устойчивости достигается в точке  $(\lambda_1, \lambda_2)$  на границе допустимой области  $|\lambda_i| \leq 1$ , т.е. либо  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = b$ , либо  $\lambda_1 = b, \lambda_2 = 1$  ( $b < 1$ ; выражение для  $\nu$  симметрично относительно  $\lambda_1, \lambda_2$ ). Физически это означает, что одно из тел вырождается в пластину. При таких  $\lambda_1, \lambda_2$  имеем

$$1 + \sqrt{1 - 4\nu} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + |\lambda_1 - \lambda_2|}{\lambda_1 + \lambda_2} = 2 \frac{\max\{\lambda_1, \lambda_2\}}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_2},$$

откуда

$$\sqrt{\lambda_1 + \lambda_2} = \sqrt{\frac{2}{1 + \sqrt{1 - 4\nu}}}$$

и, следовательно,

$$\hat{d} = g(\rho, \nu) \sqrt{\frac{2}{1 + \sqrt{1 - 4\nu}}}. \quad (1.27)$$

Анализ выражения (1.27) удобно провести лишь для случая двух пар комплексно сопряжённых корней с одинаковой вещественной частью (заштрихованная область на рис. 1.15). В этом случае  $\theta < 0.5$ , и соответствие этой области с областью на плоскости  $(\theta, \gamma)$  является взаимно однозначным.

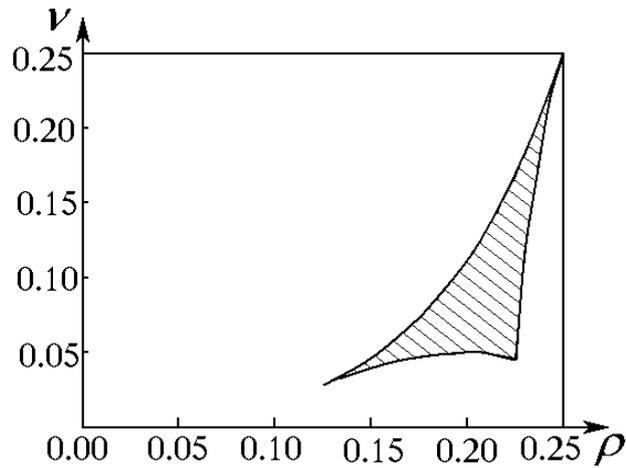


Рис. 1.15

В рассматриваемом случае формула (1.27) принимает вид

$$\hat{d} = \frac{\sqrt[4]{1-4\rho}}{2} \sqrt{\frac{2\sqrt{1-4\nu}}{1+\sqrt{1-4\nu}}},$$

т.е.  $\hat{d}$  есть монотонно убывающая функция  $\rho$  и  $\nu$ . Следовательно, максимум достигается на границе в точке  $(1/8, 1/36)$ , которой в пространстве  $\mu, \lambda_1, \lambda_2$  соответствует два набора оптимальных параметров

- 1)  $\mu = \sqrt{2} + 1, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = (\sqrt{2} - 1)^4;$
- 2)  $\mu = \sqrt{2} - 1, \quad \lambda_1 = (\sqrt{2} - 1)^4, \quad \lambda_2 = 1.$

В первом случае оптимальное значение  $k = \sqrt{6}$ , во втором  $k = \sqrt{6}(\sqrt{2} - 1)^2$ .

Степень устойчивости в обоих случаях  $d_* = \sqrt{3}(\sqrt{2} - 1)$ , при этом характеристическое уравнение имеет 4-х кратный действительный корень.

Докажем, что  $d_*$  действительно является глобальным максимумом степени устойчивости. Подставляя в (1.3)  $w = p + d_*$ , получим

$$\begin{aligned}
& a_0 w^4 + (ka_1 - 4a_0 d_*) w^3 + (a_2 - 3ka_1 d_* + 6a_0 d_*^2) w^2 + \\
& + (ka_3 - 2a_2 d_* + 3ka_1 d_*^2 - 4a_0 d_*^3) w + \\
& + (a_4 - ka_3 d_* + a_2 d_*^2 - ka_1 d_*^3 + a_0 d_*^4) = \\
& = b_0 w^4 + b_1 w^3 + b_2 w^2 + b_3 w + b_4 = 0.
\end{aligned} \tag{1.28}$$

Введём обозначения

$$\frac{a_2}{a_0 d_*^2} = s = \frac{2(\sqrt{2} + 1)^2}{1 + \sqrt{1 - 4\nu}}, \quad \hat{\theta} = \theta_s, \quad \hat{k} = \frac{ka_1}{a_0 d_*}. \tag{1.29}$$

Тогда необходимые и достаточные условия устойчивости принимают вид

$$\hat{k} > 4, \tag{1.30.1}$$

$$\hat{k} > (2s + 4) / (\hat{\theta} + 3), \tag{1.30.2}$$

$$\hat{k} < (1 + s + \nu s^2) / (\hat{\theta} + 1), \tag{1.30.3}$$

$$\begin{aligned}
f(\hat{k}) = & (-2\hat{\theta} - 8)\hat{k}^3 + [-\hat{\theta}^2 + (s + 4)\hat{\theta} - \nu s^2 + 8s + 48]\hat{k}^2 + \\
& + [-96 - 32s - (2 - 8\nu)s^2]\hat{k} + 64 + 32s + (4 - 16\nu)s^2 > 0,
\end{aligned} \tag{1.30.4}$$

откуда, в частности, следует

$$\hat{k} < 2 + s/3. \tag{1.30.5}$$

Сравнивая (1.30.1) и (1.30.5), получаем  $s > 6$ , откуда  $\nu > 1/36$ . Заметим далее,

что

$$f(4) = -4[2\hat{k} - (s - 4)]^2 \leq 0, \quad f'(4) = -2[2\hat{k} - (s - 4)][2\hat{k} - (s - 12)], \tag{1.31}$$

т.е. при  $\hat{k} = 4$  многочлен из условия (1.30.4) отрицателен за исключением случая, когда  $2\hat{\theta} - (s - 4) = 0$ . Построим соответствующую кривую на плоскости  $(\rho, \nu)$  совместно с линией  $\nu = 1/36$  (рис. 1.16).

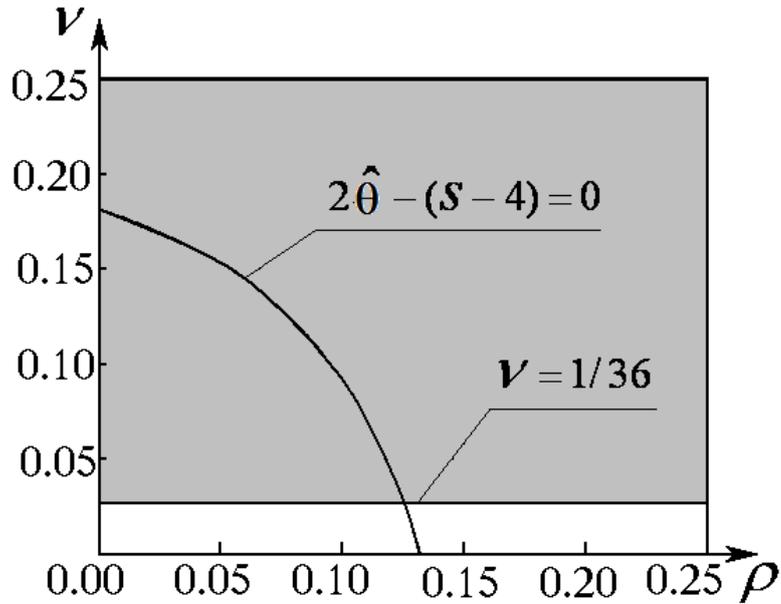


Рис. 1.16

Заметим, что кривая  $2\hat{\theta} - (s-4) = 0$  соответствует «листу», где  $\theta < 0.5$  (поскольку из  $2\hat{\theta} - (s-4) = 0$  следует  $\theta = (s-4)/2s < 0.5$ ). Правее этой кривой на данном листе, а также на всём листе, где  $\theta > 0.5$ , как следует из (1.31),  $f'(4) < 0$ , поскольку при  $\nu \in (0, 0.25)$

$$s \in \left( (\sqrt{2} + 1)^2, 2(\sqrt{2} + 1)^2 \right) \approx (5.83, 11.66).$$

Далее, график функции

$$f'(k) = -6(\hat{\theta} + 4)\hat{k}^2 - 2\left[\hat{\theta}^2 - \hat{\theta}(s+4) + \nu s^2 - 8s - 48\right]\hat{k} - 96 - 32s - 2(1-4\nu)s^2$$

есть парабола, направленная ветвями вниз. Несложно показать, что всюду в допустимой области точка 4 лежит правее вершины параболы, т.е.

$$\frac{-\hat{\theta}^2 + \hat{\theta}(s+4) - \nu s^2 + 8s + 48}{6\hat{k} + 24} < 4. \quad (1.32)$$

Из (1.32) следует, что даже при наличии у функции  $f(\hat{k})$  экстремумов точка  $\hat{k} = 4$  лежит в этом случае правее них, а поэтому  $f(\hat{k}) < 0$  не только при  $\hat{k} = 4$ , но и при  $\hat{k} > 4$ . Таким образом, показана несовместность условий (1.30).

Рассмотрим теперь область  $\nu > 1/36$ , лежащую левее кривой  $2\hat{\theta} - (s-4) = 0$  на листе  $\theta < 0.5$ . В этой области  $f'(4) > 0$ , но, по-прежнему,  $f(4) < 0$ . Поскольку, очевидно,  $f(-\infty) = +\infty$  и  $f(+\infty) = -\infty$ , то ситуация, когда  $f(\hat{k}) > 0$  в каких-то точках правее  $\hat{k} = 4$ , возможна только, если уравнение  $f(\hat{k}) = 0$  имеет более одного корня. Найдём область, на плоскости  $(\rho, \nu)$ , в которой это имеет место. Для нахождения её границ решаем совместно уравнения  $f(\hat{k}) = 0$  и  $f'(\hat{k}) = 0$ , что приводит к уравнению 4-го порядка, которое ввиду его громоздкости здесь не приводится. Решая его численно, получаем область существования 3-х корней (на рис. 1.17 заштрихована).

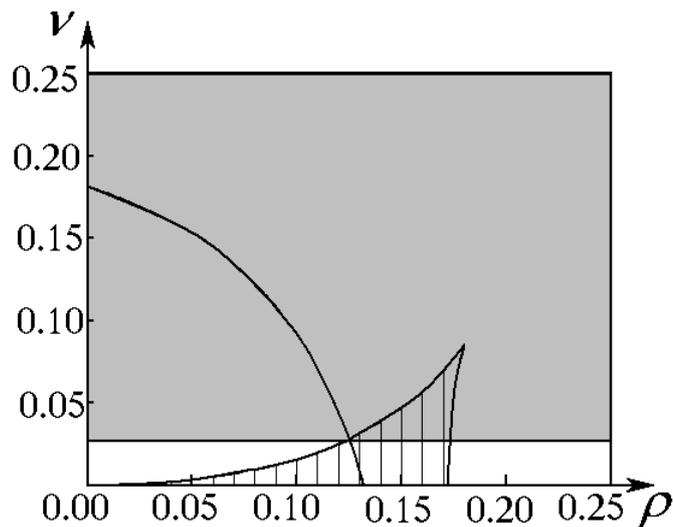


Рис. 1.17

Граница полученной области проходит непосредственно через точку  $(1/8, 1/36)$ . Таким образом, область левее кривой  $2\hat{\theta} - (s-4) = 0$  (и  $\nu > 1/36$ ) и область 3-х корней не пересекаются. Поэтому из  $f(4) < 0$  следует, что и при  $\hat{k} > 4$  имеет место  $f(\hat{k}) < 0$ , т.е. и в этом случае условия (1.30) несовместны.

Наконец, рассмотрим точки, лежащие непосредственно на кривой  $2\hat{\theta} - (s-4) = 0$ . Из проведенного выше анализа следует, что хотя теперь  $f(4) = 0$ , но всюду правее  $f(\hat{k}) < 0$ , и снова условия (1.30) несовместны.

Тем самым, показано, что всюду в допустимой области изменения

параметров  $(\rho, \nu)$  необходимые и достаточные условия устойчивости уравнения (1.30) не выполнены, т.е. оно имеет корни в правой полуплоскости. Это означает, что оптимум действительно достигается в точке  $(1/8, 1/36)$ . При этом максимальная степень устойчивости  $d_* = \sqrt{3}(\sqrt{2}-1)$  достигается при следующих значениях параметров:

$$1) \mu = \sqrt{2} + 1, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = (\sqrt{2} - 1)^4, \quad k = \sqrt{6} ;$$

$$2) \mu = \sqrt{2} - 1, \quad \lambda_1 = (\sqrt{2} - 1)^4, \quad \lambda_2 = 1, \quad k = \sqrt{6}(\sqrt{2} - 1)^2 .$$

Таким образом, при отсутствии упругой связи максимальная степень устойчивости примерно в 1,6 раза меньше, чем при оптимальном выборе коэффициента упругости – в этом случае она составляет  $\sqrt{3}/\sqrt[4]{5}$  [25, 35].

## Глава 2. Оптимальные параметры спутника с модельным демпфированием.

В данной главе рассматривается задача об оптимальном гашении угловой скорости твердого тела. Механизм демпфирования, названный модельным, предполагает, что на теле вдоль трех фиксированных осей установлены устройства, вырабатывающие моменты, пропорциональные величинам проекций угловой скорости тела на эти оси [8, 9]. Целью исследования является определение параметров системы, при которых скорость демпфирования максимальна. Оптимизация проводится аналитически по ориентации осей моментных устройств в теле и коэффициентам демпфирования.

### 2.1. Постановка задачи.

Рассматривается твердое тело, на котором для гашения угловой скорости по трем осям (определяемых ортами  $\mathbf{e}_i$ ) установлены устройства, вырабатывающие управляющие моменты, пропорциональные проекциям угловой скорости тела на эти оси: суммарный момент есть

$$\mathbf{M} = M_1 \mathbf{e}_1 + M_2 \mathbf{e}_2 + M_3 \mathbf{e}_3,$$

где  $M_i = -k_i(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}_i)$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  - угловая скорость тела. Предполагается, что остальными моментами, действующими на тело, можно пренебречь; это имеет место, например, для космического аппарата (спутника) на достаточно большом расстоянии от притягивающего центра. В этом случае, в главных центральных осях уравнения углового движения тела запишутся в виде

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 + \sum_{i=1}^3 k_i(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}_i)(\mathbf{e}_i, \mathbf{E}_1) &= 0, \\ I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_3 \omega_1 + \sum_{i=1}^3 k_i(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}_i)(\mathbf{e}_i, \mathbf{E}_2) &= 0, \\ I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 + \sum_{i=1}^3 k_i(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}_i)(\mathbf{e}_i, \mathbf{E}_3) &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь  $\omega_i$  - проекции угловой скорости тела на его главные центральные оси инерции; тензор инерции в этих осях имеет диагональный вид  $\mathbf{I} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$ ;  $\mathbf{E}_i$  - орты главных центральных осей инерции тела. Система (2.1) имеет тривиальное решение  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$ . Следуя [9], линеаризуем ее в окрестности этого решения. Обозначим  $(\mathbf{e}_i, \mathbf{E}_j) = a_{ij}$ , тогда

$$\begin{aligned} M_i = (\mathbf{M}, \mathbf{E}_i) &= -\sum_{j=1}^3 k_j (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}_j) (\mathbf{e}_j, \mathbf{E}_i) = -\sum_{j=1}^3 k_j \left( \sum_{s=1}^3 \omega_s a_{js} \right) a_{ji} = \\ &= -\sum_{s=1}^3 \omega_s \left( \sum_{j=1}^3 k_j a_{js} a_{ji} \right) = -\sum_{s=1}^3 m_{is} \omega_s, \end{aligned}$$

где

$$m_{is} = \sum_{j=1}^3 k_j a_{js} a_{ji}.$$

Таким образом,  $\mathbf{M} = -\mathbf{m}\boldsymbol{\omega}$ , причем матрица  $\mathbf{m}$  симметричная. Известно [8], что систему, в которой моментные устройства установлены по трем произвольным осям, всегда можно свести к системе, в которой эти оси являются взаимно перпендикулярными. В дальнейшем считаем, что орты  $\mathbf{e}_i$  образуют правую тройку взаимно ортогональных векторов, ориентация которой относительно главных центральных осей определяется ортогональной матрицей  $\mathbf{A}$ . Тогда

$$\mathbf{m} = \mathbf{A}^T \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix} \mathbf{A}.$$

С учетом введенных обозначений, линеаризация (2.1) приводит к системе

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 + m_{11} \omega_1 + m_{12} \omega_2 + m_{13} \omega_3 &= 0, \\ I_2 \dot{\omega}_2 + m_{21} \omega_1 + m_{22} \omega_2 + m_{23} \omega_3 &= 0, \\ I_3 \dot{\omega}_3 + m_{31} \omega_1 + m_{32} \omega_2 + m_{33} \omega_3 &= 0. \end{aligned}$$

характеристическое уравнение которой, с учетом выражений для  $m_{ij}$  и ортогональности  $\mathbf{A}$ , имеет вид<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}
 & I_1 I_2 I_3 p^3 + \left[ k_1 (I_2 I_3 a_{11}^2 + I_3 I_1 a_{12}^2 + I_1 I_2 a_{13}^2) + k_2 (I_2 I_3 a_{21}^2 + I_3 I_1 a_{22}^2 + I_1 I_2 a_{23}^2) + \right. \\
 & \quad \left. + k_3 (I_2 I_3 a_{31}^2 + I_3 I_1 a_{32}^2 + I_1 I_2 a_{33}^2) \right] p^2 + \\
 & \quad + \left[ k_1 k_2 (I_1 a_{31}^2 + I_2 a_{32}^2 + I_3 a_{33}^2) + k_2 k_3 (I_1 a_{11}^2 + I_2 a_{12}^2 + I_3 a_{13}^2) + \right. \\
 & \quad \left. + k_3 k_1 (I_1 a_{21}^2 + I_2 a_{22}^2 + I_3 a_{23}^2) \right] p + k_1 k_2 k_3 = 0.
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Если ввести обозначения

$$\begin{aligned}
 J_i &= I_1 a_{i1}^2 + I_2 a_{i2}^2 + I_3 a_{i3}^2, \\
 L_i &= I_2 I_3 a_{i1}^2 + I_3 I_1 a_{i2}^2 + I_1 I_2 a_{i3}^2, \quad (i=1, 2, 3) \\
 \bar{k}_i &= k_i / J_i,
 \end{aligned}$$

то уравнение (2.2) принимает вид

$$\begin{aligned}
 & I_1 I_2 I_3 p^3 + (\bar{k}_1 J_1 L_1 + \bar{k}_2 J_2 L_2 + \bar{k}_3 J_3 L_3) p^2 + \\
 & \quad + (\bar{k}_1 \bar{k}_2 + \bar{k}_2 \bar{k}_3 + \bar{k}_3 \bar{k}_1) J_1 J_2 J_3 p + \bar{k}_1 \bar{k}_2 \bar{k}_3 J_1 J_2 J_3 = 0.
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

В данной главе решается задача оптимизации степени устойчивости для системы с модельным демпфированием; сначала она решается для уравнения (2.3); в дальнейшем полученные результаты применяются для аналогичного анализа уравнения (2.2), результаты которого, вероятно, имеют большее практическое значение с учетом того, что для реальных систем, как правило, существуют ограничения именно на абсолютную величину коэффициентов управления  $k_i$ . В обоих случаях, задача решается в два этапа. Сначала находится оптимальное расположение осей демпфирования в тела спутника, а затем определяются оптимальные значения коэффициентов моментных устройств.

