

Федеральное государственное унитарное предприятие «Государственный
космический научно-производственный центр имени М.В. Хруничева»

На правах рукописи

Игнатов Александр Иванович

Исследование режимов вращательного движения искусственного спутника Земли для проведения экспериментов в области микрогравитации

01.02.01 – Теоретическая механика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

Д.ф.-м.н., профессор В.В. Сазонов

Москва, 2012 г.

ВВЕДЕНИЕ	4
В.1. Цель диссертации	4
В.2. Математическое моделирование микроускорений, возникающих на борту спутника	4
В.3. Уравнения движения спутника	8
В.4. Массово-инерционные характеристики спутника	13
В.5. Параметры рабочей орбиты спутника.....	13
ГЛАВА 1. ПОСТРОЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАКОНОВ УПРАВЛЕНИЯ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩИХ ОРБИТАЛЬНУЮ ОРИЕНТАЦИЮ СПУТНИКА	13
1.1 Пассивная гравитационная ориентация спутника	13
1.2 Орбитальная ориентация спутника	16
1.3 Точная орбитальная ориентация спутника.....	21
1.4 Полупассивная гравитационная ориентация спутника.....	24
ГЛАВА 2. ПОСТРОЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАКОНОВ УПРАВЛЕНИЯ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩИХ ОДНООСНУЮ СОЛНЕЧНУЮ ОРИЕНТАЦИЮ СПУТНИКА	27
2.1. Закон управления гиростатическим моментом в режиме одноосной солнечной ориентации спутника	28
2.2. Режим одноосной солнечной ориентации с ограничением роста кинетического момента спутника.	31
ГЛАВА 3. РЕАЛИЗАЦИЯ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ СПУТНИКА С ПОМОЩЬЮ СИСТЕМЫ ДВИГАТЕЛЕЙ-МАХОВИКОВ	35
3.1. Схема установки двигателей-маховиков	35
3.2. Математическая модель двигателя-маховика	37
3.3. Законы управления гиростатическим моментом	38
ГЛАВА 4. АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКИХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ИСКУССТВЕННЫМ СПУТНИКОМ ЗЕМЛИ, ПОСТРОЕННЫХ НА БАЗЕ ДВИГАТЕЛЕЙ-МАХОВИКОВ	42

4.1. Электромеханические исполнительные органы систем управления искусственными спутниками Земли	42
4.2. Построение области требуемых значений кинетического момента	42
4.3. Область возможных значений кинетического момента	44
4.4. Возможности системы при отключении одного маховика	47
4.5. Расположение маховиков на искусственном спутнике Земли	50
4.6. Анализ схемы установки системы двигателей-маховиков.	51
ГЛАВА 5. ПОСТРОЕНИЕ И АНАЛИЗ ОСОБЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ СИСТЕМ БЕЗУПОРНЫХ ГИРОДИНОВ	52
5.1. Система уравнений, задающая особые поверхности	52
5.2. Типы особых точек	55
5.3. Построение и анализ особых поверхностей	57
5.4. Анализ схемы установки системы гиродинов	59
ЗАКЛЮЧЕНИЕ. Основные результаты работы	60
ПРИЛОЖЕНИЯ	61
П.1. Орбитальная стабилизация спутника	61
П.2. Проходимые особые точки особых поверхностей	64
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	67
РИСУНКИ	71

ВВЕДЕНИЕ

В.1. Цель диссертации. Результаты ряда выполняемых на искусственных спутниках Земли (ИСЗ) экспериментов по физике жидкости, материаловедению, биологии и медицине существенно зависят от микроускорений, действующих на экспериментальные установки. Чтобы такие эксперименты были успешными, микроускорения должны быть малыми. Микроускорения на борту спутника определяются конструкцией спутника и его движением, прежде всего, движением относительно центра масс. Поиск приемлемых вариантов конструкции и режимов движения спутников, предназначенных для исследований в области микрогравитации, приводит к задаче математического моделирования микроускорений.

Цель данной диссертации состоит в поиске и исследовании режимов вращательного движения спутника, обеспечивающих низкий уровень квазистатических микроускорений. Для надежной реализации такие режимы должны быть управляемыми. Управление предлагается осуществлять электромеханическими исполнительными органами – двигателями-маховиками или гиродинами, поскольку они вносят минимальные возмущения в требуемое движение спутника. В качестве дополнительных условий при поиске режимов с малым уровнем микроускорений рассматриваются условия малости области вариации вектора микроускорения, большого токосъема с солнечных батарей спутника, медленного накопления собственного кинетического момента электромеханическими управляющими устройствами. Исследование проводится с учетом дискретности работы БЦВМ и наличия зон нечувствительности в датчиках системы управления. Кроме задач, в которых объектом исследования является движение спутника, в диссертации рассмотрены задачи выбора конфигурации и анализа динамических возможностей применяемых систем двигателей-маховиков и гиродинов.

В.2. Математическое моделирование микроускорений, возникающих на борту спутника. Квазистатические микроускорения на борту низколетящего

спутника вызываются четырьмя причинами: 1) движением спутника относительно центра масс как твердого тела, 2) градиентом гравитационного поля, 3) аэродинамическим торможением, 4) действием силы, создаваемой органами управления. Если спутник совершает неуправляемое движение или для управления им используется гиросистема, то последняя из перечисленных причин исчезает. При таком сужении постановки задачи квазистатическое микроускорение в заданной фиксированной точке борта описывается простой формулой, и чтобы воспользоваться ею, достаточно знать только орбиту и вращательное движение спутника. Вывод формулы микроускорения основан на следующем определении.

Пусть спутник представляет собой твердое тело, и точка P жестко связана с его корпусом. Микроускорением $\mathbf{b}$ в точке P называется разность между напряженностью гравитационного поля в этой точке и абсолютным ускорением последней. Роль вектора $\mathbf{b}$ в орбитальных экспериментах аналогична роли ускорения свободного падения $\mathbf{g}$ в экспериментах на поверхности Земли. В частности, если в точке P закрепить пробное тело с исчезающе малой массой m_p , то реакция, действующая на это тело со стороны спутника, будет равна $-m_p \mathbf{b}$. Приближенная формула для расчета микроускорений имеет вид [1]

$$\mathbf{b} = \mathbf{d} \times \dot{\boldsymbol{\omega}} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d}) \times \boldsymbol{\omega} + \frac{\mu_E}{|\mathbf{r}|^3} \left[\frac{3(\mathbf{d} \cdot \mathbf{r})}{|\mathbf{r}|^2} \mathbf{r} - \mathbf{d} \right] + c \rho_a |\mathbf{v}| \mathbf{v}. \quad (\text{B.1})$$

Здесь $\mathbf{d}$ – радиус-вектор точки P относительно центра масс спутника, точки O , $\boldsymbol{\omega}$ – абсолютная угловая скорость спутника, точка над буквой означает дифференцирование по времени t , μ_E – гравитационный параметр Земли, $\mathbf{r}$ – геоцентрический радиус-вектор точки O , $\mathbf{v}$ – скорость этой точки относительно поверхности Земли, ρ_a – плотность атмосферы в точке O , c – баллистический коэффициент спутника.

Формула (B.1) выведена для общего случая без каких-либо частотных ограничений. Однако если спутник имеет большие инерционные характеристики как, например, «Фотон» или «Прогресс» и его вращательное движение

рассчитывается как движение твердого тела (такое движение обычно очень медленное), то формула (В.1) дает именно квазистатическое микроускорение.

Приведем некоторые числовые оценки, характеризующие один из наиболее подходящих для исследований в области микрогравитации режимов вращательного движения спутника – режим орбитальной ориентации.

Введем орбитальную систему координат $OX_1X_2X_3$. Это правая декартова система, оси OX_3 и OX_2 которой направлены соответственно вдоль $\mathbf{r}$ и кинетического момента орбитального движения спутника $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$. Угловая скорость этой системы

$$\boldsymbol{\omega}^\circ = \frac{\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}}{r^2} + \frac{\ddot{\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})}{r^2 |\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}|} \mathbf{r}, \quad r = |\mathbf{r}|.$$

Ниже в данном разделе компоненты векторов и координаты точек указываются в системе $OX_1X_2X_3$.

Будем считать, что орбита ИСЗ круговая и неизменна в абсолютном пространстве, и что спутник неподвижен в орбитальной системе координат. Тогда

$$\mathbf{r} = (0, 0, r), \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2, 0), \quad \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^\circ = (0, \omega_0, 0), \quad (\text{В.2})$$

$$v_1 = r(\omega_0 - \omega_E \cos i), \quad v_2 = r\omega_E \sin i \cos u, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{\mu_E}{r^3}}.$$

Здесь r – радиус орбиты, ω_0 – среднее движение спутника (орбитальная частота), ω_E – угловая скорость вращения Земли, i – наклонение орбиты, u – аргумент широты спутника, $u = \omega_0 t + \text{const}$. Для такого спутника, введя обозначения $\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3)$ и $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, формулу (В.1) в скалярном виде можно записать так:

$$b_1 = c\rho_a v v_1, \quad b_2 = -\omega_0^2 d_2 + c\rho_a v v_2, \quad b_3 = 3\omega_0^2 d_3, \\ v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = r\sqrt{(\omega_0 - \omega_E \cos i)^2 + (\omega_E \sin i \cos u)^2}.$$

Для спутника на круговой орбите с высотой около 400 км и наклонением $i = 63^\circ$ имеют место соотношения $c\rho_a v^2 \approx 10^{-6} \text{ м/с}^2$, $\omega_0 = 0.001138 \text{ с}^{-1}$,

$\omega_0^2 \approx 1.3 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-2}$, $|v_2|/v_1 < 0.06$. Если взять $d_1 = d_2 = 0$, $d_3 = 2.5 \text{ м}$, то получим $b_1 \approx 10^{-6} \text{ м/с}^2$, $|b_2| < 0.06 \cdot 10^{-6} \text{ м/с}^2$, $b_3 = 9.7 \cdot 10^{-6} \text{ м/с}^2$. Компонента b_3 постоянна во времени, компонента b_1 меняется, но сохраняет знак, компонента b_2 меняет знак.

Для задач космического материаловедения микроускорение с модулем 10^{-5} м/с^2 вполне приемлемо, если его компоненты в системе координат технологической установки меняются в достаточно узких пределах. Требования к временным вариациям компонент микроускорения удобно сформулировать в терминах спектрального анализа. Эти вариации можно представить в виде суммы нескольких гармоник. Предельно допустимые значения амплитуд таких гармоник зависят от их частоты (некоторые данные о частотных свойствах космических экспериментов по росту кристаллов приведены в [2 – 5]). Вообще говоря, каждый космический эксперимент имеет свою собственную амплитудно-частотную характеристику предельно допустимых микроускорений, однако для экспериментов по росту кристаллов такие характеристики более или менее одинаковы. В настоящее время к ним выработаны достаточно конкретные и универсальные требования. Они сводятся к тому, что в диапазоне частот более 0.0001 Гц предельно допустимые значения амплитуд возрастают вместе с частотой. Самой низкой и в этом смысле самой опасной из реально наблюдаемых частот является орбитальная частота (значению $\omega_0 = 0.001138 \text{ с}^{-1}$ отвечает циклическая частота 0.000181 Гц). В рассмотренном примере она ярко выражена в компоненте b_2 , поскольку (ср. (В.2)) $v_2 \sim \cos u$, и присутствует в компоненте b_1 из-за изменения плотности атмосферы вдоль орбиты. Гармоники с частотами более 0.01 Гц , как правило, уже безопасны.

В рассмотренном выше примере достигнуты весьма благоприятные условия для проведения космических экспериментов по уровню микроускорений. Эти условия гораздо лучше условий, имевших место в неуправляемом вращательном движении спутников [6 – 12] и в режиме пассивной гравитационной ориентации [13, 14]. В наиболее близком к рассмотренному примеру режиме

пассивной гравитационной ориентации микроускорения содержат заметные колебания с опасными частотами 0.00018 – 0.001 Гц. Эти колебания – следствие возмущенного движения спутника, вызванного дестабилизирующим действием аэродинамического момента, эллиптичностью орбиты и т. п. причинами [15, 16]. Чтобы уменьшить возмущенное движение, спутник следует снабдить средствами трехосной орбитальной стабилизации. Ниже исследовано применение для этой цели электромеханических исполнительных органов – двигателей-маховиков или гиродинов.

В.3. Уравнения движения спутника. Приведем общую часть математической модели движения ИСЗ. Спутник считаем гироскопом, центр масс которого движется по геоцентрической орбите. Для описания движения спутника будем использовать три правые декартовы системы координат. Это – введенная выше орбитальная система координат.

$Ox_1x_2x_3$ – система координат, образованная главными центральными осями инерции спутника. Упрощая модель, полагаем, что оси этой системы параллельны или перпендикулярны характерным элементам конструкции спутника. В данном случае ось Ox_2 – нормаль к плоскости солнечных батарей.

$Su_1u_2u_3$ – гринвичская система координат. Точка S – центр Земли, плоскость Su_1u_2 совпадает с плоскостью экватора, ось Su_1 пересекает гринвичский меридиан, ось Su_3 направлена к Северному полюсу.

Матрицу перехода от системы $Ox_1x_2x_3$ к системе $Su_1u_2u_3$ обозначим $\|c_{ij}\|_{i,j=1}^3$, где c_{ij} – косинус угла между осями Su_i и Ox_j . Элементы этой матрицы выражаются через координаты и компоненты скорости центра масс спутника в гринвичской системе координат.

Матрицу перехода от системы координат $Ox_1x_2x_3$ к системе $Ox_1X_2X_3$ обозначим $\|a_{ij}\|_{i,j=1}^3$. Здесь a_{ij} – косинус угла между осями OX_i и Ox_j . Матрицу перехода от системы $Ox_1x_2x_3$ к гринвичской системе координат обозна-

чим $\|b_{ij}\|_{i,j=1}^3$. Здесь b_{ij} – косинус угла между осями Sy_i и Ox_j .

Положение системы $Ox_1x_2x_3$ относительно системы $OX_1X_2X_3$ будем также задавать углами γ , δ и β , которые введем следующим образом. Система $OX_1X_2X_3$ может быть переведена в систему $Ox_1x_2x_3$ тремя последовательными поворотами: 1) на угол $\delta + \pi/2$ вокруг оси OX_2 , 2) на угол β вокруг новой оси OX_3 , 3) на угол γ вокруг новой оси OX_1 , совпадающей с осью Ox_1 . Элементы матрицы $\|a_{ij}\|$ выражаются через эти углы с помощью формул

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\sin \delta \cos \beta, & a_{21} &= \sin \beta, \\ a_{12} &= \cos \delta \sin \gamma + \sin \delta \sin \beta \cos \gamma, & a_{22} &= \cos \beta \cos \gamma, \\ a_{13} &= \cos \delta \cos \gamma - \sin \delta \sin \beta \sin \gamma, & a_{23} &= -\cos \beta \sin \gamma, \\ a_{31} &= -\cos \delta \cos \beta, \\ a_{32} &= -\sin \delta \sin \gamma + \cos \delta \sin \beta \cos \gamma, \\ a_{33} &= -\sin \delta \cos \gamma - \cos \delta \sin \beta \sin \gamma. \end{aligned}$$

Справедливы соотношения

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^3 c_{ik} a_{kj} \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Ниже, если не оговорено особо, компоненты векторов и координаты точек указываются в системе $Ox_1x_2x_3$.

Уравнения движения спутника состоят из двух подсистем. Одна подсистема описывает движение центра масс спутника, другая его движение относительно центра масс (вращательное движение). Подсистема уравнений движения центра масс записывается в гринвичской системе координат относительно компонент векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$ (см. (B.1)) [17]. Нецентральность гравитационного поля Земли учитывается с точностью до членов порядка (16,16) включительно в разложении гравитационного потенциала Земли в ряд по шаровым функциям. Атмосфера считается вращающейся вместе с Землей, ее плотность рассчитывается согласно модели ГОСТ Р 25645.166-2004. Парамет-

ры атмосферы считаются неизменными на всем интервале интегрирования уравнений движения.

Подсистема уравнений вращательного движения образована уравнениями, выражающими теорему об изменении кинетического момента спутника в его движении относительно центра масс, кинематическими уравнениями Пуассона для элементов первых двух строк матрицы $\|b_{ij}\|$ и уравнениями, описывающими изменение кинетического момента гиросистемы. В уравнениях, выражающих теорему об изменении кинетического момента, учитываются гравитационный и аэродинамический моменты. Для гравитационного момента существует простое аналитическое выражение [16]. Аэродинамический момент $\mathbf{M}_a$ вычислялся в предположении, что спутник имеет форму прямого кругового цилиндра с двумя прикрепленными к нему одинаковыми прямоугольными пластинами – солнечными батареями (см. рис. В.1). Цилиндр имеет радиус R и высоту L , его ось совпадает с осью Ox_1 . Пластины расположены в плоскости Ox_1x_3 симметрично относительно оси Ox_1 . Стороны пластин параллельны осям Ox_1 и Ox_3 . Суммарная площадь пластин составляет S_b . Координаты геометрических центров цилиндра и пластин суть $(x_{1c}, 0, 0)$ и $(x_{1b}, 0, 0)$. Полагая, что молекулы атмосферы при столкновении с корпусом ИСЗ испытывают абсолютно неупругий удар, формулу для аэродинамического момента представим в виде [15]

$$\mathbf{M}_a = \rho_a |\mathbf{v}| (\mathbf{v} \times \mathbf{P}). \quad (\text{В.3})$$

Здесь $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{v})$ – первый момент геометрической фигуры, являющейся проекцией внешней оболочки спутника на плоскость Π_v , перпендикулярную вектору $\mathbf{v}$. Вектор $\mathbf{P}$ лежит в плоскости Π_v и вычисляется относительно проекции на Π_v точки O . Поскольку формула (В.3) инвариантна относительно замены $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P} + p\mathbf{v}$, где p произвольный скаляр, функцию $\mathbf{P}(\mathbf{v})$ можно задавать, не связывая себя условием $\mathbf{P} \in \Pi_v$. В частности, компоненты вектора

$|\mathbf{v}|\mathbf{P}(\mathbf{v})$ удобно задавать в системе координат $Ox_1x_2x_3$. Для рассматриваемого спутника эти компоненты можно взять в виде

$$|\mathbf{v}|\mathbf{P}(\mathbf{v}) = \left[x_{1c} \left(\pi R^2 |\mathbf{v}_1| + 2RL \sqrt{v_2^2 + v_3^2} \right) + x_{1b} S_b |\mathbf{v}_2|, 0, 0 \right].$$

Здесь v_i – компоненты в той же системе вектора $\mathbf{v}$.

Допущения, сделанные при выводе формулы аэродинамического момента, позволяют выписать явное выражение для входящего в формулу (B.1) баллистического коэффициента спутника. Этот коэффициент имеет вид $c = S_v/m$, где S_v – площадь геометрической фигуры, являющейся проекцией внешней оболочки спутника на плоскость Π_v . В данном случае

$$|\mathbf{v}|S_v = \pi R^2 |\mathbf{v}_1| + S_b |\mathbf{v}_2| + 2RL \sqrt{v_2^2 + v_3^2},$$

и аэродинамический член формулы (B.1) принимает вид

$$c\rho_a |\mathbf{v}|\mathbf{v} = \rho_a \left(\frac{\pi R^2}{m} |\mathbf{v}_1| + \frac{S_b}{m} |\mathbf{v}_2| + \frac{2RL}{m} \sqrt{v_2^2 + v_3^2} \right) \mathbf{v}. \quad (\text{B.4})$$

Все приводимые в данной работе расчеты микроускорений выполнены по формулам (B.1), (B.4).

При выводе выражений для аэродинамического момента и баллистического коэффициента не учитывалось возможное взаимное затенение корпуса спутника и солнечных батарей от набегающего аэродинамического потока. Такое упрощение оправдано, поскольку для большинства движений спутника относительная продолжительность отрезков времени, на которых указанное затенение существенно, невелика.

Уравнения, выражающие теорему об изменении кинетического момента спутника в его движении относительно центра масс, и кинематические уравнения Пуассона для элементов b_{1i} и b_{2i} имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{k}_1 &= \mu(\omega_2 \omega_3 - \nu x_2 x_3) + h_2 \omega_3 - h_3 \omega_2, \\ \dot{k}_2 &= \frac{1-\lambda}{1+\lambda\mu} (\omega_1 \omega_3 - \nu x_1 x_3) + \frac{\lambda}{1+\lambda\mu} (h_3 \omega_1 - h_1 \omega_3 + p v_3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{k}_3 &= -(1 - \lambda + \lambda\mu)(\omega_1\omega_2 - \nu x_1x_2) + \lambda(h_1\omega_2 - h_2\omega_1 - p\nu_2), \\
\dot{b}_{11} &= b_{12}\omega_3 - b_{13}\omega_2 + \omega_E b_{21}, & \dot{b}_{21} &= b_{22}\omega_3 - b_{23}\omega_2 - \omega_E b_{11}, \\
\dot{b}_{12} &= b_{13}\omega_1 - b_{11}\omega_3 + \omega_E b_{22}, & \dot{b}_{22} &= b_{23}\omega_1 - b_{21}\omega_3 - \omega_E b_{12}, \\
\dot{b}_{13} &= b_{11}\omega_2 - b_{12}\omega_1 + \omega_E b_{23}, & \dot{b}_{23} &= b_{21}\omega_2 - b_{22}\omega_1 - \omega_E b_{13}, \\
\omega_1 &= k_1 - h_1, & \omega_2 &= k_2 - \frac{\lambda h_2}{1 + \lambda\mu}, & \omega_3 &= k_3 - \lambda h_3, \\
\lambda &= \frac{I_1}{I_3}, & \mu &= \frac{I_2 - I_3}{I_1}, & \nu &= \frac{3\mu_E}{r^5}, & r &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \\
p &= E\rho_a \left(l_1 |\mathbf{v}_1| + l_2 |\mathbf{v}_2| + l_3 \sqrt{v_2^2 + v_3^2} \right), \\
l_1 &= \frac{\pi R^2 x_{1c}}{I_1}, & l_2 &= \frac{S_b x_{1b}}{I_1}, & l_3 &= \frac{2RLx_{1c}}{I_1}.
\end{aligned} \tag{B.5}$$

Здесь ω_i и x_i ($i = 1, 2, 3$) – компоненты векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{r}$, I_i – моменты инерции спутника относительно осей Ox_i , k_i – отнесенные к I_i компоненты кинетического момента спутника в его движении относительно центра масс, h_i – отнесенные к I_1 компоненты гиросtatического момента спутника, E – масштабирующий множитель. При численном интегрировании уравнений (B.5) единицей времени служит 1000 с, единицей измерения длины – 1000 км, скорость выражается в км/с, единица измерения угловой скорости и величин k_i и h_i – 0.001 с^{-1} , плотность атмосферы рассчитывается в кг/м^3 , $E = 10^{12}$. Третья строка матрицы перехода $\|b_{ij}\|$ вычисляется как векторное произведение ее первой и второй строк. Переменные b_{1i} и b_{2i} зависимы. Они связаны условиями ортогональности матрицы $\|b_{ij}\|$, которые должны учитываться при задании начальных условий этих переменных.

Чтобы замкнуть подсистему уравнений вращательного движения, надо добавить к уравнениям (B.5) уравнения, описывающие изменение переменных h_i , которые будут приведены ниже.

В.4. Массово-инерционные характеристики спутника. Параметры спутника: $m = 6440$ кг, $I_1 = 2600$ кг·м², $I_2 = 11100$ кг·м², $I_3 = 10900$ кг·м², $R = 1.3$ м, $L = 5.0$ м, $S_b = 33$ м², $x_{1b} = -1$ м, $x_{1c} = 0.3$ м. Микроускорения рассчитывались в точке P с координатами $(-1$ м, 0.7 м, 0.5 м). Эта точка находится на внутренней стенке рабочего отсека спутника, примерно на ее середине. Вблизи этой точки возможна установка научной аппаратуры.

В.5. Параметры рабочей орбиты спутника. Начальные условия движения центра масс спутника задавались в восходящем узле орбиты в момент 12:10:34 декретного московского времени 21.09.2007. На этот момент элементы орбиты составляли: высота в апогее 450 км, высота в перигее 400 км, наклонение 63.0° , аргумент широты перигея 53.5° , долгота восходящего узла (отсчитывается от точки среднего весеннего равноденствия эпохи даты) 164.0° .

Параметры модели атмосферы во всех расчетах были следующие: $F = F_{81} = 150$, $A_p = 12$.

Начальные условия уравнений (В.5) задавались в тот же момент времени, что и начальные условия принятой орбиты. Этот момент служит началом отсчета времени – точкой $t = 0$.

ГЛАВА 1. ПОСТРОЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАКОНОВ УПРАВЛЕНИЯ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩИХ ОРБИТАЛЬНУЮ ОРИЕНТАЦИЮ ИСКУССТВЕННОГО СПУТНИКА ЗЕМЛИ

В данной главе рассматривается движение спутника в различных реализациях режима орбитальной ориентации, о котором говорилось выше. Законы управления ориентацией строятся в терминах суммарного кинетического момента гиросистемы и скорости его изменения.

1.1. Пассивная гравитационная ориентация спутника. Чтобы пояснить этот режим вращательного движения, упростим уравнения (В.5), отбросив некоторые второстепенные факторы. Предположим, что орбита спутника – круго-

вая и неизменна в абсолютном пространстве, на спутник действует один лишь гравитационный момент и собственный кинетический момент гиросистемы (гиростатический момент спутника) равен нулю. В этом случае уравнения (В.5) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_1 &= \mu(\omega_2\omega_3 - 3\omega_0^2 a_{32}a_{33}), & \dot{\omega}_2 &= \frac{1-\lambda}{1+\lambda\mu}(\omega_1\omega_3 - 3\omega_0^2 a_{31}a_{33}) \\ \dot{\omega}_3 &= -(1-\lambda+\lambda\mu)(\omega_1\omega_2 - 3\omega_0^2 a_{31}a_{32}), & & (1.1) \\ \dot{\gamma} &= \omega_1 - \operatorname{tg}\beta(\omega_2 \cos \gamma - \omega_3 \sin \gamma), & \dot{\delta} &= \frac{\omega_2 \cos \gamma - \omega_3 \sin \gamma}{\cos \beta} - \omega_0, \\ \dot{\beta} &= \omega_2 \sin \gamma + \omega_3 \cos \gamma.\end{aligned}$$

Здесь величины a_{3i} выражаются через углы γ , δ и β по указанным выше формулам.

Уравнения (1.1) допускают четыре стационарных решения, которые можно задать соотношениями

$$\sin \gamma = \sin \delta = \beta = 0, \quad \omega_1 = \omega_3 = 0, \quad \omega_2 = \omega_0 \cos \gamma.$$

Эти решения описывают положения равновесия (покой) спутника в орбитальной системе координат. Достаточные условия устойчивости по Ляпунову решений (1.1) выражаются неравенствами [16]: $\lambda < 1$, $\mu > 0$, $1 - \lambda + \lambda\mu > 0$. У рассматриваемого спутника $\lambda = 0.239$, $\mu = 0.077$, и выписанные неравенства выполнены.

Каждое устойчивое стационарное решение уравнений (1.1) реализует режим трехосной гравитационной ориентации. В этом режиме спутник совершает полет подобно Луне (пример гравитационной ориентации естественного небесного тела), будучи неизменно одной своей стороной обращен к Земле. Такой режим может быть удобен при неуправляемом полете спутника. Для определенности сузим набор возможных движений и ниже будем рассматривать только стационарное решение

$$\gamma = \delta = \beta = 0, \quad \omega_1 = \omega_2 - \omega_0 = \omega_3 = 0. \quad (1.2)$$

В этом решении оси Ox_1 и Ox_2 совпадают с осями $(-Ox_3)$ и Ox_2 соответ-

ственно.

Уравнения (В.5) для рассматриваемого спутника не имеют решений, описывающих покой в орбитальной системе координат, однако в силу непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных условий и параметров эти уравнения допускают решения, которые после пересчета переменных b_{1i} и b_{2i} в углы γ , δ и β будут близки положению покоя (1.2). Чтобы движения спутника, описываемые такими решениями, были приемлемы для исследований в области микрогравитации, они должны существовать продолжительное время и мало отклоняться от (1.2). Удовлетворить этим требованиям можно выбирая решения уравнений (В.5) из условия минимума функционала

$$\Phi = \int_0^T \sum_{i=1}^3 \left(\omega_i - \omega_0 \sum_{j=1}^3 c_{j2} b_{ji} \right)^2 dt, \quad (1.3)$$

Здесь ω_0 – среднее движение спутника в начальный момент времени, значение T равно нескольким орбитальным периодам. Чтобы пояснить смысл функционала (1.3), представим его в эквивалентной форме в виде

$$\Phi = \int_0^T \sum_{i=1}^3 (\omega_i - \omega_0 a_{2i})^2 dt. \quad (1.4)$$

Тогда его можно рассматривать и на решениях уравнений (1.1), полагая величины a_{2i} выраженными в функции углов γ , δ и β . Нетрудно проверить, что для положения покоя (1.2) $\Phi = 0$. На решениях, лежащих в окрестности этого положения, $\Phi > 0$. Интеграл в (1.4) можно заменить суммой

$$\Phi' = \sum_{n=0}^N \sum_{i=1}^3 \left[\omega_i(n\tau) - \omega_0 \sum_{j=1}^3 c_{j2}(n\tau) b_{ji}(n\tau) \right]^2, \quad \tau = \frac{T}{N},$$

где N – достаточно большое число. В описываемых расчетах было взято $T = 4\pi / \omega_0$, $N = 80$. Минимизация Φ' по начальным условиям решения системы (В.5) проводилась методом Гаусса-Ньютона. Для расчета частных производных решения по начальным условиям интегрировались соответствующие уравнения в вариациях, в которых отбрасывались члены, характеризующие

аэродинамический момент.

Решения, уравнений (В.5), близкие положению покоя (1.2) и доставляющие локальный минимум функционалу Φ' , представлены на рис. 1.1 – 1.2. Здесь приведены графики зависимости от времени углов γ , δ , β и компонент угловой скорости ω_i . Приведены графики компонент микроускорения b_i , а также графики компонент аэродинамической b_{ai} и гравитационной b_{gi} составляющих микроускорения. Микроускорение рассчитано в указанной выше точке P . Графики построены на интервалах времени 6 суток. Рассмотренный пример дает уточнение оценок приведенных в введении для более реальной ситуации. Слабая неустойчивость режима пассивной гравитационной ориентации (см. графики функции $\gamma(t)$ и $\beta(t)$) связана с дестабилизирующим действием аэродинамического момента и практически не повлияла на представленное микроускорение. Колебания спутника и компонент микроускорения вызваны сопротивлением атмосферы и эллиптичностью орбиты. Уменьшить эти колебания можно только существенно изменив орбиту.

1.2. Орбитальная ориентация спутника. Орбитальной ориентацией спутника будем называть его положение покоя в орбитальной системе координат. Орбитальная ориентация наиболее удобна для проведения космических экспериментов по росту кристаллов. Удобство обусловлено тем, что, в этом режиме, во-первых, вектор остаточного микроускорения остается практически постоянным и ориентированным строго определенным образом в системе координат $Ox_1x_2x_3$; во-вторых, накопление кинетического момента гиросистемы происходит медленно – в указанном положении гравитационный момент равен нулю, а аэродинамический момент мал. К сожалению, при таком способе орбитальной ориентации энергосъём с солнечных батарей спутника, как правило, невелик [18], что сужает область его применения.

Чтобы замкнуть подсистему уравнений вращательного движения, надо добавить к уравнениям (В.5) уравнения, описывающие изменение переменных h_i . Эти уравнения запишем в виде

$$\dot{h}_1 = h_2\omega_3 - h_3\omega_2 - m_1, \quad \dot{h}_2 = h_3\omega_1 - h_1\omega_3 - m_2, \quad \dot{h}_3 = h_1\omega_2 - h_2\omega_1 - m_3, \quad (1.5)$$

где m_i – отнесенные к I_1 компоненты управляющего момента, приложенного к корпусу спутника со стороны гиросистемы. Подставим уравнения (1.5) в первые три уравнения системы (B.5) и получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= \mu(\omega_2\omega_3 - \nu x_2x_3) + m_1, \\ \dot{\omega}_2 &= \frac{1-\lambda}{1+\lambda\mu}(\omega_1\omega_3 - \nu x_1x_3) + \frac{\lambda}{1+\lambda\mu}(m_2 + p\nu_3), \\ \dot{\omega}_3 &= -(1-\lambda+\lambda\mu)(\omega_1\omega_2 - \nu x_1x_2) + \lambda(m_3 - p\nu_2). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Рассматривая систему уравнений (1.6) выберем управляющий момент так, чтобы уравнения (B.5), (1.5) допускали установившиеся решения, в которых с высокой точностью матрица $\|a_{ij}\|$ была бы постоянной, а величины $|h_i|$ возрастали бы по возможности медленнее. Такой момент можно задать, например, выражениями

$$\begin{aligned} m_1 &= -2\xi(\omega_1 - \omega_1^\circ) - \xi^2\vartheta_1, \quad m_2 = -\frac{1+\lambda\mu}{\lambda}[2\xi(\omega_2 - \omega_2^\circ) + \xi^2\vartheta_2], \\ m_3 &= -\frac{1}{\lambda}[2\xi(\omega_3 - \omega_3^\circ) + \xi^2\vartheta_3], \end{aligned} \quad (1.7)$$

где ξ – положительный параметр, величины ϑ_i определены соотношением

$$\left\| \begin{array}{ccc} 0 & -\vartheta_3 & \vartheta_2 \\ \vartheta_3 & 0 & -\vartheta_1 \\ -\vartheta_2 & \vartheta_1 & 0 \end{array} \right\| = \frac{1}{2} \left(A_0^T A - A^T A_0 \right), \quad (1.8)$$

матрица A_0 – задает требуемое (номинальное) положение спутника в орбитальной системе координат, ω_i° – компоненты угловой скорости орбитальной системы координат. При малых ϑ_i выполнены соотношения $\omega_i - \omega_i^\circ \approx \dot{\vartheta}_i$ ($i = 1, 2, 3$). Выписанные соотношения подразумевает, что на спутнике установлены датчики угловых скоростей и ориентации, в соответствии с показаниями которых формируется закон изменения собственного кинетического момента гиросистемы (1.5), (1.7).

Рассмотрим систему (В.5), (1.5), (1.7) (первые три уравнения (В.5) можно привести к виду (1.6)). Параметр ξ возьмем настолько большим, чтобы характерное время действия на спутник управляющего момента было существенно меньше аналогичного времени для гравитационного и аэродинамического моментов. Если двумя последними моментами пренебречь, принять орбиту круговой, а величины ϑ_i малыми, то эту систему, линеаризовав ее по ϑ_i , можно привести к виду

$$\ddot{\vartheta}_i + 2\xi\dot{\vartheta}_i + \xi^2\vartheta_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Выписанные уравнения асимптотически устойчивы. Следовательно, асимптотически устойчив и режим орбитальной ориентации. При подходящем выборе параметра ξ возмущенное движение спутника в окрестности положения покоя $A = A_0$ будет затухать с требуемой скоростью.