---

<sup>1</sup> Отметим, что аналогичный вид характеристическое уравнение имеет для следующей активной системы: вдоль осей  $\mathbf{e}_i$  установлены управляющие маховики, изменение кинетического момента которых задается законом  $\dot{H}_i = k_i (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}_i)$ ,  $H_i(0) = 0$ . Управляющие моменты, пропорциональные проекциям угловой скорости, могут также быть реализованы при использовании электроракетных двигателей [33].

При проведении исследования степени устойчивости уравнений (2.2) и (2.3) будет использоваться ряд соотношений между величинами  $J_i$  и  $L_i$ , отражающих некоторые экстремальные свойства главных центральных осей твердого тела. Для любого твердого тела выполняются следующие неравенства:

$$I_1 I_2 I_3 \leq J_1 J_2 J_3 \leq \left( \frac{I_1 + I_2 + I_3}{3} \right)^3, \quad (2.4)$$

причем левое равенство в (2.4) достигается только при коллинеарности осей демпфирования и главных центральных осей (порядок соответствия осей значения не имеет), а правое равенство имеет место при  $J_1 = J_2 = J_3$ ;

$$J_1 J_2 J_3 \geq J_i L_i, \quad i = 1, 2, 3; \quad (2.5)$$

$$J_i L_i \geq I_1 I_2 I_3, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.6)$$

Отметим, что в (2.6) равенство также достигается при коллинеарности осей демпфирования и главных центральных осей.

Неравенства (2.4)-(2.6) доказаны в [9]. Дополнительно потребуется также соотношение

$$I_1^2 I_2^2 I_3^2 \leq L_1 L_2 L_3, \quad (2.7)$$

в котором равенство снова достигается только при коллинеарности осей демпфирования и главных центральных осей инерции тела. Приведем доказательство (2.7). Сначала рассмотрим выражение  $L_1 L_3$ . Имеем

$$\begin{aligned} L_1 L_3 &= (I_2 I_3 a_{11}^2 + I_1 I_3 a_{12}^2 + I_1 I_2 a_{13}^2)(I_2 I_3 a_{31}^2 + I_1 I_3 a_{32}^2 + I_1 I_2 a_{33}^2) = \\ &= I_2^2 I_3^2 a_{11}^2 a_{31}^2 + I_1^2 I_3^2 a_{12}^2 a_{32}^2 + I_1^2 I_2^2 a_{13}^2 a_{33}^2 + I_1 I_2 I_3^2 (a_{11}^2 a_{32}^2 + a_{12}^2 a_{31}^2) + \\ &+ I_1^2 I_2 I_3 (a_{12}^2 a_{33}^2 + a_{13}^2 a_{32}^2) + I_1 I_2^2 I_3 (a_{12}^2 a_{31}^2 + a_{11}^2 a_{33}^2) = \\ &= (I_2 I_3 a_{11} a_{31} + I_1 I_3 a_{12} a_{32} + I_1 I_2 a_{13} a_{33})^2 + I_1 I_2 I_3^2 (a_{11} a_{32} - a_{12} a_{31})^2 + \\ &+ I_1^2 I_2 I_3 (a_{12} a_{33} - a_{13} a_{32})^2 + I_1 I_2^2 I_3 (a_{13} a_{31} - a_{11} a_{33})^2. \end{aligned}$$

С учетом очевидных соотношений

$$a_{21}^2 = (a_{12} a_{33} - a_{13} a_{32})^2, \quad a_{22}^2 = (a_{13} a_{31} - a_{11} a_{33})^2, \quad a_{23}^2 = (a_{11} a_{32} - a_{12} a_{31})^2$$

получаем

$$\begin{aligned}
L_1L_3 &= (I_2I_3a_{11}a_{31} + I_1I_3a_{12}a_{32} + I_1I_2a_{13}a_{33})^2 + \\
&+ I_1I_2I_3^2a_{23}^2 + I_1^2I_2I_3a_{21}^2 + I_1I_2^2I_3a_{22}^2 = \\
&= (I_2I_3a_{11}a_{31} + I_1I_3a_{12}a_{32} + I_1I_2a_{13}a_{33})^2 + I_1I_2I_3J_2.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Далее, для выражения  $J_2L_2$  в [9] было получено

$$\begin{aligned}
J_2L_2 &= I_1I_2I_3 + I_1(I_2 - I_3)^2 a_{22}^2 a_{23}^2 + \\
&+ I_2(I_3 - I_1)^2 a_{23}^2 a_{21}^2 + I_3(I_1 - I_2)^2 a_{21}^2 a_{22}^2.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

С использованием полученных соотношений выражение  $f = L_1L_2L_3$  приводится к виду

$$\begin{aligned}
f &= I_1^2I_2^2I_3^2 + I_1^2I_2I_3(I_2 - I_3)^2 a_{22}^2 a_{23}^2 + I_1I_2^2I_3(I_3 - I_1)^2 a_{23}^2 a_{21}^2 + I_1I_2I_3^2(I_1 - I_2)^2 a_{21}^2 a_{22}^2 + \\
&+ (I_2I_3a_{21}^2 + I_1I_3a_{22}^2 + I_1I_2a_{23}^2)(I_2I_3a_{11}a_{31} + I_1I_3a_{12}a_{32} + I_1I_2a_{13}a_{33})^2,
\end{aligned} \text{от}$$

куда следует неравенство  $L_1L_2L_3 \geq I_1^2I_2^2I_3^2$ , причем равенство возможно только при одновременном выполнении условий

$$a_{21}a_{22} = 0, \quad a_{22}a_{23} = 0, \quad a_{23}a_{21} = 0; \tag{2.10}$$

$$I_2I_3a_{11}a_{31} + I_1I_3a_{12}a_{32} + I_1I_2a_{13}a_{33} = 0. \tag{2.11}$$

Кроме того, напомним, что в силу ортогональности матрицы  $\mathbf{A}$

$$a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33} = 0. \tag{2.12}$$

Анализ системы (2.10) – (2.12) при  $I_1 \neq I_2 \neq I_3$  показывает, что равенство в (2.9) возможно в следующих шести случаях (здесь приведены только ненулевые элементы матрицы  $\mathbf{A}$ ):

$$\begin{aligned}
1). \quad a_{11}^2 = a_{22}^2 = a_{33}^2 = 1; & \quad 2). \quad a_{11}^2 = a_{23}^2 = a_{32}^2 = 1; \\
3). \quad a_{12}^2 = a_{21}^2 = a_{33}^2 = 1; & \quad 4). \quad a_{12}^2 = a_{23}^2 = a_{31}^2 = 1; \\
5). \quad a_{13}^2 = a_{21}^2 = a_{32}^2 = 1; & \quad 6). \quad a_{13}^2 = a_{22}^2 = a_{31}^2 = 1.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Из вида решений (2.13) следует, что все они отвечают ситуациям, в которых оси главной центральной системы координат и системы координат, связанной с осями демпфирования, совпадают. Разумеется, среди решений (2.13) надо оставить лишь те, которые отвечают правой системе координат, т.е. удовлетворяют условию  $|\mathbf{A}| = 1$ .

## 2.2. Оптимизация степени устойчивости

Рассмотрим сначала задачу максимизации степени устойчивости  $\xi$  для уравнения (2.3). Будем предполагать, что допустимые множества изменения нормированных коэффициентов демпфирования  $\bar{k}_i$  есть  $0 \leq \bar{k}_i \leq K_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

На первом этапе ищется

$$\xi_1(\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3) = \max_{a_{ij}} \xi(\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3, a_{ij}).$$

Ответ на вопрос о максимальном значении степени устойчивости и оптимальной ориентации осей демпфирования дает следующее утверждение.

**Теорема 1:** *Максимум степени устойчивости достигается в случае, когда оси демпфирования параллельны главным центральным осям. При этом  $\xi_1 = \max_{a_{ij}} \xi = \min_i \bar{k}_i$ .*

**Доказательство:** Пусть для определенности  $\min_i \bar{k}_i = \bar{k}_3$ .

**1<sup>0</sup>.** Покажем, что значение степени устойчивости  $\xi = \bar{k}_3$  достигается. Действительно, пусть оси демпфирования параллельны главным центральным осям. Тогда (см. раздел 2.1)

$$J_1 J_2 J_3 = I_1 I_2 I_3, \quad J_1 L_1 = J_2 L_2 = J_3 L_3 = I_1 I_2 I_3,$$

и (2.3) приводится к виду

$$I_1 I_2 I_3 (p + \bar{k}_1)(p + \bar{k}_2)(p + \bar{k}_3) = 0.$$

Степень устойчивости при этом, очевидно, равна  $\bar{k}_3$ .

**2<sup>0</sup>.** Докажем, что невозможно получить степень устойчивости, большую  $\bar{k}_3$ . Для этого воспользуемся подходом, предложенным в [25]: а именно, сделаем в (2.3) замену переменной  $s = p + \bar{k}_3$  и покажем, что полученное в результате уравнение  $b_0 s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + b_3 = 0$  имеет корни, лежащие на мнимой оси или в

правой полуплоскости. Чтобы убедиться в этом, достаточно показать несовместность условий  $b_2 > 0$  и  $b_3 > 0$ , которые имеют вид

$$3I_1I_2I_3\bar{k}_3^2 - 2\bar{k}_3 \sum_{i=1}^3 \bar{k}_i J_i L_i + J_1 J_2 J_3 (\bar{k}_1 \bar{k}_2 + \bar{k}_1 \bar{k}_3 + \bar{k}_2 \bar{k}_3) > 0, \quad (2.14)$$

$$\left[ \bar{k}_1 (J_1 L_1 - J_1 J_2 J_3) + \bar{k}_2 (J_2 L_2 - J_1 J_2 J_3) + \bar{k}_3 (J_3 L_3 - I_1 I_2 I_3) \right] > 0. \quad (2.15)$$

Для доказательства несовместности системы (2.14), (2.15) рассмотрим систему, являющуюся ее следствием: первое неравенство является суммой (2.14) и (2.15) с весами  $1/\bar{k}_3^2$  и  $2/\bar{k}_3$ , а второе неравенство есть (2.15), умноженное на  $1/\bar{k}_3$ .

Тогда, обозначая  $\sigma_1 = \bar{k}_1/\bar{k}_3$ ,  $\sigma_2 = \bar{k}_2/\bar{k}_3$  (очевидно,  $\sigma_1 \geq 1$ ,  $\sigma_2 \geq 1$ ), получим

$$(\sigma_1 - 1)(\sigma_2 - 1) > 1 - I_1 I_2 I_3 / J_1 J_2 J_3, \quad (2.16)$$

$$(J_1 J_2 J_3 - J_1 L_1) \sigma_1 + (J_1 J_2 J_3 - J_2 L_2) \sigma_2 < J_3 L_3 - I_1 I_2 I_3. \quad (2.17)$$

С учетом (2.4), (2.5), (2.6) неравенство (2.16) определяет в допустимой области  $\sigma_1 \geq 1$ ,  $\sigma_2 \geq 1$  на плоскости  $(\sigma_1, \sigma_2)$  область над ветвью гиперболы, а (2.17) - область под отрезком. Очевидно, достаточно рассмотреть случай, когда точка (1,1) удовлетворяет (2.16), поскольку в противном случае пересечение области (2.17) и допустимой области пусто. Характерный вид областей (2.16), (2.17) в этом случае приведен на рис. 2.1. Геометрически несовместность (2.16), (2.17) означает, что точка касания гиперболы и прямой, параллельной отрезку, лежит вне области, определяемой (2.17). Координаты этой точки касания есть

$$\sigma_1^* = 1 + \sqrt{\frac{J_1 J_2 J_3 - J_2 L_2}{J_1 J_2 J_3 - J_1 L_1} (1 - I_1 I_2 I_3 / J_1 J_2 J_3)},$$

$$\sigma_2^* = 1 + \sqrt{\frac{J_1 J_2 J_3 - J_1 L_1}{J_1 J_2 J_3 - J_2 L_2} (1 - I_1 I_2 I_3 / J_1 J_2 J_3)}.$$

Требуется доказать, что  $(\sigma_1^*, \sigma_2^*)$  не удовлетворяет (2.17), т.е.

$$\begin{aligned} 2\sqrt{(J_1 J_2 J_3 - J_1 L_1)(J_1 J_2 J_3 - J_2 L_2)(1 - I_1 I_2 I_3 / J_1 J_2 J_3)} &\geq \\ &\geq \sum_{i=1}^3 J_i L_i - 2J_1 J_2 J_3 - I_1 I_2 I_3. \end{aligned} \quad (2.18)$$

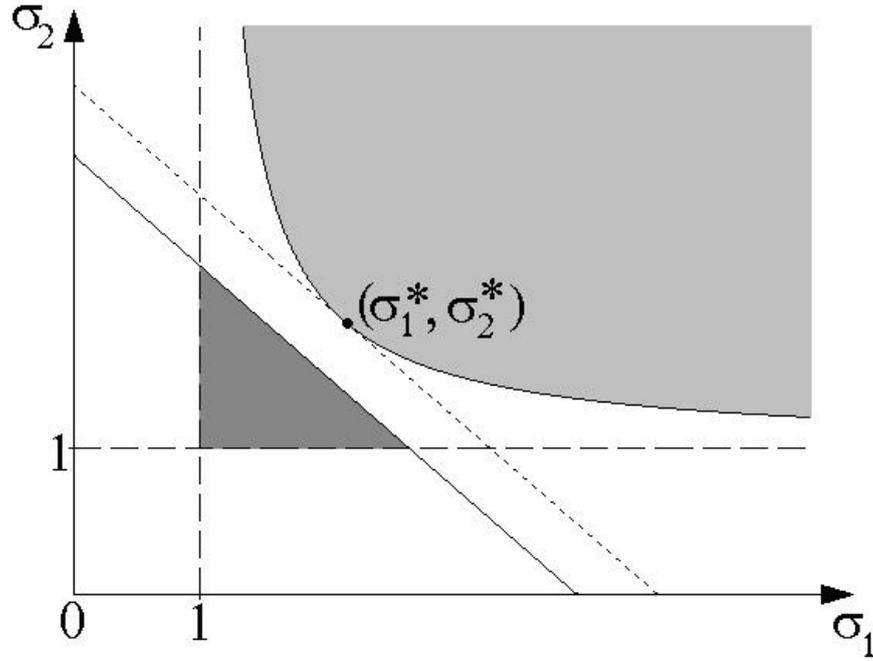


Рис. 2.1.

В случае, если правая часть (2.18) отрицательна, неравенство очевидно; в противном случае, возведение в квадрат и учет (2.6) дает

$$\begin{aligned}
 & 4(J_1J_2J_3 - J_1L_1)(J_1J_2J_3 - J_2L_2)(J_1J_2J_3 - I_1I_2I_3) \geq \\
 & \geq 4(J_1J_2J_3 - J_1L_1)(J_1J_2J_3 - J_2L_2)(J_1J_2J_3 - J_3L_3) \equiv \\
 & \equiv J_1J_2J_3 \left( \sum_{i=1}^3 J_iL_i - 2J_1J_2J_3 - I_1I_2I_3 \right)^2.
 \end{aligned}$$

Заметим, что справедливость тождества

$$\begin{aligned}
 & 4(J_1J_2J_3 - J_1L_1)(J_1J_2J_3 - J_2L_2)(J_1J_2J_3 - J_3L_3) \equiv \\
 & \equiv J_1J_2J_3 \left( \sum_{i=1}^3 J_iL_i - 2J_1J_2J_3 - I_1I_2I_3 \right)^2. \tag{2.19}
 \end{aligned}$$

устанавливается с использованием символьных вычислений на ЭВМ. Таким образом, (2.18) выполнено, и, тем самым, невозможность достижения  $\xi > \bar{k}_3$  доказана.

*Следствия:*

- 1) Второй этап оптимизации в данном случае также оказывается тривиальным. Максимум степени устойчивости  $\xi_2 = \min_i K_i$  достигается при  $\bar{k}_1 = \bar{k}_2 = \bar{k}_3 = \min_i K_i$ .
- 2) В [9] была сформулирована гипотеза о том, что в случае  $\bar{k}_1 = \bar{k}_2 = \bar{k}_3 = k$  оптимум степени устойчивости достигается, когда уравнение (2.9) имеет трехкратный действительный корень. Как видим, эта гипотеза действительно оказывается верной, так как при такой конфигурации корней степень устойчивости равна  $k$ .

Доказанная теорема полностью решает вопрос об оптимальной степени устойчивости для уравнения (2.3). Отметим, однако, что для реальных демпфирующих устройств, как правило, существуют ограничения на параметры  $k_i$  ( $0 \leq k_i \leq K_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ), а не  $\bar{k}_i = k_i/J_i$ . В связи с этим, интерес представляет оптимизация степени устойчивости уравнения (2.2), которое перепишем в виде

$$I_1 I_2 I_3 p^3 + (k_1 L_1 + k_2 L_2 + k_3 L_3) p^2 + (k_1 k_2 J_3 + k_2 k_3 J_1 + k_3 k_1 J_2) p + k_1 k_2 k_3 = 0. \quad (2.20)$$

На первом этапе, будем проводить оптимизацию степени устойчивости (2.20) по ориентации осей демпфирования:

$$\xi_1(k_1, k_2, k_3) = \max_{a_{ij}} \xi(k_1, k_2, k_3, a_{ij}).$$

Пусть для определенности

$$k_1 \leq k_2 \leq k_3, \quad (2.21)$$

$$I_1 \leq I_2 \leq I_3. \quad (2.22)$$

**Теорема 2:** Максимум степени устойчивости уравнения (2.20)

определяется формулой

$$\xi_1(k_1, k_2, k_3) = \min\{k_1/I_1, k_2/I_2, k_3/I_3\}. \quad (2.23)$$

*Доказательство:*

Достижимость степени устойчивости, определяемой (2.23), очевидна: если 1-е моментное устройство расположено вдоль 1-й главной центральной оси, 2-е – вдоль 2-й, 3-е – вдоль 3-й, то характеристическое уравнение принимает вид

$$(I_1 p + k_1)(I_2 p + k_2)(I_3 p + k_3) = 0.$$

Доказательство невозможности достижения большей степени устойчивости проведем отдельно для трех случаев.

**1<sup>0</sup>.** Пусть  $k_1/I_1 = \min\{k_1/I_1, k_2/I_2, k_3/I_3\}$ . Предположим, что при некоторой ориентации осей демпфирования  $\xi_1(k_1, k_2, k_3) > k_1/I_1$ . В силу Теоремы 1, степень устойчивости при этом не превышает  $\min\{k_1/J_1; k_2/J_2; k_3/J_3\}$  и, следовательно, не превышает  $k_1/J_1$ . Однако  $k_1/J_1 \leq k_1/I_1$  в силу (2.22) и определения  $J_1$ . Полученное противоречие доказывает теорему.

**2<sup>0</sup>.** Пусть

$$k_2/I_2 = \min\{k_1/I_1, k_2/I_2, k_3/I_3\}. \quad (2.24)$$

Доказательство того, что  $\xi_1(k_1, k_2, k_3) = k_2/I_2$ , будем проводить аналогично доказательству Теоремы 1: сделаем в (2.20) замену переменных  $s = p + k_2/I_2$  и покажем, что получающееся в результате уравнение  $b_0 s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + b_3 = 0$  имеет корни, лежащие на мнимой оси или правее. Для доказательства этого факта достаточно показать несовместность условий  $b_2 \cdot k_2/I_2 + b_3 > 0$  и  $b_3 > 0$  (из чего следует несовместность системы условий  $b_2 > 0, b_3 > 0$ ). Вводя параметры

$\sigma_1 = \frac{k_1/I_1}{k_2/I_2}$ ,  $\sigma_3 = \frac{k_3/I_3}{k_2/I_2}$ , эти условия можно записать в виде

$$f_1(\sigma_1, \sigma_3) = \sigma_1 \sigma_3 - \frac{\sigma_1 L_1}{I_2 I_3} - \frac{\sigma_3 L_3}{I_1 I_2} + 2 - \frac{L_2}{I_1 I_3} > 0, \quad (2.25.1)$$

$$f_2(\sigma_1, \sigma_3) = \left(1 - \frac{J_2}{I_2}\right) \sigma_1 \sigma_3 - \left(\frac{J_3}{I_3} - \frac{L_1}{I_2 I_3}\right) \sigma_1 - \left(\frac{J_1}{I_1} - \frac{L_3}{I_1 I_2}\right) \sigma_3 - 1 + \frac{L_2}{I_1 I_2} > 0. \quad (2.25.2)$$

Отметим, что из определений  $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$ , а также из (2.21) и (2.24) следует, что

$$1 \leq \sigma_1 \leq \frac{I_2}{I_1}, \quad \sigma_3 \geq 1, \quad \sigma_3 \geq \sigma_1 \frac{I_1}{I_3}. \quad (2.26)$$

Будем говорить, что точки на плоскости  $(\sigma_1, \sigma_3)$ , удовлетворяющие (2.26), образуют допустимую область изменения этих величин. Заметим также, что из сравнения предполагаемой оптимальной степени устойчивости с величинами  $k_1/J_1$ ,  $k_2/J_2$ ,  $k_3/J_3$  следует, что достаточно рассмотреть (2.25.1), (2.25.2) для случаев

$$J_2 < I_2, \quad \sigma_1 > \frac{J_1}{I_1} \quad (\Rightarrow J_1 \leq I_2 \text{ из (2.26)}), \quad (2.27)$$

поскольку вне этой области значений параметров значение степени устойчивости априори не больше  $k_2/I_2$  в силу Теоремы 1. Через  $\sigma_{3(1)}(\sigma_1)$  и  $\sigma_{3(2)}(\sigma_1)$  обозначим функции, определяемые уравнениями  $f_1(\sigma_1, \sigma_3) = 0$  и  $f_2(\sigma_1, \sigma_3) = 0$ , соответственно.

На рис. 2.2 изображены области на плоскости  $(\sigma_1, \sigma_3)$ , определяемые (2.25.1) (вертикальная штриховка), (2.25.2) (закрашено) и (2.26) (ограничена жирными линиями).

Общий вид расположения областей (в частности, положение ветвей гипербол) и тот факт, что пересечение данных областей является пустым, обоснуем поэтапно:

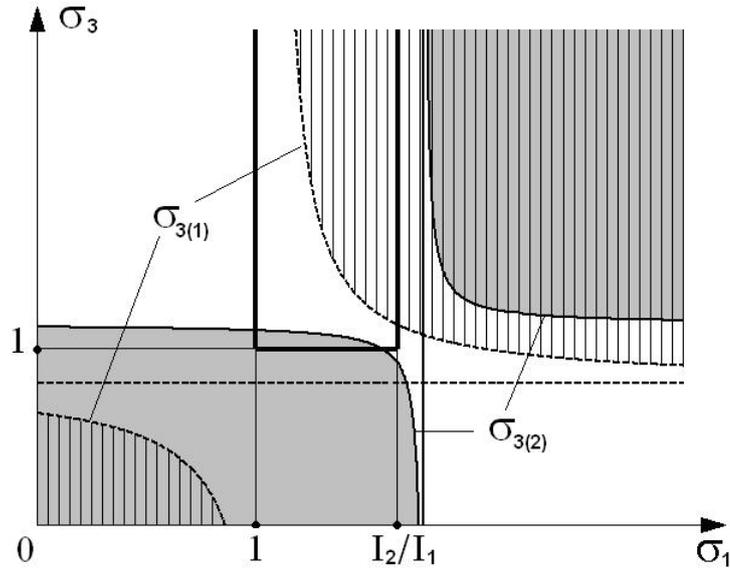


Рис. 2.2.

а) форма ветвей гипербол и положение областей (2.25.1) и (2.25.2) относительно них. Первое следует из  $\ddot{\sigma}_{3(1)} \geq 0$  и  $\ddot{\sigma}_{3(2)} \geq 0$  при  $\sigma_1 \rightarrow \infty$ . Действительно,  $\ddot{\sigma}_{3(1)} \geq 0$  эквивалентно неравенству

$$L_1 L_3 + I_2^2 L_2 - 2I_1 I_2^2 I_3 \geq 0,$$

которое выполняется при  $\sigma_1 \rightarrow \infty$  в силу (2.7) и неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим;  $\ddot{\sigma}_{3(2)} \geq 0$  при  $\sigma_1 \rightarrow \infty$  эквивалентно условию

$$\left[ I_2 (I_1 + I_3) - I_2 J_1 - L_1 \right] \left[ I_2 (I_1 + I_3) - I_2 J_3 - L_3 \right] \geq 0.$$

Заметим, что исходя из (2.22) и определения  $J_i, L_i$  легко показать, что  $\forall i$

$$I_1 J_i + L_i \geq I_1 (I_2 + I_3), \quad (2.28.1)$$

$$I_2 J_i + L_i \leq I_2 (I_1 + I_3), \quad (2.28.2)$$

$$I_3 J_i + L_i \geq I_3 (I_1 + I_2), \quad (2.28.3)$$

и выполнение требуемого условия следует из (2.28.2).

Положение областей (2.25.1) и (2.25.2) относительно ветвей гипербол легко определяется с учетом того, что  $(+\infty, +\infty)$  принадлежит как (2.25.1), так и (2.25.2).

б) горизонтальная асимптота гиперболы  $\sigma_{3(1)}$  (полужирная штриховая линия на Рис. 2.2) лежит ниже прямой  $\sigma_3 = 1$  и, следовательно, левая нижняя подобласть (2.25.1) не пересекается с допустимой областью (2.26). Действительно, уравнение этой асимптоты есть  $\sigma_3 = L_1/I_2I_3$ , но  $L_1/I_2I_3 \leq 1$  в силу (2.22) и определения  $L_1$ .

в) вертикальная асимптота гиперболы  $\sigma_{3(2)}$  (полужирная сплошная линия на рис. 2.2) лежит правее прямой  $\sigma_1 = I_2/I_1$  и, следовательно, правая верхняя подобласть (2.25.2) не пересекается с допустимой областью (2.26). Действительно, уравнение этой асимптоты есть

$$\sigma_1 = (J_1/I_1 - L_3/I_1I_2)/(1 - J_2/I_2),$$

но  $(J_1/I_1 - L_3/I_1I_2)/(1 - J_2/I_2) \geq I_2/I_1$ , что напрямую следует из (2.28.2) с учетом  $J_1 + J_2 + J_3 = I_1 + I_2 + I_3$ .

Из результатов а)-в) следует, что система (2.25.1), (2.25.2), (2.26) может быть совместной лишь при условии пересечения левой нижней ветви  $\sigma_{3(2)}$  и правой верхней ветви  $\sigma_{3(1)}$ .

г) ветви гипербол  $\sigma_{3(1)}$  и  $\sigma_{3(2)}$  не пересекаются. Действительно, условием пересечения является положительность дискриминанта квадратного уравнения, получаемого исключением  $\sigma_3$  из системы

$$f_1(\sigma_1, \sigma_3) = 0, \quad f_2(\sigma_1, \sigma_3) = 0.$$

С использованием тождества (2.19) это условие преобразуется к виду

$$\left[ \left( \frac{L_1}{I_2I_3} - \frac{J_3}{I_3} \right) \left( \frac{L_3}{I_1I_2} - \frac{J_1}{I_1} \right) - \left( 1 - \frac{J_2}{I_2} \right) \left( \frac{L_2}{I_1I_3} - 1 \right) \right] (2I_1I_2I_3 - I_1I_3J_2 - I_2L_2) > 0. \quad (2.29)$$

Отметим, что первый сомножитель в левой части (2.29) неотрицателен (это следует из того, что функция  $\sigma_{3(2)}(\sigma_1)$  (нестрого) выпукла при  $\sigma_1 \rightarrow \infty$ , что доказано в а)). Второй сомножитель, напротив, неположителен вследствие (2.6) и неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим.

Таким образом, (2.29.1) не выполняется, и ветви гипербол действительно не могут пересекаться<sup>2</sup>.

Из результатов утверждений а)-г) следует, что (2.25.1), (2.25.2) не выполняются одновременно в области (2.26) допустимых значений параметров  $\sigma_1, \sigma_3$  и, следовательно,  $\xi^*(k_1, k_2, k_3) = k_2/I_2$ .

**3<sup>0</sup>.** Пусть

$$k_3/I_3 = \min\{k_1/I_1, k_2/I_2, k_3/I_3\}. \quad (2.30)$$

Доказательство проводится аналогично пункту 2<sup>0</sup>: сделаем в (2.20) замену переменных  $s = p + k_3/I_3$  и покажем, что получающееся уравнение  $b_0s^3 + b_1s^2 + b_2s + b_3 = 0$  имеет корни, лежащие на мнимой оси или правее ее. Докажем несовместность условий  $b_2k_3/I_3 + b_3 > 0$  и  $b_3 > 0$  (из чего будет следовать несовместность необходимых условий  $b_2 > 0, b_3 > 0$ ). Вводя

параметры  $\sigma_1 = \frac{k_1/I_1}{k_3/I_3}, \sigma_2 = \frac{k_2/I_2}{k_3/I_3}$ , эти условия можно записать в виде

$$f_1(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1 \frac{L_1}{I_2I_3} - \sigma_2 \frac{L_2}{I_3I_1} + 2 - \frac{L_3}{I_1I_2} > 0, \quad (2.31.1)$$

$$f_2(\sigma_1, \sigma_2) = \left(1 - \frac{J_3}{I_3}\right)\sigma_1\sigma_2 - \left(\frac{J_2}{I_2} - \frac{L_1}{I_2I_3}\right)\sigma_1 - \left(\frac{J_1}{I_1} - \frac{L_2}{I_3I_1}\right)\sigma_2 - 1 + \frac{L_3}{I_1I_2} > 0. \quad (2.31.2)$$

Отметим, что из определений  $\sigma_1, \sigma_2$ , а также из (2.21) и (2.30) следует, что

$$1 \leq \sigma_1 \leq \frac{I_3}{I_1}, \quad 1 \leq \sigma_2 \leq \frac{I_3}{I_2}, \quad \sigma_2 \geq \sigma_1 \frac{I_1}{I_2}. \quad (2.32)$$

Будем говорить, что точки на плоскости  $(\sigma_1, \sigma_2)$ , удовлетворяющие (2.32), образуют допустимую область изменения этих величин. Через  $\sigma_{2(1)}(\sigma_1)$  и

<sup>2</sup> Ветви гипербол могут касаться, но и в этом случае система (2.25.1) – (2.25.2) несовместна в силу того, что входящие в нее неравенства строгие.

$\sigma_{2(2)}(\sigma_1)$  обозначим функции, определяемые уравнениями  $f_1(\sigma_1, \sigma_2) = 0$  и  $f_2(\sigma_1, \sigma_2) = 0$ , соответственно. На рис. 2.3 изображены области на плоскости  $(\sigma_1, \sigma_2)$ , определяемые (2.31.1) (вертикальная штриховка), (2.31.2) (закрашено) и (2.32) (ограничена жирными линиями).

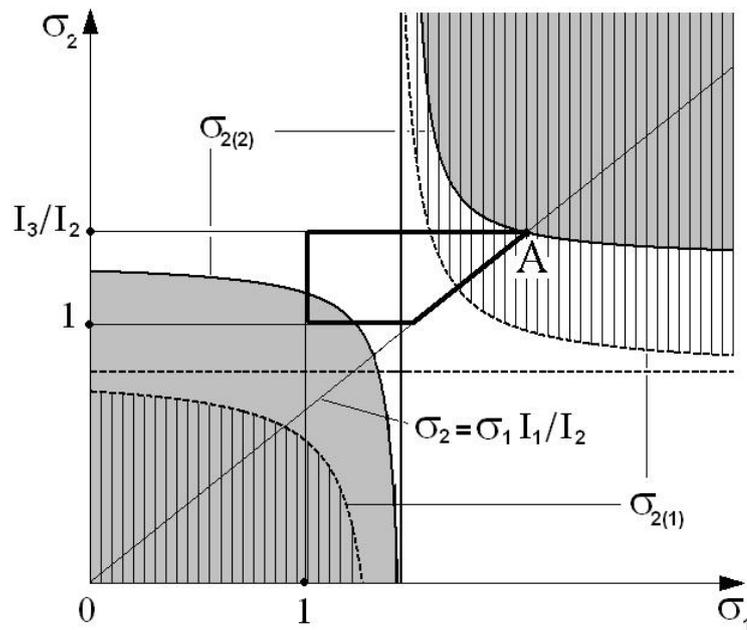


Рис. 2.3.