Закон управления (1.7) обеспечивает реализацию режима орбитальной ориентации спутника, но в общем случае не обеспечивает малый рост величин $|h_i|$. Последнее свойство обеспечивается специальным выбором матрицы A_0 . Приемлемое значение этой матрицы можно получить, усредняя на отрезке $0 \leq t \leq T$ значения $A(t)$, полученные для режима пассивной гравитационной ориентации посредством минимизации функционала Φ' . Усреднение здесь означает отыскание ортогональной матрицы A_0 , доставляющей минимум функционалу

$$\Psi = \int_0^T \text{tr}([A(t) - A_0]^T [A(t) - A_0]) dt. \quad (1.9)$$

В режиме пассивной гравитационной ориентации $A(t) \approx A_0$ и если с помощью формулы (1.8) по матрицам $A(t)$ и A_0 определить функции $\vartheta_i(t)$, то выписанный функционал можно представить в виде

$$\Psi \approx 2 \int_0^T [\vartheta_1^2(t) + \vartheta_2^2(t) + \vartheta_3^2(t)] dt.$$

Отыскание матрицы A_0 посредством минимизации выражения (1.9) сводится

к задаче на условный экстремум. При ее решении необходимо учитывать условия ортогональности разыскиваемой матрицы

$$A_0 A_0^T = E_3 = \text{diag}(1, 1, 1) \quad (1.10)$$

и равенство $\det A_0 = 1$. Способ решения такого рода задач хорошо известен (см., например, [19]). Он использует метод неопределенных множителей Лагранжа. Составляется функция $\Psi + \text{tr} \Lambda (A_0 A_0^T - E_3)$, где Λ – симметричная матрица, составленная из множителей Лагранжа, и выписываются условия ее безусловного экстремума:

$$\Lambda A_0 = \int_0^T A(t) dt \equiv S. \quad (1.11)$$

Чтобы решить систему (1.10), (1.11), рассмотрим сингулярное разложение матрицы S : $S = UDV^T$. Здесь U и V – ортогональные матрицы порядка 3, $D = \text{diag}(d_1, d_2, d_3)$, $d_1 \geq d_2 \geq d_3 \geq 0$. Полагаем, что $d_3 > 0$, т. е. матрица S не вырождена. Введем матрицу $F = \text{diag}(f_1, f_2, f_3)$, $f_i = \pm 1$ ($i = 1, 2, 3$) но выбор знаков пока не фиксируем. На основании сингулярного разложения S запишем $S = UDF^2V^T = UDFU^TUFV^T$. Возьмем $A_0 = UFV^T$, $\Lambda = UDFU^T$. Это наиболее общий вид матриц A_0 и Λ , удовлетворяющих системе (1.10), (1.11).

Чтобы выбрать матрицу A_0 , доставляющую Ψ минимум и удовлетворяющую условию $\det A_0 = 1$, рассмотрим соотношения

$$\det U F V^T = f_1 f_2 f_3 \det U \det V,$$

$$\Psi = 6 - 2 \text{tr} A_0^T S = 6 - 2 \text{tr} V F U^T U D V^T = 6 - 2 \text{tr} F D = 6 - 2(d_1 f_1 + d_2 f_2 + d_3 f_3).$$

Ясно, что надо положить $f_1 = f_2 = 1$, $f_3 = \det U \det V$. Окончательное выражение для A_0 имеет вид

$$A_0 = U \text{diag}(1, 1, \det U \det V) V^T.$$

Покажем, что выбранный закон изменения кинетического момента ги-

росистемы действительно обеспечивает орбитальную ориентацию спутника и малый рост величин $|h_i|$. С этой целью вычислим решение системы (B.5), (1.5), (1.7) при $\xi = 0.01 \text{ с}^{-1}$ со следующими начальными условиями. Положение спутника в орбитальной системе координат в момент времени $t = 0$ задается углами $\gamma = -0.002^\circ$, $\delta = 0.890^\circ$, $\beta = -0.005^\circ$. Эти углы отвечают матрице A_0 , которая получена усреднением матрицы $A(t)$ на интервале 2 суток в режиме пассивной гравитационной ориентации. Начальные условия для переменных h_i возьмем нулевые. Тогда начальные условия для переменных k_i будут совпадать с начальными значениями ω_i . Последние выберем так, чтобы учесть ошибки в их реализации (при выставке начальных условий вращательного движения спутника ошибка в задании угловой скорости наиболее существенна), а именно положим

$$\omega_1(0) = \omega_2(0) - \omega_0 = \omega_3(0) = 0.01^\circ / \text{с}.$$

Результаты расчетов движения спутника, полученные в рамках принятой модели, а также результаты расчета микроускорений приведены на рис 1.3 – 1.6. Эти результаты представлены графиками зависимости от времени углов γ , δ и β , задающих положение системы $Ox_1x_2x_3$ относительно системы $OX_1X_2X_3$, угла θ между ортом $\mathbf{s}$ и ортом Ox_2 (нормаль к светочувствительной стороне солнечных батарей), а также угла η между ортом $\mathbf{s}$ и плоскостью орбиты спутника. На рисунках представлены также графики компонент угловой скорости ω_i , микроускорения $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ и гиросtatического момента $H_i = I_1 h_i$ ($i = 1, 2, 3$). Микроускорение рассчитано в указанной выше точке P . Графики построены на интервалах времени 6 суток. Для каждого из графиков описывающих движение спутника отдельно показан переходной процесс, обусловленный ошибками в задании начальной угловой скорости. Такие графики охватывают отрезок времени, который примыкает к начальной точке $t = 0$ и имеет длину один орбитальный виток. Другие графики иллюстрируют движение спутника в установившемся режиме. Представленные установившиеся ко-

лебания спутника и компонент микроускорения вызваны сопротивлением атмосферы и эллиптичностью орбиты. Следует отметить весьма медленное накопление собственного кинетического момента гиросистемы при реализации построенного движения. Это – следствие специального выбора матрицы A_0 .

1.3. Точная орбитальная ориентация спутника. Рассмотрим вариант режима орбитальной ориентации, в котором ось Ox_1 совпадает с осью $(-OX_3)$, а ось Ox_2 – с осью OX_2 . В терминах углов γ , δ и β , введенных в п. 1.2, такой режим описывается соотношениями

$$\gamma = \beta = \delta = 0. \quad (1.12)$$

В случае круговой орбиты приближенное выполнение этих соотношений можно обеспечить без использования управления – только за счет подходящего выбора начальных условий вращательного движения спутника [18]. Такое движение называется режимом пассивной гравитационной ориентации. Однако в этом режиме вариации вектора остаточного микроускорения все же довольно велики, поэтому имеет смысл реализовать точную орбитальную ориентацию с помощью гиросистемы.

Управляющий момент возьмем в виде [20] (см. Приложение 1)

$$m_1 = -2\xi\omega_1 + \xi^2 a_{23}, \quad m_2 = -\frac{1+\lambda\mu}{\lambda} \left[2\xi(\omega_2 - \omega_0) - \xi^2 a_{33} \right], \quad (1.13)$$

$$m_3 = -\frac{1}{\lambda} \left[2\sqrt{2}\xi\omega_3 + \xi^2 (a_{21} + a_{32}) \right],$$

где ξ – положительный параметр, ω_0 – орбитальная частота. Подстановка соотношения (1.13) в уравнение (1.6) приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 + 2\xi\omega_1 - \xi^2 a_{23} &= \mu(\omega_2\omega_3 - \nu x_2 x_3), \\ \dot{\omega}_2 + 2\xi(\omega_2 - \omega_0) - \xi^2 a_{33} &= \frac{1-\lambda}{1+\lambda\mu} (\omega_1\omega_3 - \nu x_1 x_3) + \frac{\lambda p \nu_3}{1+\lambda\mu}, \\ \dot{\omega}_3 + 2\sqrt{2}\xi\omega_3 + \xi^2 (a_{21} + a_{32}) &= -(1-\lambda+\lambda\mu)(\omega_1\omega_2 - \nu x_1 x_2) + \lambda p \nu_2. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Вообще говоря, эти уравнения надо рассматривать совместно с уравнениями орбитального движения спутника и уравнениями (В.5) относительно пере-

менных b_{1i} и b_{li} . По фазовому вектору уравнений орбитального движения рассчитывается матрица перехода от гринвичской системы координат к орбитальной системе, эта матрица и матрица $\|b_{ij}\|$ позволяют найти матрицу $\|a_{ij}\|$, элементы которой используются в уравнениях (1.14). Однако для приближенного анализа закона управления орбиту спутника можно принять круговой и неизменной в абсолютном пространстве. В этом случае кинематические уравнения удобно взять в виде

$$\dot{\gamma} = \omega_1 - \operatorname{tg} \beta (\omega_2 \cos \gamma - \omega_3 \sin \gamma), \quad (1.15)$$

$$\dot{\delta} = \frac{\omega_2 \cos \gamma - \omega_3 \sin \gamma}{\cos \beta} - \omega_0, \quad \dot{\beta} = \omega_2 \sin \gamma + \omega_3 \cos \gamma.$$

Орбитальная частота ω_0 рассчитывается по формулам задачи Кеплера и значению фазового вектора орбитального движения в начальный момент времени. Покою (1.12) в орбитальной системе координат отвечает решение

$$\omega_1 = \omega_3 = 0, \quad \omega_2 = \omega_0. \quad (1.16)$$

Уравнения (1.12), (1.14) можно линеаризовать в окрестности положения (1.12), (1.16). При этом можно пренебречь правыми частями (1.14), поскольку приложенный к спутнику момент со стороны гиросистемы существенно больше влияет на его вращательное движение чем гравитационный и аэродинамический моменты.

В окрестности стационарных решений (1.12), (1.13) при орбитальной ориентации спутника имеют место соотношения

$$\omega_1 = \dot{\gamma}, \quad \omega_2 - \omega_0 = \dot{\delta}, \quad \omega_3 = \dot{\beta}, \quad a_{23} = -\gamma, \quad a_{33} = -\delta, \quad a_{21} + a_{32} = 2\beta.$$

Подстановка этих соотношений в (1.14) дает

$$\ddot{\gamma} + 2\xi\dot{\gamma} + \xi^2\gamma = 0, \quad \ddot{\delta} + 2\xi\dot{\delta} + \xi^2\delta = 0, \quad \ddot{\beta} + 2\sqrt{2}\xi\dot{\beta} + 2\xi^2\beta = 0.$$

В решениях этой системы $\gamma, \delta, \beta \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Выписанные уравнения асимптотически устойчивы. Следовательно, асимптотически устойчив и режим орбитальной ориентации. При достаточно большом значении параметра ξ возмущенное движение спутника в окрестности положения покоя (1.12),

(1.13) будет затухать с требуемой скоростью.

Покажем, что выбранный закон (1.13) изменения кинетического момента гиросистемы действительно обеспечивает орбитальную ориентацию спутника. С этой целью вычислим решения системы (В.5), (1.5), (1.13) при $\xi = 0.01 \text{ с}^{-1}$. Начальные условия в режиме орбитальной ориентации зададим следующим образом. Будем считать, что в момент $t = 0$ оси Ox_1 и Ox_2 совпадают с осями $(-OX_3)$ и OX_2 соответственно. Компоненты ортов осей OX_3 и OX_2 в гринвичской системе координат обозначим соответственно y_i° и N_i ($i = 1, 2, 3$). Тогда начальные условия для переменных b_{1i} , b_{2i} будут иметь вид

$$\begin{aligned} b_{11} &= -y_1^\circ, & b_{12} &= N_1, & b_{13} &= y_3^\circ N_2 - y_2^\circ N_3, \\ b_{21} &= -y_2^\circ, & b_{22} &= N_2, & b_{23} &= y_1^\circ N_3 - y_3^\circ N_1. \end{aligned}$$

Начальные условия для переменных h_i возьмем нулевые. В этом случае начальные условия для переменных k_i будут совпадать с начальными значениями компонент угловой скорости ω_i . Последние выберем так, чтобы показать процесс гашения возмущенного движения, а именно положим

$$\omega_1(0) = \omega_2(0) - \omega_0 = \omega_3(0) = 0.01 \text{ град./с.}$$

Результаты расчетов движения спутника, полученные в рамках принятой модели, а также результаты расчета микроускорений приведены на рис 1.7 – 1.10. Эти результаты представлены графиками зависимости от времени углов γ , δ , β и углов θ , η . На рисунках представлены также графики компонент угловой скорости ω_i , микроускорения $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ и гиросtatического момента $H_i = I_1 h_i$ ($i = 1, 2, 3$). Микроускорение рассчитано в указанной выше точке P . Графики построены на интервалах времени 6 суток. Для каждого из графиков описывающих движение спутника отдельно показан переходной процесс, обусловленный ошибками в задании начальной угловой скорости. Такие графики охватывают отрезок времени, который примыкает к начальной точке $t = 0$ и имеет длину один орбитальный виток ($\sim 5600 \text{ с}$). Однако собственно пере-

ходной процесс протекает гораздо быстрее. Другие графики иллюстрируют движение спутника в установившемся режиме. На них видны установившиеся колебания с доминирующей частотой, которая равна орбитальной частоте ω_0 . За такие колебания ответствен последний член формулы (В.1), отвечающий аэродинамическому торможению. Поскольку этот член мал, область вариации микроускорения (В.1) оказалась намного меньше максимального значения $|\mathbf{b}|$.

1.4. Полупассивная гравитационная ориентации спутника. Для обеспечения длительной гравитационной ориентации спутника при наличии дестабилизирующего действия возмущающих моментов обычно применяют демпфирующие устройства [16]. В качестве таковых можно использовать систему гироскопических органов управления установленных на спутнике. Чтобы реализовать гиродемпфирование, достаточно задать надлежащий закон управления гиросистемой. Рассмотрим такой закон в простейшей ситуации [21]. Орбиту примем круговой и неизменной в абсолютном пространстве, из приложенных к спутнику внешних механических моментов будем учитывать только гравитационный. В обозначениях п. 1.2 теорему об изменении кинетического момента спутника в его движении относительно центра масс запишем в виде

$$\begin{aligned} \dot{k}_1 &= \mu(\omega_2\omega_3 - 3\omega_0^2 a_{32}a_{33}) + h_2\omega_3 - h_3\omega_2, \\ \dot{k}_2 &= \frac{1-\lambda}{1+\lambda\mu}(\omega_1\omega_3 - 3\omega_0^2 a_{31}a_{33}) + \frac{\lambda}{1+\lambda\mu}(h_3\omega_1 - h_1\omega_3), \\ \dot{k}_3 &= -(1-\lambda+\lambda\mu)(\omega_1\omega_2 - 3\omega_0^2 a_{31}a_{32}) + \lambda(h_1\omega_2 - h_2\omega_1), \end{aligned} \quad (1.17)$$

а закон изменения собственного кинетического момента гиросистемы зададим соотношениями

$$\tau_1 \dot{h}_1 + h_1 = \varepsilon_1 \omega_1, \quad \tau_2 \dot{h}_2 + h_2 = \varepsilon_2 (\omega_2 - \omega_0) + h_0, \quad \tau_3 \dot{h}_3 + h_3 = \varepsilon_3 \omega_3. \quad (1.18)$$

Здесь ε_i , τ_i – положительные постоянные, h_0 – произвольная постоянная. Чтобы получить замкнутую систему уравнений дополним уравнения (1.17), (1.18) уравнениями (1.12). Эта система уравнений допускает стационарные решения, в которых $h_1 = h_3 = 0$, $h_2 = h_0 = \text{const}$, а углы и угловые скорости имеют те же

значения, что и в стационарных решениях уравнений (1.1). Для определенности рассмотрим стационарное решение (1.2). В [21] показано, что условия асимптотической устойчивости такого стационарного решения выражаются неравенствами

$$(\mu - \varepsilon_3)\omega_0 + h_0 > 0, \quad \left(4\frac{1 - \lambda + \lambda\mu}{\lambda} - \varepsilon_1\right)\omega_0 + h_0 > 0, \quad (1.19)$$

$$1 > \lambda, \quad 1 - \lambda + \lambda\mu \neq 0.$$

Линеаризуем систему уравнений (1.12), (1.17), (1.18) в окрестности стационарного решения (1.2), с учетом $h_1 = h_3 = 0$, $h_2 = h_0 = \text{const}$. Представим линеаризованную систему в матричном виде

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Q} \mathbf{z},$$

$$\mathbf{z}^T = \|\omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3 \quad \gamma \quad \delta \quad \beta \quad h_1 \quad h_2 \quad h_3\|, \quad (1.20)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\tau_1}\varepsilon_1 & 0 & \mu\omega_0 + h_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\tau_1} & 0 & -\omega_0 \\ 0 & -\frac{\lambda}{1+\lambda\mu}\frac{1}{\tau_2}\varepsilon_2 & 0 & 0 & -\frac{1-\lambda}{1+\lambda\mu}3\omega_0^2 & 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda}{1+\lambda\mu}\frac{1}{\tau_2} & 0 \\ -(1-\lambda+\lambda\mu)\omega_0 - \lambda h_0 & 0 & -\lambda\frac{1}{\tau_3}\varepsilon_3 & 0 & 0 & -(1-\lambda+\lambda\mu)\omega_0^2 & \lambda\omega_0 & 0 & 0 & \lambda\frac{1}{\tau_3} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \omega_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\tau_1}\varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tau_2}\varepsilon_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\tau_3}\varepsilon_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau_3} \end{pmatrix}.$$

При выполнении условий (1.19) все корни характеристического многочлена $\det(\mathbf{Q} - \lambda \mathbf{E}_9) = 0$, $\mathbf{E}_9 = \text{diag}(1,1,1,1,1,1,1,1,1)$ системы (1.20) будут иметь отрицательные вещественные части. Значения коэффициентов τ_i , ε_i для уравнений (1.18) будем выбирать с помощью линеаризованной системы (1.20), исходя из условия, что корни характеристического многочлена должны лежать как можно дальше от мнимой оси в отрицательной полуплоскости. В данном расчете выбраны следующие значения коэффициентов: $\tau_1 = 200$ с, $\tau_2 = \tau_3 = 900$ с,

$\varepsilon_1 = 5000 \text{ кгм}^2$, $\varepsilon_2 = 7000 \text{ кгм}^2$, $\varepsilon_3 = 2000 \text{ кгм}^2$, $h_0 = 10 \text{ Нмс}$. Для выбранных значений параметров τ_i , ε_i и h_0 корни характеристического многочлена системы (1.20) будут равны:

$$\lambda_{1,2} = -0.163 \pm 1.397i, \quad \lambda_{3,4} = -0.165 \pm 1.248i, \quad \lambda_{5,6} = -0.208 \pm 1.489i, \\ \lambda_7 = -1.043, \quad \lambda_8 = -1.396, \quad \lambda_9 = -14.232.$$

Покажем, что выбранный закон изменения кинетического момента гиросистемы действительно обеспечивает трехосную гравитационную ориентацию спутника. С этой целью вычислим решения системы (В.5), (1.18). Начальные условия зададим следующим образом. Будем считать, что в момент времени $t = 0$ положение спутника в орбитальной системе координат задается углами $\gamma = \delta = \beta = 0$. Начальные условия для переменных h_i возьмем нулевые. Тогда начальные условия для переменных k_i будут совпадать с начальными значениями ω_i . Последние возьмем в виде

$$\omega_1(0) = \omega_2(0) - \omega_0 = \omega_3(0) = 0.01^\circ/\text{с}.$$

Результаты расчетов движения спутника, полученные в рамках принятой модели, а также результаты расчета микроускорений приведены на рис 1.11 – 1.14. Эти результаты представлены графиками зависимости от времени углов γ , δ , β и углов θ , η . На рисунках представлены также графики компонент угловой скорости ω_i , микроускорения $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ и гиросtatического момента $H_i = I_1 h_i$ ($i = 1, 2, 3$). Микроускорение рассчитано в указанной выше точке P . Графики построены на интервалах времени 6 суток. Для каждого из графиков описывающих движение спутника отдельно показан переходной процесс, обусловленный ошибками в задании начальной угловой скорости. Такие графики охватывают отрезок времени, который примыкает к начальной точке $t = 0$ и имеет длину четыре орбитальных витка ($\sim 22400 \text{ с}$). Другие графики иллюстрируют движение спутника в установившемся режиме. Как и в предыдущем примере, представленные здесь установившиеся колебания вызваны сопротивлением атмосферы и эллиптичностью орбиты. Собственный кинетический мо-

мент гиросистемы остается ограниченным. Заметим, что если в рассматриваемом движении в какой-то момент времени отключить управление гиросистемой, зафиксировав соответствующие значения величин h_i , то можно получить почти идеальный режим пассивной гравитационной ориентации, построенный в п. 1.1.

Результаты моделирования показали, что для всех рассмотренных в главе 1 законов управления, диапазон изменения компоненты b_1 микроускорения примерно в 40 раз меньше среднего значения его модуля $|\mathbf{b}|$, диапазон изменения компоненты b_2 примерно в 60 раз меньше среднего значения модуля, а диапазон изменения компоненты b_3 примерно в 6 раз меньше среднего значения модуля. Иными словами, область вариации вектора микроускорения достаточно мала. Если еще учесть, что колебания микроускорения происходят весьма медленно – с орбитальной частотой, то в такой ситуации может оказаться эффективным применение специальных платформ, непрерывно ориентирующих какой-либо опытный образец (например, выращиваемый кристалл) вдоль вектора микроускорения.

ГЛАВА 2. ПОСТРОЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАКОНОВ УПРАВЛЕНИЯ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩИХ ОДНООСНУЮ СОЛНЕЧНУЮ ОРИЕНТАЦИЮ ИСКУССТВЕННОГО СПУТНИКА ЗЕМЛИ

Основным недостатком всех рассмотренных выше режимов вращательного движения спутника является малый энергосъем с солнечных батарей при неудачном (и преобладающем во времени) положении орбиты ИСЗ относительно Солнца. Поскольку проведение научных экспериментов на борту спутника требует больших затрат электроэнергии имеет смысл рассмотреть режим одноосной солнечной ориентации в качестве одного из основных режимов вращательного движения ИСЗ, обеспечивающего максимальный приток электроэнергии. В этом режиме нормаль к светочувствительной стороне солнечных

батареи спутника направлена на Солнце, угловая скорость ИСЗ вокруг этой нормали практически равна нулю. Стабилизация режима осуществляется гиросистемой. Рассматриваются два варианта закона управления ее кинетическим моментом. Первый вариант обеспечивает заданную точность ориентации и приемлемую длительность переходного процесса. Второй вариант дополнительно ограничивает рост накапливаемого кинетического момента гиросистемы за счет управления углом поворота спутника вокруг нормали к светочувствительной стороне солнечных батарей.

2.1. Закон управления гиристатическим моментом в режиме одноосной солнечной ориентации спутника. Рассмотрим систему уравнений (1.6). Здесь члены с ν и p описывают гравитационный и аэродинамический моменты. Характерное время действия этих моментов на спутник должно быть существенно больше аналогичного времени для управляющего момента. По этой причине, анализируя управляющий момент, ограничимся рассмотрением движения спутника на коротких временных интервалах и далее положим в (1.6) $\nu = 0$, $p = 0$.

Управляющий момент возьмем в виде [22], [23]

$$m_1 = -2\xi\omega_1 + \xi^2 s_3, \quad m_2 = -\frac{1+\lambda\mu}{\lambda}\xi\omega_2, \quad m_3 = -\frac{1}{\lambda}(2\xi\omega_3 + \xi^2 s_1), \quad (2.1)$$

где ξ – положительный параметр, s_i – компоненты орта $\mathbf{s}$ направления “Земля – Солнце”: $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$. Использование соотношений (2.1) подразумевает, что спутник оснащен датчиками, позволяющими выполнить все необходимые измерения для формирования величин m_i . При численном моделировании ориентированного движения спутника, результаты которого описываются ниже, компоненты орта $\mathbf{s}$ в гринвичской системе координат рассчитывались по приближенным формулам [24].

Подстановка соотношений (2.1) в уравнения (1.6) приводит к уравнениям

$$\dot{\omega}_1 = -2\xi\omega_1 + \xi^2 s_3 + \mu\omega_2\omega_3, \quad \dot{\omega}_2 = -2\xi\omega_2 + \frac{1-\lambda}{1+\lambda\mu}\omega_1\omega_3, \quad (2.2)$$

$$\dot{\omega}_3 = -2\xi\omega_3 - \xi^2 s_1 - (1 - \lambda + \lambda\mu)\omega_1\omega_2.$$

На коротких интервалах времени орт $\mathbf{s}$ можно считать неизменными в абсолютном пространстве. В таком случае компоненты s_i этого орта определяются уравнениями

$$\dot{s}_1 = \omega_3 s_2 - \omega_2 s_3, \quad \dot{s}_2 = \omega_1 s_3 - \omega_3 s_1, \quad \dot{s}_3 = \omega_2 s_1 - \omega_1 s_2, \quad (2.3)$$

Система уравнений (2.2), (2.3) является замкнутой и может быть использована для исследования переходных процессов при стабилизации движения спутника. Эта система допускает асимптотически устойчивое стационарное решение

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0, \quad s_1 = s_3 = 0, \quad s_2 = 1. \quad (2.4)$$

Асимптотическая устойчивость следует из анализа соответствующей линеаризованной системы (напомним $s_2 = \sqrt{1 - s_1^2 - s_3^2}$)

$$\dot{\omega}_1 = -2\xi\omega_1 + \xi^2 s_3, \quad \dot{s}_3 = -\omega_1, \quad \dot{\omega}_2 = -2\xi\omega_2, \quad \dot{\omega}_3 = -2\xi\omega_3 - \xi^2 s_1, \quad \dot{s}_1 = \omega_3.$$

При подходящем выборе значения $\xi > 0$ возмущенное движение спутника в окрестности положения покоя (2.4) будет затухать с любой требуемой скоростью.

Более детальный анализ устойчивости режима одноосной солнечной ориентации можно провести в терминах вектора бесконечно малого поворота спутника. В окрестности ориентированного положения спутника имеют место соотношения

$$\omega_i = \dot{\vartheta}_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad s_1 = \vartheta_3, \quad s_2 = 1, \quad s_3 = -\vartheta_1,$$

которые согласованы с (2.3). Подстановка этих соотношений в (2.2) дает

$$\ddot{\vartheta}_1 + 2\xi\dot{\vartheta}_1 + \xi^2\vartheta_1 = 0, \quad \ddot{\vartheta}_2 + 2\xi\dot{\vartheta}_2 = 0, \quad \ddot{\vartheta}_3 + 2\xi\dot{\vartheta}_3 + \xi^2\vartheta_3 = 0.$$

В решениях последней системы $\vartheta_{1,3} \rightarrow 0$, $\dot{\vartheta}_2 \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, но условие $\vartheta_2 \rightarrow 0$ в общем случае не выполнено. Последний факт означает, что в данном случае предельное значение угла поворота спутника вокруг оси Ox_2 не определено, т. е. имеет место только одноосная ориентация.

Покажем, что выбранный закон изменения кинетического момента ги-

росистемы (2.1) действительно обеспечивает одноосную солнечную ориентацию спутника. С этой целью вычислим решение систем (B.5), (1.5), (2.1) при $\xi = 0.005 \text{ с}^{-1}$. Начальные условия движения задаются следующим образом. Пусть в момент $t = 0$ орты $\mathbf{s}$ и $\mathbf{n}$ ($\mathbf{n}$ – орт вектора кинетического момента орбитального движения спутника) имеют в гринвичской системе координат компоненты $\mathbf{s} = (S_1, S_2, S_3)$, $\mathbf{n} = (N_1, N_2, N_3)$. Начальные условия для переменных b_{1i} , b_{2i} возьмем в виде

$$\begin{aligned} b_{11} &= \frac{S_2 N_3 - S_3 N_2}{\sqrt{1 - (\mathbf{s} \cdot \mathbf{n})^2}}, & b_{12} &= S_1, & b_{13} &= \frac{N_1 - (\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}) S_1}{\sqrt{1 - (\mathbf{s} \cdot \mathbf{n})^2}}, \\ b_{21} &= \frac{S_3 N_1 - S_1 N_3}{\sqrt{1 - (\mathbf{s} \cdot \mathbf{n})^2}}, & b_{22} &= S_2, & b_{23} &= \frac{N_2 - (\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}) S_2}{\sqrt{1 - (\mathbf{s} \cdot \mathbf{n})^2}}. \end{aligned}$$

Такие начальные условия соответствуют положению покоя (2.4), причем ось Ox_1 лежит в плоскости орбиты. Начальные условия для переменных h_i возьмем нулевые. Тогда начальные условия для переменных k_i будут совпадать с начальными значениями компонент угловой скорости ω_i . Последние выберем так, чтобы иметь возможность показать процесс гашения возмущенного движения, а именно положим

$$\omega_1(0) = \omega_2(0) = \omega_3(0) = 0.01 \text{ град/с}.$$

Результаты расчетов движения спутника в режиме одноосной солнечной ориентации, а также результаты расчета микроускорений приведены на рис 2.1 – 2.3. Эти результаты представлены графиками зависимости от времени углов θ , η . Показаны графики зависимости от времени угла φ , определяющего поворот спутника вокруг нормали к плоскости солнечных батарей (угол φ отсчитывается от плоскости орбиты спутника). На рисунках представлены также графики компонент угловой скорости ω_i , микроускорения $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ и гиростатического момента $H_i = I_1 h_i$ ($i = 1, 2, 3$). Микроускорение рассчитано в указанной выше точке P . Графики построены на интервалах времени 6 суток. Для каждого из графиков описывающих движение спутника отдельно показан

переходной процесс, обусловленный ошибками в задании начальной угловой скорости. Такие графики охватывают отрезок времени, который примыкает к начальной точке $t = 0$ и имеет длину один орбитальный виток. Другие графики иллюстрируют движение спутника в установившемся режиме.

При реализации закона управления следует учитывать необходимость проведения разгрузок кинетического момента накопленного гиросистемой в процессе поддержания ориентации, что может существенно сократить время невозмущенного полета спутника. По этой причине целесообразно рассмотреть возможность использования закона управления, позволяющего не только обеспечить затухание возмущенного движения спутника в окрестности положения покоя с требуемой скоростью, но и дополнительно увеличить продолжительность отрезков полета спутника без проведения разгрузок гиросистемы.

2.2. Режим одноосной солнечной ориентации с ограничением роста кинетического момента спутника. Построим закон поддержания одноосной солнечной ориентации, обеспечивающий минимизацию роста полного кинетического момента вращательного движения спутника. Поскольку угловая скорость спутника в ориентированном положении практически равна нулю, этот закон фактически будет минимизировать рост собственного кинетического момента гиросистемы. Минимизация осуществляется за счет управления углом поворота спутника вокруг оси Ox_2 . Кинетический момент спутника в его движении относительно центра масс $\mathbf{K} = (K_1, K_2, K_3)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{M}.$$

Здесь $\mathbf{M}$ – вычисленный относительно центра масс главный момент внешних сил, приложенных к спутнику. Выделим в явном виде гравитационный момент – в данном случае он преобладает – и представим $\mathbf{M}$ следующим образом

$$\mathbf{M} = \frac{3\mu_E}{|\mathbf{r}|^5} (\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{I}}\mathbf{r}) + \mathbf{M}'.$$

Здесь $\hat{I} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$ – тензор инерции спутника. Обозначим $K = |\mathbf{K}|$. В силу последних соотношений

$$\dot{K} = \frac{\mathbf{K} \cdot \mathbf{M}}{K} = \frac{3\mu_E}{K |\mathbf{r}|^5} [\mathbf{K} \cdot (\mathbf{r} \times \hat{I}\mathbf{r})] + \frac{\mathbf{K} \cdot \mathbf{M}'}{K}.$$

Будем в каждый момент времени минимизировать выражение $F = \mathbf{K} \cdot (\mathbf{r} \times \hat{I}\mathbf{r})$. Это замедлит рост K и, может быть, даже вызовет его уменьшение. Поскольку спутник должен оставаться в режиме солнечной ориентации, минимизация F возможна только за счет поворота спутника относительно оси Ox_2 . Угол φ такого поворота будем отсчитывать от положения, в котором ось Ox_1 лежит в плоскости орбиты под острым углом к $\mathbf{r}$. Приближенное отслеживание минимума функции $F(\varphi)$ в ориентированном полете можно реализовать как движение спутника вокруг оси Ox_2 в соответствии с уравнением

$$\ddot{\varphi} + \chi_1 \dot{\varphi} + \chi_2 \frac{dF}{d\varphi} = 0,$$

где χ_1 и χ_2 – положительные параметры. Изменение φ должно быть быстрым – с характерным временем намного меньше орбитального периода. В этом движении $\boldsymbol{\omega} \approx \dot{\varphi} \mathbf{e}_2$ ($\mathbf{e}_2$ – орт оси Ox_2), и изменение векторов $\mathbf{K}$ и $\mathbf{r}$ относительно системы $Ox_1x_2x_3$ описывается приближенными уравнениями

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{K}}{dt} + \dot{\varphi}(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{K}) = 0, \quad \frac{\tilde{d}\mathbf{r}}{dt} + \dot{\varphi}(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{r}) = 0.$$

где символом $\tilde{d}/dt$ обозначена соответствующая локальная производная вектора. Найдем $dF/d\varphi = \dot{F}/\dot{\varphi}$. В силу последних уравнений имеем

$$\begin{aligned} \dot{F} &= \frac{d'\mathbf{K}}{dt}(\mathbf{r} \times \hat{I}\mathbf{r}) + \mathbf{K} \left(\frac{d'\mathbf{r}}{dt} \times \hat{I}\mathbf{r} \right) + \mathbf{K} \left(\mathbf{r} \times \hat{I} \frac{d'\mathbf{r}}{dt} \right) = \\ &= -\dot{\varphi} \left\{ (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{K}) \cdot (\mathbf{r} \times \hat{I}\mathbf{r}) + \mathbf{K} \cdot [(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{r}) \times \hat{I}\mathbf{r}] + \mathbf{K} \cdot [\mathbf{r} \times \hat{I}(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{r})] \right\}. \end{aligned}$$

Преобразуем слагаемые, стоящие в фигурных скобках, с учетом следующих соотношений:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{K}) \cdot (\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{I}}\mathbf{r}) &= \mathbf{e}_2 \cdot [\mathbf{K} \times (\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{I}}\mathbf{r})], \\
\mathbf{K} \cdot [(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{r}) \times \hat{\mathbf{I}}\mathbf{r}] &= (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{r}) \cdot (\hat{\mathbf{I}}\mathbf{r} \times \mathbf{K}) = \mathbf{e}_2 \cdot [\mathbf{r} \times (\hat{\mathbf{I}}\mathbf{r} \times \mathbf{K})], \\
\mathbf{K} \cdot [\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{I}}(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{r})] &= (\mathbf{K} \times \mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{I}}(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{r}).
\end{aligned}$$

Теперь сложим преобразованные первый и второй члены в фигурных скобках. Имеем

$$\begin{aligned}
(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{K}) \cdot (\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{I}}\mathbf{r}) + \mathbf{K} \cdot [(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{r}) \times \hat{\mathbf{I}}\mathbf{r}] &= \mathbf{e}_2 \cdot [\mathbf{K} \times (\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{I}}\mathbf{r}) + \mathbf{r} \times (\hat{\mathbf{I}}\mathbf{r} \times \mathbf{K})] = \\
&= \mathbf{e}_2 \cdot [(\mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{I}}\mathbf{r})\mathbf{r} - (\mathbf{K} \cdot \mathbf{r})\hat{\mathbf{I}}\mathbf{r} + (\mathbf{K} \cdot \mathbf{r})\hat{\mathbf{I}}\mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{I}}\mathbf{r})\mathbf{K}] = \\
&= \mathbf{e}_2 \cdot [\hat{\mathbf{I}}\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{K})] = (\mathbf{r} \times \mathbf{K}) \cdot (\mathbf{e}_2 \times \hat{\mathbf{I}}\mathbf{r}).
\end{aligned}$$

Добавив к ним преобразованный третий член, получим

$$\dot{F} = -\dot{\varphi}(\mathbf{r} \times \mathbf{K}) \cdot [\mathbf{e}_2 \times \hat{\mathbf{I}}\mathbf{r} - \hat{\mathbf{I}}(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{r})].$$

Поскольку $\mathbf{e}_2 \times \hat{\mathbf{I}}\mathbf{r} - \hat{\mathbf{I}}(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{r}) = (I_3 - I_1)(x_3, 0, x_1)$, находим

$$\frac{dF}{d\varphi} = -I_3(I_3 - I_1)F_1, \quad F_1 = -\lambda x_1 x_2 k_1 + (1 + \lambda\mu)(x_1^2 - x_3^2)k_2 + x_2 x_3 k_3.$$

Выписанное выше уравнение второго порядка относительно φ реализуется, если к корпусу спутника приложить управляющий момент $\sim (\chi'_2 F_1 - \chi'_1 \omega_2) \mathbf{e}_2$, где χ'_1 и χ'_2 – положительные параметры. Этот закон управления должен накладываться на закон управления (2.1). В итоге получаем

$$m_1 = -2\xi\omega_1 + \xi^2 s_3, \quad m_2 = -\frac{1 + \lambda\mu}{\lambda}(\xi'\omega_2 - \chi'F_1), \quad m_3 = -\frac{1}{\lambda}(2\xi\omega_3 + \xi^2 s_1). \quad (2.5)$$

Покажем, что выбранные законы изменения кинетического момента гиросистемы (2.5) действительно обеспечивает одноосную солнечную ориентацию спутника с ограничением роста кинетического момента. С этой целью вычислим решение системы (В.5), (1.5), (2.5) при $\xi' = 9\xi$, $\chi' = 4 \cdot 10^{-15} \text{ м}^{-2} \text{ с}^{-1}$. Все начальные условия движения задаются таким же образом, как и для режима одноосной солнечной ориентации.