Общий вид расположения областей (в частности, положение ветвей гипербол) и тот факт, что пересечение данных областей является пустым, обоснуем поэтапно:

а) форма ветвей гипербол и положение областей (2.31.1) и (2.31.2) устанавливается аналогично пункту 2<sup>о</sup>.

б) точка  $A(I_3/I_1, I_3/I_2)$  лежит на гиперболе  $\sigma_{2(2)}$  (проверяется подстановкой);

в) горизонтальная асимптота гиперболы  $\sigma_{2(1)}$  (полужирная штриховая линия на рис. 2.3) лежит ниже прямой  $\sigma_2 = 1$ . Действительно, уравнение горизонтальной асимптоты есть  $\sigma_2 = L_1/I_2 I_3$ , а  $L_1/I_2 I_3 \leq 1$  в силу (2.22) и

определения  $L_1$ . Следовательно, левая нижняя подобласть (2.31.1) не пересекается с допустимой областью.

г) вертикальная асимптота гиперболы  $\sigma_{2(2)}$  (полужирная сплошная линия на рис. 2.3) лежит левее прямой  $\sigma_1 = I_3/I_1$ , т.е. точка  $A$  лежит на правой ветви этой гиперболы и, следовательно, правая верхняя подобласть (2.31.2) не пересекается с допустимой областью. Действительно, уравнение этой асимптоты есть

$$\sigma_1 = \frac{\frac{J_1 - L_2}{I_1 - I_1 I_3}}{1 - \frac{J_3}{I_3}},$$

а условие

$$\frac{\frac{J_1 - L_2}{I_1 - I_1 I_3}}{1 - \frac{J_3}{I_3}} \leq \frac{I_3}{I_1}$$

эквивалентно (2.28.3) с учетом  $J_1 + J_2 + J_3 = I_1 + I_2 + I_3$ .

Из а)-г) следует, что система (2.31.1), (2.31.2), (2.32) может быть совместной лишь при условии пересечения левой нижней ветви  $\sigma_{2(2)}$  и правой верхней ветви  $\sigma_{2(1)}$ .

д) ветви гипербол  $\sigma_{2(1)}$  и  $\sigma_{2(2)}$  не пересекаются: по аналогии с пунктом 2<sup>0</sup>, условие пересечения сводится к

$$\left[ \left( \frac{L_1}{I_2 I_3} - \frac{J_2}{I_2} \right) \left( \frac{L_2}{I_3 I_1} - \frac{J_1}{I_1} \right) - \left( 1 - \frac{J_3}{I_3} \right) \left( \frac{L_3}{I_1 I_2} - 1 \right) \right] (2I_1 I_2 I_3 - I_1 I_2 J_3 - I_3 L_3) > 0. \quad (2.33)$$

При этом первый сомножитель в левой части (2.33) неотрицателен (это следует из того, что функция  $\sigma_{2(2)}$  выпукла (нестрого) при  $\sigma_1 \rightarrow \infty$ , что доказано в а)).

Второй сомножитель, напротив, неположителен вследствие (6) и неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим. Таким образом, (2.33) не выполняется, и ветви гипербол действительно не могут пересекаться.

Из а)-д) следует, что (2.31.1), (2.31.2) не выполняются одновременно в области (2.32) допустимых значений параметров  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и, следовательно,  $\xi_1(k_1, k_2, k_3) = k_3/I_3$ . Теорема доказана.

*Следствие:*

Поскольку, в силу Теоремы 2,  $\xi_1(k_1, k_2, k_3)$  является монотонно неубывающей функцией по каждому из аргументов, второй этап оптимизации вновь оказывается тривиальным: оптимальными являются  $k_i = K_i, i = 1, 2, 3$ , при этом  $\xi_2 = \min\{K_1/I_1, K_2/I_2, K_3/I_3\}$ .

### **Глава 3. Задачи полунатурной отработки алгоритмов ориентации спутника на стенде**

В настоящей главе проводится анализ динамики макета спутника на лабораторном стенде, включающем струнный подвес и имитатор геомагнитного поля. Установленные на макете управляющие элементы – токовые катушки и маховики – позволяют реализовывать алгоритмы активной магнитной и маховичной ориентации. Результаты подобного исследования могут использоваться при отработке этих алгоритмов на лабораторном стенде в ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (рис. 3.1). Так, основное внимание уделяется исследованию эффективности демпфирующих алгоритмов, которая является важным фактором, определяющим качество отработки. Кроме того, проводится анализ условий, при которых динамика макета является сопоставимой с угловым движением спутника в орбитальных условиях.

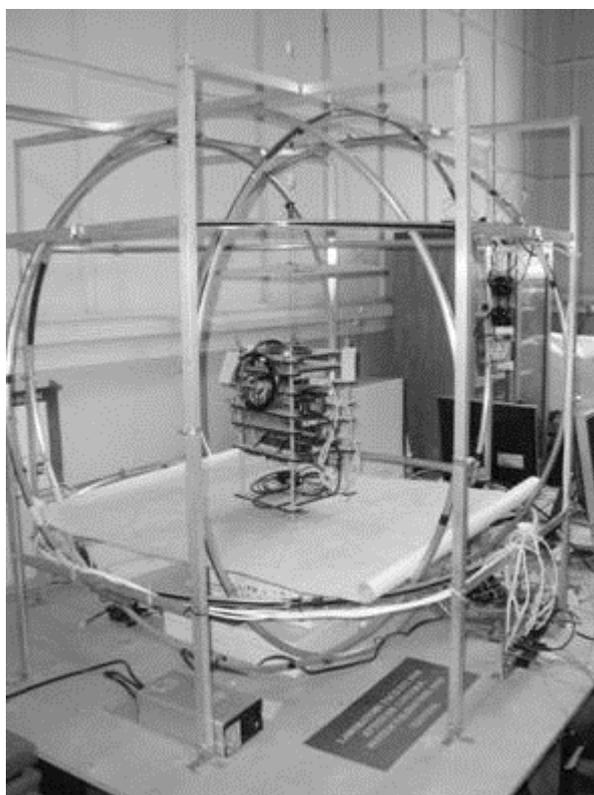


Рис. 3.1. Экспериментальный стенд.

### **3.1. Постановка задачи и уравнения движения.**

Рассматривается твердое тело, подвешенное на невесомом нерастяжимом (но упругом на кручение) стержне, другой конец которого соединен с неподвижным основанием (рис. 3.2). Предполагается, что в точках крепления  $O_1$  и  $O_2$  установлены трехстепенные либо двухстепенные шарниры; в последнем случае, для макета обеспечивается движение в любой содержащей стержень плоскости без сопротивления. Макет помещается в рабочую область имитатора геомагнитного поля (рис. 3.1), позволяющего реализовывать произвольный сценарий изменения магнитного поля при напряженности до 350 мкТ. На теле установлены управляющие элементы – токовые катушки или маховики. В первом случае, управляющий момент формируется за счет взаимодействия собственного магнитного момента катушек с внешним полем, во втором – за счет изменения собственного кинетического момента маховиков. Управляющий момент формируется в соответствии с алгоритмами, описанными в [4] и [6]. Требуется а) спрогнозировать динамику макета под воздействием этих алгоритмов на основе математической модели движения; б) определить, возможна ли их отработка в лабораторных условиях; в) провести анализ качества отработки в зависимости от параметров макета, стенда, алгоритмов управления. Решение последней задачи является особенно актуальным для алгоритмов демпфирования малых колебаний с учетом наличия в лабораторных условиях возмущений, с трудом поддающихся учету при моделировании (например, обусловленных наличием сопротивления воздуха). Отдельной задачей является выделение классов движений и оценка параметров системы, при которых динамика макета является сопоставимой с динамикой спутника; ее решение позволяет использовать лабораторные эксперименты не только с точки зрения проверки адекватности функционирования системы управления, но и с точки зрения имитации и прогноза реальных движений в орбитальных условиях.

Введем следующие системы координат:

$O_1x_1x_2x_3$  - неподвижная система координат с началом в точке  $O_1$  (ось  $O_1x_3$  направлена вертикально вверх);

$Gz_1z_2z_3$  - связанная с телом система координат с осями вдоль его главных центральных осей инерции (обозначим тензор инерции в связанных осях  $\mathbf{J} = \text{diag}(J_1, J_2, J_3)$ ); обозначим через  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  орты этой системы координат, а через  $\mathbf{A}$  - матрицу перехода из системы  $Gz_1z_2z_3$  в систему  $O_1x_1x_2x_3$ ;

$O_1y_1y_2y_3$  - система координат, связанная со стержнем; ось  $O_1y_3$  направлена вдоль продолжения стержня. Положение  $O_1y_1y_2y_3$  относительно  $O_1x_1x_2x_3$  определим двумя углами  $\alpha$  и  $\beta$  (рис. 3.3); матрицу перехода из системы  $O_1y_1y_2y_3$  в систему  $O_1x_1x_2x_3$  обозначим через  $\mathbf{U}$ , а ее строки – через  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ .

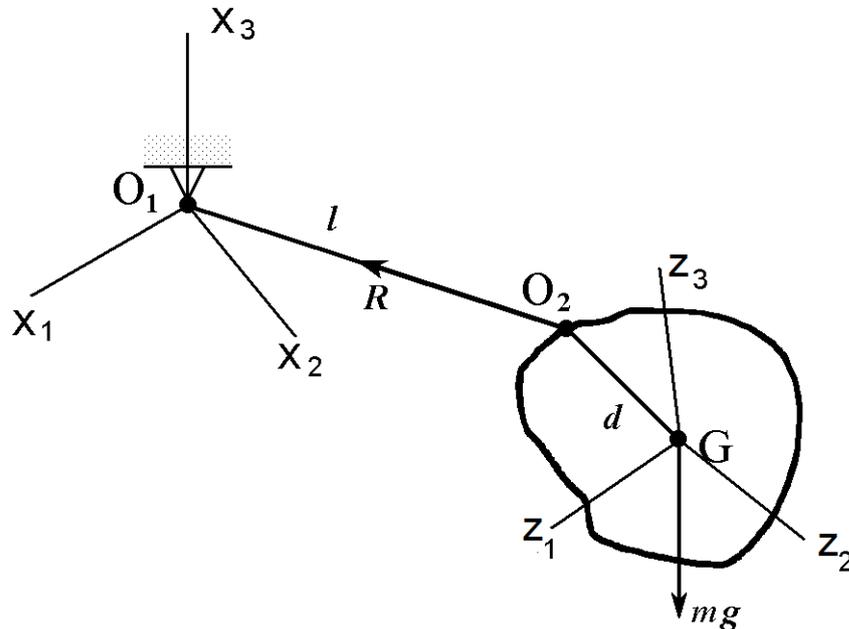


Рис. 3.2. Твердое тело на испытательном стенде.

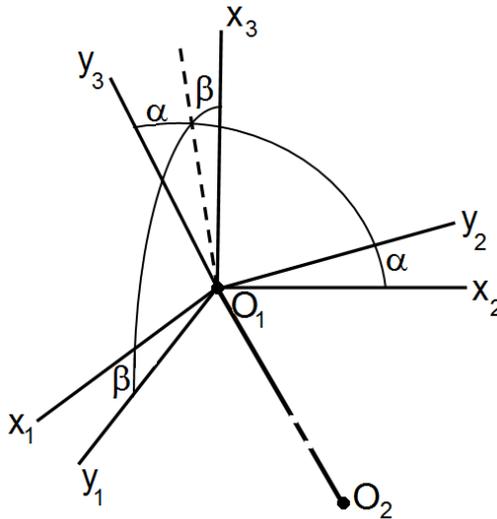


Рис. 3.3. Система координат, связанная со стержнем.

Уравнения движения тела на испытательном стенде удобно получить в форме уравнений Лагранжа 1-го рода. Начнем со случая трехстепенных шарниров и отсутствия маховиков. В этом случае уравнения сил и моментов имеют вид

$$\begin{aligned} m(\ddot{\mathbf{l}} + \ddot{\mathbf{d}}) &= \mathbf{F} + \mathbf{R}, \\ \dot{\mathbf{K}}_G &= \mathbf{M} - \mathbf{d} \times \mathbf{R}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь  $m$  - масса тела;  $\mathbf{l} = \mathbf{O}_1\mathbf{O}_2$ ,  $\mathbf{d} = \mathbf{O}_2\mathbf{G}$ ;  $\mathbf{F}$  - главный вектор внешних сил, приложенных к телу;  $\mathbf{R}$  - сила реакции стержня;  $\mathbf{K}_G$  - кинетический момент тела относительно центра масс;  $\mathbf{M}$  - управляющий механический момент.

Предполагаем дополнительно, что сила реакции направлена вдоль стержня (связь идеальная), т.е. имеет место равенство  $\mathbf{R} = \lambda \mathbf{l}$ , с учетом которого уравнения (3.1) принимают вид

$$m(\ddot{\mathbf{l}} + \ddot{\mathbf{d}}) = \mathbf{F} + \lambda \mathbf{l}, \quad (3.2)$$

$$\dot{\mathbf{K}}_G = \mathbf{M} - \lambda \mathbf{d} \times \mathbf{l}. \quad (3.3)$$

Чтобы определить  $\lambda$ , умножим (3.2) скалярно на  $\mathbf{l}$  и учтем очевидные соотношения  $\mathbf{l}^2 = l^2$ ,  $\ddot{\mathbf{l}} \cdot \mathbf{l} + \dot{\mathbf{l}}^2 = 0$ . В результате получаем

$$\lambda = \frac{1}{l^2} (-m\dot{\mathbf{l}}^2 + m\mathbf{l} \cdot \ddot{\mathbf{d}} - \mathbf{l} \cdot \mathbf{F}).$$

Кроме того, принимая во внимание равенства

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{l}} &= \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{l} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{l}), \\ \ddot{\mathbf{d}} &= \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{d} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d}) = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{d} + \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega} \mathbf{d}) - \mathbf{d}\omega^2, \\ \dot{\mathbf{K}}_G &= \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega},\end{aligned}$$

где  $\boldsymbol{\Omega}$  и  $\boldsymbol{\omega}$  - угловые скорости стержня и тела соответственно, приводим уравнения (3.2), (3.3) к виду

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{l} &= \frac{l}{l^2} \left[ -\dot{l}^2 - l\mathbf{F}/m + l(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{d}) + (l\boldsymbol{\omega})(\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}) - (l\mathbf{d})\omega^2 \right] + \mathbf{F}/m - \\ &\quad - \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{d} - (\boldsymbol{\omega} \mathbf{d})\boldsymbol{\omega} + \mathbf{d}\omega^2 - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{l}),\end{aligned}\tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} &= \frac{m}{l^2} (\mathbf{d} \times \mathbf{l}) \left[ -l(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{d}) + \dot{l}^2 + l\mathbf{F}/m - (l\boldsymbol{\omega})(\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}) + (l\mathbf{d})\omega^2 \right] + \\ &\quad + \mathbf{M} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}.\end{aligned}\tag{3.5}$$

Будем считать, что вектор  $\mathbf{F}$  задан в системе координат  $O_1x_1x_2x_3$ , векторы  $\mathbf{l}$  и  $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$  - в системе  $O_1y_1y_2y_3$ , векторы  $\mathbf{d}$  и  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  - в системе  $Gz_1z_2z_3$ . Тогда, разрешая (3.5) относительно  $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ , преобразуем систему уравнений (3.4), (3.5) к виду

$$\begin{aligned}\dot{\Omega}_1 &= \Omega_2\Omega_3 + \frac{\mathbf{u}_2}{l} \left[ \frac{1}{m} \mathbf{F} - \mathbf{A}^T(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{d}) - \mathbf{A}^T(\boldsymbol{\omega} \mathbf{d})\boldsymbol{\omega} + \mathbf{A}^T \mathbf{d}\omega^2 \right], \\ \dot{\Omega}_2 &= -\Omega_1\Omega_3 + \frac{\mathbf{u}_1}{l} \left[ \frac{1}{m} \mathbf{F} - \mathbf{A}^T(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{d}) - \mathbf{A}^T(\boldsymbol{\omega} \mathbf{d})\boldsymbol{\omega} + \mathbf{A}^T \mathbf{d}\omega^2 \right], \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} &= \mathbf{V}^{-1} \left\{ \mathbf{M} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} - (\mathbf{d} \times \mathbf{A}\mathbf{u}_3) \left[ ml(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) - \mathbf{u}_3 \mathbf{F} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + m(\mathbf{A}\mathbf{u}_3, \boldsymbol{\omega})(\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}) + m(\mathbf{A}\mathbf{u}_3, \mathbf{d})\omega^2 \right] \right\},\end{aligned}\tag{3.6}$$

где

$$\mathbf{V} = m \left[ (\mathbf{d} \times \mathbf{A}\mathbf{u}_3)(\mathbf{d} \times \mathbf{A}\mathbf{u}_3)^T \right] + \mathbf{J}.\tag{3.7}$$

Отметим, что векторное уравнение (3.4) равносильно двум скалярным (третье уравнение, соответствующее проекции на ось  $O_1y_3$ , вырождается в тождество).

Для получения замкнутой системы уравнений движения необходимо добавить кинематические соотношения, связывающие угловые скорости и параметры, определяющие ориентацию макета. В данной главе используется матричное дифференциальное уравнение Пуассона

$$\dot{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{A}, \quad (3.8)$$

причем достаточно рассматривать только 6 из 9 уравнений и условия ортогональности и нормировки вида  $(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = \delta_{ij}$ , где  $\mathbf{a}_i$  - строки матрицы  $\mathbf{A}$ . Кроме того, следует добавить кинематические соотношения для углов, определяющих положение стержня, например,

$$\dot{\alpha} = \Omega_1, \quad \dot{\beta} = \Omega_2 / \cos \alpha = -\Omega_3 / \sin \alpha. \quad (3.9)$$

Отметим, что в модели (3.6) не учитывается сопротивление воздуха. Подобное упрощение является оправданным с учетом того, что при управляемом движении могут быть получены декременты затухания колебаний, более чем на порядок превосходящие естественные.

В случае, если шарниры в точках  $O_1$  и  $O_2$  двухстепенные, система (3.6), (3.8), (3.9) требует некоторой модификации. В этом случае имеется дополнительный восстанавливающий момент упругих сил, пропорциональный в первом приближении углу закрутки стержня; соответственно, третье уравнение (3.6) переписывается в виде

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{V}^{-1} \left\{ \mathbf{M} - \frac{1}{l} \eta \chi \mathbf{1} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{d} \times \mathbf{A} \mathbf{u}_3) \left[ ml(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) - \mathbf{u}_3 \mathbf{F} + \right. \right. \\ \left. \left. + m(\mathbf{A} \mathbf{u}_3, \boldsymbol{\omega})(\mathbf{d} \boldsymbol{\omega}) + m(\mathbf{A} \mathbf{u}_3, \mathbf{d}) \omega^2 \right] \right\}, \quad (3.10)$$

где  $\eta$  есть модуль кручения стержня, а  $\chi$  - угол закрутки. При определении  $\chi$  будем предполагать, что

- 1) неподвижная ось шарнира в точке  $O_1$  направлена вдоль оси  $O_1 x_2$ ,  
подвижная ось направлена вдоль  $O_1 y_1$ ;

2) связанная со стержнем ось шарнира в точке  $O_2$  при  $\chi=0$  направлена вдоль  $O_2y_2$ ; ориентация оси шарнира, связанной с телом (обозначим ее  $O_2z_1'$ ), в системе  $Gz_1z_2z_3$  задается углами тангажа  $\tilde{\alpha}$  и рысканья  $\tilde{\beta}$ .

Ось  $O_2z_1'$  может быть дополнена до правой ортогональной тройки  $O_2z_1'z_2'z_3'$ ; матрица перехода из системы  $O_2z_1'z_2'z_3'$  в неподвижную систему  $O_1x_1x_2x_3$  задается выражением

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \cos \tilde{\alpha} \cos \tilde{\beta} & \sin \tilde{\beta} & -\sin \tilde{\alpha} \cos \tilde{\beta} \\ -\cos \tilde{\alpha} \sin \tilde{\beta} & \cos \tilde{\beta} & \sin \tilde{\alpha} \sin \tilde{\beta} \\ \sin \tilde{\alpha} & 0 & \cos \tilde{\alpha} \end{pmatrix} \mathbf{A}.$$

Угол закрутки определяется по элементам матрицы  $\mathbf{D} = \mathbf{U}\tilde{\mathbf{A}}^T$  исходя из выражений

$$\cos \chi = D_{11} / \sqrt{1 - D_{31}^2}, \quad \sin \chi = D_{21} / \sqrt{1 - D_{31}^2} \quad (3.11)$$

и с учетом непрерывного характера его изменения<sup>3</sup>.

В свою очередь, в случае наличия на макете вращающихся маховиков с полным кинетическим моментом  $\mathbf{H}$ , третье уравнение системы (3.6) переписывается в виде

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{V}^{-1} \left\{ \mathbf{M} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H} - \dot{\mathbf{H}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} - (\mathbf{d} \times \mathbf{A}\mathbf{u}_3) \left[ ml(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) - \mathbf{u}_3 \mathbf{F} + m(\mathbf{A}\mathbf{u}_3, \boldsymbol{\omega})(\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}) + m(\mathbf{A}\mathbf{u}_3, \mathbf{d})\omega^2 \right] \right\}, \quad (3.12)$$

Величина  $-\dot{\mathbf{H}}$ , таким образом, задает управляющее воздействие при использовании активной маховичной системы ориентации. В свою очередь, при использовании активной магнитной системы ориентации управляющий момент задается выражением

<sup>3</sup> Формулы (3.11) справедливы при  $D_{31} < 1$ . Поскольку в рассматриваемой модели энергия системы либо постоянна (при свободном движении), либо не возрастает (при использовании описываемых ниже алгоритмов), можно показать, что при достаточно малом начальном отклонении от положения устойчивого равновесия и малых начальных угловых скоростях струны и тела это условие выполнено для любого момента времени.

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B} = \sum_{i=1}^3 \mu_i \mathbf{e}_i \times \mathbf{B}, \quad (3.13)$$

где  $\mathbf{e}_i$  - единичные векторы осей, вдоль которых установлены управляющие катушки,  $\mu_i$  - магнитные моменты катушек. Управления  $\dot{\mathbf{H}}$  и  $\mu_i$  формируются в соответствии с описанными ниже алгоритмами.

#### *Алгоритм маховичной ориентации типа «pd-регулятор»*

Для данного алгоритма в случае необходимости приведения объекта в требуемое положение в инерциальной системе координат управляющий момент формируется по следующему правилу:

$$-\dot{\mathbf{H}} = -k_{\omega} \boldsymbol{\omega} - k_a \mathbf{S} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H} + \mathbf{M}_{\text{внеш}}. \quad (3.14)$$

Здесь  $\mathbf{M}_{\text{внеш}}$  - момент внешних сил, действующий на объект (в данном случае, момент сил реакции стержня),

$$\mathbf{S} = [a_{23} - a_{32}, \quad a_{31} - a_{13}, \quad a_{12} - a_{21}]^T,$$

$k_{\omega}$  и  $k_a$  - коэффициенты управления. С учетом сложности получения в лабораторных условиях информации о положении стержня, необходимой для вычисления  $\mathbf{M}_{\text{внеш}}$ , будем рассматривать модифицированную версию (3.14), аналог которой предлагался, например, в [27]:

$$-\dot{\mathbf{H}} = -k_{\omega} \boldsymbol{\omega} - k_a \mathbf{S} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}. \quad (3.15)$$

#### *Магнитные алгоритмы демпфирования колебаний*

Рассматривается два подобных алгоритма, предлагавшихся в [4, 15, 32, 37]. Одноосный алгоритм «-Bdot» («1») формирует магнитный момент  $\mu_3$  по правилу

$$\mu_3 = -\mu_{\max} \text{sign}(\dot{B}_3). \quad (3.16)$$

Здесь  $\dot{B}_3$  - производная проекции внешнего магнитного поля на ось  $Gz_3$ . Особенностью этого алгоритма является простота реализации: на практике знак производной определяется сравнением показаний магнитометра, измеряющего составляющую магнитного поля вдоль  $Gz_3$ , для двух соседних моментов времени.

Рассматривается также «трехосная» версия алгоритма «-Vdot»; в этом случае («2»), управляющий момент формируется по правилу

$$\mu = -k\dot{\mathbf{B}}; \quad (3.17)$$

здесь  $\dot{\mathbf{B}}$  - производная внешнего магнитного поля в проекциях на оси связанной системы координат  $Gz_1z_2z_3$ .

### **3.2. Численное исследование эффективности магнитных алгоритмов**

Для численного моделирования динамики тела на испытательном стенде и исследования работы алгоритмов управления был разработан программный комплекс в среде MATLAB (версия 7.0). Программный комплекс осуществляет численное интегрирование системы уравнений (3.6), (3.8), (3.9) методом Рунге-Кутты четвертого порядка с постоянным шагом. Входными данными являются следующие параметры стенда и макета: длина стержня, смещение точки подвеса, масса и тензор инерции макета. Кроме того, задаются начальные данные, параметры алгоритма управления и модель магнитного поля.

Результатом работы программного комплекса являются зависимости от времени проекций угловой скорости и углов, определяющих ориентацию тела (углов Эйлера либо самолётных углов). Дополнительно может вычисляться энергия системы.

Численный анализ проводился в предположении о дискретности управления. Отдельный цикл работы алгоритма состоит из интервалов пассивного и активного движения. На пассивном интервале происходит сбор, обработка измерительной информации и синтез управления; на активном - обрабатывается управляющий сигнал.

Длительность пассивного интервала ограничена снизу характеристиками используемого магнитометра: например, для алгоритма «1» она не может быть меньше 0.225с (0.125с - минимальный интервал между измерениями, 0.1с - интервал между командой на измерение и получением результата). Длительности активного и пассивного интервалов (далее  $\Delta_a$  и  $\Delta_p$  соответственно) являются важными параметрами алгоритмов, существенно влияющими на динамику исследуемого макета.

Моделирование, если иное не оговорено, проводилось при следующих параметрах стенда и макета (далее называем их базовыми):

$l = 2 \text{ м}$	длина стержня;
$d = 2 \text{ см}$	смещение точки подвеса вдоль оси симметрии макета;
$m = 1.5 \text{ кг}$	масса макета;
$J = \text{diag}(1, 1, 1.8) \times 10^{-2} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$	тензор инерции макета;
$\mu_{\max} = 0.23 \text{ А} \cdot \text{м}^2$	максимальный магнитный момент катушки;
$B = 3.5 \times 10^{-4} \text{ Т}$	магнитное поле в рабочей области имитатора.

В начальный момент стержень вертикален и неподвижен, ориентация макета задается углами Эйлера (в радианах)

$\psi = 0$	угол прецессии,
$\theta = 0.3$	угол нутации,
$\varphi = 0$	угол собственного вращения.

Начальная угловая скорость тела принимается равной  $\omega_0 = (0.1, 0, 0.8) \text{ с}^{-1}$ .

Результаты моделирования в базовом варианте позволяют сделать вывод о том, что декремент затухания в этом случае оказывается низким (см. рис. 3.4), сопоставимым с естественным, что обуславливает необходимость анализа параметров, позволяющего добиться существенного повышения этого декремента.

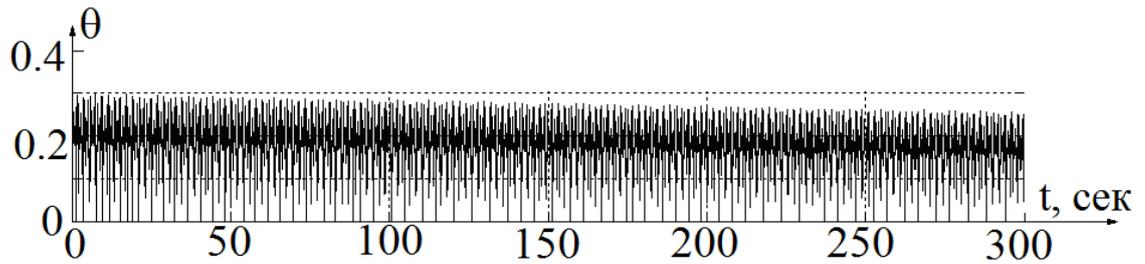


Рис. 3.4. Эволюция угла нутации макета при применении алгоритма «1» .

### 3.2.1. Влияние параметров алгоритма управления

Проводился численный анализ влияния длительности активного интервала элементарного цикла управления  $\Delta_a$  на эффективность демпфирующих алгоритмов ( $\mu_{\max} = 4A \cdot m^2$ ). В качестве оценки эффективности алгоритма ( $\varepsilon$ ) берется время, за которое рассеивается 90% начальной энергии (чем больше  $\varepsilon$ , тем меньше эффективность). Исследование проводилось как при фиксированном  $\Delta_p = 0.13\text{с}$ . Качественно результаты для обоих алгоритмов сходны; они иллюстрируются рис. 3.5.

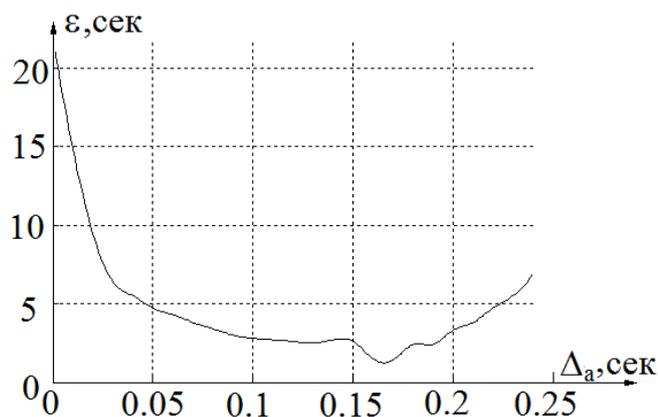


Рис. 3.5. Зависимость  $\varepsilon(\Delta_a)$  для алгоритма «1».

Обращает на себя внимание тот факт, что при увеличении  $\Delta_a$  выше определенного порога эффективность демпфирования начинает снижаться. Это обусловлено тем, что фазовое состояние системы в этом случае успева

существенно измениться за элементарный цикл управления, так что на определенном интервале алгоритм не демпфирует, а раскачивает колебания. В целом, результаты исследования говорят в пользу выбора минимально возможной величины  $\Delta_p$  (определяемой аппаратными ограничениями измерительных и вычислительных приборов) с дальнейшим выбором оптимального  $\Delta_a$  на основе численного моделирования.

### 3.2.2. Влияние длины стержня, смещения точки подвеса от центра масс, инерционных характеристик макета

Для обоих алгоритмов, как показали результаты численного моделирования, зависимость  $\varepsilon(l)$  имеет немонотонный характер (пример для алгоритма «1» приведен на рис. 3.6). Зависимость эффективности от смещения точки подвеса оказывается монотонной и нелинейной для алгоритма «1» (см. рис. 3.7) и немонотонной для алгоритма «2» (рис. 3.8). Что касается влияния инерционных характеристик макета, массы  $m$  и тензора инерции  $\mathbf{J}$ , на  $\varepsilon$ , то расчеты показывают: для обоих алгоритмов, если  $\mathbf{J}$  изменяется пропорционально  $m$ , то и  $\varepsilon$  линейно зависит от  $m$ ; соответствующий пример приведен на рис. 3.9.

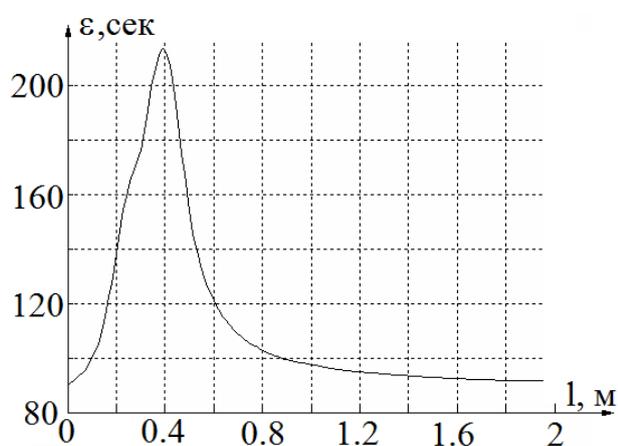


Рис. 3.6. Зависимость  $\varepsilon(l)$ , алгоритм «1».

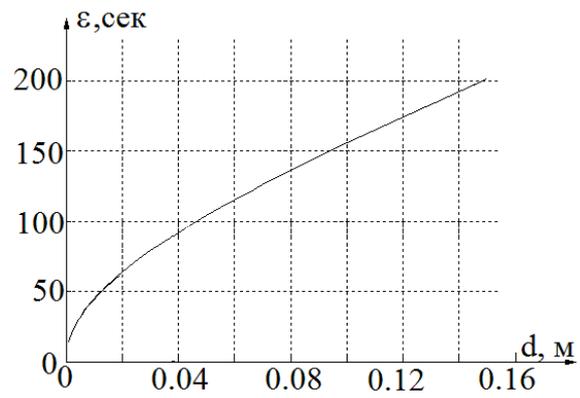


Рис. 3.7. Зависимость  $\varepsilon(d)$  для алгоритма «1».