Результаты расчетов движения спутника для режима ограничения роста кинетического момента спутника приведены на рис. 2.4 – 2.9. Эти результаты представлены графиками зависимости от времени углов θ , η , φ . На рисунках

представлены также графики компонент угловой скорости ω_i , микроускорения $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ и гиросtatического момента $H_i = I_1 h_i$ ($i = 1, 2, 3$). Точность поддержания ориентации осталась прежней. Графики компонент микроускорения b_1 и b_2 практически не изменились, компонента b_3 и модуль $|\mathbf{b}|$ незначительно возросли. Существенно изменилось только изменение собственного кинетического момента гиросистемы. Он остается ограниченным – его модуль в течение 6 суток не превосходит 15 Нмс.

На рис. 2.7 приведены графики компонент и модуля собственного кинетического момента спутника, полученные в результате использования двух законов управления. Первые 3 суток полета использовался закон управления, обеспечивающий затухание возмущенного движения спутника, последующие 3 суток – закон управления, ограничивающий рост накапливаемого кинетического момента гиросистемы. Результаты моделирования показывают, что оба закона управления реализуют режим одноосной солнечной ориентации, кроме того, использование закона управления (2.5) действительно позволяет уменьшать накапливаемый гиросtatический момент спутника.

Эффективность нового закона управления зависит от угла $\gamma = \arcsin(\mathbf{s} \cdot \mathbf{n})$. В приведенных примерах $\gamma(0) = -12.5^\circ$, функция $\gamma(t)$ убывает с почти постоянной скоростью и через 6 суток достигает значения -37° . Однако, если угол γ близок к нулю или превышает по модулю 80° , то эффективность нового закона управления заметно падает. Приведем два примера. Первый пример получен для начальных условий движения центра масс спутника в восходящем узле орбиты в момент 12:10:34 декретного московского времени 19.03.2007. На этот момент времени долгота восходящего узла составляла 6.8° . Второй – для начальных условий движения центра масс спутника в восходящем узле орбиты в момент 12:10:34 декретного московского времени 19.06.2007. На этот момент времени долгота восходящего узла составляла 186.8° . Остальные элементы орбиты на начальный момент времени и начальные условия вращательного движения задавались по-прежнему. На рис. 2.8, иллюстрирующем первый

пример, приведены графики зависимости от времени углов θ , γ , φ и собственного кинетического момента гиросистемы, полученные с новым законом управления в случае, когда угол γ убывая менял знак. На интервале выполнения неравенства $|\gamma(t)| < 5^\circ$ собственный кинетический момент гиросистемы заметно возрастал.

На рис. 2.9 приведены аналогичные графики, построенные для второго примера, в случае, когда угол γ достигает своего максимального значения 86.5° .

Полученные результаты показывают, что оба рассмотренных режима обеспечивают заданную точность ориентации спутника ($< 3^\circ$) и весьма малый уровень квазистатических микроускорений на его борту, но область вариации вектора микроускорения получается относительно большой.

ГЛАВА 3. РЕАЛИЗАЦИЯ РЕЖИМОВ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ СПУТНИКА С ПОМОЩЬЮ СИСТЕМЫ ДВИГАТЕЛЕЙ-МАХОВИКОВ.

В главах 1 и 2 рассматривалась идеализированная постановка задачи управления собственным кинетическим моментом гиросистемы, в том смысле, что законы управления были рассмотрены в терминах величин $\mathbf{h}$ и $\mathbf{m}$. В данной главе в качестве гиросистемы поддерживающей заданную ориентацию спутника рассматривается система управляющих двигателей-маховиков.

3.1. Схема установки двигателей-маховиков. В действительности векторы $\mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3)$ и $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$ реализуются в виде суммы нескольких векторов, каждый из которых отвечает одному маховику. Предполагается, что на спутнике будет установлена система из четырех одинаковых маховика, оси вращения которых расположены параллельно боковым ребрам правильной четырехгранной пирамиды. Высота пирамиды параллельна оси Ox_1 , линии пересечения граней пирамиды с плоскостью Ox_2x_3 параллельны или перпендикулярны осям Ox_2 , Ox_3 (рис. 3.1). Углы α и β задают ориентацию пирамиды

относительно системы координат $Ox_1x_2x_3$. Здесь α – угол между осью k -ого маховика и осью Ox_1 , β – угол между проекцией k -ого маховика на плоскость Ox_2x_3 и осью Ox_3 . Значения углов $\alpha = 80.5^\circ$ и $\beta = 45.5^\circ$. Подробнее выбор схемы установки маховиков и расчет значений углов α и β рассмотрены в главе 4.

Суммарный гиростатический момент системы маховиков, отнесенный к I_1 , выражается векторной формулой $\mathbf{h} = g_1\mathbf{e}_1 + g_2\mathbf{e}_2 + g_3\mathbf{e}_3 + g_4\mathbf{e}_4$, или набором скалярных формул

$$\|h_i\|_{i=1}^3 = \mathbf{A} \|g_k\|_{k=1}^4, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} -\cos \alpha & -\cos \alpha & \cos \alpha & \cos \alpha \\ \sin \alpha \sin \beta & \sin \alpha \sin \beta & \sin \alpha \sin \beta & \sin \alpha \sin \beta \\ -\sin \alpha \cos \beta & \sin \alpha \cos \beta & -\sin \alpha \cos \beta & \sin \alpha \cos \beta \end{vmatrix}$$

где g_k – отнесенное к I_1 алгебраическое значение кинетического момента маховика с номером k , $\mathbf{e}_k$ – орты осей маховиков в связанной системе координат, $\mathbf{A}$ – матрица установки двигателей-маховиков относительно связанной системы координат.

Соотношения (3.1) нельзя единственным образом разрешить относительно величин g_k . Чтобы достичь единственности, потребуем, чтобы решение системы (3.1) относительно g_k доставляло минимум выражению $g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 + g_4^2$. Тогда

$$\|g_k\|_{k=1}^4 = \mathbf{A}^+ \|h_i\|_{i=1}^3, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{A}^+ = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} -\frac{1}{\cos \alpha} & \frac{1}{\sin \alpha \sin \beta} & -\frac{1}{\sin \alpha \cos \beta} \\ \frac{1}{\cos \alpha} & \frac{1}{\sin \alpha \sin \beta} & \frac{1}{\sin \alpha \cos \beta} \\ \frac{1}{\cos \alpha} & \frac{1}{\sin \alpha \sin \beta} & -\frac{1}{\sin \alpha \cos \beta} \\ \frac{1}{\cos \alpha} & \frac{1}{\sin \alpha \sin \beta} & \frac{1}{\sin \alpha \cos \beta} \end{vmatrix},$$

где $\mathbf{A}^+$ – псевдообратная матрица для $\mathbf{A}$, определяемая из уравнения $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}$ [25]. Выписанные соотношения позволяют реализовать требуемый гиросtatический момент системы маховиков, назначив определенное значение угловой скорости вращения ротора каждого маховика. Ниже соотношения (3.2) будем использовать для формирования управляющих воздействий, прилагаемых к маховикам.

3.2. Математическая модель двигателя-маховика. Несколько упрощенная, но достаточная для целей данной работы математическая модель двигателя-маховика описывается уравнениями [22]

$$J\dot{\Omega}_k = Ki_k, \quad T \frac{di_k}{dt} + i_k = K'\sigma_k \quad (k = 1, 2, 3, 4), \quad (3.3)$$

где Ω_k и i_k – угловая скорость вращения ротора маховика с номером k и ток, подаваемый в обмотку этого двигателя-маховика, T – постоянная времени блока управления маховиком, K и K' – коэффициенты, σ_k – управляющий сигнал, подаваемый на блок управления k -го маховика, J – момент инерции ротора. В рамках этой модели $g_k = J\Omega_k/I_1$. Не ограничивая общности, примем, что управляющий сигнал имеет вид $\sigma_k = I_1[\dot{g}_k]_{\text{пр}}$, где $[\dot{g}_k]_{\text{пр}}$ – программное значение $\dot{g}_k$, требуемое для реализации нужного закона управления, и возьмем $K' = 1/K$. Тогда $T\ddot{g}_k + \dot{g}_k = [\dot{g}_k]_{\text{пр}}$, т. е. в случае достаточно медленного изменения $[\dot{g}_k]_{\text{пр}}$ имеем $\dot{g}_k = [\dot{g}_k]_{\text{пр}}$. Числовые значения принятой модели: $J = 0.037 \text{ кгм}^2$, $K = 0.0327 \text{ Нм/А}$, $T = 0.1 \text{ с}$, предельно допустимые значения $J\Omega_k = \pm 18 \text{ Нмс}$.

С учетом уравнений (3.3) можно построить более реалистическую модель вращательного движения спутника, чем модель описанная в главе 1. По формулам (1.5) вычисляются величины $\dot{h}_i$ ($i = 1, 2, 3$), которые назовем $[\dot{h}_k]_{\text{пр}}$. Это – программные значения $\dot{h}_i$, необходимые для реализации нужного закона управления. По формулам (3.2) эти величины пересчитываются в величины $\dot{g}_k$

($k = 1, 2, 3, 4$), которые выступают в роли упоминавшихся выше $[\dot{g}_k]_{\text{пр}}$. Далее, интегрируются уравнения

$$\dot{g}_k = u_k, \quad T\dot{u}_k + u_k = [\dot{g}_k]_{\text{пр}} \quad (k = 1, 2, 3, 4). \quad (3.4)$$

Найденные в результате величины g_k пересчитываются по формулам (3.1) в величины h_i , которые затем используются в (В.5).

Иными словами, полная система дифференциальных уравнений вращательного движения спутника имеет вид (В.5), (3.3). Фазовыми переменными (неизвестными функциями) в ней являются k_i , b_{1i} , b_{2i} ($i = 1, 2, 3$) и g_k , u_k ($k = 1, 2, 3, 4$). Величины h_i выражаются через g_k по формулам (3.1), величины ω_i выражаются через k_i и h_i по соответствующим формулам (В.5). Величины $[\dot{g}_k]_{\text{пр}}$ рассчитываются по формулам (3.2) и (1.5) с использованием фазовых переменных и найденных указанным способом величин h_i , ω_i .

3.3. Законы управления гиростатическим моментом. Описанная в главе 1 математическая модель вращательного движения ИСЗ является предварительной. В ней игнорируются несколько важных реальных факторов – наличие зон нечувствительности и дискретность реализации алгоритма управления. Последний из этих факторов учитывается следующим образом. Шаг численного интегрирования уравнений (В.5), (3.4) берется равным длине Δt такта реализации алгоритма или меньшим этой длины в целое число раз. Внутри такта величины $[\dot{g}_k]_{\text{пр}}$ считаются постоянными, обновление их значений происходит в начальной точке такта.

Для учета зон нечувствительности необходимо законы управления кинетическим моментом гиросистемы представить в несколько иной форме, чем они были описаны в главах 1, 2 [22]. Законы управления (1.13), (1.7), (2.1) и (2.5) представим в виде

$$m_1 = -\xi^2(p_1 q_1), \quad m_2 = -\frac{1 + \lambda\mu}{\lambda} \xi^2(p_2 q_2), \quad m_3 = -\frac{1}{\lambda} \xi^2(p_3 q_3), \quad (3.5)$$

а закон управления (1.18) – в виде

$$\dot{h}_i = p_i q_i, \quad (3.6)$$

где p_i, q_i ($i=1,2,3$) – параметры. Соотношения для вычисления величин q_i будут приведены в данном разделе ниже для каждого закона управления. Значения p_i вычисляются независимо от закона управления, по следующим правилам. Параметры p_i принимают значения 0 или 1. Значения p_i могут меняться независимо друг от друга в начальной точке каждого цикла работы алгоритма. В начальной точке очередного цикла алгоритма вычисляются величины q_i . Если $p_i = 0$ и $|q_i| > q''$, то полагаем $p_i = 1$. Если $p_i = 1$ и $|q_i| < q'$, то полагаем $p_i = 0$. В остальных случаях параметр p_i не меняется (рис. 3.2).

В приводимых ниже расчетах принято $\Delta t = 0.1$ с, $q'' = \pi/180 = 0.0175$, $q' = q''/2$, в начальный момент времени приняты значения $g_i = u_i = 0$, $p_i = 0$. Значения параметров q_i ($i=1,2,3$) вычисляются для каждого варианта закона управления по соответствующим зависимостям:

3.3.1. Орбитальная ориентация

$$q_1 = \frac{2(\omega_1 - \omega_1^\circ)}{\xi} + \vartheta_1, \quad q_2 = \frac{2(\omega_2 - \omega_2^\circ)}{\xi} + \vartheta_2, \quad q_3 = \frac{2(\omega_3 - \omega_3^\circ)}{\xi} + \vartheta_3. \quad (3.7)$$

Результаты расчетов движения спутника, полученные в результате решения системы уравнений (В.5), (1.5), (3.4), (3.5), (3.7), а также результаты расчета микроускорений приведены на рис. 3.3 – 3.7.

3.3.2. Точная орбитальная ориентация

$$q_1 = \frac{2\omega_1}{\xi} - a_{23}, \quad q_2 = \frac{2(\omega_2 - \omega_0)}{\xi} - a_{33}, \quad q_3 = \frac{2\sqrt{2}\omega_3}{\xi} + (a_{21} + a_{32}). \quad (3.8)$$

Результаты расчетов движения спутника, полученные в результате решения системы уравнений (В.5), (1.5), (3.4), (3.5), (3.8), а также результаты расчета микроускорений приведены на рис. 3.8 – 3.12.

3.3.3. Полупассивная гравитационная ориентация

$$q_1 = \frac{1}{\tau_1} [\varepsilon_1 (\omega_1 - \omega_1^\circ) - h_1], \quad q_2 = \frac{1}{\tau_2} [\varepsilon_2 (\omega_2 - \omega_2^\circ) + (h_0 - h_2)], \quad (3.9)$$

$$q_3 = \frac{1}{\tau_3} \left[\varepsilon_3 (\omega_3 - \omega_3^\circ) - h_3 \right].$$

Результаты расчетов движения спутника, полученные в результате решения системы уравнений (В.5), (1.5), (3.4), (3.6), (3.9), а также результаты расчета микроускорений приведены на рис. 3.13 – 3.17.

3.3.4. Одноосная солнечная ориентация

$$q_1 = \frac{2\omega_1}{\xi} - s_3, \quad q_2 = \frac{2\omega_2}{\xi}, \quad q_3 = \frac{2\omega_3}{\xi} + s_1. \quad (3.10)$$

Результаты расчетов движения спутника, полученные в результате решения системы уравнений (В.5), (1.5), (3.4), (3.5), (3.10), а также результаты расчета микроускорений приведены на рис. 3.18 – 3.21.

3.3.5. Режим ограничения роста кинетического момента

$$q_1 = \frac{2\omega_1}{\xi} - s_3, \quad q_2 = \frac{\xi'}{\xi} \omega_2 - \frac{\chi'}{\xi^2} F_1, \quad q_3 = \frac{2\omega_3}{\xi} + s_1. \quad (3.11)$$

Результаты расчетов движения спутника, полученные в результате решения системы уравнений (В.5), (1.5), (3.4), (3.5), (3.11), а также результаты расчета микроускорений приведены на рис. 3.22 – 3.25.

Начальные условия движения спутника и все числовые значения параметров модели для каждого из вариантов орбитальной ориентации задаются таким же образом как описано в главе 1. Для режимов одноосной солнечной ориентации начальные условия движения спутника и все числовые значения параметров модели задаются таким же образом как описано в главе 2.

Результаты моделирования представлены графиками зависимости от времени углов γ , δ , β , задающих положение системы $Ox_1x_2x_3$ относительно системы $OX_1X_2X_3$ для режимов орбитальной ориентации спутника. Показаны графики зависимости от времени угла θ между ортом $\mathbf{s}$ и ортом Ox_2 (нормаль к светочувствительной стороне солнечных батарей), а также угла η между ортом $\mathbf{s}$ и плоскостью орбиты спутника. Для режимов одноосной солнечной ориентации дополнительно показаны графики зависимости от времени

угла φ , определяющего поворот спутника вокруг нормали к плоскости солнечных батарей (угол φ отсчитывается от плоскости орбиты спутника). На рисунках представлены также графики компонент угловой скорости ω_i , микроускорения $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, гиросtatического момента спутника $H_i = I_i h_i$ ($i = 1, 2, 3$) и величин $G_k = I_1 g_k$ ($k = 1, 2, 3, 4$). Последние представляют собой алгебраические значения кинетических моментов отдельных двигателей-маховиков. Микроускорение рассчитано в указанной выше точке P . Графики построены на интервалах времени 6 суток. Для каждого из графиков описывающих движение спутника отдельно показан переходной процесс, обусловленный ошибками в задании начальной угловой скорости.

Сравнение результатов, полученных с помощью идеализированных моделей, приведенных в главах 1, 2 и более реалистичной модели приведенной в данной главе показывает практически их полное совпадение в части описания движения спутника. В случае микроускорений ситуация несколько иная. Микроускорения, рассчитанные в рамках реалистичной модели, демонстрируют высокочастотные колебания, которых нет в результатах идеализированной модели. Эти колебания обусловлены дискретностью работы алгоритма поддержания ориентации. Однако амплитуда этих колебаний весьма мала ($\sim 10^{-7}$ м/с²), и они не сказываются на общем весьма малом уровне микроускорений. Результаты моделирования показали, что все рассмотренные режимы обеспечивают весьма малый уровень квазистатических микроускорений на спутнике. В этих режимах в середине рабочего отсека микроускорения не превышают 10^{-5} м/с. Из результатов моделирования следует также, что достаточно детальный учет функционирования системы управления ориентацией спутника не ухудшает оценки микроускорений, полученные в рамках идеализированной модели, также не ухудшается точность ориентации спутника в режимах одноосной солнечной ориентации.

ГЛАВА 4. АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКИХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ИСКУССТВЕННЫМ СПУТНИКОМ ЗЕМЛИ, ПОСТРОЕННЫХ НА БАЗЕ ДВИГАТЕЛЕЙ-МАХОВИКОВ

4.1. Электромеханические исполнительные органы систем управления искусственными спутниками Земли. Электромеханические исполнительные органы систем управления искусственными спутниками Земли (гиросистема) предназначены для создания управляющих моментов. Во многих случаях, при создании длительно существующих спутников использованию гиросистемы в составе системы управления нет альтернативы [26]. В то же время электромеханические исполнительные органы являются одними из наиболее массивных и энергопотребляющих устройств, постоянно задействованных в процессе функционирования спутника. В связи с этим задачи выбора типа исполнительных органов в составе гиросистемы и оптимизации их характеристик являются актуальными.

Для больших спутников с высокими требованиями к динамике и точности ориентации и орбитальных станций целесообразность применения силовых гироскопических комплексов на основе силовых гироскопов с постоянным значением кинетического момента во многих случаях очевидна [27]. Для малых спутников выбор типа исполнительных органов является не тривиальной задачей. Гиросистемы используемые на малых спутниках могут быть построены на базе:

- силовых гироскопических комплексов различного типа,
- управляющих двигателей–маховиков.

4.2. Построение области требуемых значений кинетического момента. Между областями применения перечисленных выше устройств нельзя провести резких границ. Соответственно динамические требования к системе управления, включающей в свой состав электромеханические исполнительные органы, во многом определяются множеством требуемых значений кинетического момента H_T . Множество H_T является областью изменения в связанной со спут-

ником системе координат значения вектора суммарного кинетического момента создаваемого гиросистемой. Изменение этого вектора в указанной области в соответствии с реализуемыми в системе законами должно обеспечивать требуемое управление параметрами движения относительно центра масс спутника. Естественным множеством H_T должно содержаться внутри множества максимальных значений кинетического момента H_C , создаваемых гиросистемой.

Таким образом, для всех вариантов построения гиросистемы должно быть обеспечено выполнение условия:

$$H_T \subset H_C. \quad (4.1)$$

При выполнении условия (4.1) можно утверждать, что величина суммарного кинетического момента создаваемого системой электромеханических исполнительных органов, будет достаточна, для обеспечения требуемой угловой скорости вращения спутника.

Вектор полного кинетического момента спутника можно представить как:

$$\mathbf{K} = \hat{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{H},$$

где $\hat{\mathbf{I}} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$ – тензор инерции спутника в системе координат $Ox_1x_2x_3$ (см. п. В.3.), $\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости спутника, $\mathbf{H}$ – вектор суммарного кинетического момента создаваемого гиросистемой. При построении множества H_T , необходимого для реализации эйлерова разворота, будем начальную угловую скорость спутника и накопленное значение кинетического момента считать равным нулю, а также будем пренебрегать накоплением кинетического момента от внешних сил за время поворота, тогда при любом допустимом направлении эйлеровой оси разворота мы имеем, что $\mathbf{H} = -\hat{\mathbf{I}}|\boldsymbol{\omega}_{np}|\mathbf{e}$, или в матричном виде $\|H_i\|_{i=1}^3 = -\|I_i\omega_{np}e_i\|_{i=1}^3$. Здесь $\mathbf{e}$ – орт эйлеровой оси разворота спутника, $|\boldsymbol{\omega}_{np}|$ – модуль требуемой (программной) угловой скорости поворота спутника относительно орта $\mathbf{e}$. Откуда следует, что фигура множества H_T представляет собой эллипсоид

$$\left(\frac{H_1}{I_1}\right)^2 + \left(\frac{H_2}{I_2}\right)^2 + \left(\frac{H_3}{I_3}\right)^2 \leq \omega_{np}^2. \quad (4.2)$$

Построение области множества создаваемых гиросистемой значений кинетического момента H_C задача более сложная. В зависимости от расположения электромеханических исполнительных органов относительно главных осей спутника, возможно подобрать форму области кинетического момента H_C , наиболее соответствующую заданным моментам инерции спутника.

4.3. Область возможных значений кинетического момента. Рассмотрим систему двигателей-маховиков, оси которых расположены параллельно боковым ребрам четырехгранной пирамиды (рис. 3.1) [28]. Орты $\mathbf{e}_k$ ($k = 1, \dots, 4$) осей маховиков имеют в системе координат $Ox_1x_2x_3$ компоненты:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (-\cos \alpha, \sin \alpha \sin \beta, -\sin \alpha \cos \beta), & \mathbf{e}_2 &= (-\cos \alpha, \sin \alpha \sin \beta, \sin \alpha \cos \beta), \\ \mathbf{e}_3 &= (\cos \alpha, \sin \alpha \sin \beta, -\sin \alpha \cos \beta), & \mathbf{e}_4 &= (\cos \alpha, \sin \alpha \sin \beta, \sin \alpha \cos \beta). \end{aligned}$$

Здесь α – угол между осью k -ого маховика и осью Ox_1 , β – угол определяющий положение и форму основания пирамиды в плоскости Ox_2x_3 . Углы α и β – параметры системы. Суммарный кинетический момент маховиков выражается формулой

$$\mathbf{H} = g_1\mathbf{e}_1 + g_2\mathbf{e}_2 + g_3\mathbf{e}_3 + g_4\mathbf{e}_4, \quad (4.3)$$

где g_k – значение кинетического момента маховика с номером k . Маховики считаем одинаковыми. В этом случае $-g_{\max} \leq g_k \leq g_{\max}$ ($k = 1, \dots, 4$), где $g_{\max}$ – абсолютная величина предельного значения кинетического момента отдельного маховика. Величина $g_{\max}$ – еще один параметр системы. Скалярная запись векторного выражения (4.3):

$$\begin{aligned} H_1 &= (-g_1 - g_2 + g_3 + g_4)\cos \alpha, & H_2 &= (g_1 + g_2 + g_3 + g_4)\sin \alpha \sin \beta, \\ H_3 &= (-g_1 + g_2 - g_3 + g_4)\sin \alpha \cos \beta. \end{aligned}$$

Выражение (4.3) для краткости будем записывать в виде $\mathbf{H} = [g_1, g_2, g_3, g_4]$. Кроме того, будем использовать обычное представление вектора

$\mathbf{H} = (H_1, H_2, H_3)$, указывая в круглых скобках его компоненты в системе координат $Ox_1x_2x_3$. Не ограничивая общности, положим $g_{\max} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$.

Рассмотрим область P пространства $R^3(H_1, H_2, H_3)$, заполняемую концами векторов (4.3) при $|g_k| \leq 1$. Эта область является областью возможных значений кинетического момента системы маховиков и представляет собой выпуклый многогранник, обладающий центральной симметрией относительно начала координат. Число вершин многогранника определяется соотношением $B = n(n-1) + 2$, число граней – $\Gamma = n(n-1)$, число ребер – $P = 2n(n-1)$, где n – число маховиков в системе. Таким образом, многогранник P имеет 14 вершин, 12 граней и 24 ребра. Обозначим вершины многогранника V_i и V'_i ($i = 1, \dots, 7$). При каждом i вершины V_i и V'_i расположены центрально симметрично относительно точки O . Вершины характеризуются соотношениями:

- 1) $V_1: \mathbf{H} = [1, 1, 1] = (0, 4 \sin \alpha \sin \beta, 0), \quad \{-\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3, -\mathbf{e}_4\},$
- 2) $V_2: \mathbf{H} = [-1, 1, 1] = (2 \cos \alpha, 2 \sin \alpha \sin \beta, 2 \sin \alpha \cos \beta), \quad \{\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_4\},$
- 3) $V_3: \mathbf{H} = [1, -1, 1] = (2 \cos \alpha, 2 \sin \alpha \sin \beta, -2 \sin \alpha \cos \beta), \quad \{-\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3\},$
- 4) $V_4: \mathbf{H} = [1, 1, -1] = (-2 \cos \alpha, 2 \sin \alpha \sin \beta, 2 \sin \alpha \cos \beta), \quad \{-\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\},$
- 5) $V_5: \mathbf{H} = [1, 1, -1] = (-2 \cos \alpha, 2 \sin \alpha \sin \beta, -2 \sin \alpha \cos \beta), \quad \{-\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, -\mathbf{e}_4\},$
- 6) $V_6: \mathbf{H} = [1, -1, -1] = (0, 0, -4 \sin \alpha \cos \beta), \quad \{-\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\},$
- 7) $V_7: \mathbf{H} = [1, 1, -1] = (-4 \cos \alpha, 0, 0), \quad \{-\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\},$
- 8) $V'_7: \mathbf{H} = [-1, -1, 1] = (4 \cos \alpha, 0, 0), \quad \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3, -\mathbf{e}_4\},$
- 9) $V'_6: \mathbf{H} = [-1, 1, -1] = (0, 0, 4 \sin \alpha \cos \beta), \quad \{\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, -\mathbf{e}_4\},$
- 10) $V'_5: \mathbf{H} = [-1, -1, -1] = (2 \cos \alpha, -2 \sin \alpha \sin \beta, 2 \sin \alpha \cos \beta), \quad \{\mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\},$
- 11) $V'_4: \mathbf{H} = [-1, -1, -1] = (2 \cos \alpha, -2 \sin \alpha \sin \beta, -2 \sin \alpha \cos \beta), \quad \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, -\mathbf{e}_4\},$
- 12) $V'_3: \mathbf{H} = [-1, 1, -1] = (-2 \cos \alpha, -2 \sin \alpha \sin \beta, 2 \sin \alpha \cos \beta), \quad \{\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\},$
- 13) $V'_2: \mathbf{H} = [1, -1, -1] = (-2 \cos \alpha, -2 \sin \alpha \sin \beta, -2 \sin \alpha \cos \beta), \quad \{-\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_4\},$
- 14) $V'_1: \mathbf{H} = [-1, -1, -1] = (0, -4 \sin \alpha \sin \beta, 0), \quad \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}.$

Здесь в фигурных скобках указаны орты ребер, выходящих из каждой вершины. В табл. 4.1 приведены значения координат вершин многогранника P в системе координат $Ox_1x_2x_3$ при значении углов $\alpha = 80.5^\circ$ и $\beta = 45.5^\circ$ (способ, применявшийся для определения значений углов α и β , описан в п. 4.5).

Таблица 4.1.

Вершина	x_1	x_2	x_3	Вершина	x_1	x_2	x_3
V_1	0.000	2.814	0.000	V'_7	0.660	0.000	0.000
V_2	0.330	1.407	1.383	V'_6	0.000	0.000	2.765
V_3	0.330	1.407	-1.383	V'_5	0.330	-1.407	1.383
V_4	-0.330	1.407	1.383	V'_4	0.330	-1.407	-1.383
V_5	-0.330	1.407	-1.383	V'_3	-0.330	-1.407	1.383
V_6	0.000	0.000	-2.765	V'_2	-0.330	-1.407	-1.383
V_7	-0.660	0.000	0.000	V'_1	0.000	-2.814	0.000

Грани многогранника обозначим F_i и F'_i ($i = 1, \dots, 6$). При каждом i грани F_i и F'_i расположены центрально симметрично относительно точки O .

Грани будем задавать списком принадлежащих им вершин:

- 1) $F_1 = \{V_1, V_4, V_7, V_5\}$, 2) $F'_1 = \{V'_1, V'_4, V'_7, V'_5\}$, 3) $F_2 = \{V_4, V'_6, V'_3, V_7\}$,
- 4) $F'_2 = \{V'_4, V_6, V_3, V'_7\}$, 5) $F_3 = \{V_1, V_5, V_6, V_3\}$, 6) $F'_3 = \{V'_1, V'_5, V'_6, V'_3\}$,
- 7) $F_4 = \{V_5, V_7, V'_2, V_6\}$, 8) $F'_4 = \{V'_5, V'_7, V_2, V'_6\}$, 9) $F_5 = \{V_1, V_3, V'_7, V_2\}$,
- 10) $F'_5 = \{V'_1, V'_3, V_7, V'_2\}$, 11) $F_6 = \{V_2, V'_6, V_4, V_1\}$, 12) $F'_6 = \{V'_2, V_6, V'_4, V'_1\}$.

На рис. 4.1. приведен общий вид многогранника P в системе координат $Ox_1x_2x_3$, а также обозначены его вершины. На рис. 4.2 изображены проекции многогранника P на координатные плоскости системы $Ox_1x_2x_3$.

Многогранник P допускает ряд преобразований симметрии. Он переходит в себя при повороте вокруг осей Ox_i ($i = 1, 2, 3$) на угол кратный π (в частном случае при значении угла $\beta = \pi/4 = 45^\circ$ многогранник P переходит в се-

бя при повороте вокруг оси Ox_1 на угол кратный $\pi/2$). Координатные плоскости системы $Ox_1x_2x_3$ являются его плоскостями симметрии.

Приведем некоторые метрические характеристики многогранника P . Все его ребра имеют длину 2. Следовательно, все грани – ромбы. Вершины V_1 и V'_1 находятся на расстоянии $d_1 = 4 \sin \alpha \sin \beta$ от начала координат – точки O , вершины V_6 и V'_6 отстоят от этой точки на расстояние $d_2 = 4 \sin \alpha \cos \beta$, а вершины V_7 и V'_7 на расстояние $d_3 = 4 \cos \alpha$. Расстояния до вершин V_2, V_3, V_4, V_5 и V'_2, V'_3, V'_4, V'_5 от точки O равны $d_4 = 2$. Соотношения между расстояниями d_1, d_2, d_3 выражаются неравенствами, приведенными в табл. 4.2.

Таблица 4.2.

$0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$	
$d_1 \leq d_2 \leq d_3$	$0 \leq \alpha \leq \arctg\left(\frac{1}{\cos \beta}\right)$	$d_2 \leq d_1 \leq d_3$	$0 \leq \alpha \leq \arctg\left(\frac{1}{\sin \beta}\right)$
$d_1 \leq d_3 \leq d_2$	$\arctg\left(\frac{1}{\cos \beta}\right) \leq \alpha \leq \arctg\left(\frac{1}{\sin \beta}\right)$	$d_2 \leq d_3 \leq d_1$	$\arctg\left(\frac{1}{\sin \beta}\right) \leq \alpha \leq \arctg\left(\frac{1}{\cos \beta}\right)$
$d_3 \leq d_1 \leq d_2$	$\arctg\left(\frac{1}{\sin \beta}\right) \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$	$d_3 \leq d_2 \leq d_1$	$\arctg\left(\frac{1}{\cos \beta}\right) \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$

В табл. 4.3 указаны зависимости, позволяющие определить расстояние от начала координат O до каждой грани многогранника P .

Таблица 4.3.

Грани	Расстояние	Грани	Расстояние	Грани	Расстояние
F_1, F'_1, F_5, F'_5	$\frac{2 \sin 2\alpha \sin \beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \beta}}$	F_2, F'_2, F_4, F'_4	$\frac{2 \sin 2\alpha \cos \beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}}$	F_3, F'_3, F_6, F'_6	$2 \sin \alpha \sin 2\beta$

4.4. Возможности системы при отключении одного из маховиков. Оценим возможности рассматриваемой системы в случае, когда один из маховиков отключен (вышел из строя). Без ограничения общности можно считать, что отключен маховик с осью, параллельной орту e_4 . Суммарный кинетический момент такой усеченной системы выражается векторной формулой

$$\mathbf{H} = g_1 \mathbf{e}_1 + g_2 \mathbf{e}_2 + g_3 \mathbf{e}_3, \quad (4.4)$$

скалярная запись которой имеет вид

$$H_1 = (-g_1 - g_2 + g_3) \cos \alpha, \quad H_2 = (g_1 + g_2 + g_3) \sin \alpha \sin \beta,$$

$$H_3 = (-g_1 + g_2 - g_3) \sin \alpha \cos \beta.$$

Выражение (4.4) для краткости будем записывать в виде $\mathbf{H} = [g_1, g_2, g_3]$. Здесь по-прежнему $-g_{\max} \leq g_k \leq g_{\max}$ ($k = 1, \dots, 3$), $g_{\max} = 1$. Область пространства, заполняемая концами векторов (4.4) при $|g_k| \leq 1$, – область возможных значений кинетического момента системы маховиков – представляет собой параллелепипед P' . Вершины этого параллелепипеда (всего их 8) обозначим V_i и V'_i ($i = 1, \dots, 4$). При каждом i вершины V_i и V'_i расположены центрально симметрично относительно точки O . Вершины характеризуются соотношениями:

- | | |
|---|--|
| 1) $V_1: \mathbf{H} = [1, 1, 1] = (-\cos \alpha, 3\sin \alpha \sin \beta, -\sin \alpha \cos \beta),$ | $\{\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3\},$ |
| 2) $V_2: \mathbf{H} = [-1, 1, 1] = (\cos \alpha, \sin \alpha \sin \beta, \sin \alpha \cos \beta),$ | $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\},$ |
| 3) $V_3: \mathbf{H} = [1, -1, 1] = (\cos \alpha, \sin \alpha \sin \beta, -3\sin \alpha \cos \beta),$ | $\{-\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3\},$ |
| 4) $V_4: \mathbf{H} = [1, 1, -1] = (-3\cos \alpha, \sin \alpha \sin \beta, \sin \alpha \cos \beta),$ | $\{-\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\},$ |
| 5) $V'_4: \mathbf{H} = [-1, -1, 1] = (3\cos \alpha, -\sin \alpha \sin \beta, -\sin \alpha \cos \beta),$ | $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3\},$ |
| 6) $V'_3: \mathbf{H} = [-1, 1, -1] = (-\cos \alpha, -\sin \alpha \sin \beta, 3\sin \alpha \cos \beta),$ | $\{\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\},$ |
| 7) $V'_2: \mathbf{H} = [1, -1, -1] = (-\cos \alpha, -\sin \alpha \sin \beta, -\sin \alpha \cos \beta),$ | $\{-\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3\},$ |
| 8) $V'_1: \mathbf{H} = [-1, -1, -1] = (\cos \alpha, -3\sin \alpha \sin \beta, \sin \alpha \cos \beta),$ | $\{-\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}.$ |

Здесь в фигурных скобках указаны орты ребер, выходящих из каждой вершины. В табл. 4.4 приведены значения координат вершин параллелепипеда P' в системе координат $Ox_1x_2x_3$ при значении углов $\alpha = 80.5^\circ$ и $\beta = 45.5^\circ$ с учетом отказа одного маховика.

На рис. 4.3. приведен общий вид параллелепипеда P' в системе координат $Ox_1x_2x_3$, а также обозначены его вершины. На рис. 4.4 изображены проекции параллелепипеда P' на координатные плоскости системы $Ox_1x_2x_3$.

Таблица 4.4.

Вершина	x_1	x_2	x_3	Вершина	x_1	x_2	x_3
V_1	-0.165	2.110	-0.691	V'_4	0.495	-0.703	-0.691
V_2	0.165	0.703	0.691	V'_3	-0.165	-0.703	2.074
V_3	0.165	0.703	-2.074	V'_2	-0.165	-0.703	-0.691
V_4	-0.495	0.703	0.691	V'_1	0.165	-2.110	0.691

Как и всякий параллелепипед, P' имеет 6 граней, которые обозначим F_i и F'_i ($i=1,2,3$). При каждом i грани F_i и F'_i расположены центрально симметрично относительно точки O . Грани будем задавать списком принадлежащих им вершин:

- 1) $F_1 = \{V_1, V_2, V'_4, V_3\}$, 2) $F'_1 = \{V'_1, V'_2, V_4, V'_3\}$, 3) $F_2 = \{V_1, V_3, V'_2, V_4\}$,
 4) $F'_2 = \{V'_1, V'_3, V_2, V'_4\}$, 5) $F_3 = \{V_1, V_4, V'_3, V_2\}$, 6) $F'_3 = \{V'_1, V'_4, V_3, V'_2\}$.

Приведем некоторые метрические характеристики многогранника P' . Его ребра имеют длину 2. Следовательно, все грани – ромбы. Вершины V_1 и V'_1 находятся на расстоянии $d_1 = \sqrt{8\sin^2 \alpha \sin^2 \beta + 1}$ от начала координат – точки O , вершины V_3 и V'_3 отстоят от этой точки на расстояние $d_2 = \sqrt{8\sin^2 \alpha \cos^2 \beta + 1}$, а вершины V_4 и V'_4 на расстояние $d_3 = \sqrt{8\cos^2 \alpha + 1}$. Расстояния до вершин V_2 и V'_2 от точки O равны $d_4 = 1$. Соотношения между расстояниями d_1, d_2, d_3 выражаются неравенствами, приведенными в табл. 4.2.

Таблица 4.5

Грани	Расстояние	Грани	Расстояние	Грани	Расстояние
F_1, F'_1	$\frac{\sin 2\alpha \sin \beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \beta}}$	F_2, F'_2	$\frac{\sin 2\alpha \cos \beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}}$	F_3, F'_3	$\sin \alpha \sin 2\beta$

В табл. 4.5 указаны зависимости, позволяющие определить расстояние от начала координат O до каждой грани параллелепипеда P' .

Следует отметить, что в работе [29] приведены области вариации вектора

суммарного кинетического момента для систем, состоящих из 3 и 4 двигателей-маховиков, которые полностью совпадают с областями построенными в п. 4.3 и 4.4 данной главы.

4.5. Расположение маховиков на искусственном спутнике Земли. Рассмотрим вопрос, как следует расположить описанную в п. 4.3 систему из четырех маховиков на ИСЗ и как лучше всего выбрать значения углов α и β , чтобы обеспечить достаточно широкие возможности управления угловой скоростью спутника.

Моменты инерции относительно главных центральных осей инерции спутника, т.е. осей Ox_i обозначим соответственно I_i ($i=1,2,3$). Примем значения этих моментов равными: $I_1 = 2600 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, $I_2 = 11100 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, $I_3 = 10900 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$. Поскольку система управления ориентацией спутника должна быть достаточно универсальной, естественно потребовать, чтобы максимальные абсолютные значения реализуемых ею угловых скоростей вращения вокруг каждой из осей Ox_i были одинаковы. Предположим, что полный кинетический момент спутника – сумма кинетических моментов несущего тела и маховиков – равен нулю. Тогда имеют место соотношения:

$$I_i \omega_i + H_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Здесь ω_i и H_i – проекции абсолютной угловой скорости несущего тела и собственного кинетического момента системы маховиков на оси Ox_i соответственно. Разрешая последние соотношения относительно угловых скоростей, получим

$$\omega_i = -(H_i / I_i) \quad (i = 1, 2, 3). \quad (4.5)$$

Исходя из требуемого условия $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$ и с учетом соотношений $H_1 = 4 \cos \alpha$, $H_2 = 4 \sin \alpha \sin \beta$, $H_3 = 4 \sin \alpha \cos \beta$ определим значение углов $\beta = 45.5^\circ$ и $\alpha = 80.5^\circ$. Если по какой-либо оси реализуется отвечающее ей максимальное значение угловой скорости, то компоненты угловой скорости по двум другим осям равны нулю. Указанные максимальные значения компонент

угловой скорости характеризуют предельные возможности системы маховиков для разворотов спутника вокруг его главных центральных осей инерции. При произвольном выборе направления вектора угловой скорости в системе $Ox_1x_2x_3$ максимальное значение модуля этого вектора будет меньше. Область допустимых значений угловой скорости спутника представляет собой многогранник, получающийся из многогранника P преобразованием подобия, задаваемым формулами (4.5). Указанные выше предельные значения угловых скоростей реализуются на вершинах этого многогранника.

4.6. Анализ схемы установки системы двигателей-маховиков. Как было сказано в п. 4.2, для того, чтобы система маховиков обеспечивала требования к динамике спутника должно выполняться условие (4.1). Проще всего проверить выполнение условия (4.1) можно построив области H_T и H_C в одной системе координат и в едином масштабе. Поскольку при построении многогранника P используется условие $g_{\max} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$, чтобы отобразить эллипсоид требуемых значений кинетического момента H_T в системе координат $Ox_1x_2x_3$ необходимо уравнение (4.2) преобразовать к виду:

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1, \quad a_i = \frac{I_i \omega_{i \max}}{g_{\max}} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (4.6)$$

где a_i – полуоси эллипсоида, $\omega_{i \max}$ – максимальное значение угловой скорости. Таким образом, зная требуемую угловую скорость программных разворотов спутника можно выбрать предельное значение кинетического момента маховиков (или наоборот, зная значение $g_{\max}$ можно рассчитать $\omega_{i \max}$), исходя из условия (4.1).

В данной работе считаем, что на спутнике установлена система двигателей-маховиков в конфигурации «четырёхгранная пирамида» (см. п. 4.3), все маховики в системе одинаковые и значение $g_{\max} = 18 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$. Тогда, подобрав размера эллипсоида H_T , как показано на рис. 4.5, определим значения: $a_1 = 0.465$, $a_2 = 1.987$, $a_3 = 1.951$. С учетом уравнений (4.6) находим значение $\omega_{i \max} =$

0.184 %/с. На рис. 4.6 показан параллелепипед P' , т.е. вид области H_C в случае отказа одного из маховиков. В этом случае, если потребовать равенства значения угловых скоростей вращения спутника вокруг каждой из осей Ox_i , то размеры эллипсоида H_T необходимо уменьшить в два раза, как показано на рис. 4.7, т.е. $a_1 = 0.233$, $a_2 = 0.993$, $a_3 = 0.975$ и, соответственно, $\omega_{i \max} = 0.092$ %/с.

ГЛАВА 5. ПОСТРОЕНИЕ И АНАЛИЗ ОСОБЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ СИСТЕМ БЕЗУПОРНЫХ ГИРОДИНОВ

5.1. Система уравнений, задающая особые поверхности. Рассмотрим спутник, представляющий собой твердое тело, на котором установлены n одинаковых гироскопов. Собственный кинетический момент k -ого гироскопа обозначим Γ_k , $|\Gamma_k| = \Gamma > 0$ ($k = 1, \dots, n; n \geq 3$). Для расчета суммарного кинетического момента гироскопов введем $n + 1$ правую декартову систему координат. Система $X_1 X_2 X_3$, жестко связана с корпусом спутника, система $X_1^{(k)} X_2^{(k)} X_3^{(k)}$ связана с k -ым гироскопом. Ось прецессии k -ого гироскопа параллельна оси $X_3^{(k)}$, вектор Γ_k его собственного кинетического момента направлен вдоль оси $X_1^{(k)}$. Ориентацию системы координат $X_1^{(k)} X_2^{(k)} X_3^{(k)}$ относительно системы $X_1 X_2 X_3$ зададим с помощью углов Эйлера α_k , β_k и ε_k (рис. 5.1). Эти углы определяются следующим образом. Система $X_1 X_2 X_3$ может быть переведена в систему $X_1^{(k)} X_2^{(k)} X_3^{(k)}$ тремя последовательными поворотами (полагаем, что начала обе систем совпадают): 1) на угол α_k вокруг оси X_3 , 2) на угол β_k вокруг новой оси X_1 , 3) на угол ε_k вокруг новой оси X_3 , совпадающей с осью $X_3^{(k)}$. Углы α_k и β_k задают ориентацию оси прецессии гироскопа в системе $X_1 X_2 X_3$. Угол ε_k задает поворот оси $X_1^{(k)}$ вокруг оси прецессии.

Суммарный кинетический момент системы гироскопов имеет вид

$$\mathbf{H} = \sum_{k=1}^n \Gamma_k. \quad (5.1)$$

Рассмотрим область P пространства $R^3(\mathbf{H})$, образованную точками (5.1) при всех значениях ε_k . Эта область является областью возможных значений кинетического момента системы гиродинов. В процессе управления ориентацией спутника вектор (5.1) должен быть заданной функцией времени t : $\mathbf{H} = \mathbf{H}(t)$. Управление будет невозможным, если $\mathbf{H}(t) \notin P$ при некоторых значениях t .

В скалярном виде соотношение (5.1) имеет вид [30]

$$H_i = \Gamma \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} \sin \varepsilon_k + b_{ik} \cos \varepsilon_k \right) \quad (i = 1, 2, 3), \quad (5.2)$$

$$a_{1k} = -\sin \alpha_k \cos \beta_k, \quad a_{2k} = \cos \alpha_k \cos \beta_k, \quad a_{3k} = \sin \beta_k,$$

$$b_{1k} = \cos \alpha_k, \quad b_{2k} = \sin \alpha_k, \quad b_{3k} = 0.$$

Поскольку величины α_k , β_k и Γ неизменны, формулы (5.2) можно представить в виде

$$H_i = f_i(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \quad (i = 1, 2, 3). \quad (5.3)$$

Будем использовать и векторную форму записи соотношения (5.3): $\mathbf{H} = \mathbf{f}(\varepsilon)$. Функции (5.3) определяют преобразование пространства $R^n(\varepsilon)$ векторов $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ в трехмерное пространство $R^3(\mathbf{H})$ векторов $\mathbf{H} = (H_1, H_2, H_3)$. При этом почти всем значениям $\mathbf{H}$ соответствует бесконечное множество значений ε .

Матрица Якоби, составленная из частных производных функций (5.3)

$$J(\varepsilon) = \left\| \frac{\partial f_i}{\partial \varepsilon_k} \right\|, \quad (5.4)$$

имеет размер $3 \times n$. Здесь $i = 1, 2, 3$ – индекс строки, $k = 1, \dots, n$ – индекс столбца. Значения $\varepsilon = \varepsilon^*$, для которых

$$\text{rank } J(\varepsilon^*) < 3, \quad (5.5)$$

называют особыми [30, 31]. В общем случае преобразование (5.3) не отображает окрестность точки ε^* на полную окрестность точки $\mathbf{H}^* = \mathbf{f}(\varepsilon^*)$, т.е. линейные вариации $\Delta \mathbf{H} = J(\varepsilon^*) \Delta \varepsilon$, где $\Delta \mathbf{H} = \mathbf{H} - \mathbf{H}^*$, $\Delta \varepsilon = \varepsilon - \varepsilon^*$, лежат в одной плоскости. Система гироскопов не способна обеспечить изменение $\mathbf{H}$ в направлении, перпендикулярном этой плоскости. Следовательно, происходит частичная потеря управляемости спутника.

Точку $\mathbf{H}^* = \mathbf{f}(\varepsilon^*)$ будем называть особой точкой в пространстве $R^3(\mathbf{H})$. В общем случае такие точки образуют некоторые поверхности $S^* \subset R^3(\mathbf{H})$ [31]. Плоскость, которой принадлежат вариации $\Delta \mathbf{H}$ в особой точке, является касательной плоскостью к поверхности S^* в этой точке. Встречаются и вырожденные случаи, когда множества значений $\mathbf{H}^*$ образуют не поверхности, а линии или изолированные точки. Очевидно, граница области P возможных значений $\mathbf{H}$ является одной из особых поверхностей. Эту поверхность обозначим S^0 . Для систем гироскопов типично существование поверхностей S^* , расположенных внутри области P .

В силу условия (5.5) при особом значении $\varepsilon = \varepsilon^*$ существуют величины λ_k ($k = 1, 2, 3$), удовлетворяющие соотношениям [32,33]

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial \varepsilon_k} = 0 \quad (k = 1, \dots, n), \quad \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 = 1. \quad (5.6)$$

Эти соотношения будем рассматривать как уравнения относительно неизвестных $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$, причем всюду будем считать, что $\text{rank } J(\varepsilon^*) = 2$. Имеем $n+1$ уравнение относительно $n+3$ неизвестных. Таким образом, система уравнений (5.6) задает в пространстве $R^n(\varepsilon)$ некоторую двумерную поверхность S_ε^* , образованную особыми значениями ε . Преобразование (5.3) переводит эту поверхность в особую поверхность S^* в пространстве $R^3(\mathbf{H})$. Если $\varepsilon \in S_\varepsilon^*$, то касательная плоскость к S^* в точке $\mathbf{f}(\varepsilon)$ задается уравнением

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i \Delta H_i = 0,$$

где $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – единичная нормаль к этой плоскости.

Чтобы получить представление о форме поверхности S^* построим ее сечения плоскостями $H_i = H_0 (= \text{const})$, где i – одно из чисел 1, 2, 3. Для этого систему уравнений (5.6) дополним уравнением $f(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = H_0$. И построим кривые, задаваемые получившейся системой:

$$\begin{aligned} f(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) - H_0 &= 0, \\ \sum_{i=1}^3 \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial \varepsilon_k} &= 0 \quad (k = 1, \dots, n) \quad \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 - 1 = 0, \end{aligned} \quad (5.7)$$

Кривые (5.7) лежат в пространстве $R^{n+3}(\varepsilon, \Lambda)$, но можно рассматривать их проекции на пространстве $R^n(\varepsilon)$, а преобразование (5.3) позволяет отобразить эти проекции в пространство $R^3(\mathbf{H})$. Полученные в результате кривые представляют собой искомые сечения [32,33].

5.2. Типы особых точек. Различают особые точки двух типов – проходимые и непроходимые [30]. Напомним их определения. Предположим, что система гиринов должна реализовать заданную гладкую функцию $\mathbf{H}(t)$, причем $\mathbf{H}(0)$ – особая точка, отвечающая особому значению $\varepsilon = \varepsilon^*$: $\mathbf{H}(0) = \mathbf{f}(\varepsilon^*)$. Если эта особая точка проходима, то движение $\varepsilon(t)$, $\varepsilon(0) = \varepsilon^*$, реализующее такую функцию существует, но в общем случае не является гладким. Если $\dot{\mathbf{H}}(0) \neq 0$, то $\|\dot{\varepsilon}(t)\| \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow 0$ (см. Приложение 2). Такое движение нельзя выполнить технически. Если ограничиться гладкими движениями $\tilde{\varepsilon}(t)$, $\tilde{\varepsilon}(0) = \varepsilon^*$, то можно построить функцию $\tilde{\mathbf{H}}(t) = \mathbf{f}[\tilde{\varepsilon}(t)]$, имеющую одинаковый годограф с исходной функцией $\mathbf{H}(t)$, но удовлетворяющую условию $\dot{\tilde{\mathbf{H}}}(0) = 0$. В принципе, подходящим выбором $\tilde{\varepsilon}(t)$ можно обеспечить равенство $\mathbf{H}(t) = \tilde{\mathbf{H}}(t)$ всюду, за исключением малой окрестности точки $t = 0$. В случае непроходимой особой точки реализовать функцию $\mathbf{H}(t)$ непрерывным движе-

нием $\varepsilon(t)$ таким, что $\varepsilon(0) = \varepsilon^*$, нельзя. Очевидно, особая поверхность S^0 – граница области P – непроходима.

Определение типа особых точек требует исследования в этих точках второго дифференциала преобразования (5.3). Пусть $\mathbf{H}^* = \mathbf{f}(\varepsilon^*)$ – особая точка в пространстве $R^3(\mathbf{H})$. Тогда при $\varepsilon = \varepsilon^*$ и некотором $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ справедливы соотношения (5.6). Вектор Λ представляет собой единичную нормаль касательной плоскости к особой поверхности S^* в точке $\mathbf{H}^*$. Зададим два вектора $\Theta = (\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3)$ и $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$, лежащие в этой плоскости и удовлетворяющие соотношениям $\Lambda \cdot \Theta = \Lambda \cdot \Psi = \Theta \cdot \Psi = 0$, $|\Theta| = |\Psi| = 1$. Векторы Λ , Θ и Ψ образуют ортонормированный базис в $R^3(\mathbf{H})$. Рассмотрим главные члены компонент вариации $\Delta \mathbf{H} = \mathbf{H} - \mathbf{H}^*$ в этом базисе:

$$h_\lambda = \Lambda \cdot \Delta \mathbf{H} = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n \Delta \varepsilon_k \Delta \varepsilon_l \sum_{i=1}^3 \lambda_i \frac{\partial^2 f_i(\varepsilon^*)}{\partial \varepsilon_k \partial \varepsilon_l}, \quad (5.8)$$

$$h_\vartheta = \Theta \cdot \Delta \mathbf{H} = \sum_{k=1}^n \Delta \varepsilon_k \sum_{i=1}^3 \vartheta_i \frac{\partial f_i(\varepsilon^*)}{\partial \varepsilon_k}, \quad h_\psi = \Psi \cdot \Delta \mathbf{H} = \sum_{k=1}^n \Delta \varepsilon_k \sum_{i=1}^3 \psi_i \frac{\partial f_i(\varepsilon^*)}{\partial \varepsilon_k}.$$

В силу (5.6) в правой части формулы (5.8) линейный по $\Delta \varepsilon$ член отсутствуют. Эта правая часть представляет собой квадратичную форму относительно $\Delta \varepsilon$. Оказывается, в ряде случаев для определения типа особой точки достаточно найти экстремумы этой квадратичной формы при условии

$$\sum_{k=1}^n \Delta \varepsilon_k \sum_{i=1}^3 \vartheta_i \frac{\partial f_i(\varepsilon^*)}{\partial \varepsilon_k} = 0, \quad \sum_{k=1}^n \Delta \varepsilon_k \sum_{i=1}^3 \psi_i \frac{\partial f_i(\varepsilon^*)}{\partial \varepsilon_k} = 0.$$

Иными словами, следует найти экстремумы функции $\varphi = x^T A x$ при условии $Bx = 0$, $x^T x = 1$, где $x = (\Delta \varepsilon_1, \dots, \Delta \varepsilon_n)^T$ и

$$A = \left\| \sum_{i=1}^3 \lambda_i \frac{\partial^2 f_i(\varepsilon^*)}{\partial \varepsilon_k \partial \varepsilon_l} \right\|, \quad B = \left\| \begin{array}{c} \sum_{i=1}^3 \vartheta_i \frac{\partial f_i(\varepsilon^*)}{\partial \varepsilon_k} \\ \sum_{i=1}^3 \psi_i \frac{\partial f_i(\varepsilon^*)}{\partial \varepsilon_k} \end{array} \right\|.$$

Матрица A – симметричная и имеет размер $n \times n$, матрица B имеет размер $2 \times n$ ($k = 1, \dots, n$ – индекс столбца), причем $\text{rank } B = 2$.

Чтобы найти условный экстремум функции φ воспользуемся методом неопределенных множителей Лагранжа. Необходимое условие экстремума сводится к системе уравнений

$$Ax + B^T \eta + \mu x = 0, \quad Bx = 0, \quad x^T x = 1, \quad (5.9)$$

где $\eta \in R^2$, $\mu \in R^1$ – неопределенные множители. Умножим первое уравнение системы (5.9) слева на матрицу B , получим

$$BAx + BB^T \eta + \mu Bx = 0.$$

С учетом уравнения $Bx = 0$ можно записать

$$\eta = -(BB^T)^{-1} BAx.$$

Подставив полученное выражение в первое уравнение (5.9) будем иметь

$$\left[E_n - B^T (BB^T)^{-1} B \right] Ax = -\mu x,$$

где E_n – единичная матрица порядка n . Рассмотрим собственные числа матрицы

$$M = \left[E - B^T (BB^T)^{-1} B \right] A.$$

Она имеет порядок n . Поскольку $BM = 0$, $\text{rank } M \leq n - 2$, т. е. матрица M всегда имеет, по крайней мере, два нулевых собственных числа. Из результатов [31] следует, что если среди ненулевых собственных чисел M есть числа разных знаков, то особая точка проходима. Доказательство этого утверждения приведено в Приложении 2. Если же матрица M имеет $n - 2$ ненулевых собственных числа одного знака, то исследуемая особая точка непроходима. Более детальная классификация особых точек содержится в [30, 31].

Для численного решения системы нелинейных уравнений (5.7) использовался метод продолжения по параметру, подробно описанный в работах [32, 34, 35].

5.3. Построение и анализ особых поверхностей. В качестве примера

рассмотрим систему из шести гиродинов. Схема их представлена на рис. 5.2 и известна под названием 3-SPE (3 Scissored Pair Ensemble). В этой схеме каждой координатной оси X_i параллельны оси прецессии двух гиродинов, при этом считаем, что угловое движение гиродинов относительно осей прецессии ничем не ограничено. Значения соответствующих углов α_k и β_k приведены в табл. 5.1, величины $\Gamma = 1 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$.

Таблица 5.1

Угол	1	2	3	4	5	6
β_k	90°	90°	90°	90°	0°	0°
α_k	90°	270°	0°	180°	90°	270°

При расположении гиродинов по схеме 3-SPE поверхность S^0 обладает центральной симметрией относительно точки $\mathbf{H} = 0$ и зеркальной симметрией относительно плоскостей $H_i = 0$. В такой ситуации можно ограничиться исследованием сечений поверхности S^0 только плоскостями $H_3 = \text{const}$. На рис. 5.3 представлен общий вид поверхности S^0 , а на рис. 5.4 – сечение поверхности S^0 плоскостью $H_3 = 0$. Поверхность S^0 схемы 3-SPE является выпуклой и гладкой.

Рассмотрим вид поверхности S^0 в случае, когда один из гиродинов отключен (вышел из строя). Без ограничения общности можно считать, что отключен гиродин 4. Поверхность S^0 в этом случае обладает центральной симметрией относительно точки $\mathbf{H} = 0$ и осевой симметрией относительно прямой $H_1 = H_3 = 0$ (X_2).

На рис. 5.5 представлен общий вид поверхности S^0 , а на рис. 5.6 – сечение поверхности S^0 плоскостью $H_3 = 0$. Если число работающих гиродинов меньше 6, то на поверхности S^0 появляются вмятины (см. рис. 5.5 и 5.6), а внутри области P возникают непроходимые поверхности S^* (см. рис. 5.7 – 5.10). На рис. 5.8, 5.10 в качестве примера показаны сечения особых поверхно-

стей S^0 и S^* , здесь на рисунках сечения непроходимых особых поверхностей показаны сплошными черными линиями, а проходимых – штриховыми красными линиями. Наличие вмятин на поверхности S^0 и непроходимых особых поверхностей внутри области P связано с отсутствием коллинеарной пары у отключенного гиродина.

Следует отметить, что в работах [36,37] приведены области вариации вектора суммарного кинетического момента для системы гиродинов 3-SPE, которые полностью совпадают с областями построенными в п. 5.3 данной главы.

5.4. Анализ схемы установки системы гиродинов. Как было сказано в п. 4.2, для того, чтобы система электромеханических исполнительных органов обеспечивала требования к динамике спутника должно выполняться условие (4.1). Таким образом, повторяя рассуждения, приведенные в п. 4.4 построим области H_T и H_C в одной системе координат и в едином масштабе. На рис. 5.11, 5.12 показано взаимное расположение эллипсоида требуемых значений кинетического момента (H_T) и области вариации кинетического момента, создаваемого системой из 6 гиродинов, при значениях: $a_1 = 0.936$, $a_2 = 3.999$, $a_3 = 3.927$. Из уравнения (4.15) получим, что для обеспечения угловой скорости вращения спутника $\omega_{i \max} = 0.184$ °/с, достаточно чтобы каждый из 6 гиродинов системы имел собственный кинетический момент равный 9 Н·м·с. На рис. 5.13, 5.14 показано взаимное расположение эллипсоида H_T и области вариации кинетического момента, создаваемого системой из 5 гиродинов. В этом случае, если потребовать равенства значения угловых скоростей вращения спутника вокруг каждой из осей Ox_i ($i = 1, 2, 3$), то размеры эллипсоида H_T необходимо уменьшить, как показано на рис. 5.15, 5.16: $a_1 = 0.702$, $a_2 = 2.999$, $a_3 = 2.946$ и, соответственно, $\omega_{i \max} = 0.139$ °/с.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты работы. Получены оценки квазистатических микроускорений на искусственном спутнике Земли, предназначенном для проведения космических экспериментов в области микрогравитации. Исследованы два режима вращательного движения спутника, поддержание которых обеспечивается электромеханическими исполнительными органами – двигателями-маховиками или гиросдинами. Первый режим – трехосная орбитальная ориентация: продольная ось спутника направлена вдоль местной вертикали, солнечные батареи лежат в плоскости орбиты. Изучены различные варианты реализации этого режима, причем один из них – без насыщения гиросистемы. Режим обеспечивает малый уровень квазистатических микроускорений на борту и малую область вариации вектора остаточного микроускорения.

Второй режим – одноосная солнечная ориентация: нормаль к плоскости солнечных батарей спутника неизменно направлена на Солнце, абсолютная угловая скорость спутника практически равна нулю. Рассмотрены два варианта закона управления собственным кинетическим моментом гиросистемы. Первый вариант обеспечивает только затухание возмущенного движения спутника в окрестности положения покоя с требуемой скоростью. Второй вариант дополнительно ограничивает рост накапливаемого кинетического момента гиросистемы за счет управления углом поворота спутника вокруг нормали к плоскости солнечных батарей. Оба варианта закона управления поддерживают режим одноосной ориентации с требуемой точностью и обеспечивают малый уровень квазистатических микроускорений на борту.

Исследование обоих режимов проведено с учетом дискретности работы БЦВМ и наличия зон нечувствительности в датчиках системы управления. Решен ряд задач выбора конфигурации и анализа динамических возможностей применяемых систем двигателей-маховиков и гиросдинов.

ПРИЛОЖЕНИЯ

П.1. Орбитальная стабилизация спутника. Спутник будем считать гиросистемой. Собственный кинетический момент гиросистемы может меняться произвольным образом, но положение центра масс спутника относительно несущего тела и тензор инерции спутника в жестко связанной с несущим телом системе координат при этом остаются неизменными. Пусть спутник движется по неизменной круговой орбите вокруг притягивающего центра. Рассмотрим задачу стабилизации такого спутника в орбитальной системе координат $Ox_1x_2x_3$ (см. п. 1.2) в положении, в котором ось Ox_1 совпадает с осью $-Ox_3$, а ось Ox_2 – с осью Ox_2 . Из внешних моментов, действующих на спутник, будем учитывать только гравитационный.

Пусть $\mathbf{n}$ и $\mathbf{e}_r$ – орты осей Ox_2 и Ox_3 соответственно. Изменение этих ортов в системе координат $Ox_1x_2x_3$ описывается уравнениями

$$\dot{\mathbf{n}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n} = 0, \quad \dot{\mathbf{e}}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_r = \omega_0 (\mathbf{n} \times \mathbf{e}_r). \quad (\text{П1.1})$$

Здесь ω_0 – орбитальная частота. Теорема об изменении полного кинетического момента спутника в его движении относительно центра масс имеет вид

$$\hat{\mathbf{I}}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\mathbf{H}} + \boldsymbol{\omega} \times (\hat{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{H}) = 3\omega_0^2 (\mathbf{e}_r \times \hat{\mathbf{I}}\mathbf{e}_r). \quad (\text{П1.2})$$

Здесь $\mathbf{H}$ – собственный кинетический момент гиросистемы, $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость несущего тела, точка над буквой означает дифференцирование по времени t , причем дифференцирование векторов выполняется по отношению к системе координат $Ox_1x_2x_3$, жестко связанной с несущим телом и имеющей начало в центре масс ИСЗ, $\hat{\mathbf{I}}$ – тензор инерции спутника в этой системе координат.

Закон изменения собственного кинетического момента гиросистемы возьмем в виде

$$\dot{\mathbf{H}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H} = -\mathbf{M}_c. \quad (\text{П1.3})$$

Здесь $\mathbf{M}_c$ – момент, действующий на несущее тело со стороны гиросистемы. Подставим соотношение (П1.3) в уравнение (П1.2). Получим

$$\hat{\mathbf{I}}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega} = 3\omega_0^2(\mathbf{e}_r \times \hat{\mathbf{I}}\mathbf{e}_r) + \mathbf{M}_c. \quad (\text{П1.4})$$

Построим функцию $\mathbf{M}_c = \mathbf{M}_c(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}, \mathbf{e}_r)$ таким образом, чтобы система (П1.1), (П1.4) имела асимптотически устойчивое стационарное решение

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_0 \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{n} = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_r = -\mathbf{e}_1. \quad (\text{П1.5})$$

Здесь $\mathbf{e}_i$ – орты осей Ox_i . Построение выполним в два этапа. На первом этапе найдем потенциальный момент $\mathbf{M}_c$, такой, что система (П1.1), (П1.4) имеет устойчивые стационарные решения (П1.5). На втором этапе к найденному $\mathbf{M}_c$ добавим диссипативный момент $\sim \boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{n}$.

Задача первого этапа решается построением силовой функции U , имеющей строгий максимум при $\mathbf{n} = \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_r = -\mathbf{e}_1$ (ср. с известной теоремой Лагранжа об устойчивости положения равновесия консервативной механической системы). В качестве такой функции возьмем $U = -l(\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_1) + m(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_2)$, где l и m – положительные коэффициенты. В этом случае

$$\mathbf{M}_c = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{e}_r} \times \mathbf{e}_r + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} \times \mathbf{n} = -l(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_r) + m(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{n}). \quad (\text{П1.6})$$

Положим теперь

$$\mathbf{M}_c = -l(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_r) + m(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{n}) - \hat{\mathbf{D}}(\boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{n}), \quad (\text{П1.7})$$

где $\hat{\mathbf{D}}$ – симметричный положительно определенный тензор второго порядка. Проверим правильность такого выбора. Положим

$$U = -\frac{3\omega_0^2}{2}(\mathbf{e}_r \cdot \hat{\mathbf{I}}\mathbf{e}_r) - l(\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_1) + m(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_2),$$

Уравнения (П1.1), (П1.4) и (П1.6) допускают стационарные решения (П1.5) и первый интеграл

$$E = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega}) - \omega_0(\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega}) - U.$$

Используя этот интеграл в качестве функции Ляпунова, можно доказать, что стационарные решения (П1.5) устойчивы. Уравнение (П1.4), (П1.7) можно записать в виде

$$\hat{\mathbf{I}}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{e}_r} \times \mathbf{e}_r + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} \times \mathbf{n} - \hat{\mathbf{D}}(\boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{n}), \quad (\text{П1.8})$$

для производной функции E по времени в силу системы (П1.1), (П1.8) будет иметь место формула

$$\dot{E} = -(\boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{n}) \cdot \hat{\mathbf{D}}(\boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{n}).$$

Стационарные решения системы (П1.1), (П1.8) описывают покой ИСЗ в орбитальной системе координат и определяются уравнениями

$$\omega_0^2 (\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{I}}\mathbf{n}) = 3\omega_0^2 (\mathbf{e}_r \times \hat{\mathbf{I}}\mathbf{e}_r) - l(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_r) + m(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{n}).$$

При этом $\boldsymbol{\omega} = \omega_0 \mathbf{n}$. Соотношения (П1.5) задают решения выписанных уравнений в том и только в том случае, когда в системе координат $Ox_1x_2x_3$ тензор $\hat{\mathbf{I}}$ имеет диагональный вид. Иными словами, оси Ox_i являются главными центральными осями инерции спутника. На практике это условие может выполняться лишь приближенно, но зато всегда можно обеспечить выполнение соотношений $l \gg \omega_0^2 \text{tr} \hat{\mathbf{I}}$, $m \gg \omega_0^2 \text{tr} \hat{\mathbf{I}}$. В силу этих соотношений система (П1.1), (П1.8) допускает стационарное решение, близкое (П1.5). Используя E в качестве функции Ляпунова и теорему Барбашина – Красовского [38], можно доказать, что это решение асимптотически устойчиво.

Результаты проделанного анализа практически не изменятся, если момент (П1.7) заменить моментом

$$\mathbf{M}_c = -l\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_r) + m\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{n}) - \hat{\mathbf{D}}(\boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{e}_2), \quad (\text{П1.9})$$

где $\hat{\mathbf{J}}$ – симметричный положительно определенный тензор второго порядка, постоянный в системе координат $Ox_1x_2x_3$. Главная часть уравнения (П1.4), (П1.9), линеаризованного в окрестности стационарного решения (П1.5) (сначала проводим линеаризацию, затем в получившихся уравнениях полагаем $\omega_0 = 0$), после замены обозначений $\hat{\mathbf{J}}^{-1}\hat{\mathbf{I}} \rightarrow \hat{\mathbf{I}}$, $\hat{\mathbf{J}}^{-1}\hat{\mathbf{D}} \rightarrow \hat{\mathbf{D}}$ перейдет в главную часть линеаризованного уравнения (П1.4), (П1.7). В случае $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{I}}$, $l = m = \xi^2$, $\hat{\mathbf{D}} = 2\xi \text{diag}(1, 1, \sqrt{2})$ формула (П1.9) задает момент $\mathbf{M}_c$ в виде (1.13). Такая

модификация момента $\mathbf{M}_c$ позволяет максимизировать скорость затухания переходного процесса, вызванного ошибками выставки начальных условий ориентированного движения.