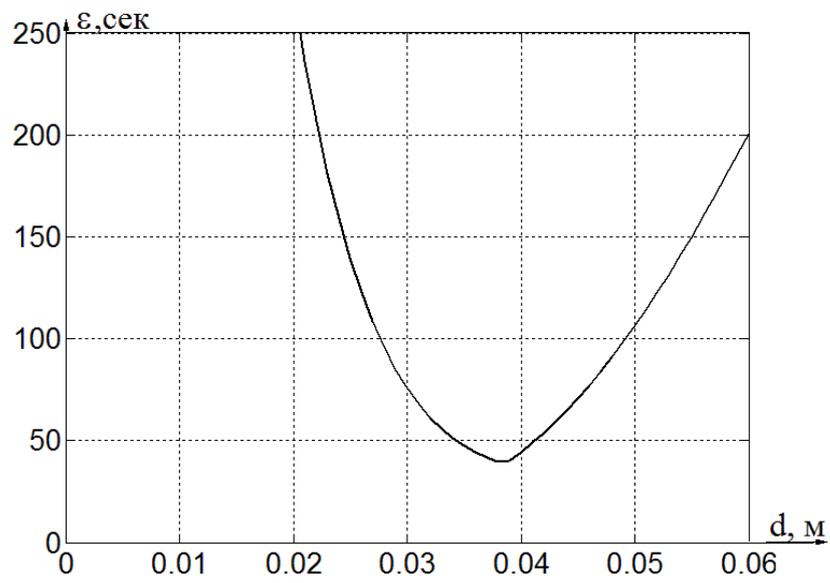


Рис. 3.8. Зависимость  $\varepsilon(d)$  для алгоритма «2».

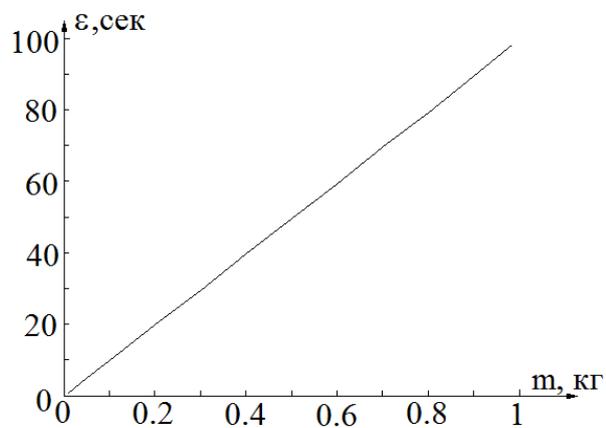


Рис. 3.9. Зависимость эффективности от массы макета, алгоритм «1».

В целом, результаты численных исследований (например, в части выбора  $\Delta_a$  или выбора смещения точки подвеса для алгоритма «2») могут быть полезными с точки зрения повышения эффективности алгоритмов демпфирования, однако они не дают общего представления о зависимости этой эффективности от полного набора параметров. В этом смысле, значительный интерес представляет проведение аналитического исследования.

### **3.3. Аналитическое исследование эффективности алгоритмов**

Аналитическое исследование будет проводиться в следующих предположениях:

- система совершает колебания в вертикальной плоскости (рис. 3.10);
- управление является непрерывным.

Движение в вертикальной плоскости возможно в случае, если  $O_2$  находится в главной центральной плоскости инерции макета; при этом, очевидно, независимо от типа шарниров восстанавливающий момент, связанный с упругостью стержня, отсутствует. Дополнительным условием реализации такого движения в случае использования магнитных алгоритмов является компланарность этой плоскости и плоскости изменения векторов  $\mu, \mathbf{B}$  в любой момент времени; в случае использования маховичных алгоритмов  $\mathbf{H}$  должен быть ортогонален этой плоскости. Далее предполагается постоянство вектора индукции магнитного поля.

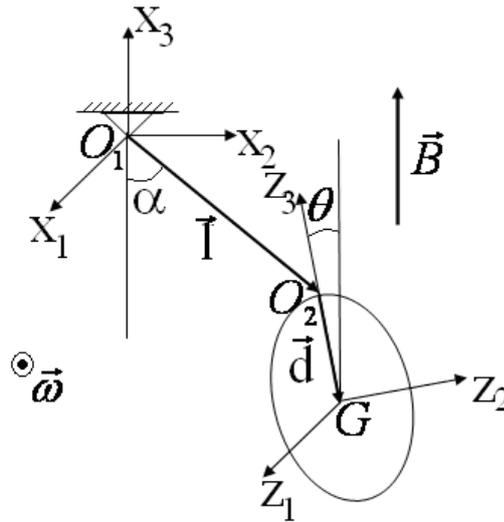


Рис. 3.10. Плоские колебания макета на испытательном стенде.

Уравнения движения в этом случае принимают вид

$$\begin{aligned}
 \ddot{\alpha} l + \ddot{\theta} d \cos(\theta - \alpha) - \dot{\theta}^2 d \sin(\theta - \alpha) + g \sin \alpha &= 0, \\
 [A + md^2 \sin^2(\theta - \alpha)] \ddot{\theta} - M - mdl \sin(\theta - \alpha) \dot{\alpha}^2 - & \\
 + mgd \cos \alpha \sin(\theta - \alpha) - md^2 \sin(\theta - \alpha) \cos(\theta - \alpha) \dot{\theta}^2 &= 0,
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

где  $M$  - величина управляющего момента,  $A$  - осевой момент инерции макета.

### 3.3.1. Исследование эффективности маховичного алгоритма

В этом случае, линеаризация (3.18) в окрестности устойчивого вертикального положения равновесия дает

$$\begin{aligned}
 \ddot{\alpha} + \kappa \ddot{\theta} + \omega^2 \alpha &= 0, \\
 \ddot{\theta} + \bar{k}_\omega \dot{\theta} + \omega_l^2 (\theta - \alpha) + \bar{k}_a \theta &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Здесь введены обозначения

$$\omega_l^2 = \frac{mgd}{A}, \quad \omega^2 = \frac{g}{l}, \quad \kappa = \frac{d}{l}, \quad \bar{k}_\omega = \frac{k_\omega}{A}, \quad \bar{k}_a = \frac{k_a}{A}. \tag{3.20}$$

Характеристическое уравнение системы (3.19) имеет вид

$$\lambda^4 + \bar{k}_\omega \lambda^3 + [\bar{k}_a + \omega^2 + \omega_l^2 (1 + \kappa)] \lambda^2 + \bar{k}_\omega \omega^2 \lambda + (\bar{k}_a + \omega_l^2) \omega^2 = 0. \tag{3.21}$$

Эффективность алгоритма тем выше, чем больше степень устойчивости уравнения (3.21). Значительный интерес представляет ее оптимизация по  $\bar{k}_\omega$ ,  $\bar{k}_a$  с учетом того, что на эти коэффициенты априори не наложено никаких условий (за исключением положительности). В этой связи отметим, что такая задача для уравнения вида (3.21) была решена в [25], и при условии  $\omega^2 \geq \omega_I^2 \sqrt{\kappa}$  (которое выполняется для реальных характеристик стенда и макета) можно в явном виде выписать выражения для оптимальной степени устойчивости и оптимальных параметров:

$$\begin{aligned}\xi^* &= \omega_I \sqrt{\kappa}, \\ k_a^* &= (\omega^2 - \omega_I^2) A, \\ k_\omega^* &= 4A\omega_I \sqrt{\kappa}.\end{aligned}\tag{3.22}$$

Отметим, что на практике существуют ограничения на максимальное угловое ускорение маховика и, соответственно, на  $\dot{H}$ ; например, для маховиков, установленных на микроспутнике «Чибис-М» [2],

$$|\dot{H}| \leq \dot{H}_{\max} = 2.3 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \times \text{м}^2 / \text{с}^2.$$

Применительно к данному алгоритму, это ограничение имеет вид  $|k_\omega \dot{\theta} + k_a \theta| \leq \dot{H}_{\max}$ . Для того, чтобы удовлетворить этому ограничению, можно варьировать значение параметра  $d$ ; в частности, при описанных выше «базовых» параметрах оно выполняется при  $d = 6.7 \cdot 10^{-3}$  м, при этом определяемая (3.22) степень устойчивости составляет  $0.18 \text{ с}^{-1}$ .

Величина управляющего момента для исследуемого алгоритма зависит от  $\theta$ ; тем самым, его реализация требует установки на макете позиционного датчика. Вместе с тем, поскольку в системе и так имеется восстанавливающий момент силы реакции стержня, при реализации можно ограничиться компонентой  $-k_\omega \dot{\theta}$  (в этом случае, требуется только датчик угловой скорости). Для этого варианта, характеристическое уравнение принимает вид

$$\lambda^4 + \bar{k}_\omega \lambda^3 + [\omega^2 + \omega_I^2 (1 + \kappa)] \lambda^2 + \bar{k}_\omega \omega^2 \lambda + \omega_I^2 \omega^2 = 0.\tag{3.23}$$

Оптимизация по  $k_\omega$  для уравнения такого типа проводилась в главе 1. Так, при «базовых» параметрах и  $d = 6.7 \cdot 10^{-3}$  м оптимум достигается на конфигурации корней «IV»; формула (1.21) дает  $\xi^* = 0.058 \text{ с}^{-1}$  и, далее,  $k_\omega^* = 0.112 \text{ кг} \times \text{м}^2 / \text{с}$ .

### 3.3.2. Исследование магнитного алгоритма «2».

Линеаризация (3.18) приводит к системе

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} + \omega^2 \alpha + \kappa \ddot{\theta} &= 0, \\ \ddot{\theta} + \omega_1^2 \theta - \omega_1^2 \alpha &= -\bar{\omega}_B^2 \dot{\theta}; \quad \bar{\omega}_B^2 = \frac{kB^2}{A}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Характеристическое уравнение для (3.24) имеет вид

$$\begin{aligned} a_0 \lambda^4 + ka_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + ka_3 \lambda + a_4 &= 0, \\ a_0 &= \frac{\kappa}{\rho}, \quad a_1 = \frac{B^2}{mdl}, \quad a_2 = \omega^2 \left( 1 + \kappa + \frac{\kappa}{\rho} \right), \\ a_3 &= \omega^2 \left( \frac{B^2}{mdl} \right), \quad a_4 = \omega^4; \quad \rho = \frac{md^2}{A}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Таким образом, вновь приходим к задаче об оптимизации степени устойчивости для уравнения вида (1.3). В данном случае, результаты, полученные в разделе 1.2, являются неприменимыми из-за жестких ограничений по напряженности магнитного поля ( $B \sim 3 \cdot 10^{-4} \text{ Т}$ ) и магнитного момента катушек ( $\mu \sim 1 \text{ А} \cdot \text{м}^2$ ). Действительно, при «базовых» значениях параметров и начальных условий выбор оптимального значения  $k$  ведет к необходимости обеспечения магнитного момента катушек порядка  $50 \text{ А} \cdot \text{м}^2$ . В связи с этим, 1) параметр  $k$  должен выбираться максимально возможным; 2) рассмотрение зависимости степени устойчивости от параметров системы может проводиться в предположении, что  $kB^2 / mgl$  - малый параметр. Оценим степень устойчивости системы в первом порядке по этому параметру. Для этого необходимо оценить степень устойчивости уравнения вида (1.3) при малых значениях  $k$ . При  $k = 0$  корни (1.3) различны и имеют вид  $\pm i\delta_\pm$ , где

$$\delta_{\pm}^2 = \frac{a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 4a_0a_4}}{2a_0}.$$

Соответственно, зависимость корней (1.3) от  $k$  при малых значениях параметра является аналитической и имеет вид

$$\lambda_{1,2} = \left[ -\frac{a_1\delta_+^2 - a_3}{4a_0\delta_+^2 - 2a_2}k + O(k^2a_1^2 / a_0a_2) \right] \pm i \left[ \delta_+ + O(ka_1 / \sqrt{a_0a_2}) \right],$$

$$\lambda_{3,4} = \left[ -\frac{a_1\delta_-^2 - a_3}{4a_0\delta_-^2 - 2a_2}k + O(k^2a_1^2 / a_0a_2) \right] \pm i \left[ \delta_- + O(ka_1 / \sqrt{a_0a_2}) \right].$$

Сравнивая выражения для вещественных частей корней  $\lambda_{1,2}$  и  $\lambda_{3,4}$ , убеждаемся, что при  $a_0a_3 / a_1a_2 \geq 0.5$  (в физических параметрах это соответствует условию  $d \leq l(\sqrt{1 + 4A/ml^2} - 1)/2$ ) степень устойчивости определяется парой корней  $\lambda_{1,2}$ ; в противном случае, парой  $\lambda_{3,4}$ . С использованием безразмерных параметров  $\kappa$ ,  $\delta = A/ml^2$  выражение для степени устойчивости (с точностью до  $O((kB^2/mgl)^2)$ ) запишется в виде

$$\xi = \frac{kB^2}{4ml^2} \frac{1 - |\kappa^2 + \kappa - \delta| + \sqrt{(\kappa^2 + \kappa - \delta)^2 + 4\delta\kappa^2}}{\kappa \sqrt{(\kappa^2 + \kappa - \delta)^2 + 4\delta\kappa^2}}. \quad (3.26)$$

На практике сложно обеспечить увеличение степени устойчивости путем изменения таких параметров, как  $A$ ,  $m$ ,  $l$ . В то же время, может иметься определенная свобода в том, что касается выбора параметра  $d$ , так что зависимость  $\xi(\kappa)$  представляет определенный интерес.

Поскольку  $\xi(0) = \xi(\infty) = 0$ , оптимум степени устойчивости может достигаться либо в точке недифференцируемости  $\kappa = \kappa_0 = (\sqrt{1 + 4\delta} - 1)/2$ , либо в точке, где  $\xi'(\kappa) = 0$ . Рассмотрение последнего условия приводит к уравнению

$$\left[ (\kappa^2 + \kappa - \delta)^3 + 4\delta\kappa^3 - 8\delta^2\kappa^2 \right] \text{sign}(\kappa - \kappa_0) = \left[ (\kappa^2 + \kappa - \delta)^2 + 4\delta\kappa^2 \right]^{\frac{3}{2}}. \quad (3.27)$$

Рассмотрение уравнения (3.27) для случая длинного стержня ( $\delta \ll 1$ ; так, например, при «базовых» параметрах имеем  $\delta = 1.7 \cdot 10^{-3}$ ), актуального для лабораторного стенда ИПМ, позволяет получить асимптотику его корней:

$$\begin{aligned}\kappa_{1,2,3} &= -1 + o(1), \quad \kappa_4 = -1/3 + o(1), \\ \kappa_5 &= -\delta + o(\delta), \\ \kappa_{6,7} &= (\delta + o(\delta)) \pm i \left( \delta^{4/3} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + o(\delta^{4/3}) \right), \\ \kappa_8 &= \delta + \delta^{4/3} \cdot \sqrt[3]{2} + o(\delta^{4/3}).\end{aligned}$$

Подстановка единственного физически возможного корня ( $\kappa_8$ ) в (3.27), однако, не приводит к тождеству и, следовательно, точек «гладкого» экстремума  $\xi(\kappa)$  не имеет; оптимум достигается при  $\kappa = \kappa_0$  и составляет

$$\xi^* = \frac{kB^2}{2ml^2 \left( \sqrt{1 + 4A/ml^2} - 1 \right)}.$$

Расчет при «базовых» параметрах показывает возможность достижения степени устойчивости порядка  $0.1c^{-1}$ .

### 3.3.3. Исследование магнитного алгоритма «1»

Для случая магнитного алгоритма «1», линеаризация (3.18) дает

$$\begin{aligned}\ddot{\alpha} + \omega^2 \alpha + \kappa \ddot{\theta} &= 0, \\ \ddot{\theta} + \omega_l^2 \theta - \omega_l^2 \alpha &= -\omega_B^2 \text{sign}(\theta \dot{\theta}) \theta.\end{aligned}\tag{3.28}$$

Предполагаем, что характерное значение управляющего момента мало по сравнению с характерным значением момента силы тяжести:  $\nu = \mu B/mgd \ll 1$ .

Будем рассматривать (3.28) как колебательную систему с малым возмущением в правой части. Исходя из характеристического уравнения невозмущенной системы, получаем собственные частоты невозмущенной системы:

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[ \omega^2 + (1 + \kappa) \omega_l^2 \pm \sqrt{(\omega^2 - \omega_l^2)^2 + 2\kappa \omega_l^2 (\omega^2 + \omega_l^2) + \kappa^2 \omega_l^4} \right].\tag{3.29}$$

Перепишем (3.28) в стандартной форме для уравнения малых колебаний:

$$\mathbf{U}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{V}\mathbf{q} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{q} = (\alpha, \theta)^T, \quad (3.30)$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & \kappa \\ \kappa & \kappa^2(1+1/\rho) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & \kappa\omega^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ -v\kappa\omega^2\theta \text{sign}(\theta\dot{\theta}) \end{pmatrix}.$$

Переход к нормальным координатам

$$\mathbf{q} = \mathbf{Q}\mathbf{w}, \quad \mathbf{Q}^T\mathbf{V}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T\mathbf{U}\mathbf{Q}\text{diag}(\lambda_1^2, \lambda_2^2)$$

позволяет привести (3.30) к форме

$$\begin{aligned} \ddot{w}_1 + \lambda_1^2 w_1 &= \left[ (\mathbf{Q}^T\mathbf{U}\mathbf{Q})^{-1} \mathbf{Q}^T \mathbf{f} \right]_1, \\ \ddot{w}_2 + \lambda_2^2 w_2 &= \left[ (\mathbf{Q}^T\mathbf{U}\mathbf{Q})^{-1} \mathbf{Q}^T \mathbf{f} \right]_2, \end{aligned} \quad (3.31)$$

после чего с помощью подстановки Ван-дер-Поля система может быть приведена к виду, удобному для осреднения. В случае произвольных значениях параметров, однако, подобное рассмотрение оказывается затруднительным из-за необходимости усреднения выражений вида

$$\text{sign} \left[ (C_1 \cos \lambda_1 t + C_2 \cos \lambda_2 t) (\lambda_1 C_1 \sin \lambda_1 t + \lambda_2 C_2 \sin \lambda_2 t) \right] \sin \lambda_1 t.$$

Провести последовательное исследование удастся лишь для крайних случаев  $l=0$  (одномерная система) и  $l \rightarrow \infty$ .