П.2. Проходимые особые точки особых поверхностей систем гиринов. Докажем достаточное условие проходимости особой точки, сформулированное в главе 5. Пусть $\mathbf{H}^* = \mathbf{f}(\varepsilon^*)$ – особая точка и составленная для нее система (5.2) допускает два решения, в одном из которых $\mu < 0$, а в другом $\mu > 0$. Эти решения обозначим соответственно $\chi = (F_1, \dots, F_n)^T$, $\mu = \mu_F$ и $\chi = (G_1, \dots, G_n)^T$, $\mu = \mu_G$. Имеют место соотношения

$$\frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n F_k F_l \sum_{i=1}^3 \lambda_i \frac{\partial^2 f_i(\varepsilon^*)}{\partial \varepsilon_k \partial \varepsilon_l} = \mu_F < 0, \quad (\text{П2.1})$$

$$\sum_{k=1}^n F_k^2 = 1, \quad \sum_{k=1}^n F_k \sum_{i=1}^3 \vartheta_i \frac{\partial f_i(\varepsilon^*)}{\partial \varepsilon_k} = \sum_{k=1}^n F_k \sum_{i=1}^3 \psi_i \frac{\partial f_i(\varepsilon^*)}{\partial \varepsilon_k} = 0,$$

$$\frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n G_k G_l \sum_{i=1}^3 \lambda_i \frac{\partial^2 f_i(\varepsilon^*)}{\partial \varepsilon_k \partial \varepsilon_l} = \mu_G > 0, \quad (\text{П2.2})$$

$$\sum_{k=1}^n G_k^2 = 1, \quad \sum_{k=1}^n G_k \sum_{i=1}^3 \vartheta_i \frac{\partial f_i(\varepsilon^*)}{\partial \varepsilon_k} = \sum_{k=1}^n G_k \sum_{i=1}^3 \psi_i \frac{\partial f_i(\varepsilon^*)}{\partial \varepsilon_k} = 0.$$

Пусть через особую точку $\mathbf{H}^* = (H_1^*, H_2^*, H_3^*)$ проходит кривая

$$H_i(t) = H_i^* + H_i' t + o(t) \quad (i = 1, 2, 3), \quad (\text{П2.3})$$

$$|H_1'| + |H_2'| + |H_3'| > 0.$$

Покажем, как ее можно реализовать в виде $H_i(t) = f_i[\varepsilon(t)]$, $\varepsilon(0) = \varepsilon^*$. Рассмотрим компоненты вектора $\Delta \mathbf{H} = \mathbf{H}(t) - \mathbf{H}^*$ в базисе $\mathbf{\Lambda}$, $\mathbf{\Theta}$, $\mathbf{\Psi}$ (см. п. 5.2)

$$\begin{aligned} h_\lambda = \mathbf{\Lambda} \cdot \Delta \mathbf{H} &= \sum_{i=1}^3 \lambda_i (H_i - H_i^*) = \Lambda t + o(t), & \Lambda &= \sum_{i=1}^3 \lambda_i H_i', \\ h_\vartheta = \mathbf{\Theta} \cdot \Delta \mathbf{H} &= \sum_{i=1}^3 \vartheta_i (H_i - H_i^*) = \Theta t + o(t), & \Theta &= \sum_{i=1}^3 \vartheta_i H_i', \\ h_\psi = \mathbf{\Psi} \cdot \Delta \mathbf{H} &= \sum_{i=1}^3 \psi_i (H_i - H_i^*) = \Psi t + o(t), & \Psi &= \sum_{i=1}^3 \psi_i H_i'. \end{aligned}$$

С другой стороны, используя разложение функций $f_i(\varepsilon)$ в ряд Тейлора в окрестности особой точки, запишем

$$\Delta H_i = H_i - H_i^* = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i(\varepsilon^*)}{\partial \varepsilon_k} \Delta \varepsilon_k + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^2 f_i(\varepsilon^*)}{\partial \varepsilon_k \partial \varepsilon_l} \Delta \varepsilon_k \Delta \varepsilon_l + O(\|\Delta \varepsilon\|^3),$$

где $\Delta \varepsilon = (\Delta \varepsilon_1, \dots, \Delta \varepsilon_n) = \varepsilon - \varepsilon^*$. Отсюда получаем

$$h_\lambda = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n \Delta \varepsilon_k \Delta \varepsilon_l \sum_{i=1}^3 \lambda_i \frac{\partial^2 f_i(\varepsilon^*)}{\partial \varepsilon_k \partial \varepsilon_l} + O(\|\Delta \varepsilon\|^3), \quad (\text{П2.4})$$

$$h_\vartheta = \sum_{k=1}^n \Delta \varepsilon_k \sum_{i=1}^3 \vartheta_i \frac{\partial f_i(\varepsilon^*)}{\partial \varepsilon_k} + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n \Delta \varepsilon_k \Delta \varepsilon_l \sum_{i=1}^3 \vartheta_i \frac{\partial^2 f_i(\varepsilon^*)}{\partial \varepsilon_k \partial \varepsilon_l} + O(\|\Delta \varepsilon\|^3),$$

$$h_\psi = \sum_{k=1}^n \Delta \varepsilon_k \sum_{i=1}^3 \psi_i \frac{\partial f_i(\varepsilon^*)}{\partial \varepsilon_k} + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n \Delta \varepsilon_k \Delta \varepsilon_l \sum_{i=1}^3 \psi_i \frac{\partial^2 f_i(\varepsilon^*)}{\partial \varepsilon_k \partial \varepsilon_l} + O(\|\Delta \varepsilon\|^3).$$

В первом выражении (П2.4) в силу условий (5.6) отсутствуют члены первой степени относительно $\Delta \varepsilon_k$.

Пусть для определенности $\Lambda > 0$. Главные члены кривой $\varepsilon(t)$ в окрестности точки $t = 0$ ищем в виде

$$\varepsilon_k(t) = \begin{cases} F_k \sqrt{\frac{\Lambda t}{\mu_F}} + C_k t & \text{при } t \leq 0, \\ G_k \sqrt{\frac{\Lambda t}{\mu_G}} + D_k t & \text{при } t \geq 0, \end{cases} \quad (\text{П2.5})$$

где C_k и D_k – не определенные пока коэффициенты. В силу (П2.1) и (П2.2) подкоренные выражения в (П2.5) положительны. Подставим формулы (П2.5) в первое выражение (П2.4). Получим.

$$h_\lambda = \frac{\Lambda t}{2\mu_F} \sum_{k,l=1}^n F_k F_l \sum_{i=1}^3 \lambda_i \frac{\partial^2 f_i(\varepsilon^*)}{\partial \varepsilon_k \partial \varepsilon_l} + o(|t|) = \Lambda t + o(|t|) \quad \text{при } t \leq 0,$$

$$h_\lambda = \frac{\Lambda t}{2\mu_G} \sum_{k,l=1}^n G_k G_l \sum_{i=1}^3 \lambda_i \frac{\partial^2 f_i(\varepsilon^*)}{\partial \varepsilon_k \partial \varepsilon_l} + o(t) = \Lambda t + o(t) \quad \text{при } t \geq 0,$$

Таким образом, функция $h_\lambda(t)$ имеет требуемый вид. Подстановка формул (П2.5) во второе выражение (П2.4) дает

$$h_{\vartheta} = \left\{ \sum_{k=1}^n C_k \sum_{i=1}^3 \vartheta_i \frac{\partial f_i(\varepsilon^*)}{\partial \varepsilon_k} + \frac{\Lambda}{2\mu_F} \sum_{k,l=1}^n F_k F_l \sum_{i=1}^3 \vartheta_i \frac{\partial^2 f_i(\varepsilon^*)}{\partial \varepsilon_k \partial \varepsilon_l} \right\} t + o(|t|) \text{ при } t \leq 0,$$

$$h_{\vartheta} = \left\{ \sum_{k=1}^n D_k \sum_{i=1}^3 \vartheta_i \frac{\partial f_i(\varepsilon^*)}{\partial \varepsilon_k} + \frac{\Lambda}{2\mu_G} \sum_{k,l=1}^n G_k G_l \sum_{i=1}^3 \vartheta_i \frac{\partial^2 f_i(\varepsilon^*)}{\partial \varepsilon_k \partial \varepsilon_l} \right\} t + o(t) \text{ при } t \geq 0.$$

Оба множителя при t здесь должны быть равны Θ . Это приводит к уравнениям относительно C_k и D_k :

$$\sum_{k=1}^n C_k \sum_{i=1}^3 \vartheta_i \frac{\partial f_i(\varepsilon^*)}{\partial \varepsilon_k} = \Theta - \frac{\Lambda}{2\mu_F} \sum_{k,l=1}^n F_k F_l \sum_{i=1}^3 \vartheta_i \frac{\partial^2 f_i(\varepsilon^*)}{\partial \varepsilon_k \partial \varepsilon_l}, \quad (\text{П2.6})$$

$$\sum_{k=1}^n D_k \sum_{i=1}^3 \vartheta_i \frac{\partial f_i(\varepsilon^*)}{\partial \varepsilon_k} = \Theta - \frac{\Lambda}{2\mu_G} \sum_{k,l=1}^n G_k G_l \sum_{i=1}^3 \vartheta_i \frac{\partial^2 f_i(\varepsilon^*)}{\partial \varepsilon_k \partial \varepsilon_l}. \quad (\text{П2.7})$$

Рассмотрев аналогичным образом h_{ψ} , получим еще два уравнения

$$\sum_{k=1}^n C_k \sum_{i=1}^3 \psi_i \frac{\partial f_i(\varepsilon^*)}{\partial \varepsilon_k} = \Psi - \frac{\Lambda}{2\mu_F} \sum_{k,l=1}^n F_k F_l \sum_{i=1}^3 \psi_i \frac{\partial^2 f_i(\varepsilon^*)}{\partial \varepsilon_k \partial \varepsilon_l}, \quad (\text{П2.8})$$

$$\sum_{k=1}^n D_k \sum_{i=1}^3 \psi_i \frac{\partial f_i(\varepsilon^*)}{\partial \varepsilon_k} = \Psi - \frac{\Lambda}{2\mu_G} \sum_{k,l=1}^n G_k G_l \sum_{i=1}^3 \psi_i \frac{\partial^2 f_i(\varepsilon^*)}{\partial \varepsilon_k \partial \varepsilon_l}. \quad (\text{П2.9})$$

Системы (П2.6), (П2.8) и (П2.7), (П2.9) разрешимы и определяют коэффициенты C_k и D_k соответственно, но не единственным образом. По этой причине построенная кривая $\varepsilon(t)$ не единственна. Ее недостаток – производные $\dot{\varepsilon}(t)$ не ограничены при $t \rightarrow 0$. Преодолеть этот недостаток можно взяв, например,

$$\varepsilon_k(t) = \begin{cases} F_k \sqrt{\frac{\Lambda |t| t}{\mu_F}} + C_k |t| t & \text{при } t \leq 0, \\ G_k \sqrt{\frac{\Lambda t^2}{\mu_G}} + D_k t^2 & \text{при } t \geq 0, \end{cases}$$

где коэффициенты C_k и D_k имеют указанный выше вид. Тогда вместо (П2.3) получим $H_i(t) = H_i^* + H_i' t |t| + o(t^2)$, что приводит к соотношению $\dot{\mathbf{H}}(0) = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сазонов В.В., Комаров М.М., Полежаев В.И. и др. Микроускорения на орбитальной станции "Мир" и оперативный анализ гравитационной чувствительности конвективных процессов тепломассопереноса // Космические исследования. 1999. Т. 37. №1. С. 86-101.
2. Земсков В.С., Раухман М.Р., Шалимов В.П. Гравитационная чувствительность растворов-расплавов при кристаллизации двухфазных сплавов InSb-InBi в космических условиях // Космические исследования. 2001. Т. 39. №4. С. 384-389.
3. Никитин С.А., Полежаев В.И., Сазонов В.В. О влиянии микроускорений на распределение примеси в расплаве полупроводника в космическом полете // Космические исследования. 2003. Т. 41. №5. С. 533-548.
4. Земсков В.С., Раухман М.Р., Шалимов В.П. и др. Влияние расположения ростовых установок на борту космического спутника на микрогравитационные условия проведения экспериментов (на примере БЗП InSb:Te на ИСЗ "Фотон-3") // Космические исследования. 2004. Т. 42. №2. С. 144-154.
5. Богуславский А.А., Сазонов В.В., Соколов С.М. и др. О влиянии микроускорений на распределение примеси в кристаллах InSb:Te, выращенные в орбитальном полете методом бестигельной зонной плавки // Космические исследования. 2004. Т. 42. №2. С. 155-161.
6. Сазонов В.В., Чебуков С.Ю., Абрашкин В.И. и др. Анализ низкочастотных микроускорений на борту ИСЗ "Фотон-11" // Космические исследования. 2001. Т. 39. №4. С. 419-435.
7. Абрашкин В.И., Балакин В.Л., Белоконов И.В. и др. Неуправляемое вращательное движение спутника *Фотон-12* и квазистатические микроускорения на его борту // Космические исследования. 2003. Т. 41. №1. С. 45-56.
8. Абрашкин В.И., Волков М.В., Егоров А.В. и др. Анализ низкочастотной составляющей в измерениях угловой скорости и микроускорения, выполненных на спутнике *Фотон-12* // Космические исследования. 2003. Т. 41. №6.

С. 632-651.

9. Сазонов В.В., Чебуков С.Ю., Абрашкин В.И. и др. Низкочастотные микроускорения на борту ИСЗ *Фотон-11* // Космические исследования. 2004. Т. 42. №2. С. 185-200.
10. Абрашкин В.И., Богоявленский Н.Л., Воронов К.Е. и др. Неуправляемое движение спутника *Фотон М-2* и квазистатические микроускорения на его борту // Космические исследования. 2007. Т. 45. № 5. С. 450-470.
11. Бойзелинк Т., Ван Бавинхов К., Сазонов В.В. и др. Анализ низкочастотной составляющей в измерениях микроускорения, выполненных на спутнике *Фотон М-2* // Космические исследования. 2008. Т. 46. № 5. С. 463-483.
12. Бойзелинк Т., Ван Бавинхов К., Абрашкин В.И. и др. Определение неуправляемого движения спутника *Фотон М-3* по данным бортовых измерений магнитного поля Земли // Космические исследования. 2010. Т. 48. № 3. С. 246-259.
13. Сарычев В.А., Беляев М.Ю., Сазонов В.В. и др. Определение микроускорений на орбитальных комплексах *Салют-6* и *Салют-7* // Космические исследования. 1986. Т. 24. С. 337-344.
14. Брюханов Н.А., Цветков В.В., Беляев М.Ю. и др. Экспериментальное исследование режимов неуправляемого вращательного движения ИСЗ "Прогресс" // Космические исследования. 2006. Т. 44. №1. С. 52-61.
15. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965.
16. Сарычев В.А. Вопросы ориентации искусственных спутников // Итоги науки и техники. Исследование космического пространства. Т. 11. М.: ВИНТИ, 1978.
17. Бажинков И.К., Гаврилов В.П., Ястребов В.Д. и др. Навигационное обеспечение полета орбитального комплекса «Салют-6» - «Союз» - «Прогресс». М., Наука, 1985.
18. Латышев Л.А., Штырлин А.Ф., Непейвода О.М. и др. Использование электроракетных двигателей для реализации режима движения ИСЗ с малым

- уровнем микроускорений // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, №16, 2007.
19. *Markley F.L.* Attitude determination using vector observation and singular value decomposition // *The Journal of the Astronautical Sciences*. 1988. V. 36. No.3. P. 245-258.
 20. *Игнатов А.И., Сазонов В.В.* Реализация режимов вращательного движения ИСЗ с малым уровнем остаточных микроускорений электромеханическими исполнительными органами // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, №91, 2008.
 21. *Сазонов В.В.* Гравитационная ориентация искусственных спутников с гироскопами // *Космические исследования*. 1988. Т. 26. №2. С.315-317.
 22. *Игнатов А.И., Сазонов В.В.* Оценка остаточных микроускорений на борту ИСЗ в режиме одноосной солнечной ориентации // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2009, №65.
 23. *Игнатов А.И., Сазонов В.В.* Режимы вращательного движения ИСЗ с малым уровнем остаточных микроускорений // *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского*, 2011, №4, часть 5. С. 2195-2197.
 24. *Меес Ж.* *Астрономические формулы для калькуляторов* М., Мир, 1988.
 25. *Гантмахер Ф.Р.* *Теория матриц*. М., Наука, 1988.
 26. *Раушенбах Б.В., Токарь Е.Н.* *Управление ориентацией космических аппаратов*. М., Наука, 1974.
 27. *Сорокин А.В., Башкеев Н.И., Яременко В.В. и др.* Гиросиловая система ориентации космического аппарата «Ресурс-ДК» // *Труды IX Санкт-Петербургской Международной конференции по интегрированным навигационным системам*. С.-Петербург, ЦНИИ «Электроприбор», 2002, С. 268-274.
 28. *Игнатов А.И., Давыдов А.А., Сазонов В.В.* Анализ динамических возможностей систем управления малым космическим аппаратом, построенных на базе двигателей-маховиков // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2005, №47.

29. *Markley F.L., Reynolds R.G., Liu F.X.* Maximum torque and momentum envelopes for reaction-wheel arrays // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2010. V. 33. No.5. P. 1606-1614.
30. *Токарь Е.Н.* Проблемы управления гиросиловыми стабилизаторами // *Космические исследования*. 1978. Т. XVI. Вып.2. С. 179-187.
31. *Токарь Е.Н., Платонов В.Н.* Исследование особых поверхностей систем безупорных гиродинов // *Космические исследования*. 1978. Т. XVI. Вып.5. С. 675-685.
32. *Игнатов А.И., Сазонов В.В.* Построение и анализ особых поверхностей систем безупорных гиродинов методом продолжения по параметру // *Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН*, 2007, №27.
33. *Игнатов А.И., Сазонов В.В.* Исследование особых поверхностей систем безупорных гиродинов методом продолжения по параметру // *Космические исследования*. 2009. Т. 47. №4. С. 355-362.
34. *Балабан И.Ю., Комаров М.М., Сазонов В.В.* Решение систем нелинейных уравнений методом продолжения по параметру // *Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН*, 1997, №3.
35. *Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б.* Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация. М., Эдиториал УРСС, 1999.
36. *Токарь Е.Н., Легостаев В.П., Платонов В.Н. и др.* Кратные гиросиловые системы // *Космические исследования*. 1981. Т. XIX. Вып.6. С. 813-822.
37. *Сомов Е.И., Бутырин С.А., Сорокин А.В. и др.* Управление силовыми гиросистемами космических аппаратов // *Труды X Санкт-Петербургской Международной конференции по интегрированным навигационным системам*. С.-Петербург, ЦНИИ «Электроприбор», 2003, С. 278-294.
38. *Барбашин Е.А.* Функции Ляпунова. М., Наука, 1970.

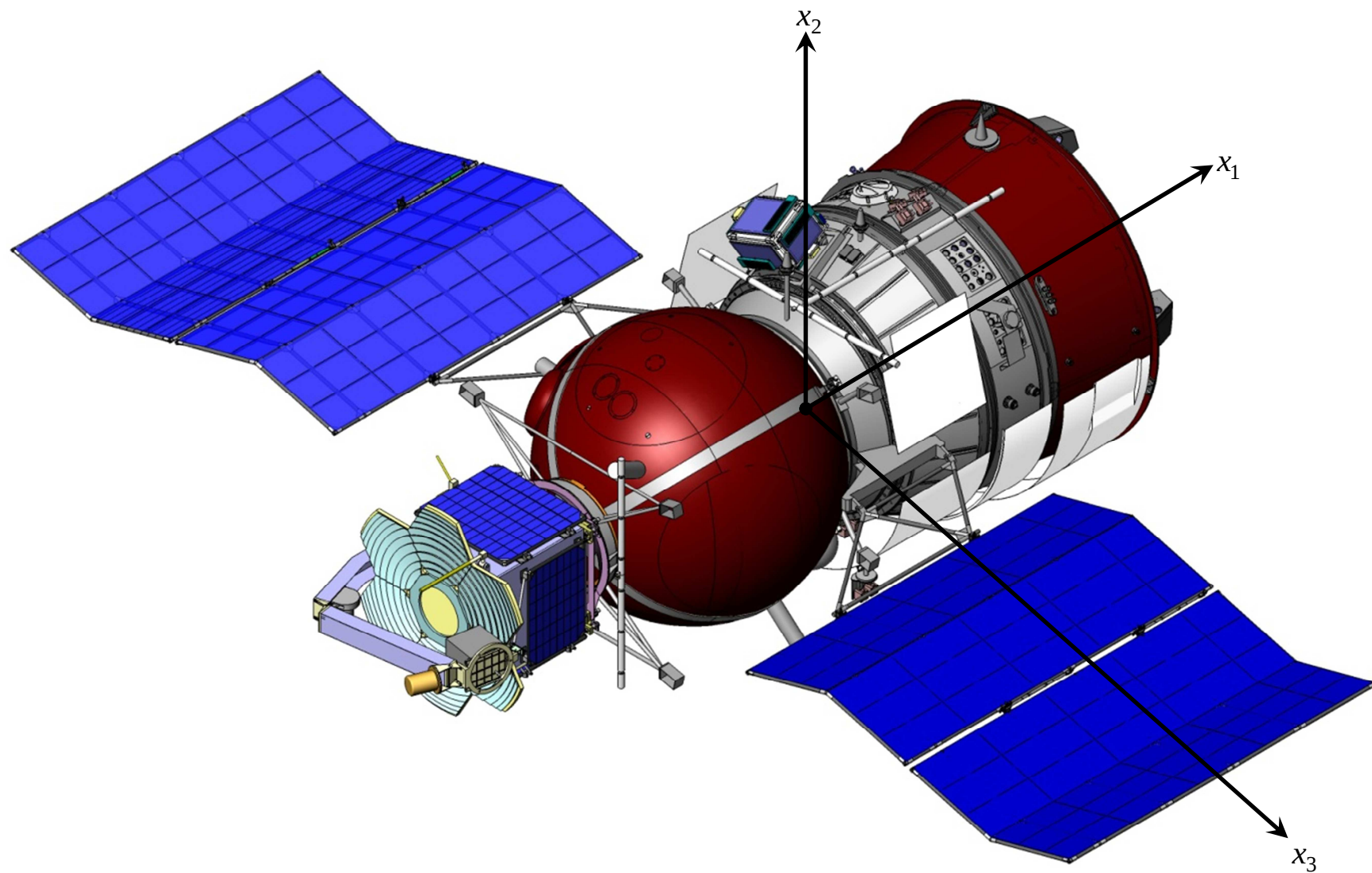


Рис. В.1 Общий вид искусственного спутника Земли.

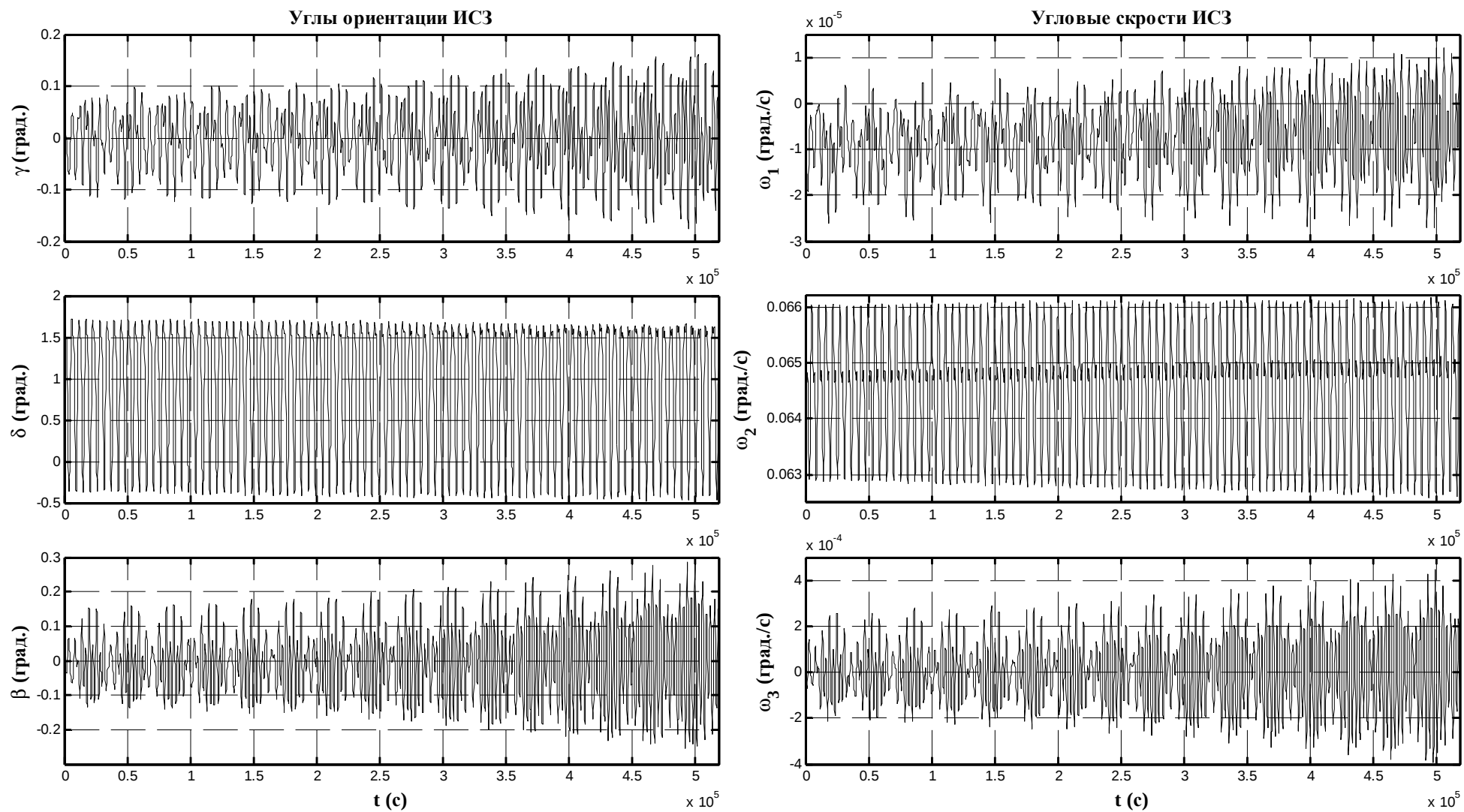


Рис. 1.1 Углы ориентации ИСЗ и его угловые скорости (режим пассивной гравитационной ориентации).

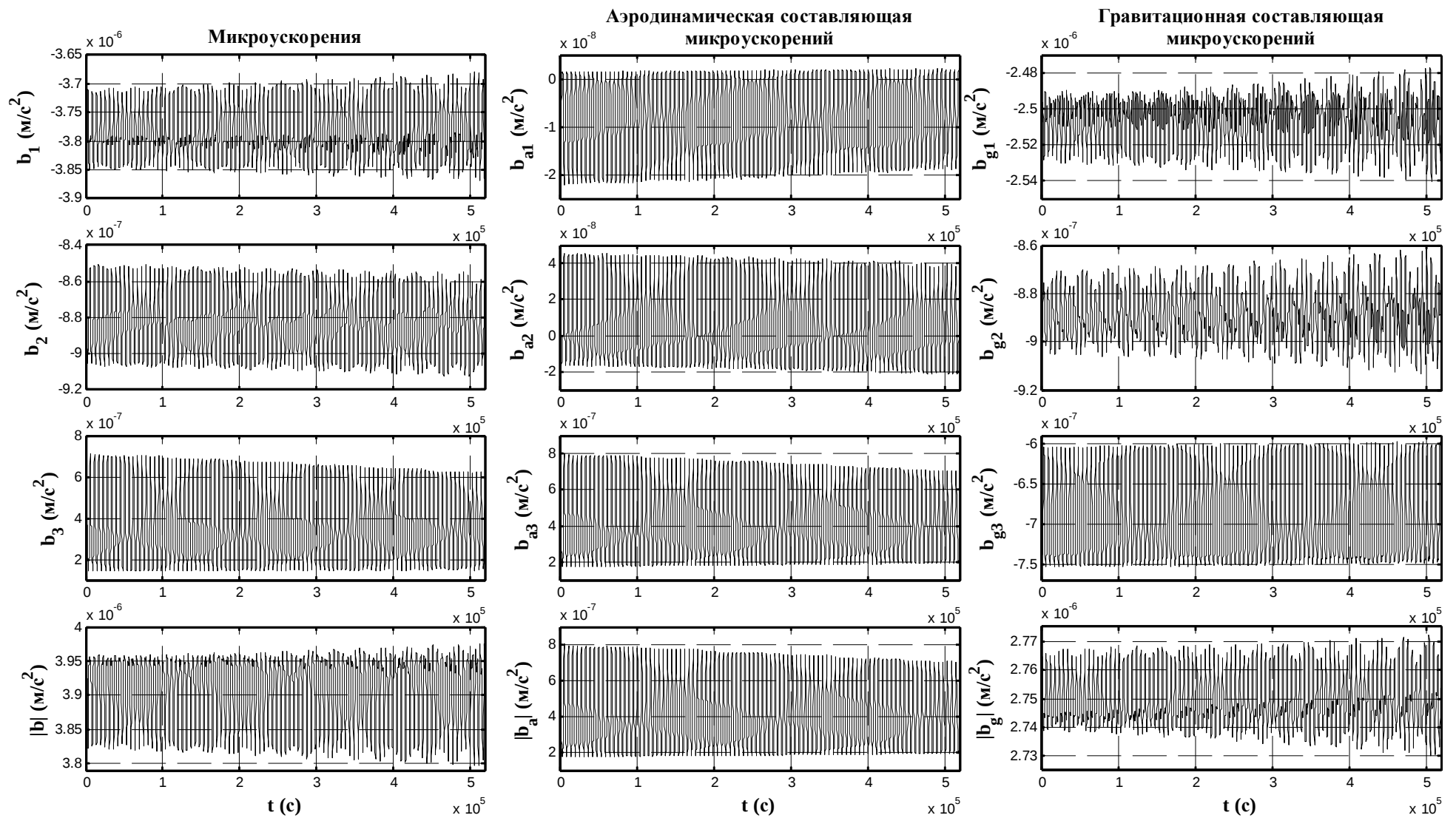


Рис. 1.2 Микроускорения, его аэродинамическая и гравитационная составляющие (режим пассивной гравитационной ориентации).

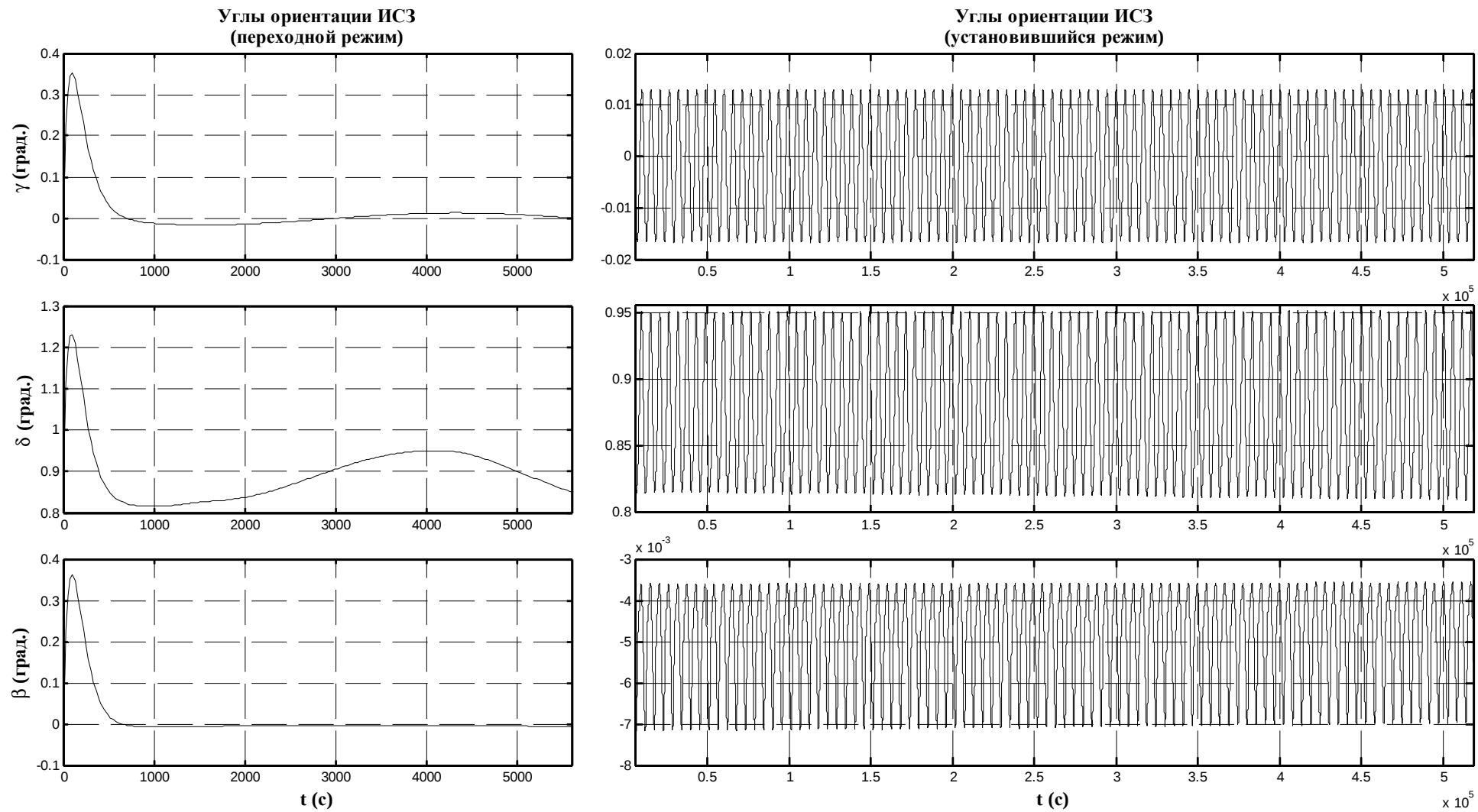


Рис. 1.3 Углы ориентации ИСЗ (режим орбитальной ориентации).

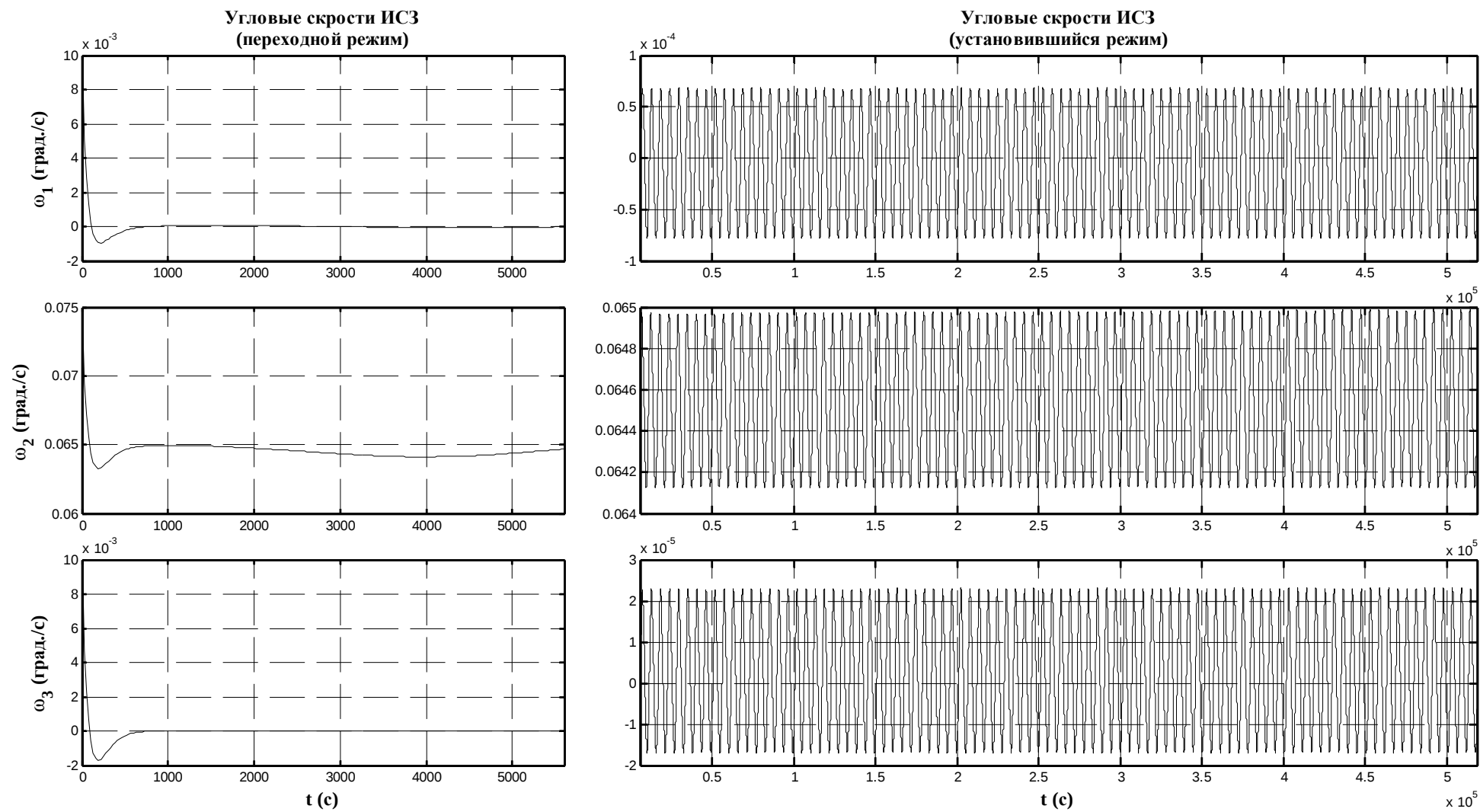


Рис. 1.4 Угловая скорость ИСЗ (режим орбитальной ориентации).

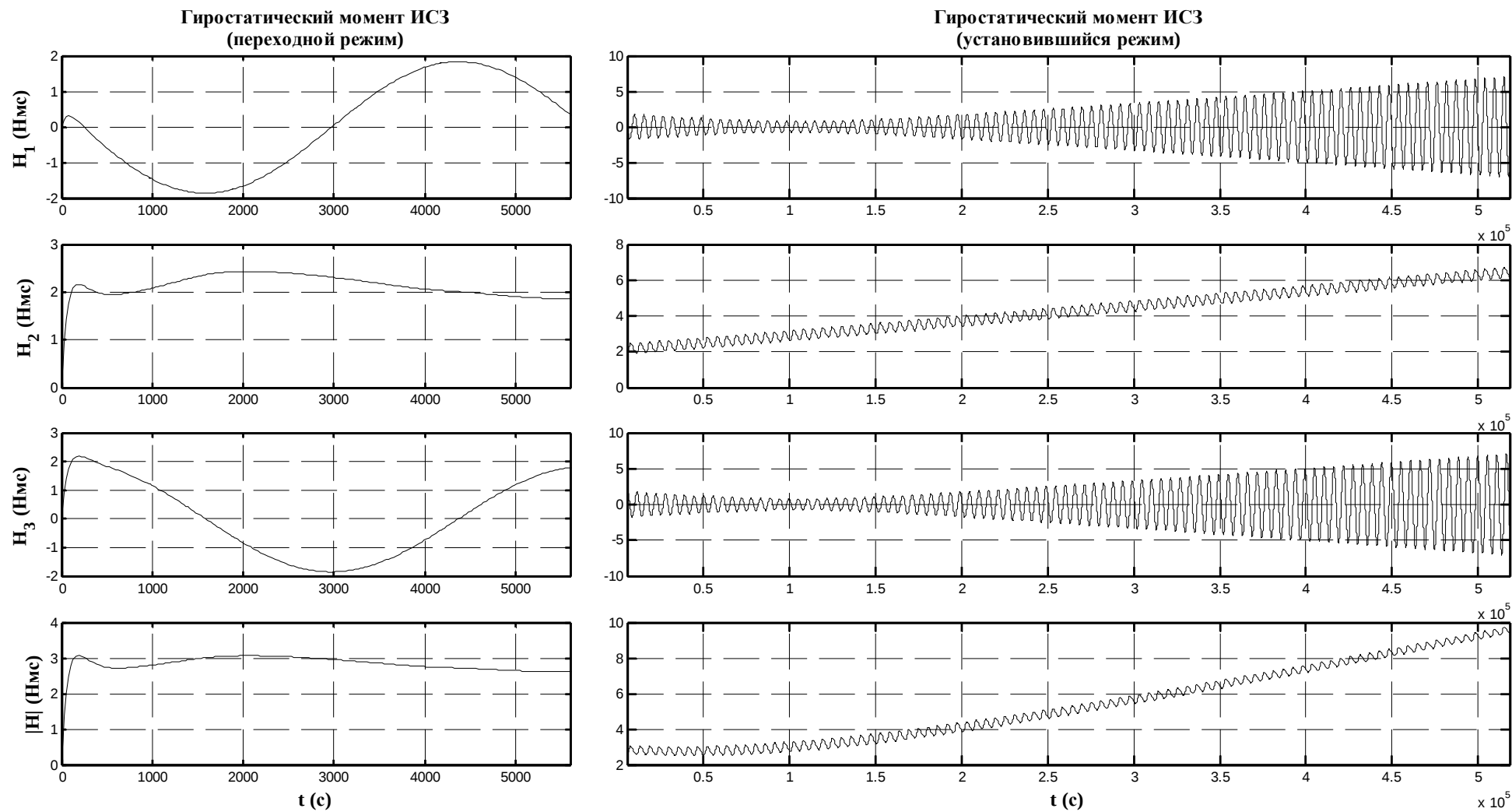


Рис. 1.5 Гиросtatический момент ИСЗ (режим орбитальной ориентации).

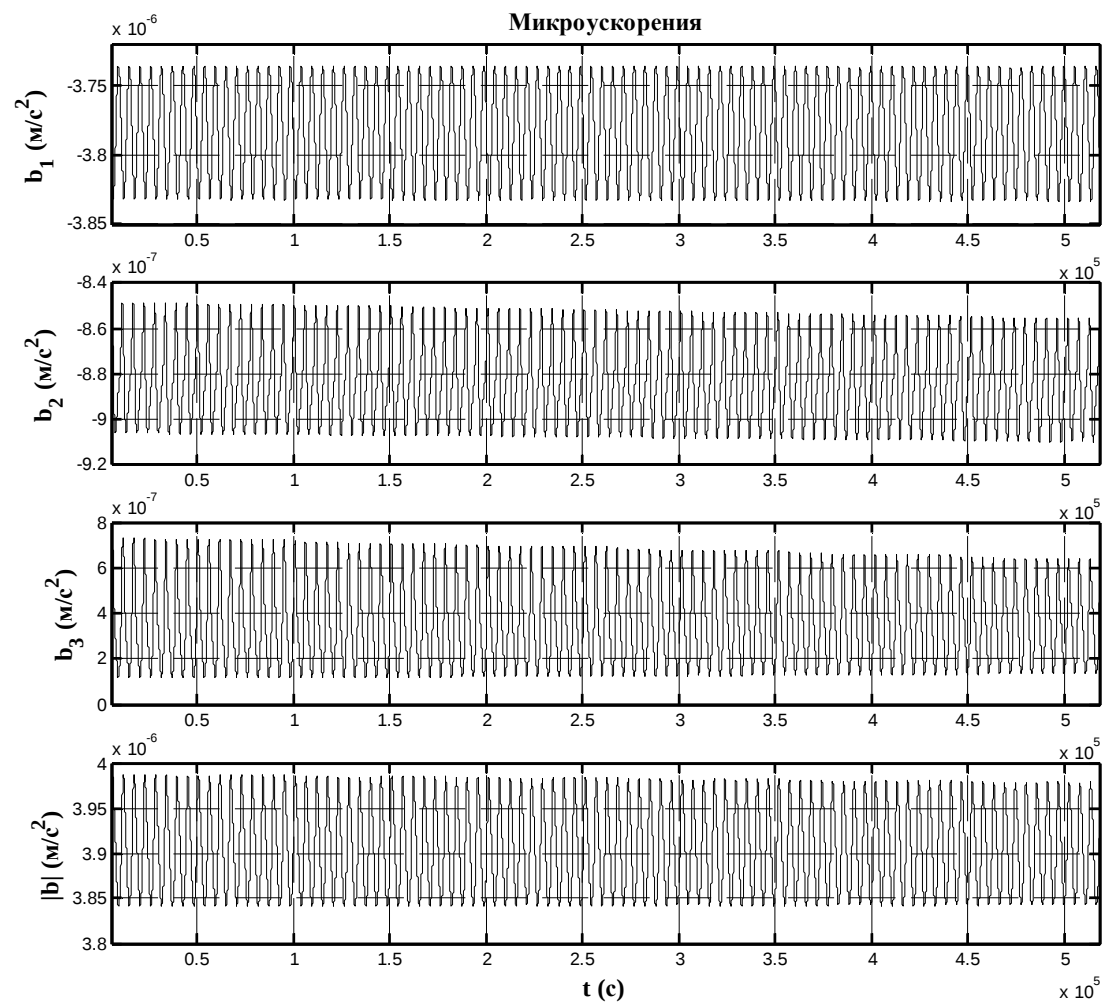
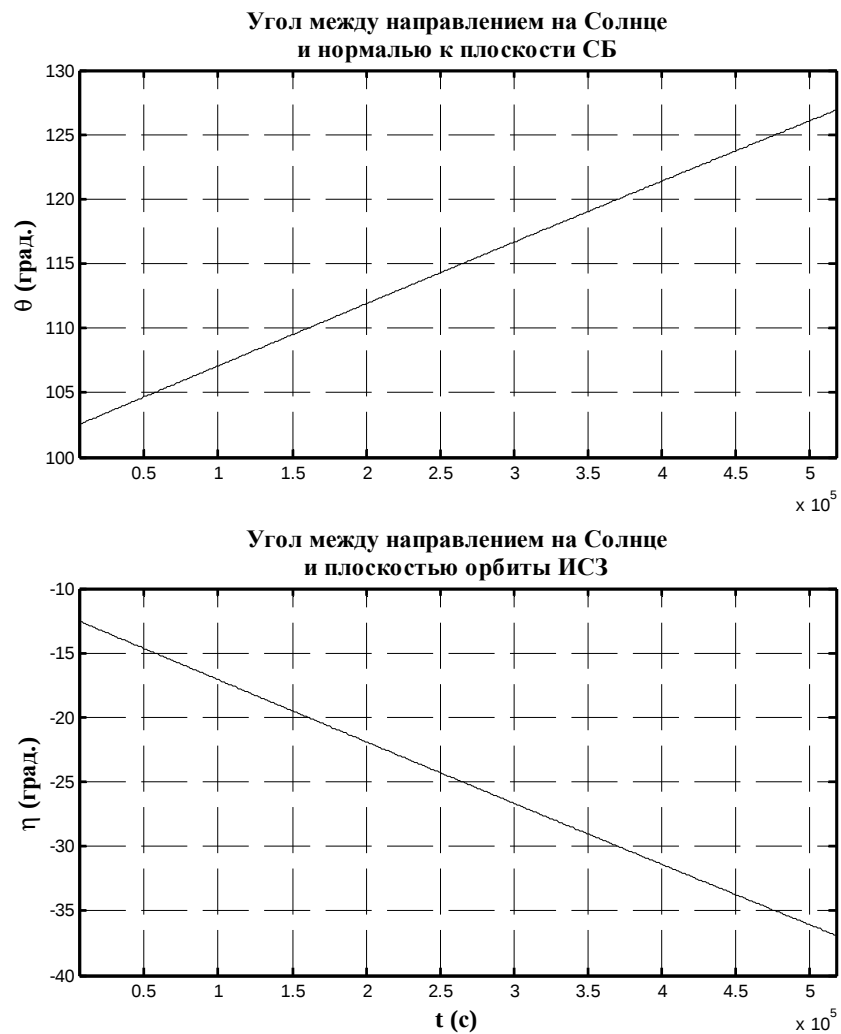


Рис. 1.6 Углы ориентации ИСЗ относительно Солнца и микроускорения (режим орбитальной ориентации).

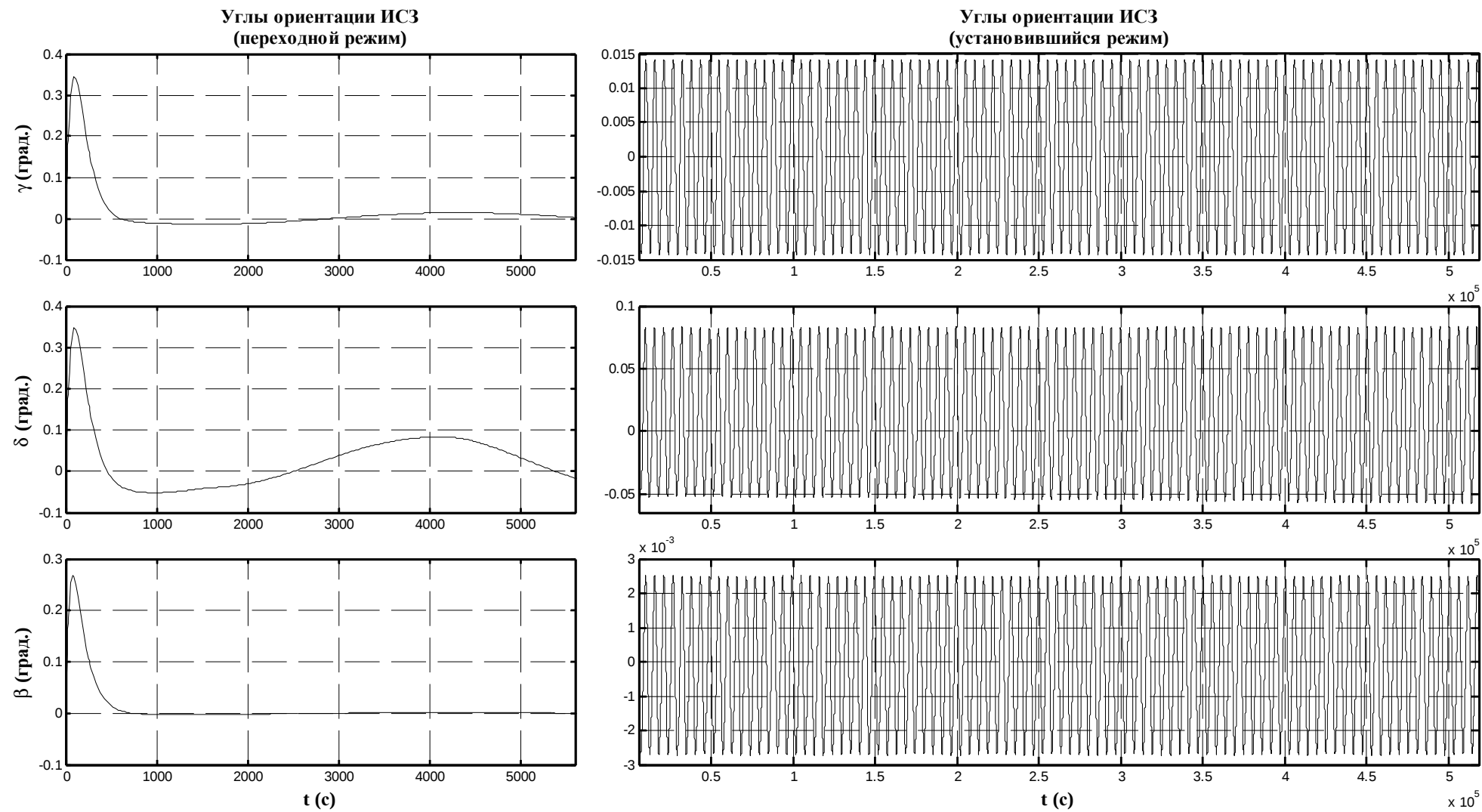


Рис. 1.7 Углы ориентации ИСЗ (режим точной орбитальной ориентации).

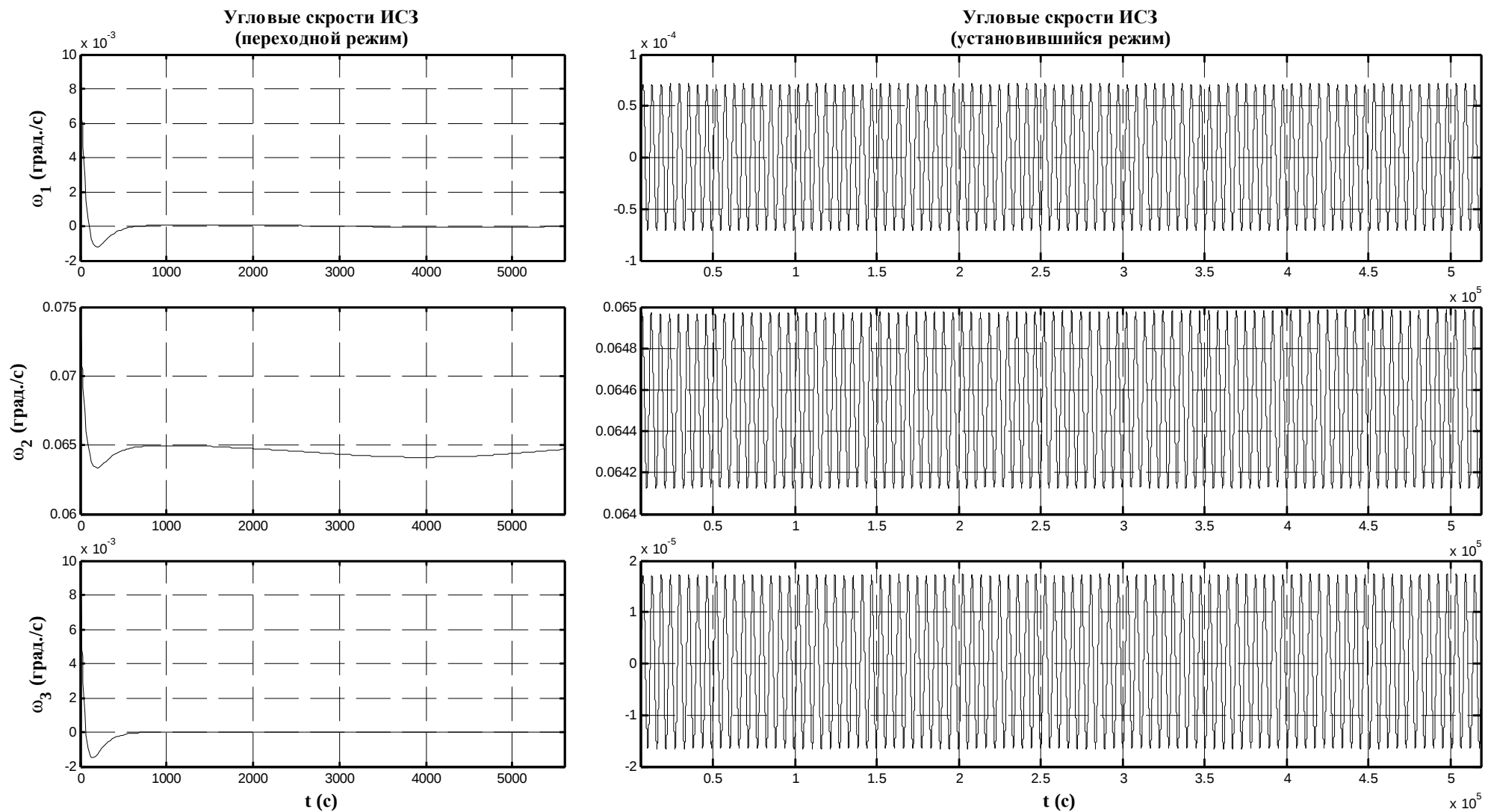


Рис. 1.8 Угловая скорость ИСЗ (режим точной орбитальной ориентации).

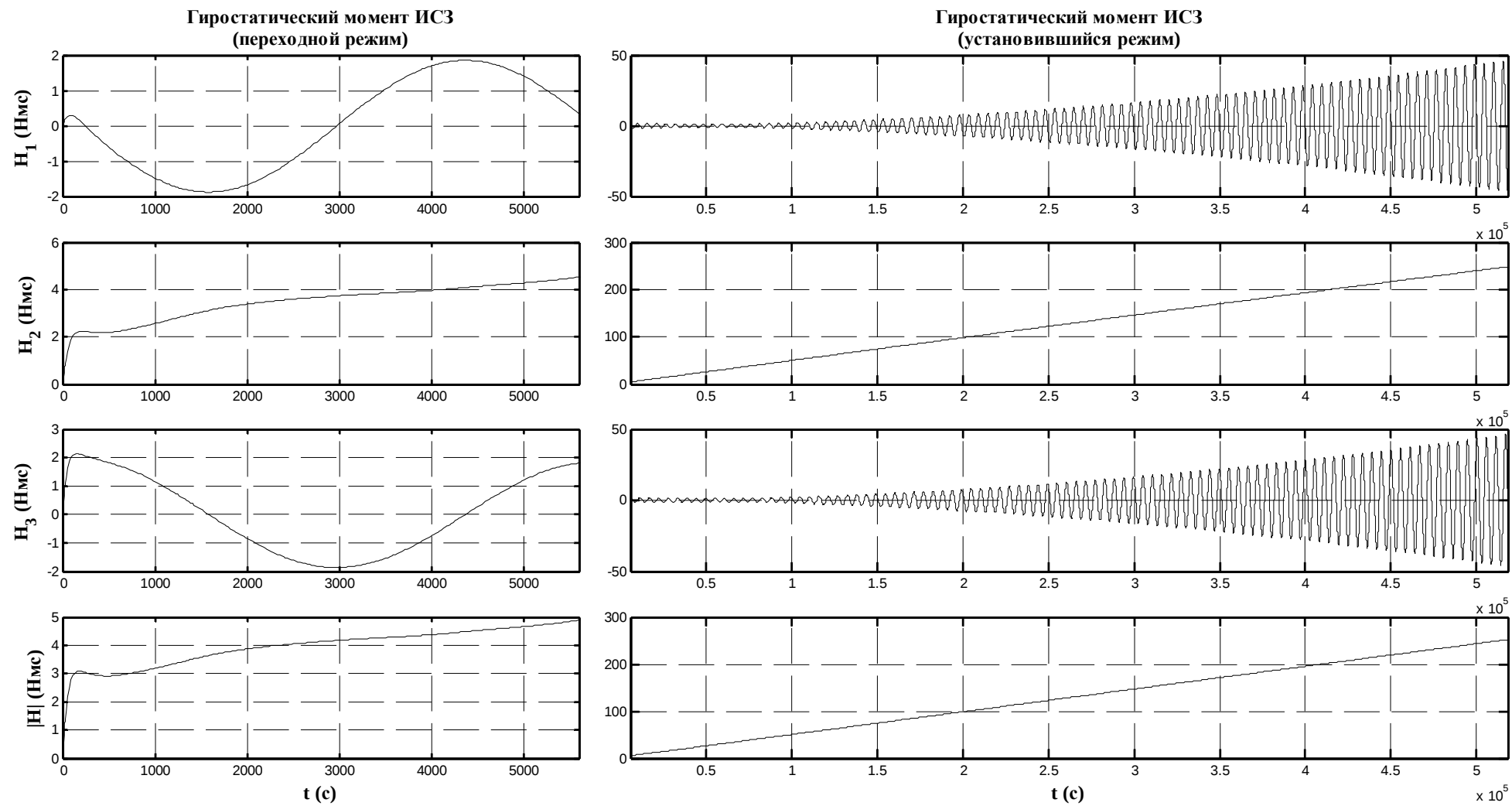


Рис. 1.9 Гиросtatический момент ИСЗ (режим точной орбитальной ориентации).

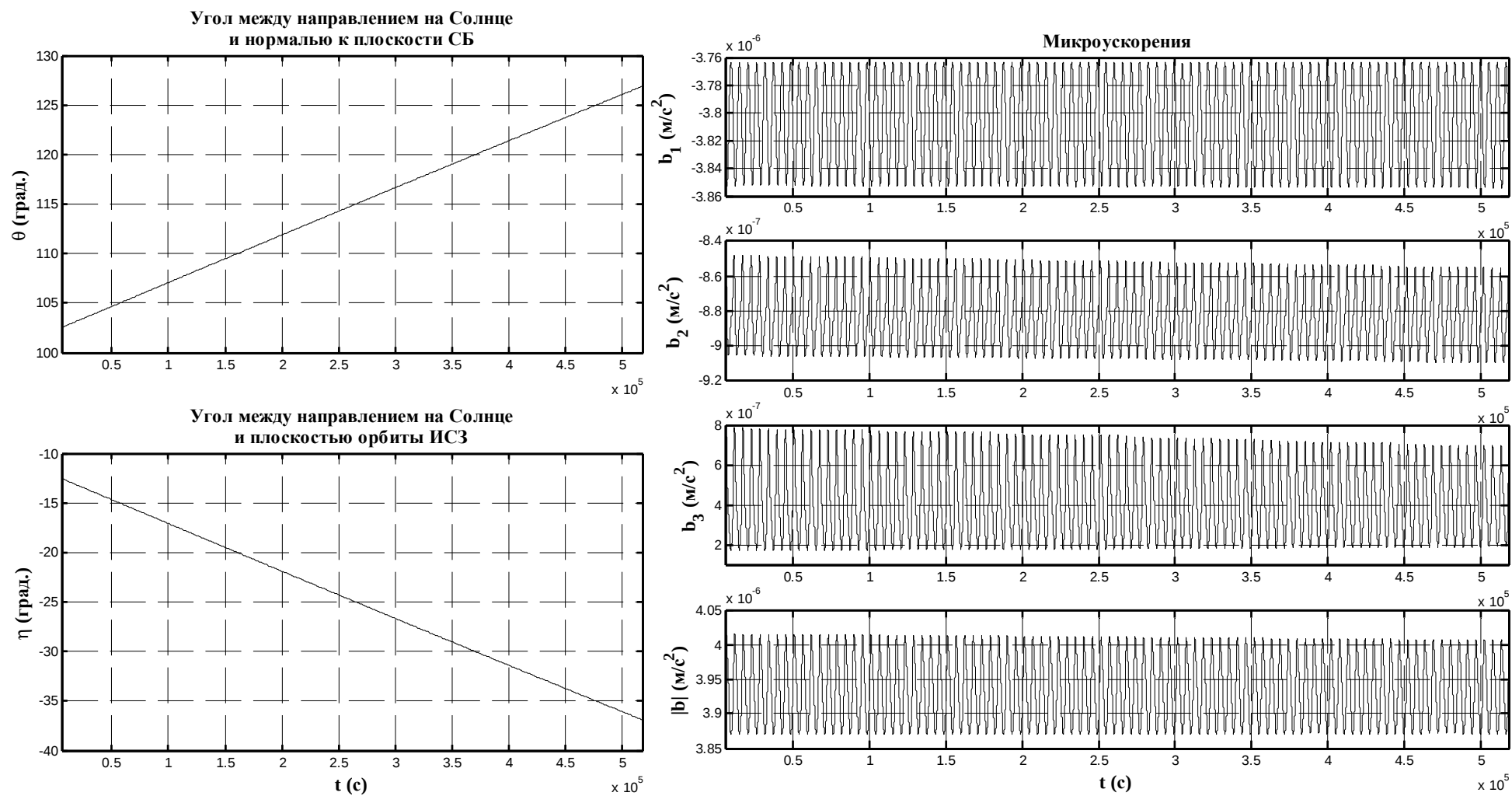


Рис. 1.10 Углы ориентации ИСЗ относительно Солнца и микроускорения
(режим точной орбитальной ориентации)

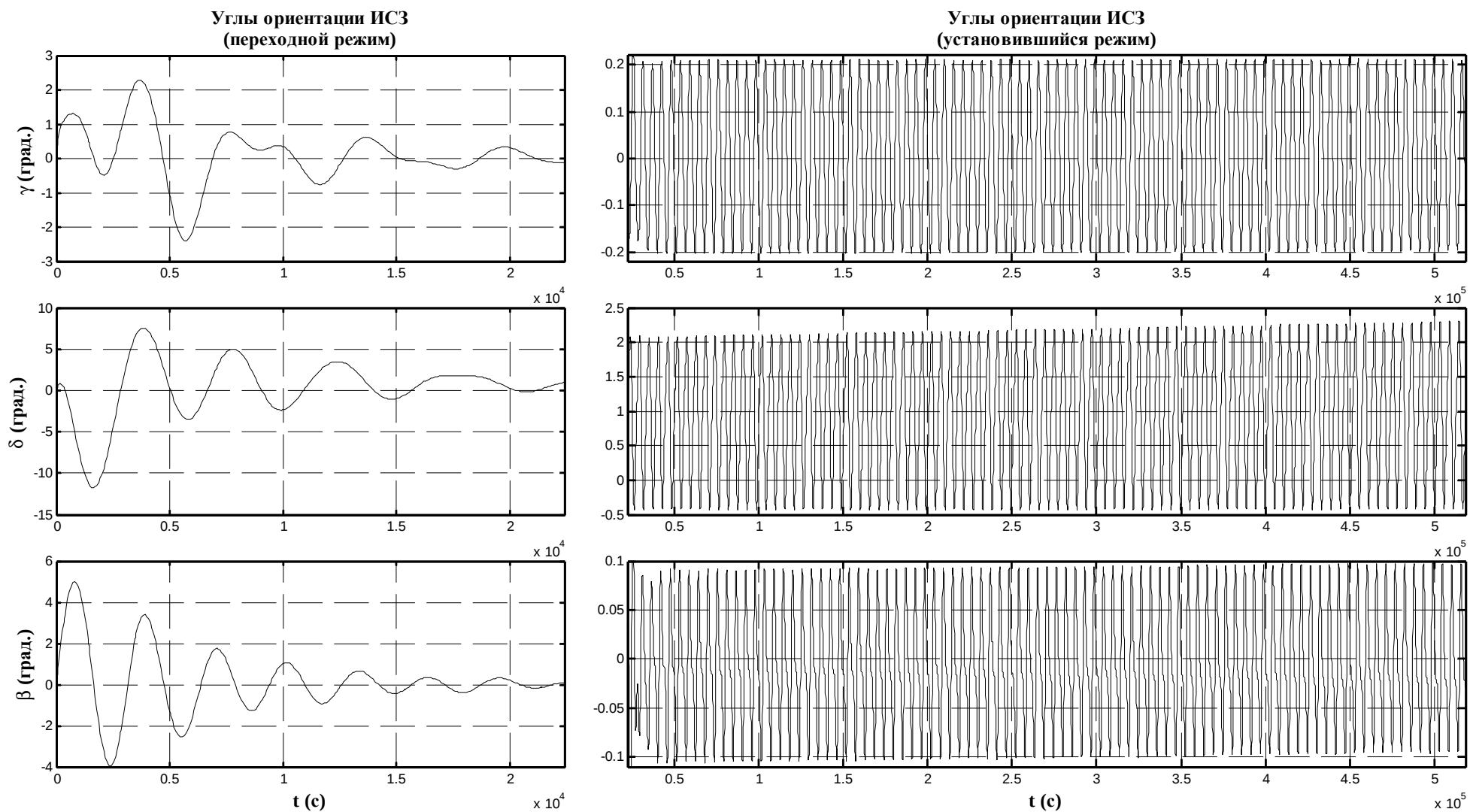


Рис. 1.11 Углы ориентации ИСЗ (режим полупассивной гравитационной ориентации).

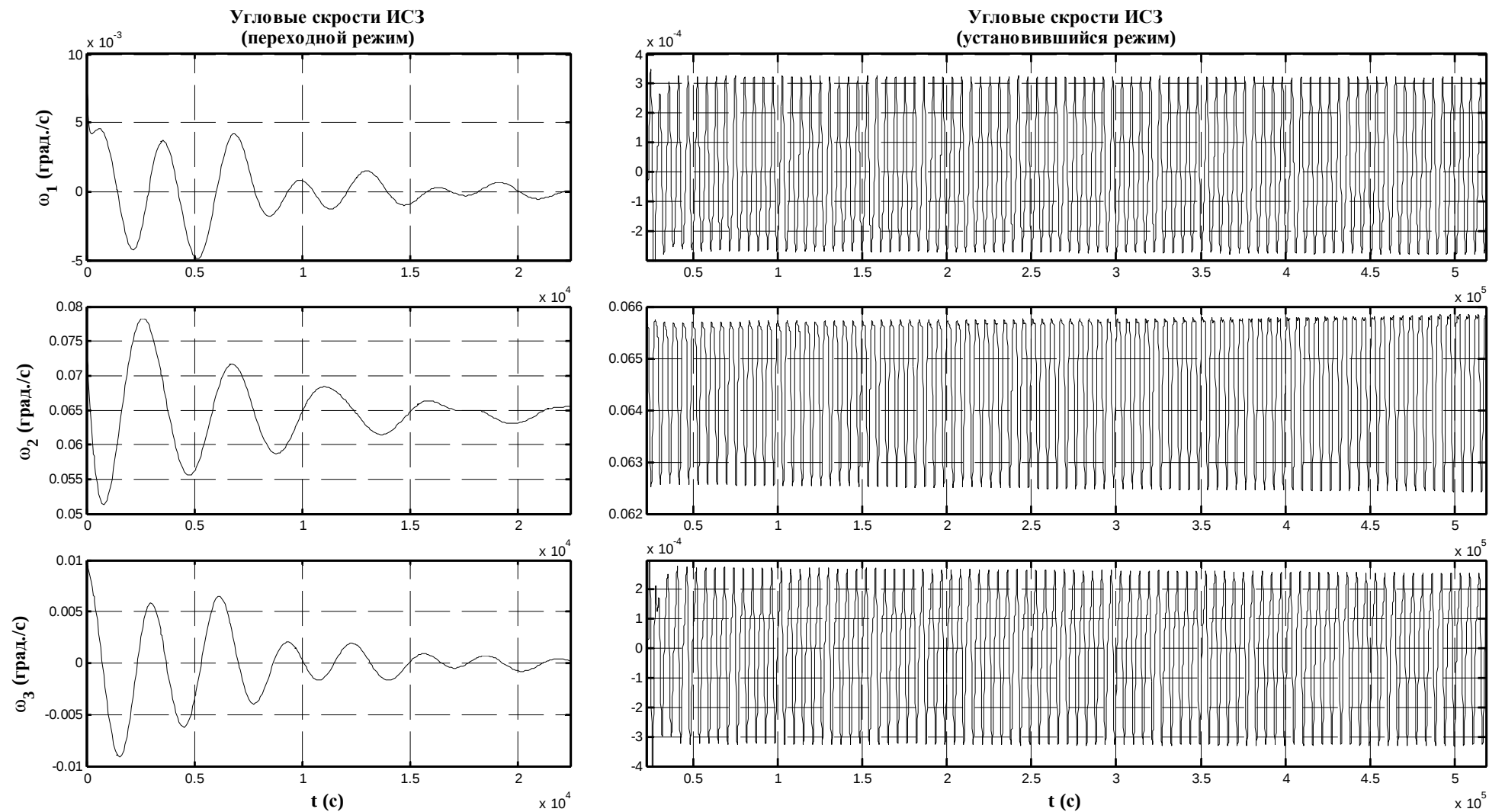


Рис. 1.12 Угловая скорость ИСЗ (режим полупассивной гравитационной ориентации).

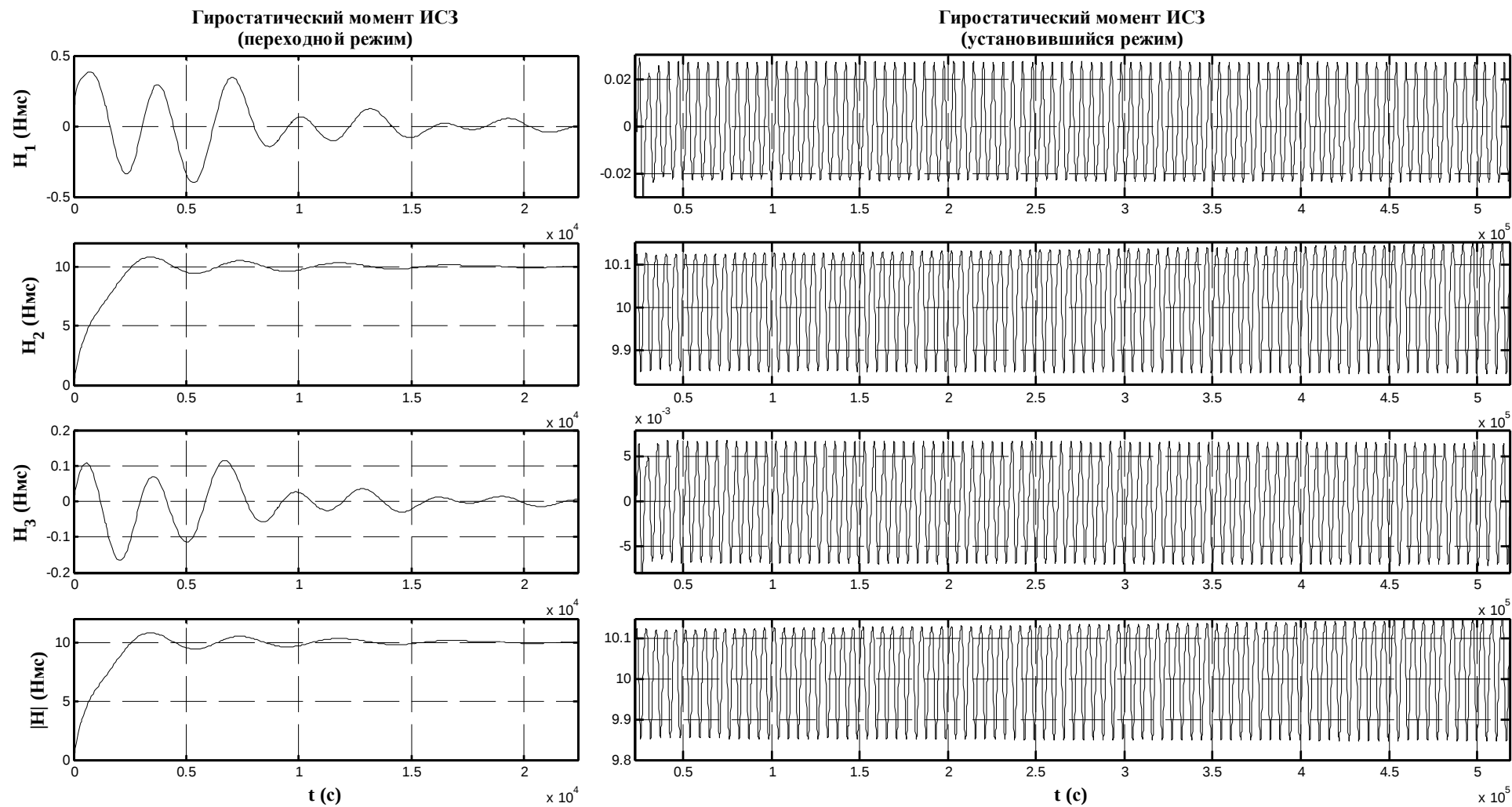


Рис. 1.13 Гиросtatический момент ИСЗ (режим полупассивной гравитационной ориентации).