Случай  $l=0$ :

Уравнение движения

$$\ddot{\theta} + \tilde{\omega}^2 \theta = -v\tilde{\omega}^2 \theta \text{sign}(\theta\dot{\theta}), \quad \tilde{\omega}^2 = \omega_l^2 / (1 + \rho)$$

стандартной заменой

$$\theta = a \cos(\tilde{\omega}t + \varphi), \quad \dot{\theta} = -a\tilde{\omega} \sin(\tilde{\omega}t + \varphi)$$

приводится к системе

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -v\tilde{\omega}a |\sin(2\tilde{\omega}t + 2\varphi)|, \\ \dot{\varphi} &= -v\tilde{\omega} \cos^2(\tilde{\omega}t + \varphi) \text{sign}[\sin(2\tilde{\omega}t + 2\varphi)], \\ a(0) &= \theta_0, \quad \varphi(0) = 0. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Несмотря на разрывность правых частей, решение (3.32) существует и справедлива стандартная оценка метода осреднения для разности решений исходной и осредненной системы, т.е.

$$\left\| \begin{pmatrix} a(t) \\ \varphi(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{a}(t) \\ \tilde{\varphi}(t) \end{pmatrix} \right\|_{C[0, L/\nu]} \leq g(\nu),$$

где  $g(\nu) \rightarrow 0$  при  $\nu \rightarrow 0$ ; это следует из выполнения условий соответствующей теоремы из работы [17].

Решение осредненной системы (3.32) есть

$$\tilde{a}(t) = \theta_0 \exp(-2\nu\tilde{\omega}t/\pi), \quad \tilde{\varphi}(t) = 0;$$

тем самым, приближенное решение есть  $\theta(t) = \theta_0 \cos(\tilde{\omega}t) \exp(-2\nu\tilde{\omega}t/\pi)$ .

Характерное время затухания  $\pi/2\nu\tilde{\omega}$  в физических переменных выражается как

$$\frac{\pi \sqrt{mgd(A + md^2)}}{2 \mu B},$$

что указывает на то, что при осуществлении реального эксперимента желательным является уменьшение  $d$  (отметим при этом, однако, что полученная формула справедлива лишь при  $mgd \gg \mu B$ , поскольку уже при  $mgd = \mu B$  решение (3.28) становится константой (по Филиппову) после попадания в точку фазового пространства, где  $\dot{\theta} = 0$ ).

Случай  $l \rightarrow \infty$ :

Асимптотика корней характеристического уравнения имеет вид

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 &= \omega_l^2 [1 + O(A/mdl)], \\ \lambda_2^2 &= g/l [1 + O(A^2/m^2 d^2 l^2)] = \omega^2 [1 + O(A^2/m^2 d^2 l^2)]. \end{aligned}$$

Первый базисный вектор нормальной системы координат есть

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^2 \kappa, & \omega^2 - \lambda_1^2 \end{pmatrix}^T \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} 0, & -\omega_l^2 \end{pmatrix}^T,$$

что может быть промасштабировано до  $\mathbf{q}_1 = (0, 1)^T$ . Аналогично, второй базисный вектор есть

$$(\omega^2 - \lambda_2^2 \kappa(1 + 1/\rho), \lambda_2^2) = (1 + O(1), 1 + O(1)) \cdot g/l$$

при  $l \rightarrow \infty$ , что может быть промасштабировано до  $\mathbf{q}_2 = (1, 1)^T$ . Тем самым,

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \alpha, \quad w_1 = \theta - \alpha,$$

и (3.35) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \ddot{w}_1 + \omega_l^2 w_1 &= -\nu \kappa \omega_l^2 (w_1 + w_2) \text{sign}[(w_1 + w_2)] (\dot{w}_1 + \dot{w}_2), \\ \ddot{w}_2 &= 0. \end{aligned}$$

С учетом начальных условий

$$\begin{aligned} w_2(0) &= 0, \quad w_1(0) + w_2(0) = \theta_0, \\ \dot{w}_2(0) &= 0, \quad \dot{w}_1(0) + \dot{w}_2(0) = 0 \end{aligned}$$

имеем  $w_2 \equiv 0$  и, соответственно,  $\ddot{\theta} + \omega_l^2 \theta = -\nu \omega_l^2 \theta \text{sign}(\theta \dot{\theta})$ , что полностью аналогично случаю  $l = 0$  при замене  $\tilde{\omega} \rightarrow \omega_l$ . Соответственно, динамика системы приближенно описывается уравнением

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_l t) \exp\left(-\frac{2\nu \omega_l t}{\pi}\right),$$

а характерное время затухания есть  $\frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{mgdA}}{\mu B}$ .

Применение метода осреднения не позволило обосновать наличие немонотонной зависимости эффективности демпфирования от  $l$ ; этот результат, однако, может быть получен при ослаблении временных требований к аппроксимации решения. Отметим, что из принципиальной применимости метода осреднения к (преобразованной путем подстановки Ван-дер-Поля) системе (3.31) (в соответствии с результатами работы [18]) следует, что на любом конечном интервале справедливо представление решений  $(\alpha(t), \theta(t))$  системы (3.28) в виде

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \theta^{(0)}(t) + \nu \theta^{(1)}(t), \\ \alpha(t) &= \alpha^{(0)}(t) + \nu \alpha^{(1)}(t). \end{aligned}$$

Если начальные условия имеют вид

$$\alpha(0) = \dot{\alpha}(0) = \dot{\theta}(0) = 0, \theta(0) = \theta_0,$$

то для членов нулевого порядка имеем

$$\begin{aligned} \theta^{(0)}(t) &= B_1 \cos(\lambda_1 t) + B_2 \cos(\lambda_2 t), \\ \alpha^{(0)}(t) &= B_1 \frac{\kappa \lambda_1^2}{\omega^2 - \lambda_1^2} \cos(\lambda_1 t) + B_2 \frac{\kappa \lambda_2^2}{\omega^2 - \lambda_2^2} \cos(\lambda_2 t), \end{aligned}$$

где

$$B_1 = \theta_0 \frac{\lambda_2^2 (\omega^2 - \lambda_1^2)}{\omega^2 (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}, \quad B_2 = -\theta_0 \frac{\lambda_1^2 (\omega^2 - \lambda_2^2)}{\omega^2 (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}.$$

Соответственно, для изменения полной энергии  $E$ , динамикой которой определяется эффективность демпфирования, в первом порядке находим

$\dot{E} = \omega M = -vmgd \left| \dot{\theta}^{(0)} \sin \theta^{(0)} \right|$ . После подстановки, сделав дополнительное предположение ( $\rho = md^2/A \ll 1$ ), при  $l \rightarrow 0$  и  $l \rightarrow \infty$  с учетом малости  $\theta_0$  получаем  $\dot{E} = -vmgd \theta_0^2 \omega_l \left| \sin(2\omega_l t) \right|$ ; усредняя по  $t$ , окончательно получаем

$$\dot{\bar{E}} = -2vmgd \theta_0^2 \omega_l / \pi. \quad (3.33)$$

Рассмотрим теперь случай  $\omega = \omega_l$ , соответствующий (в нулевом порядке по  $\kappa$ ) максимальному сближению собственных частот системы (3.28); при этом

$l = \frac{A}{md}$ . Тогда для изменения энергии имеем

$$\dot{E} = -vmgd \theta_0^2 \omega_l \left| \sin(2\omega_l t) \right| \cos^2(\sqrt{\kappa} \omega t / 2),$$

а после усреднения -

$$\dot{\bar{E}} = -vmgd \theta_0^2 \omega_l / \pi, \quad (3.34)$$

тем самым, по сравнению с «краевыми» значениями  $l$ , наблюдается двукратное снижение эффективности. Это качественно соответствует результатам численного расчета (рис. 3.6).

### 3.4. Задача о сопоставлении динамики макета на стенде и спутника на орбите

Исследуем возможность установления подобия между угловым движением спутника на орбите и макета на испытательном стенде. Динамика спутника относительно центра масс определяется уравнением

$$\tilde{\mathbf{J}} \frac{d\tilde{\boldsymbol{\omega}}}{dt} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \tilde{\mathbf{J}}\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{M}_{\text{грав}} + \tilde{\boldsymbol{\mu}} \times \tilde{\mathbf{B}}, \quad (3.37)$$

где  $\tilde{\mathbf{J}}$  - тензор инерции спутника,  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$  - его угловая скорость,  $\mathbf{M}_{\text{грав}}$  - гравитационный момент,  $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$  - магнитный момент,  $\tilde{\mathbf{B}}$  - геомагнитное поле. Полученное выше уравнение углового движения макета на испытательном стенде в случае использования магнитных алгоритмов можно переписать в виде

$$\mathbf{J} \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{d} \times \mathbf{R} + \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}, \quad (3.38)$$

В общем случае, когда смещение точки подвеса  $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ , момент сил реакции стержня зависит от двух обобщенных координат, характеризующих положение стержня, так что добиться совпадения функциональных форм правых частей (3.37) и (3.38) не удастся. При  $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ , с другой стороны, восстанавливающий момент полностью отсутствует, так что аналогия со случаем тела на орбите может быть построена только для случая сферически-симметричного тензора инерции, т.к. в этом случае обнуляется и гравитационный момент.

При построении этой аналогии нужно учитывать, что

- 1) наблюдения в лаборатории, как правило, проводятся на небольшом по сравнению с характерным временем движения по орбите интервале, так что целесообразно ввести «орбитальное» и «лабораторное» время так, что  $t_{\text{орб}} = kt_{\text{лаб}} \quad (k > 1)$ ;
- 2) для возможности имитации динамики поля на орбите в лаборатории магнитное поле должно существенно превышать по модулю фоновое (и, тем более, орбитальное), так что  $B = b\tilde{B}, b > 1$ .

Величины магнитного момента и тензора инерции спутника и макета также могут различаться ( $\mu = c\tilde{\mu}$ ,  $\mathbf{J} = a\tilde{\mathbf{J}}$ ). Для обеспечения сопоставимости углового движения, необходимо, чтобы угловая скорость  $\omega_{\text{лаб}} = \gamma\omega_{\text{орб}}$  удовлетворяла (3.38) с учетом замены времени. Это приводит к условиям

$$\begin{aligned}\gamma &= k, \\ a\gamma^2 &= bc.\end{aligned}$$

Отметим, что в лабораторных условиях  $b \sim 10$ , возможности увеличения  $c$  также имеют первый порядок (если считать, что параметры спутника и его орбиты таковы, что гравитационный и управляющий моменты имеют один порядок), так что если макет и собственно спутник имеют близкие инерционные характеристики, можно добиться лишь 10-кратного «ускорения протекания процессов».

Рассмотрим далее некоторые частные случаи, в которых удастся добиться подобия движений спутника и макета в случае, если на тензор инерции спутника не накладывается столь жестких ограничений.

### 3.4.1.Случай плоских колебаний.

Достижение «подобия» уравнений динамики спутника на орбите и макета на стержне в части управляющего момента сложностей не представляет и достигается простым масштабированием, поэтому впоследствии рассмотрение проводится для случая неуправляемого движения. Как известно, одним из частных движений спутника являются колебания в плоскости орбиты; для круговой орбиты они описываются уравнением

$$\alpha'' + \frac{3}{2} \frac{\tilde{J}_1 - \tilde{J}_3}{\tilde{J}_2} \sin 2\alpha = 0. \quad (3.39)$$

Частные движения в форме плоских колебаний существуют и для тела на испытательном стенде, а именно:

- а) колебания в горизонтальной плоскости при подвесе за точку на главной оси инерции (в случае использования двухстепенных шарниров);
- б) колебания в вертикальной плоскости при подвесе за точку в главной плоскости инерции.

В обоих случаях, функциональная форма уравнений движения, тем не менее, отличается от (3.39), приближаясь к ней лишь для случая малых плоских колебаний, когда можно провести линеаризацию.

В случае а) имеем

$$\ddot{\alpha} + (\eta/J_2)\alpha = \ddot{\alpha} + \hat{\omega}^2\alpha = 0;$$

переходя к безразмерному времени

$$\tau = \hat{\omega}t / \sqrt{3(\tilde{J}_1 - \tilde{J}_3)/\tilde{J}_2},$$

приходим к линеаризованной форме уравнения (3.39).

Отметим, что если спутник не имеет форму, близкую к диску ( $\tilde{J}_1 \approx \tilde{J}_3$  не выполнено), коэффициент  $3(\tilde{J}_1 - \tilde{J}_3)/\tilde{J}_2$  имеет порядок 1. Угловая скорость движения по орбите имеет порядок  $10^{-3}$ , а угловая скорость крутильных колебаний, в зависимости от материала стержня, может варьироваться в интервале примерно  $0.01 - 50 \text{ с}^{-1}$ . Соответственно, при добавлении управляющего момента для достижения подобия движения порядок величины  $bc/a$  должен составлять  $10^3 - 10^8$ . Добиться этого можно только при условии, что реальный спутник достаточно велик (тогда можно добиться  $a \ll 1$ ), а его магнитный момент мал (тогда  $c \gg 1$ ).

Случай б). Здесь и далее в качестве обобщенных координат примем самолетные углы (для тела) и направляющие косинусы стержня относительно осей  $O_1x_1$ ,  $O_1x_2$  ( $e_1$  и  $e_2$ ). Тогда линеаризованные уравнения движения макета запишутся в виде

$$\begin{aligned}
e_1'' + e_1 - \frac{d}{l} \alpha'' &= 0, \\
\alpha'' + \frac{mdl}{J_2} \alpha + \frac{mdl}{J_2} e_1 &= 0.
\end{aligned}
\tag{3.40}$$

(дифференцирование проводится по безразмерному времени  $\tau = t\sqrt{g/l}$ ).

Очевидно, что для достижения подобия решений (3.40) и линеаризованной формы (3.39) необходимо выполнение условий

$$\kappa = \frac{d}{l} \ll 1, \quad \sigma^2 = \frac{mdl}{J_2} \sim 1, \quad e_1(0) = \dot{e}_1(0) = 0.$$

В этом случае, представляя решение (3.40) в виде

$$\alpha(\tau) = \alpha^{(0)}(\tau) + \kappa \alpha^{(1)}(\tau) + \dots,$$

$$e_1(\tau) = e_1^{(0)}(\tau) + \kappa e_1^{(1)}(\tau) + \dots,$$

при начальных условиях  $\alpha(0) = \alpha_0$ ,  $\dot{\alpha}(0) = 0$  в первом приближении по  $\kappa$  получим

$$e_1(\tau) = \kappa \cdot \alpha_0 \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - 1} (\cos \sigma \tau - \cos \tau),$$

$$\alpha(\tau) = \alpha_0 \cos \sigma \tau - \frac{1}{2} \kappa \tau \sin \sigma \tau \cdot \alpha_0 \frac{\sigma^3}{\sigma^2 - 1} + \kappa \cos \tau \cdot \alpha_0 \frac{\sigma^4}{(\sigma^2 - 1)^2}.$$

Таким образом, отклонение угла тангажа от свободных колебаний, подобных решению линеаризованной системы (3.39), есть  $O(\kappa)$  лишь при  $\tau = O(1)$ .

Аналогичный результат может быть получен путем рассмотрения точного решения (3.40) с дальнейшим разложением собственных частот до первого порядка по  $\kappa$ : получим

$$\begin{aligned}
\alpha(\tau) &= \alpha_0 \cos \sigma \tau + \\
&+ \alpha_0 \left[ \cos(\sigma \tau) \left( 1 - \cos \left( \frac{\kappa \sigma^3}{2(1 - \sigma^2)} \tau \right) \right) - \sin(\sigma \tau) \sin \left( \frac{\kappa \sigma^3}{2(1 - \sigma^2)} \tau \right) \right] + O(\kappa),
\end{aligned}$$

т.е. уже при  $\tau = O(1/\kappa)$  отклонение есть  $O(1)$ .

Характерные частоты в случае б) имеют порядок  $1c^{-1}$ , так что, как и в случае а), при наличии управления подобия уравнений можно добиться лишь при  $a \ll 1$  и  $c \gg 1$ .