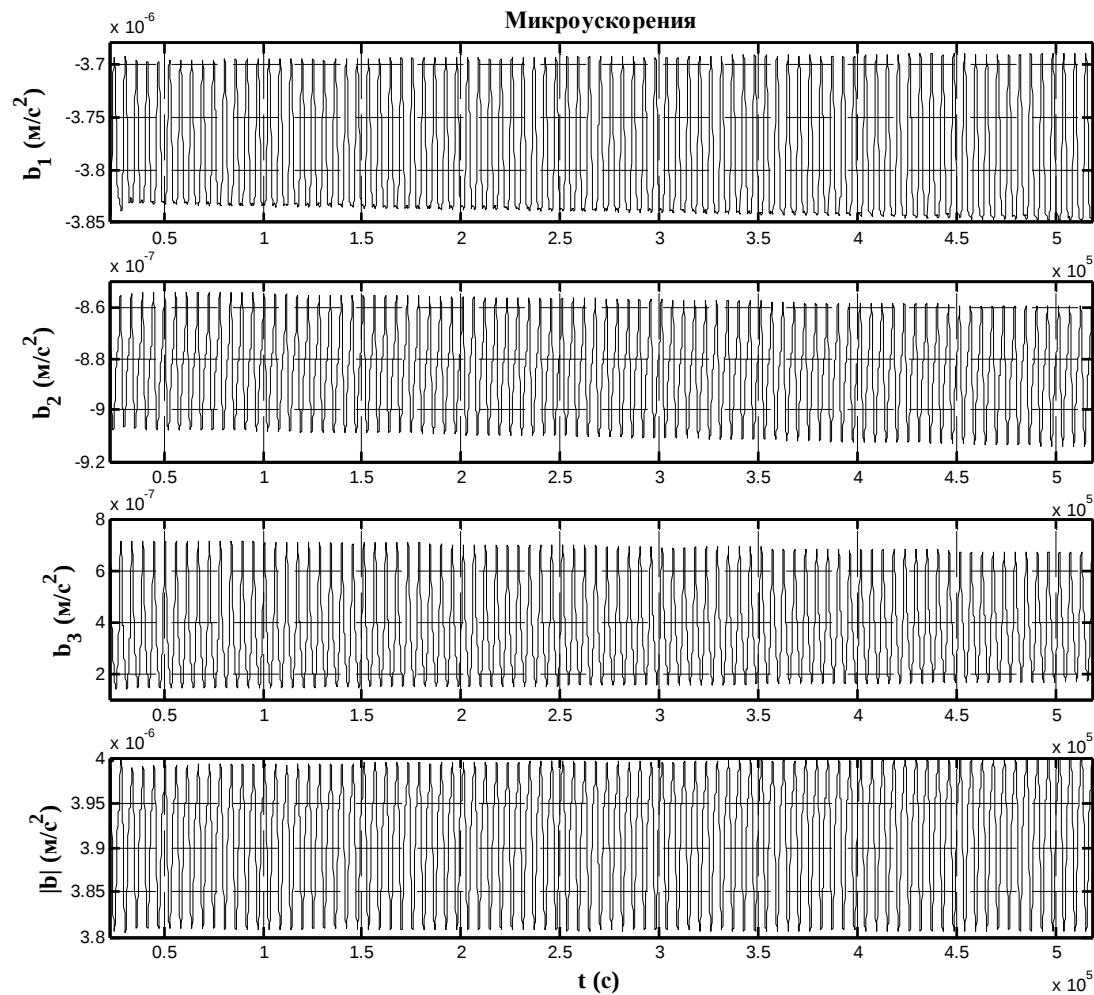
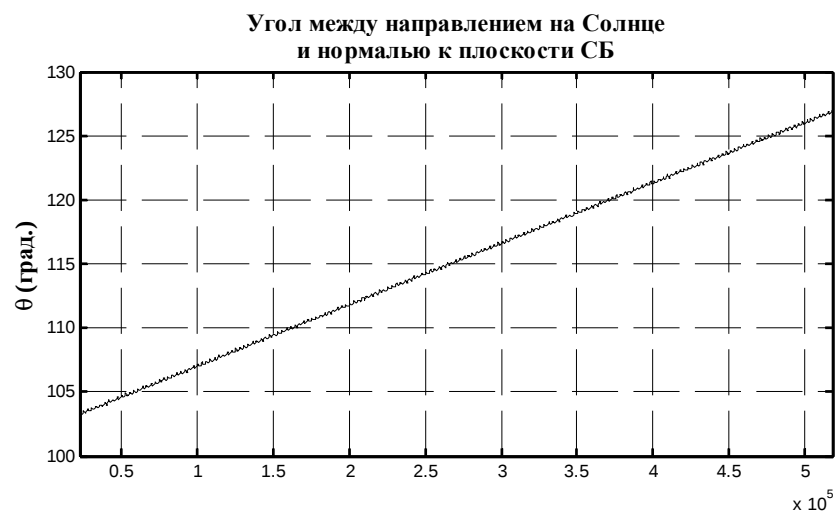


Рис. 1.14 Углы ориентации ИСЗ относительно Солнца и микроускорения
(режим полупассивной гравитационной ориентации).

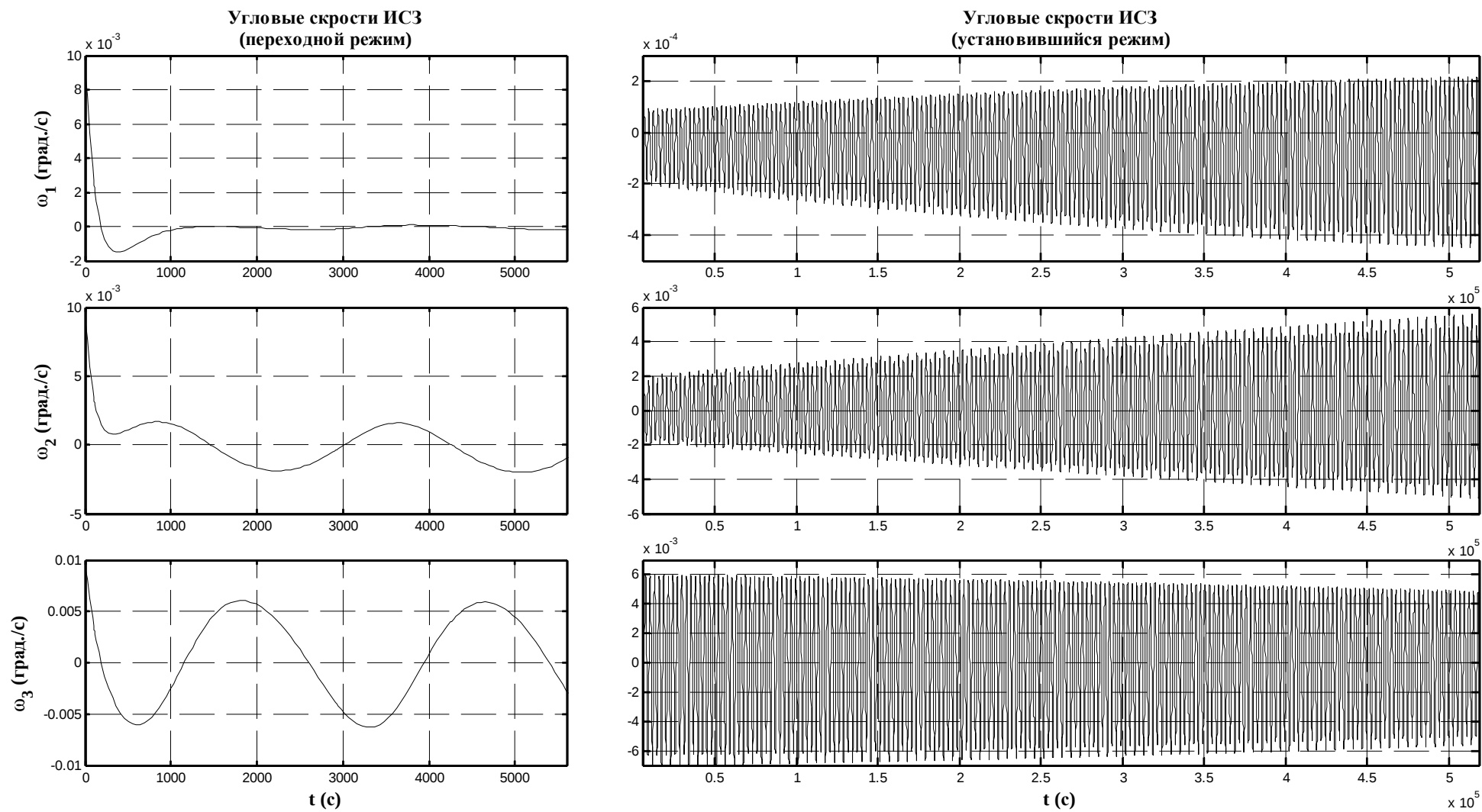


Рис. 2.1 Угловая скорость ИСЗ (режим одноосной солнечной ориентации).

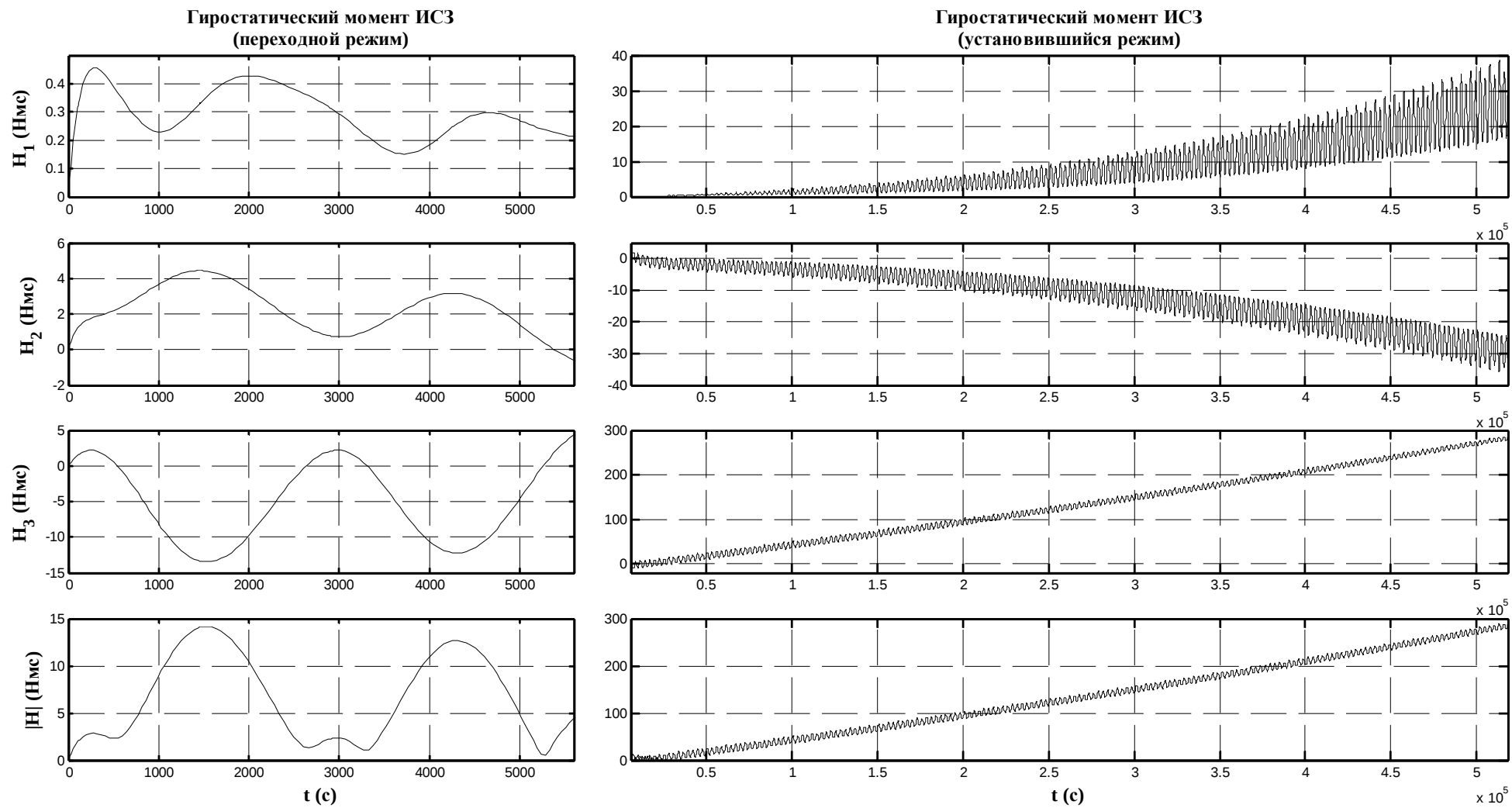


Рис. 2.2 Гиростатический момент ИСЗ (режим одноосной солнечной ориентации).

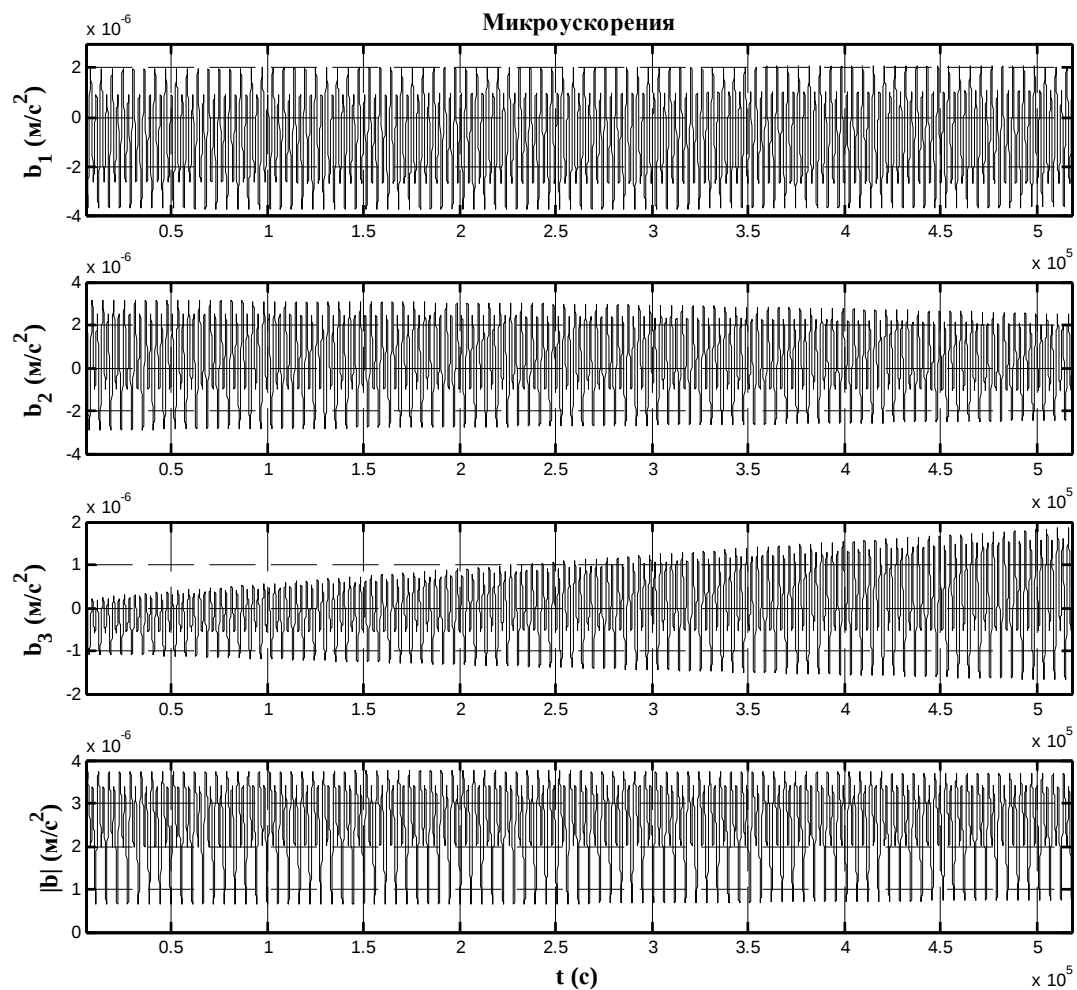
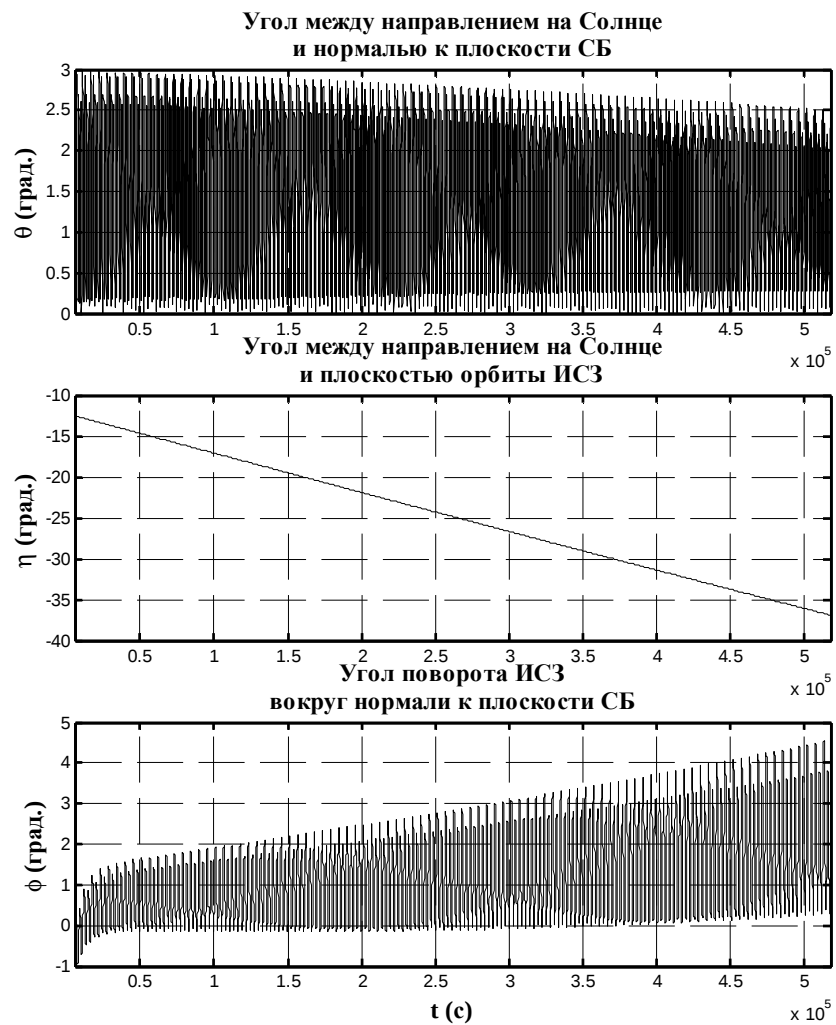


Рис. 2.3 Углы ориентации ИСЗ относительно Солнца и микроускорения (режим одноосной солнечной ориентации).

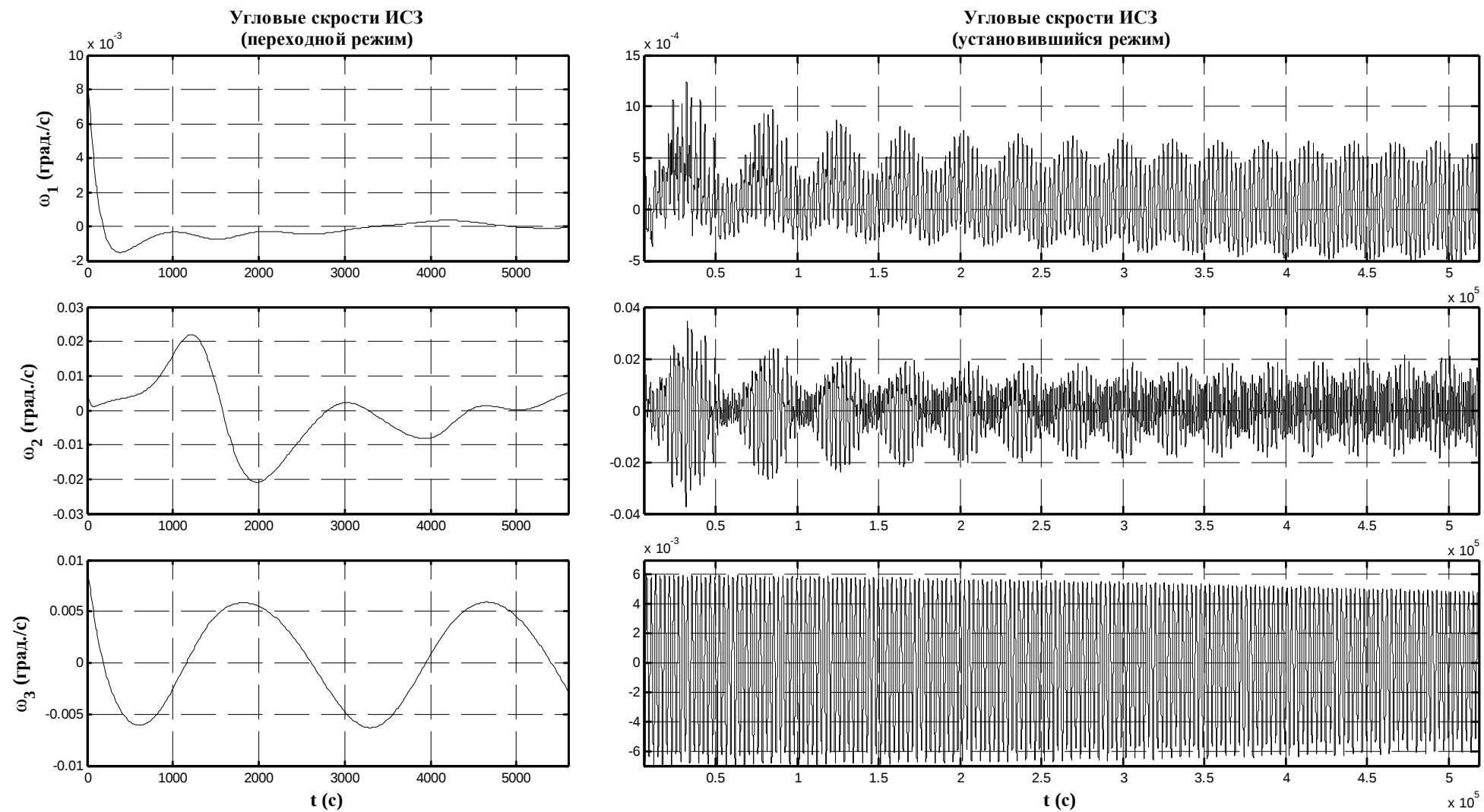


Рис. 2.4 Угловая скорость ИСЗ (режим ограничения роста кинетического момента).

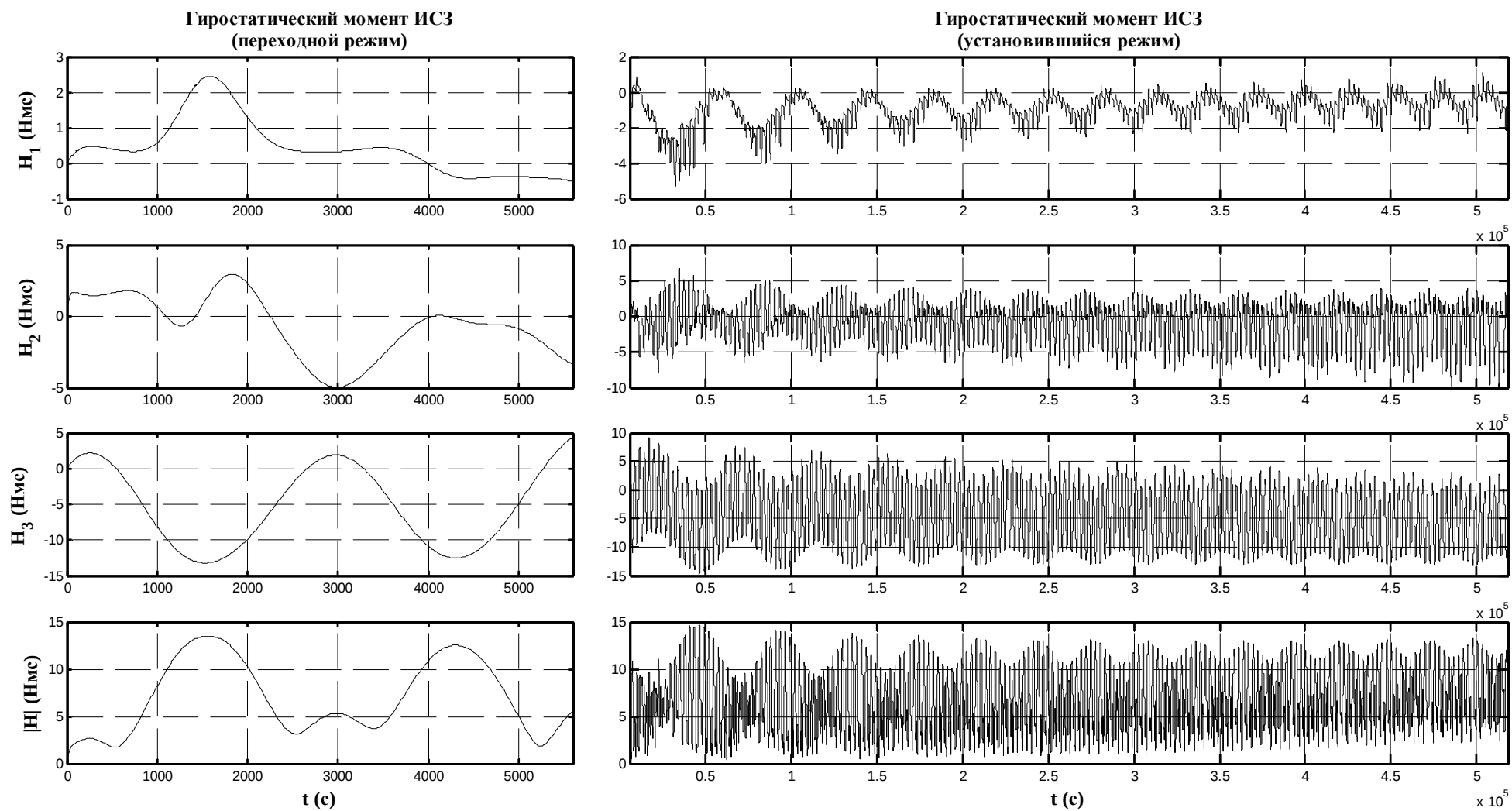


Рис. 2.5 Гиростатический момент ИСЗ (режим ограничения роста кинетического момента).

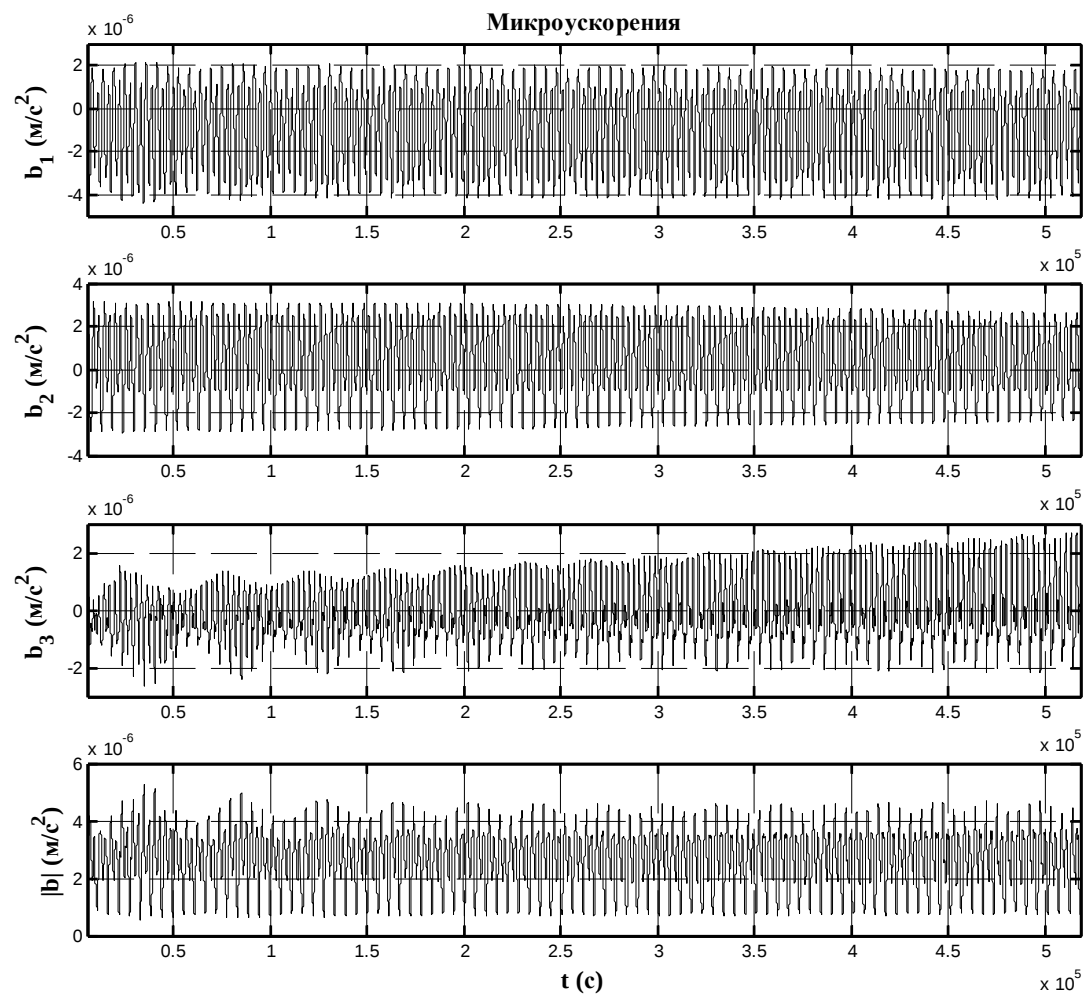
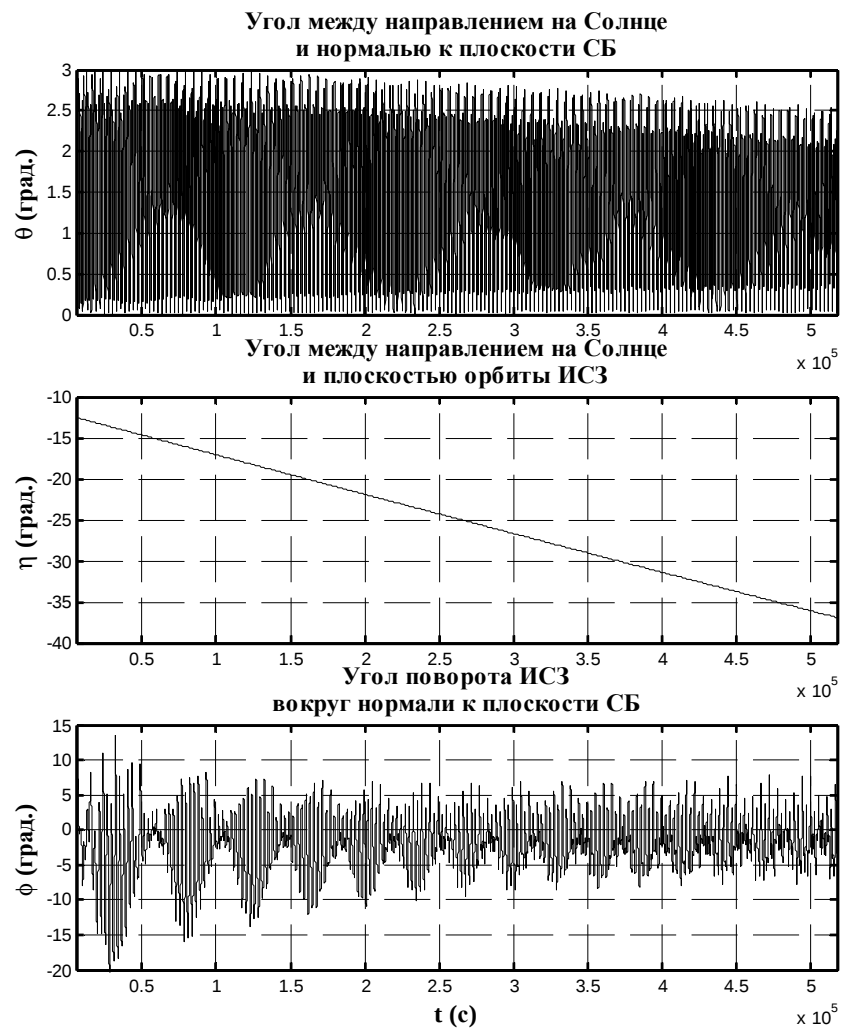


Рис. 2.6 Углы ориентации ИСЗ относительно Солнца и микроускорения (режим ограничения роста кинетического момента).

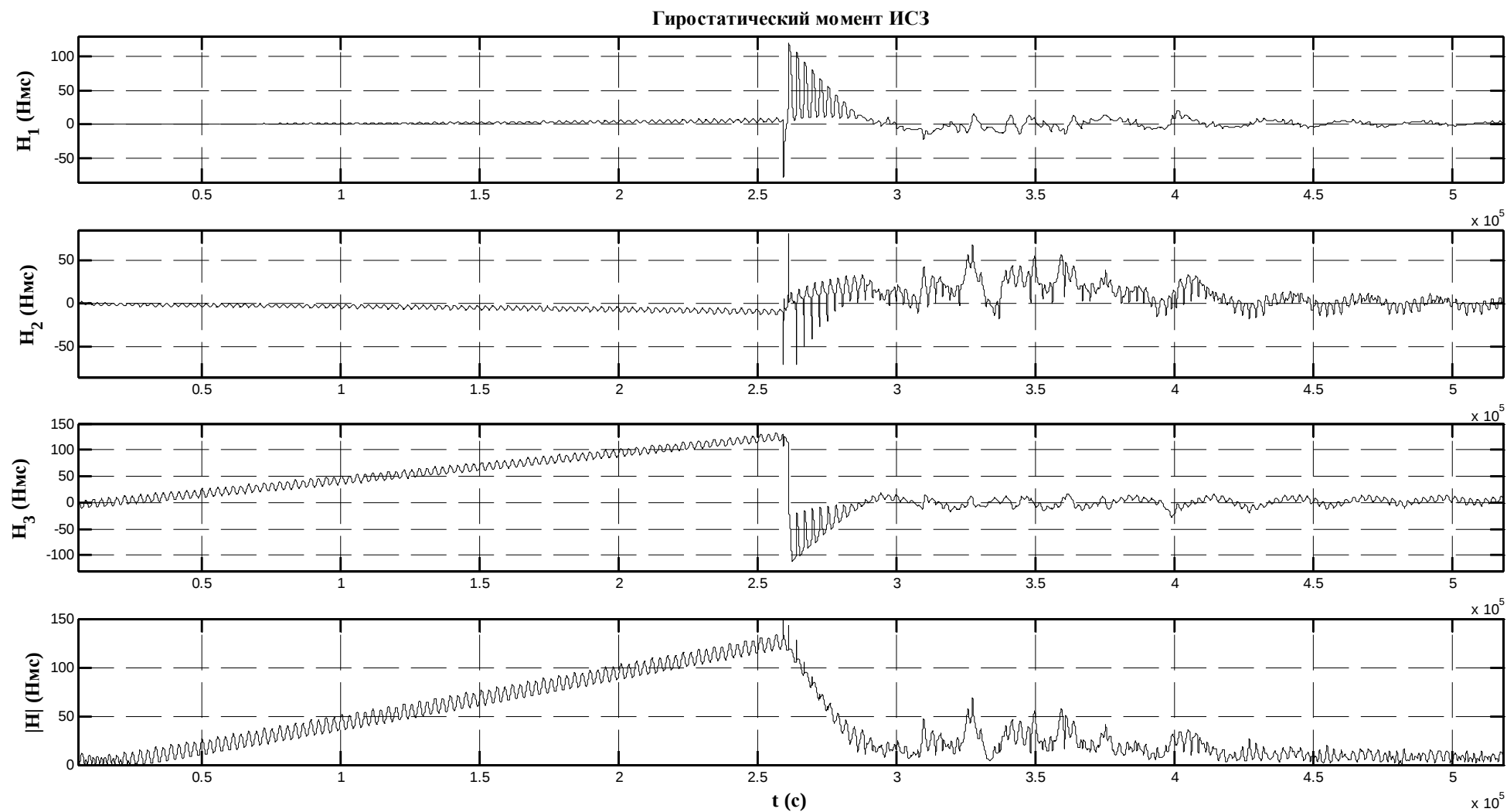


Рис. 2.7 Гиростатический момент ИСЗ при последовательном использовании двух законов управления.