### 3.4.2. Малые пространственные колебания в окрестности положения равновесия

Система уравнений движения спутника на орбите, линеаризованная в окрестности положения равновесия, имеет вид

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}_A \gamma'' - (\tilde{\theta}_A + \tilde{\theta}_C - 1) \beta' + 4(1 - \tilde{\theta}_C) \gamma &= 0, \\ \alpha'' + 3(\tilde{\theta}_A - \tilde{\theta}_C) \alpha &= 0, \\ \tilde{\theta}_C \beta'' + (\tilde{\theta}_A + \tilde{\theta}_C - 1) \gamma' + (1 - \tilde{\theta}_A) \beta &= 0,\end{aligned}\tag{3.41}$$

где ' обозначает дифференцирование по  $\tilde{\tau} = \omega_0 t$ ,

$$\tilde{\theta}_A = \frac{\tilde{J}_1}{\tilde{J}_2}, \quad \tilde{\theta}_C = \frac{\tilde{J}_3}{\tilde{J}_2}.$$

В свою очередь, линеаризация системы уравнений движения тела на стенде в случае использования двухстепенных шарниров (предполагаем дополнительно, что ось  $O_2 z_1'$  коллинеарна  $Gz_1$ ) дает

$$\begin{aligned}e_1'' + e_1 - \kappa \alpha'' &= 0, \\ e_2'' + e_2 + \kappa \gamma'' &= 0, \\ \theta_A \gamma'' + \sigma^2 \gamma - \sigma^2 e_2 &= 0, \\ \alpha'' + \sigma^2 \alpha + \sigma^2 e_1 &= 0, \\ \theta_C \beta'' + \tilde{\eta} \beta &= 0,\end{aligned}\tag{3.42}$$

где ' обозначает дифференцирование по  $\tau = t\sqrt{g/l}$ ,  $\tilde{\eta} = \eta l/J_2 g$ .

Помимо большего числа уравнений, (3.42) отличается от (3.41) отсутствием слагаемых с первыми производными углов рысканья и крена. Это связано с тем, что (3.41) выписывается в неинерциальной системе, вращающейся с угловой скоростью  $\omega_0$ . Для тела на испытательном стенде

аналогичные слагаемые могут быть получены, если установить маховик с кинетическим моментом  $\Lambda$  вдоль оси  $Gz_2$ . Система (3.42) принимает вид

$$\begin{aligned} e_1'' + e_1 - \kappa\alpha'' &= 0, \\ e_2'' + e_2 + \kappa\gamma'' &= 0, \\ \theta_A\gamma'' - \tilde{\Lambda}\beta' + \sigma^2\gamma - \sigma^2e_2 &= 0, \\ \alpha'' + \sigma^2\alpha + \sigma^2e_1 &= 0, \\ \theta_C\beta'' + \tilde{\Lambda}\gamma' + \tilde{\eta}\beta &= 0 \end{aligned} \quad (3.43)$$

(здесь  $\tilde{\Lambda} = \Lambda l / J_2 g$ ).

Сопоставляя (3.43) с (3.41) и игнорируя пока члены, характеризующие положение стержня, можем однозначно определить параметры стенда и макета, требуемые для достижения подобия<sup>45</sup>:

$$\theta_A = \frac{3\tilde{\theta}_A(\tilde{\theta}_A - \tilde{\theta}_C)}{4(1 - \tilde{\theta}_C)}, \quad \theta_C = \frac{3\tilde{\theta}_C(\tilde{\theta}_A - \tilde{\theta}_C)}{4(1 - \tilde{\theta}_C)}, \quad (3.44.1)$$

$$\sigma^2 = 3(\tilde{\theta}_A - \tilde{\theta}_C), \quad \tilde{\eta} = \theta_C \frac{1 - \tilde{\theta}_A}{\tilde{\theta}_C}, \quad \tilde{\Lambda} = \theta_C \frac{\tilde{\theta}_A + \tilde{\theta}_C - 1}{\tilde{\theta}_C}. \quad (3.44.2)$$

Аналогично случаю б) п.3.4.1, при выполнении условий

$$\kappa \ll 1, \quad \sigma^2 \sim 1, \quad e_1(0) = \dot{e}_1(0) = 0, \quad e_2(0) = \dot{e}_2(0) = 0$$

разность компонент решений  $\alpha(\tau), \beta(\tau), \gamma(\tau)$  систем (3.41), (3.43) (при условии, что их параметры удовлетворяют (3.44) и проведена необходимая замена времени) есть  $O(\kappa)$  при  $\tau = O(1)$ . Покажем это сразу же для случая управляемого движения. Систему (3.41) перепишем в матричной форме

<sup>4</sup> Вообще говоря, сохраняется свобода применения преобразования растяжения времени  $\tilde{\tau} = \xi\tau$ , так что требуемые для достижения подобия величины  $\sigma^2, \tilde{\Lambda}, \tilde{\eta}$  лежат на кривой

$$\sigma^2 = 3\xi(\tilde{\theta}_A - \tilde{\theta}_C), \quad \tilde{\eta} = \xi\theta_C \frac{1 - \tilde{\theta}_A}{\tilde{\theta}_C}, \quad \tilde{\Lambda} = \xi\theta_C \frac{\tilde{\theta}_A + \tilde{\theta}_C - 1}{\tilde{\theta}_C}. \quad \text{Требуемая форма эллипсоида}$$

инерции, тем не менее, всегда определяется формулами (3.44.1).

<sup>5</sup> В силу неравенства треугольника, подобия уравнений движения удастся добиться только в случае, если для инерционных параметров спутника выполнено соотношение

$$\tilde{\theta}_A \geq \sqrt{(3\tilde{\theta}_C^2 - 4\tilde{\theta}_C + 4)/3}.$$

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{B}\mathbf{y} + \mathbf{f}, \quad \mathbf{y}(\mathbf{0}) = \mathbf{y}_0; \quad (3.45)$$

здесь  $\mathbf{y} = [\alpha, \beta, \gamma, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}]^T$ ,  $\mathbf{f}$  - управление. Решение (3.45), как известно, есть

$$\mathbf{y}(\tau) = e^{\mathbf{B}\tau} \left( \mathbf{y}_0 + \int_0^\tau e^{-\mathbf{B}s} \mathbf{f}(s) ds \right). \quad (3.46)$$

Система (3.42) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \hat{\mathbf{B}}\mathbf{x} + \hat{\mathbf{f}}, \quad \mathbf{x}(\mathbf{0}) = \mathbf{x}_0; \\ \mathbf{x} &= [\mathbf{y} \ \mathbf{z}]^T, \quad \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{B}_1 \\ \kappa\mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_3 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{f}} = [\mathbf{f} \ \mathbf{0}]^T, \quad \mathbf{x}_0 = [\mathbf{y}_0 \ \mathbf{0}]^T. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Здесь  $\mathbf{z} = [e_1, e_2, \dot{e}_1, \dot{e}_2]^T$ . Заметим, что левый нижний блок матриц  $e^{\mathbf{B}\tau}$ ,  $e^{-\mathbf{B}\tau}$  при  $\tau = O(1)$  имеет порядок  $\kappa$ ; это видно исходя из того, что

$$\hat{\mathbf{B}}^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^2 + \kappa\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2 & \mathbf{B}\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_1\mathbf{B}_3 \\ \kappa(\mathbf{B}_2\mathbf{B} + \mathbf{B}_3\mathbf{B}_2) & \mathbf{B}_2\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_3^2 \end{bmatrix},$$

а также из возможности перестановки

порядка суммирования для абсолютно сходящегося ряда. Соответственно, для компоненты решения  $\mathbf{z}$  имеем

$$\mathbf{z}(\tau) = \left\{ e^{\hat{\mathbf{B}}\tau} \left[ \begin{pmatrix} \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \int_0^\tau e^{-\hat{\mathbf{B}}s} \begin{pmatrix} \mathbf{f}(s) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} ds \right] \right\}_{\mathbf{z}} = \kappa \mathbf{h}(\tau) \text{ при } \tau = O(1).$$

Теперь уравнение для компоненты  $\mathbf{y}$  можно переписать в виде

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{B}\mathbf{y} + \mathbf{f} + \kappa\mathbf{B}_1\mathbf{h}, \quad \mathbf{y}(\mathbf{0}) = \mathbf{y}_0;$$

его решение есть

$$\mathbf{y}(\tau) = e^{\mathbf{B}\tau} \left( \mathbf{y}_0 + \int_0^\tau e^{-\mathbf{B}s} \mathbf{f}(s) ds + \kappa \int_0^\tau e^{-\mathbf{B}s} \mathbf{B}_1 \mathbf{h}(s) ds \right). \quad (3.48)$$

Очевидно, что разность (3.48) и (3.46) есть  $O(\kappa)$ , что и требовалось.

Отметим, что, как и в предыдущих случаях, при наличии управления подобия уравнений можно добиться лишь при  $a \ll 1$  и  $c \gg 1$ .

## Заключение

В диссертации рассмотрены задачи об угловом движении спутник-стабилизатор, системы «спутник с модельным демпфированием», а также об управляемом движении макета спутника на лабораторном стенде. Во всех случаях основное внимание уделяется анализу движения в окрестности устойчивого положения равновесия и, в частности, оценке скорости переходных процессов и выбору параметров, обеспечивающих максимально быстрое демпфирование собственных колебаний системы.

Строго решена задача оптимизация степени устойчивости по коэффициенту демпфирования для характеристического уравнения 4-го порядка специального вида; определены области, в каждой из которых этот оптимум достигается на определенной конфигурации корней. Построена полная классификация механических систем рассмотренного вида с точки зрения выбора алгоритма определения оптимального коэффициента демпфирования и способа вычисления максимальной степени устойчивости. С применением предложенной методики аналитически решена задача определения оптимальных параметров системы спутник-стабилизатор в частном случае, когда шарнир совмещен с центрами масс обоих тел системы. Показано, что оптимум достигается при подравнивании всех корней характеристического уравнения.

Рассмотрена система с модельным демпфированием, представляющая собой твердое тело, на котором вдоль трех некопланарных осей установлены устройства, создающие вдоль этих осей моменты, пропорциональные соответствующим проекциям угловой скорости тела. Решена задача повышения эффективности гашения малой угловой скорости за счет оптимального выбора направлений осей демпфирующих устройств относительно главных осей инерции тела. Доказано, что максимальная степень устойчивости достигается при коллинеарности осей демпфирования и главных центральных осей инерции

тела. Доказано также ранее неизвестное неравенство, которому удовлетворяют элементы тензора инерции произвольного твердого тела.

Проведено математическое моделирование, численное и аналитическое исследование динамики макета спутника на лабораторном стенде в ИПМ им. М.В.Келдыша РАН. Решена задача улучшения демпфирующих характеристик ряда алгоритмов активных магнитных систем ориентации спутников при их реализации на стенде. Определены частные движения и ограничения на параметры макета, при которых возможно прямое сопоставление его движения в лабораторных условиях с движением спутника относительно центра масс на орбите.

## Литература

1. Ганиев Р.Ф., Кононенко В.О. Колебания твердых тел. М., Наука, 1976.
2. Иванов Д.С., Карпенко С.О., Овчинников М.Ю., Ролдугин Д.С., Ткачев С.С. Лабораторные испытания алгоритмов управления ориентацией микроспутника 'Чибис-М'. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 2011, №40.
3. Иванов Д.С., Овчинников М.Ю., Ткачев С.С. Управление ориентацией твердого тела, подвешенного на струне, с использованием вентиляторных двигателей. Известия РАН. Теория и системы управления, 2011, №1, С.127-139.
4. Ильин А.А., Овчинников М.Ю., Пеньков В.И. Алгоритмы магнитной ориентации спутника, стабилизируемого собственным вращением. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 2005, №19.
5. Ишлинский А.Ю., Стороженко В.А., Темченко М.Е. Вращение твердого тела на струне и смежные задачи. М., Наука, 1991.
6. Карпенко С.О., Ткачев С.С. Исследование алгоритма трехосной маховичной системы ориентации. Труды 52-й научной конференции МФТИ "Современные проблемы фундаментальных наук". Часть III. Аэрофизика и космические исследования. Том 1. М.: МФТИ, 2009, С.183-184.
7. Карпенко С.О., Овчинников М.Ю. Лабораторный стенд для полунатурной отработки систем ориентации микро- и наноспутников. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 2008, №38.
8. Луканин К.В., Сарычев В.А. Модельная задача о быстродействии и точности системы гравитационной стабилизации спутников. Препринт Института прикладной математики АН СССР, 1971, №47.

9. Мирер С.А. О некоторых экстремальных соотношениях между элементами тензора инерции твердого тела. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 2009, №55.
10. Мирер С.А. Оптимальное гиродемпфирование нутационных колебаний спутника, стабилизируемого вращением. Космич. исследования, т. 15, 1977, №5, с. 677-682.
11. Мирер С.А. Плоские колебания спутника с двумя гироскопами. Космич. исследования, т. 16, 1978, № 1, с. 137-139.
12. Мирер С.А., Сарычев В.А. О стационарных движениях твердого тела на струнном подвесе. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 1996, №96.
13. Мирер С.А., Сарычев В.А. Оптимальные параметры спутника, стабилизируемого вращением, с демпфером маятникового типа. Космич. исследования, т. 35, 1997, № 6, с. 651-658.
14. Нохрина Е.Е. Исследование возможности демпфирования колебаний спутника. В сб.: Обработка информации и моделирование М., МФТИ, 2002, с.119-122.
15. Овчинников М.Ю., Пеньков В.И., Ролдугин Д.С., Карпенко С.О. Исследование быстродействия алгоритма активного магнитного демпфирования. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 2010, №16.
16. Охоцимский Д.Е, Зонов Ю.В., Токарь Е.Н., Князев Д.А., Лурье А.И., Максимов Г.Ю. Предварительное исследование проблемы создания ориентированного спутника Земли. Отчет Отделения прикладной математики АН СССР, 1956, 137с.
17. Плотников В. А., Зверкова Т.С., Метод усреднения для систем стандартного вида с разрывными правыми частями. Дифференц. уравнения, 1982, т. 18, № 6, с. 1091-1093.

18. Плотников В.А., Зверкова Т.С. Метод частичного усреднения для систем стандартной формы с разрывными правыми частями. Украинский математический журнал, 1993, т. 45, №1, с.140-142.
19. Сарычев В.А. Исследование динамики гравитационной системы стабилизации. Искусственные спутники Земли, ч. 16, С. 10-33. Изд-во АН СССР, 1963.
20. Сарычев В.А., Луканин К.В. Оптимизация параметров гравитационной системы стабилизации с гиродемпфированием. Препринт Института прикладной математики АН СССР, 1971, №46.
21. Сарычев В.А., Луканин К.В. Оптимизация гравитационной системы стабилизации спутников. Препринт Института прикладной математики АН СССР, 1971, №54.
22. Сарычев В.А., Мирер С.А. Оптимальные параметры гравитационной системы спутник-стабилизатор. Космические исследования, 1976, т. 14, №2, С. 209-219.
23. Сарычев В.А., Пеньков В.И. Исследование гравитационной системы стабилизации спутника с демпфирующей пружиной. Препринт Института прикладной математики АН СССР, 1974, №127.
24. Сарычев В.А., Пеньков В.И., Яковлев Н.И. Оптимизация параметров линейных систем. Препринт Института прикладной математики АН СССР, 1975, №124.
25. Сарычев В.А., Сазонов В.В. Оптимальные параметры пассивных систем ориентации спутников. Космич. исследования, т. 14, 1976, №2, 1976, с. 198-208.
26. Сидорюк М.Е. К задаче нахождения максимума степени устойчивости. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша АН СССР, 1981, №89.
27. Ткачев С.С. Исследование управляемого углового движения аппаратов с ротирующими элементами. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. М., 2011.

- 28.Цыпкин Я.З., Бромберг П.В. О степени устойчивости линейных систем. Изв. АН СССР, ОТН, 1945, №12, с. 1163-1168.
- 29.Яковлев Н.И. Оптимизация по быстродействию параметров гравитационных систем ориентации с двумя демпферами. Препринт Института прикладной математики АН СССР, 1976, №56.
- 30.Borelli, R. L., and Leliakov, I. P. An optimization technique for the transient response of passively stable satellites, J. Optimization Theory and Applications 10(6), 334-361, 1972.
- 31.Bushenkov V.A., Ovchinnikov M. Yu., Smirnov G.V. Attitude Stabilization of a Satellite by Magnetic Coils, Acta Astronautica, 2002, V.50, Issue 12, pp.721-728.
- 32.Makovec K., Turner A., Hall C., Design and implementation of a nanosatellite attitude determination and control system, Advances in the Astronautical Sciences, Vol. 109, 2001, p. 167-186.
- 33.Pivovarov, M.I., Ferreira, L.O., and R.V.F. Lopes. Rigid body rotation evolution due to a disturbing torque which is known in a body frame, Acta Mechanica, 1999, V. 133, pp. 239-246.
- 34.Sarychev V.A., Mirer S.A., Isakov A.V. Dual-Spin Satellites with Gyro-Damping, Acta Astronautica, 1982, Vol. 9, №5, p. 285-289.
- 35.Sarychev V.A., Mirer S.A., Sazonov V.V. Plane oscillations of a gravitational system satellite-stabilizer with maximal speed of response. ActaAstronautica, vol.3, 1976, No.9-10, p. 651-669.
- 36.Sarychev, V.A. Satellite gravitational stabilization systems with maximum damping rate, Second International Conference on Space Engineering, Venice, 1969.
- 37.Tabuada P., Alves P. ,Tavares P., Lima P., Attitude Control Strategies for Small Satellites, the project "Control and Stabilization of Small Satellites", supported by the PRAXIS XXI Programme, Report RT-404-98 Lisboa, 1998.
- 38.Zajac, E.E. Damping of a gravitationally oriented two-body satellite, ARS J., 1966, Vol. 32, No. 12, pp. 1871-1875.