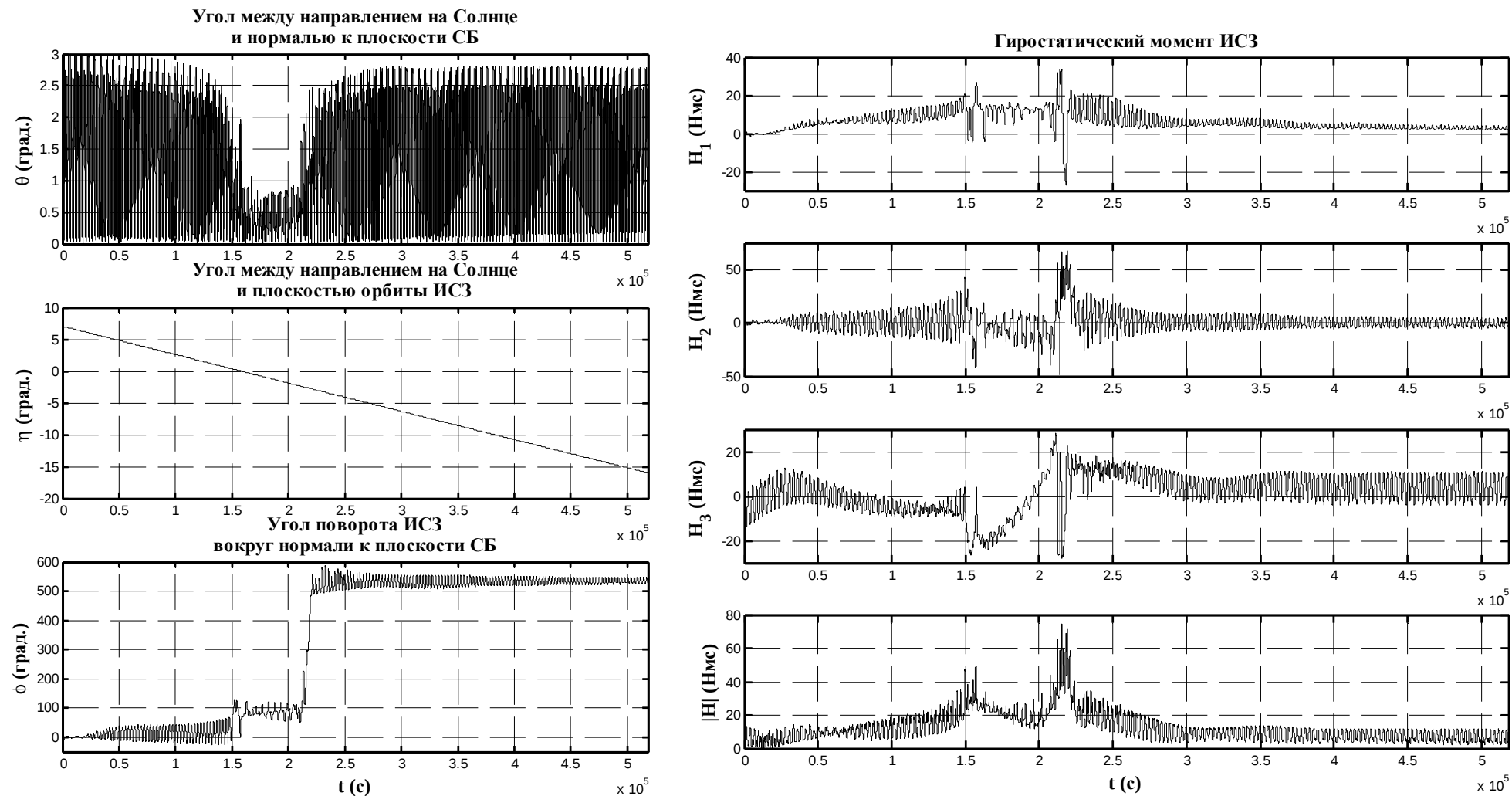


Рис. 2.8 Углы ориентации ИСЗ относительно Солнца и гиростатический момент ИСЗ (режим ограничения роста кинетического момента, угол между плоскостью орбиты и направлением "Земля – Солнце" равен 0°).

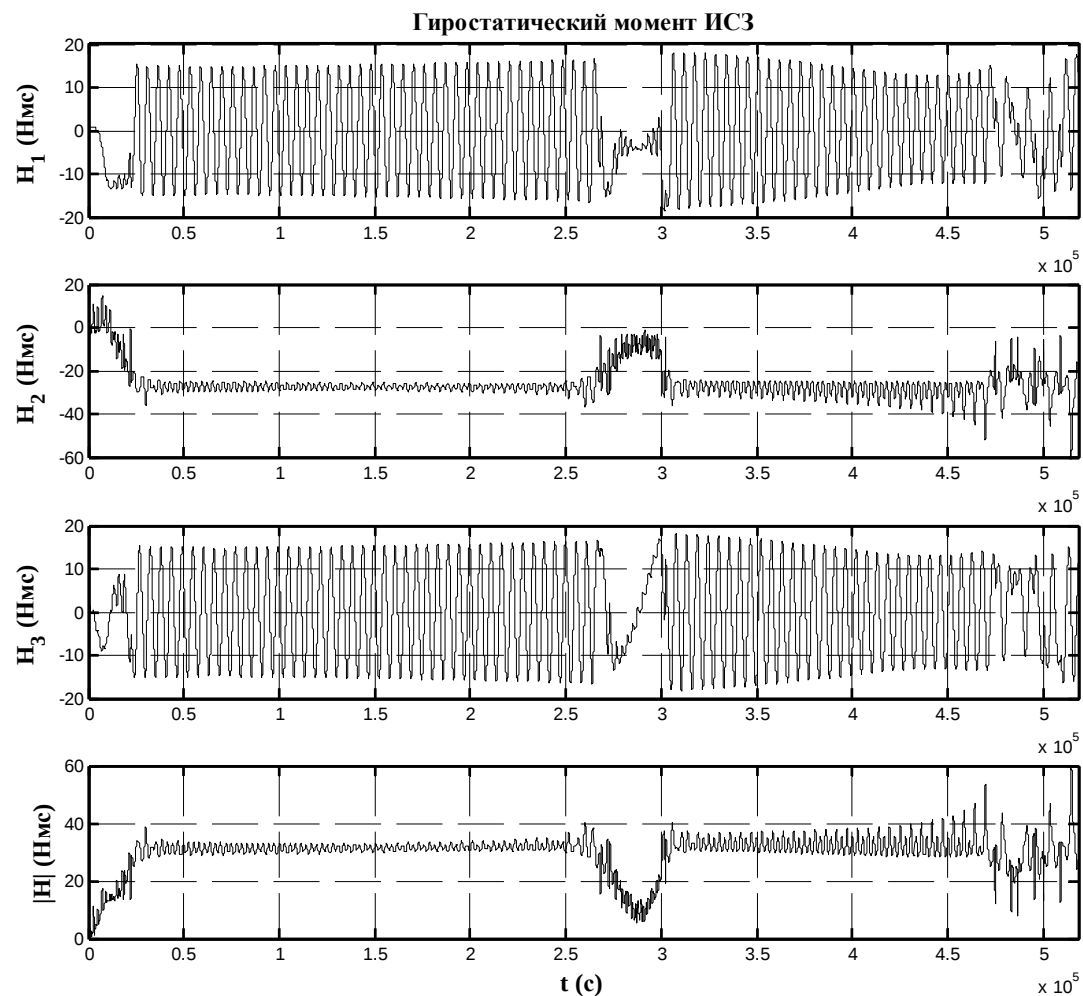
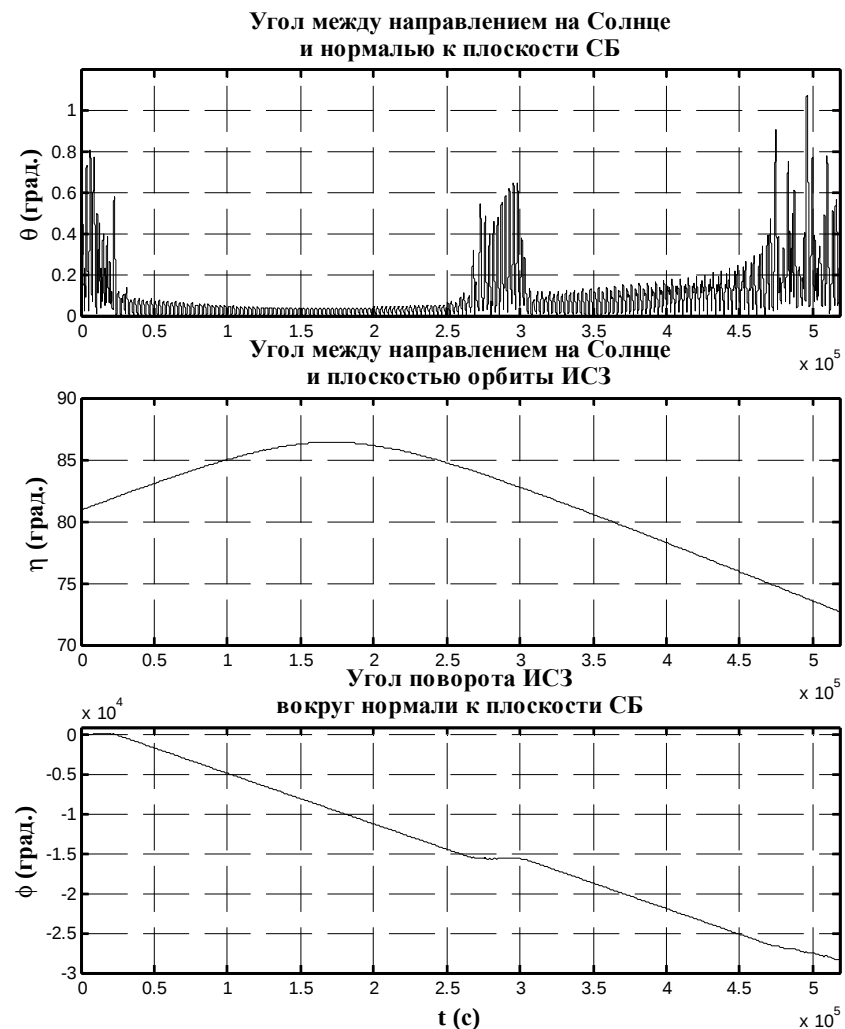


Рис. 2.9 Углы ориентации ИСЗ относительно Солнца и гиростатический момент ИСЗ (режим ограничения роста кинетического момента, угол между плоскостью орбиты и направлением "Земля – Солнце" равен 86.5°).

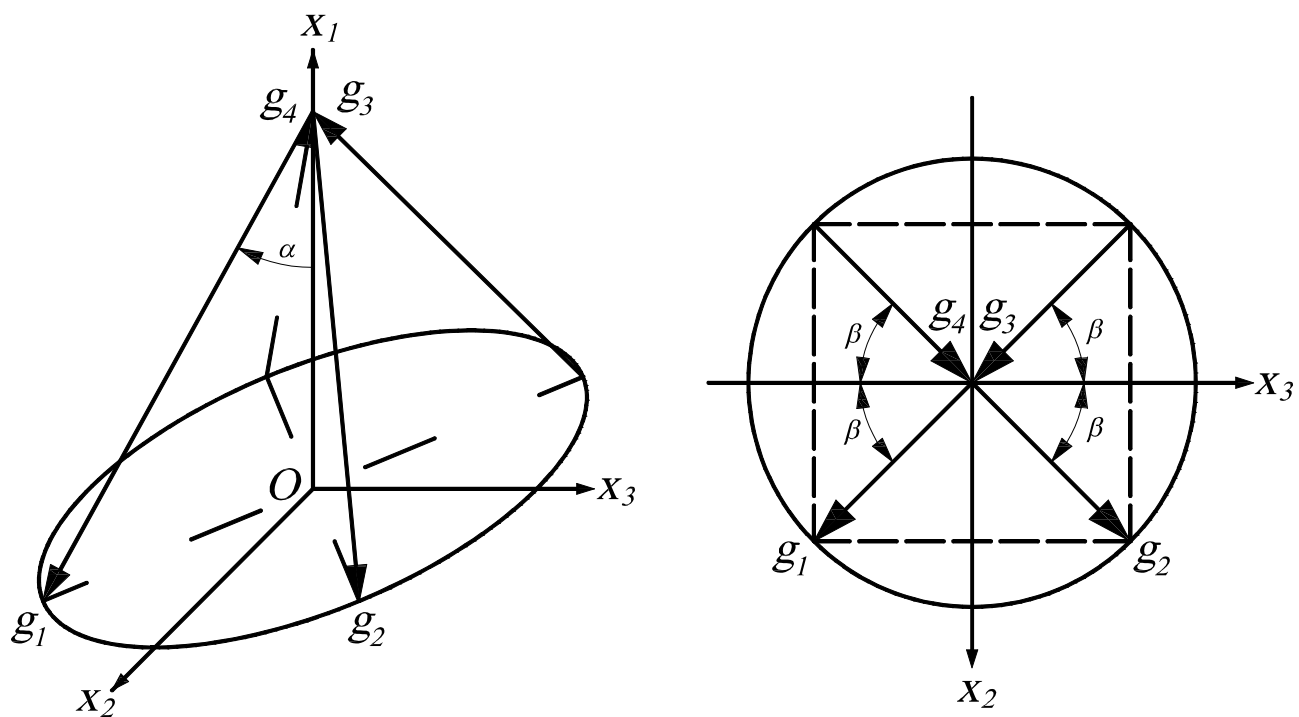


Рис. 3.1 Схема расположения системы ДМ относительно связанной с ИСЗ системы координат.

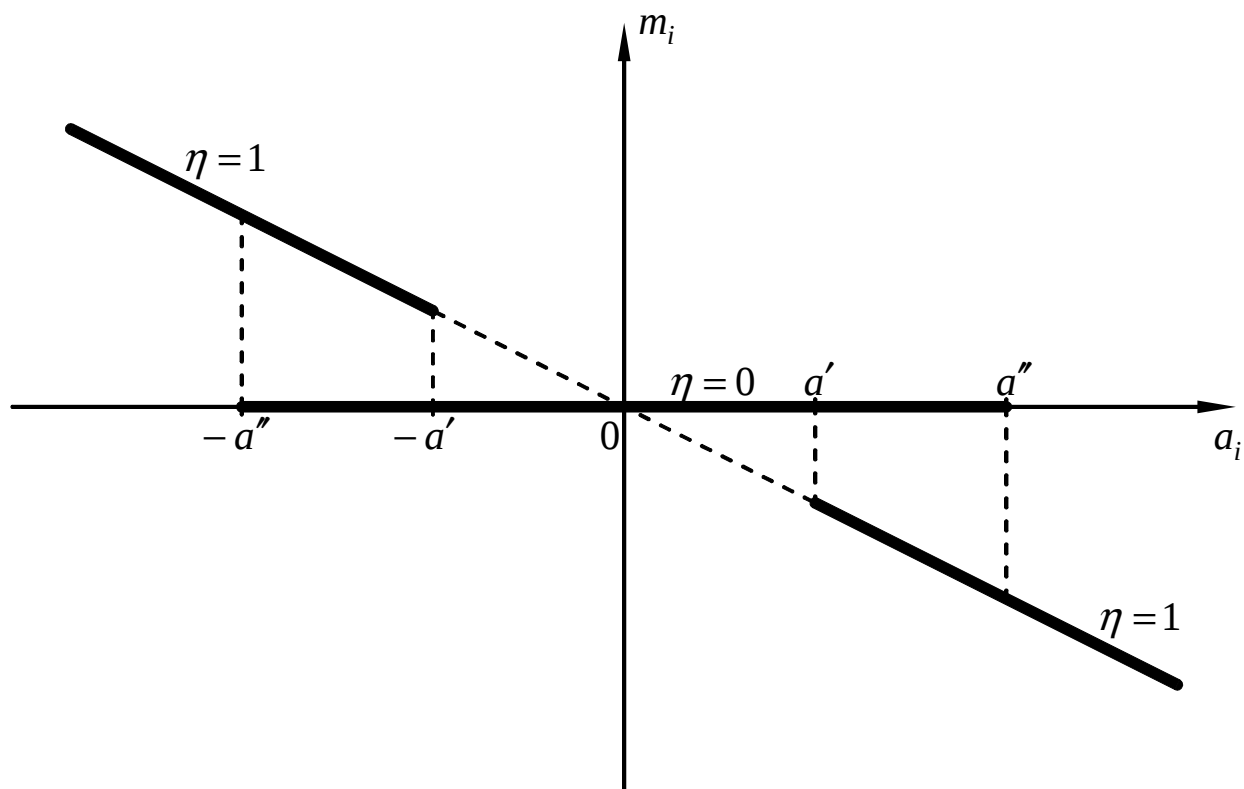


Рис. 3.2 Характеристика зон нечувствительности алгоритма управления.

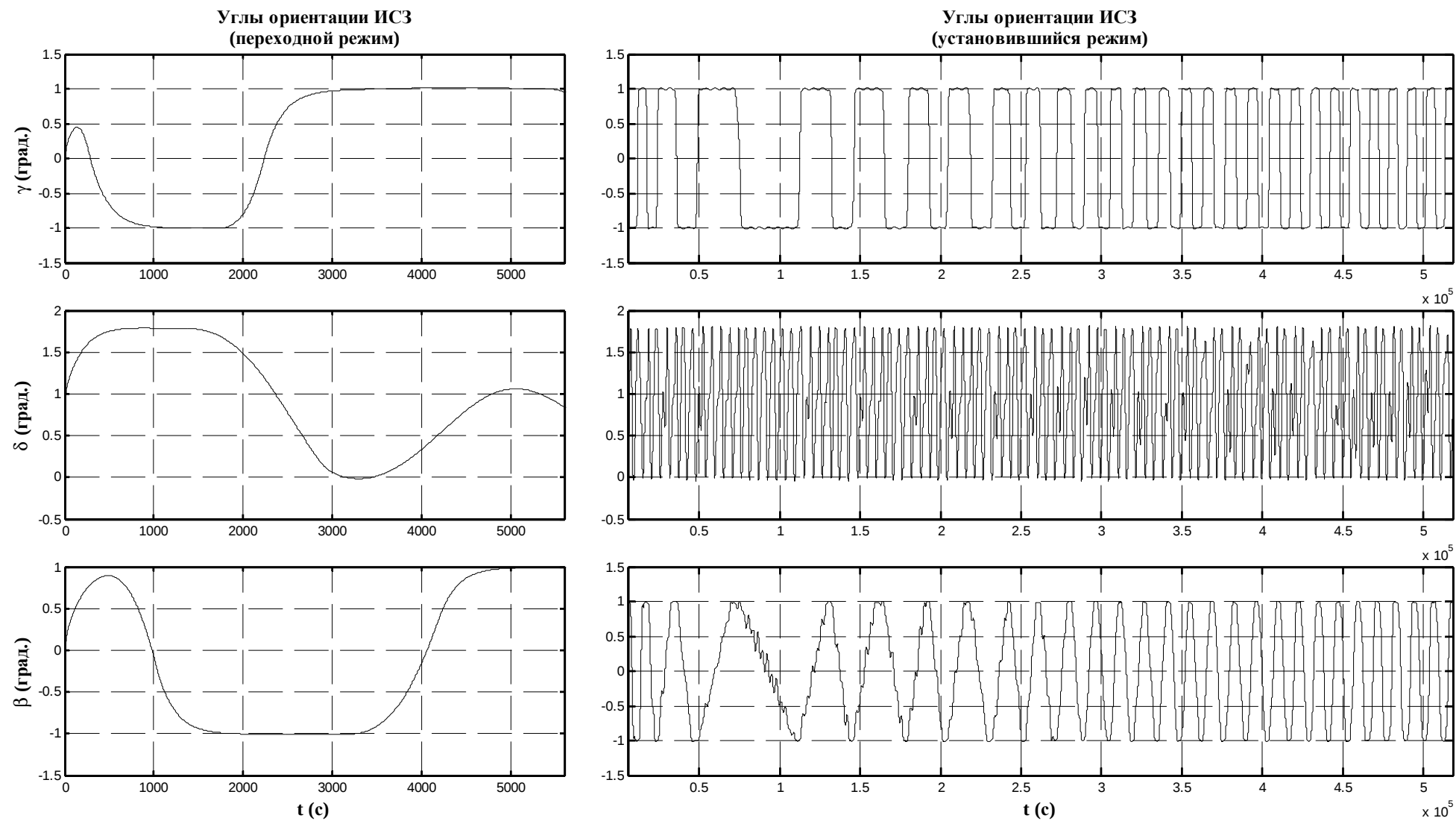


Рис. 3.3 Углы ориентации ИСЗ (режим орбитальной ориентации).

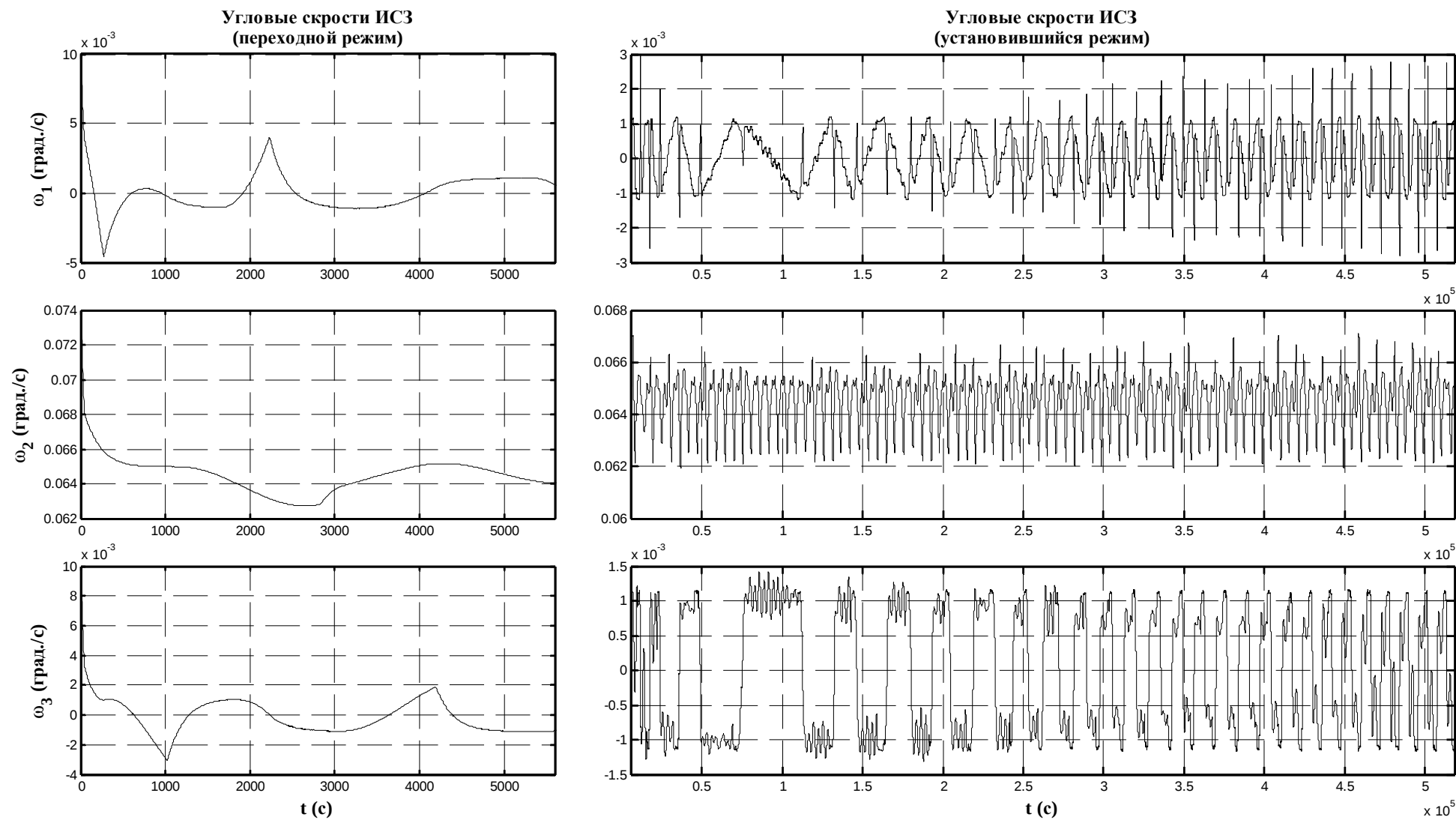


Рис. 3.4 Угловая скорость ИСЗ (режим орбитальной ориентации).

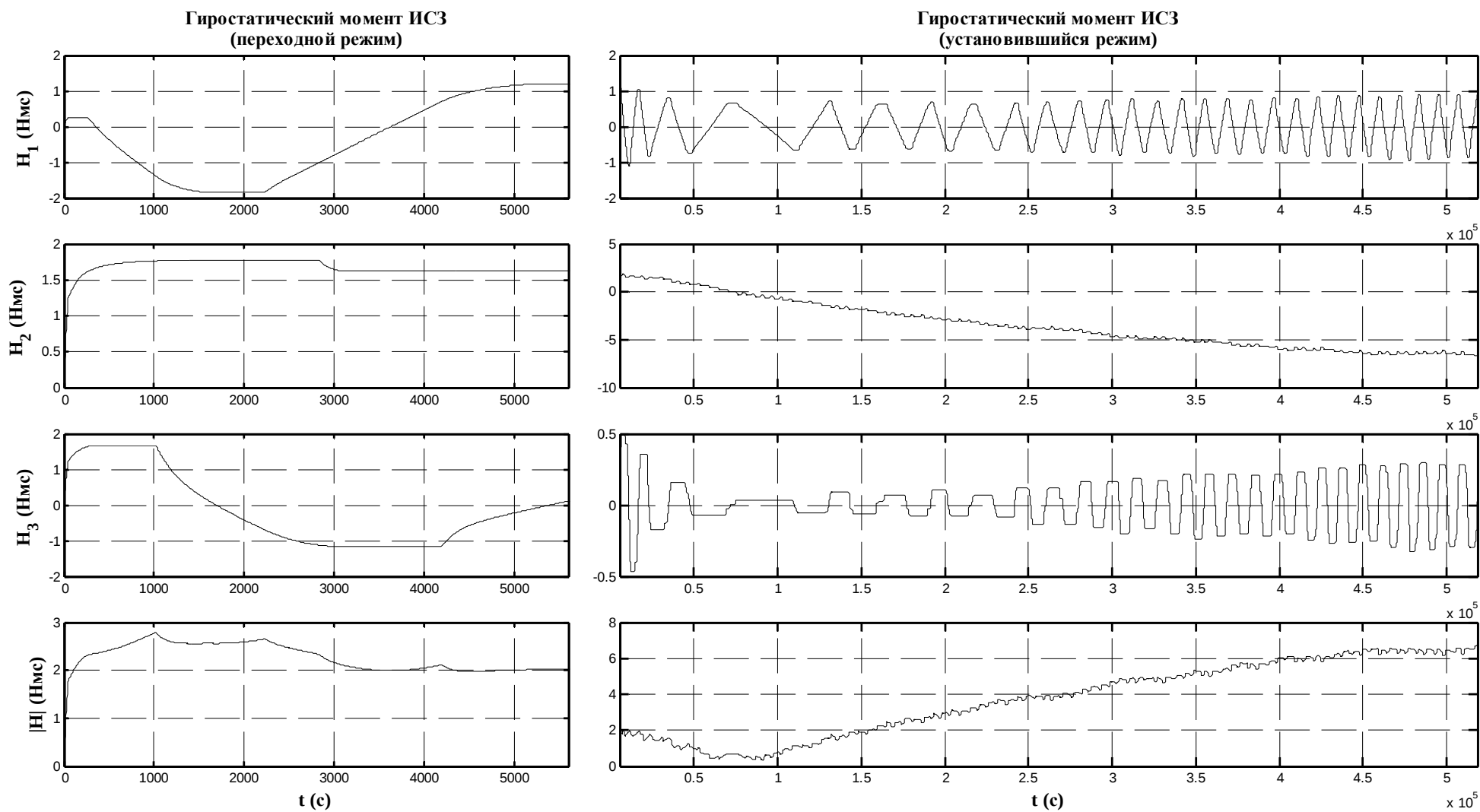


Рис. 3.5 Гиросtatический момент ИСЗ (режим орбитальной ориентации).

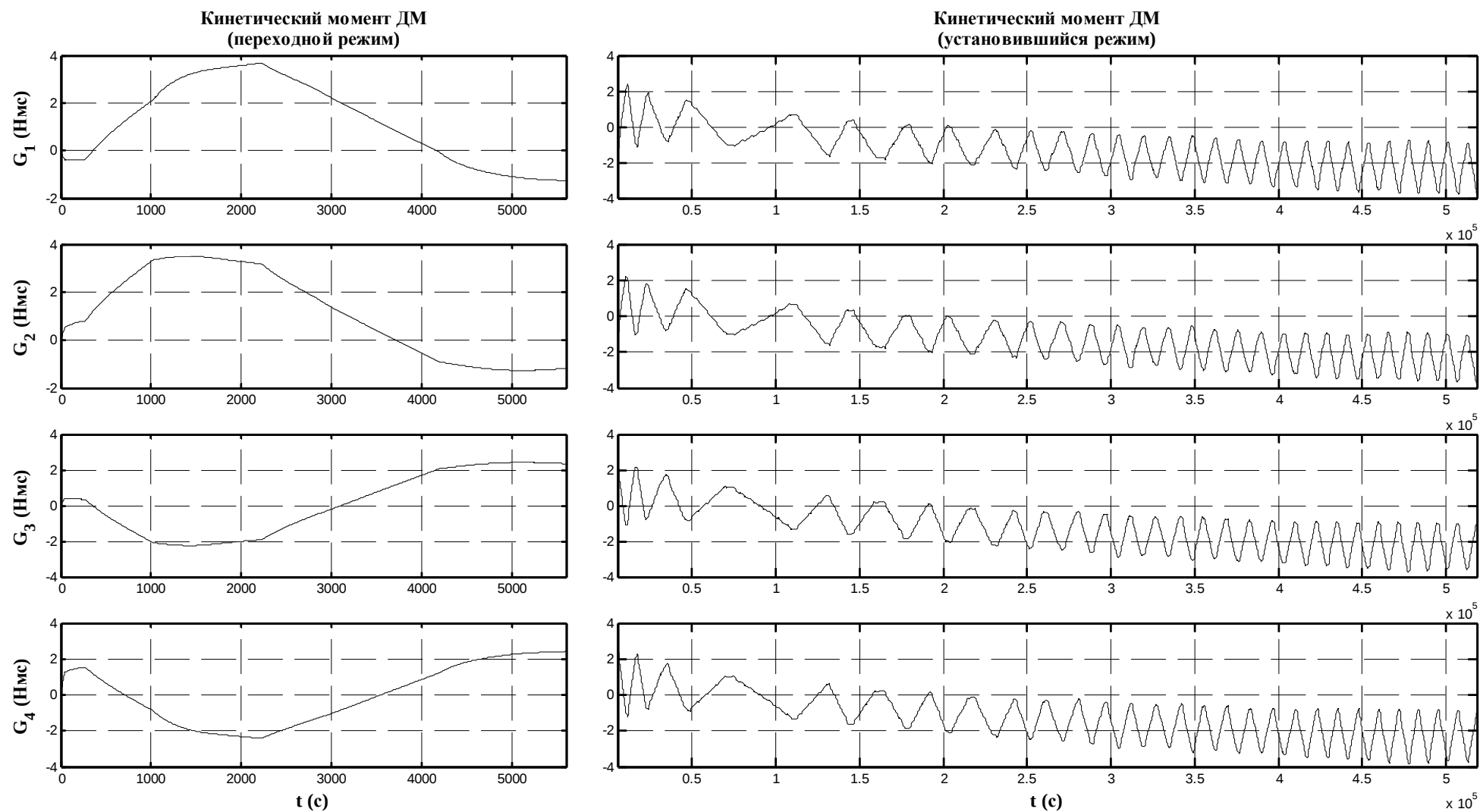


Рис. 3.6 Кинетический момент ДМ (режим орбитальной ориентации).

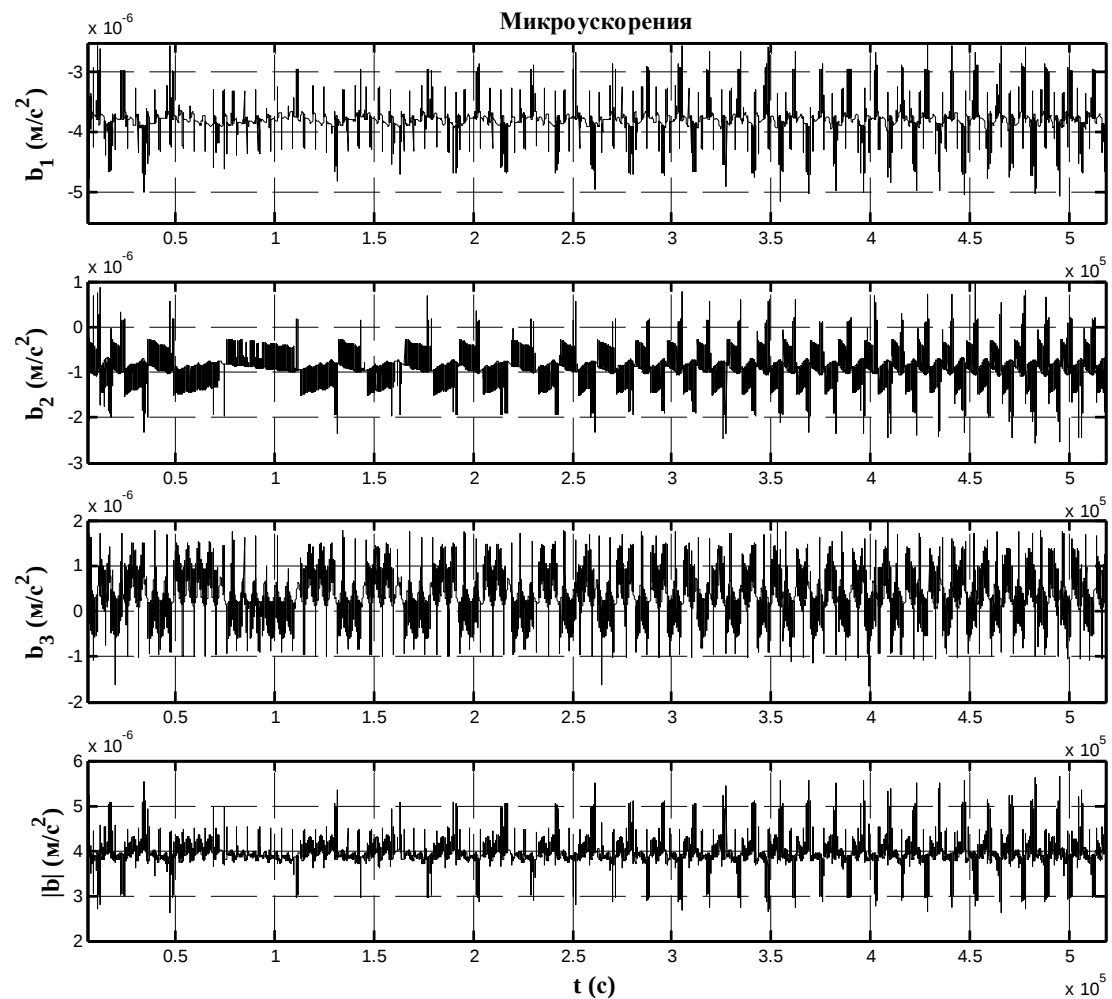
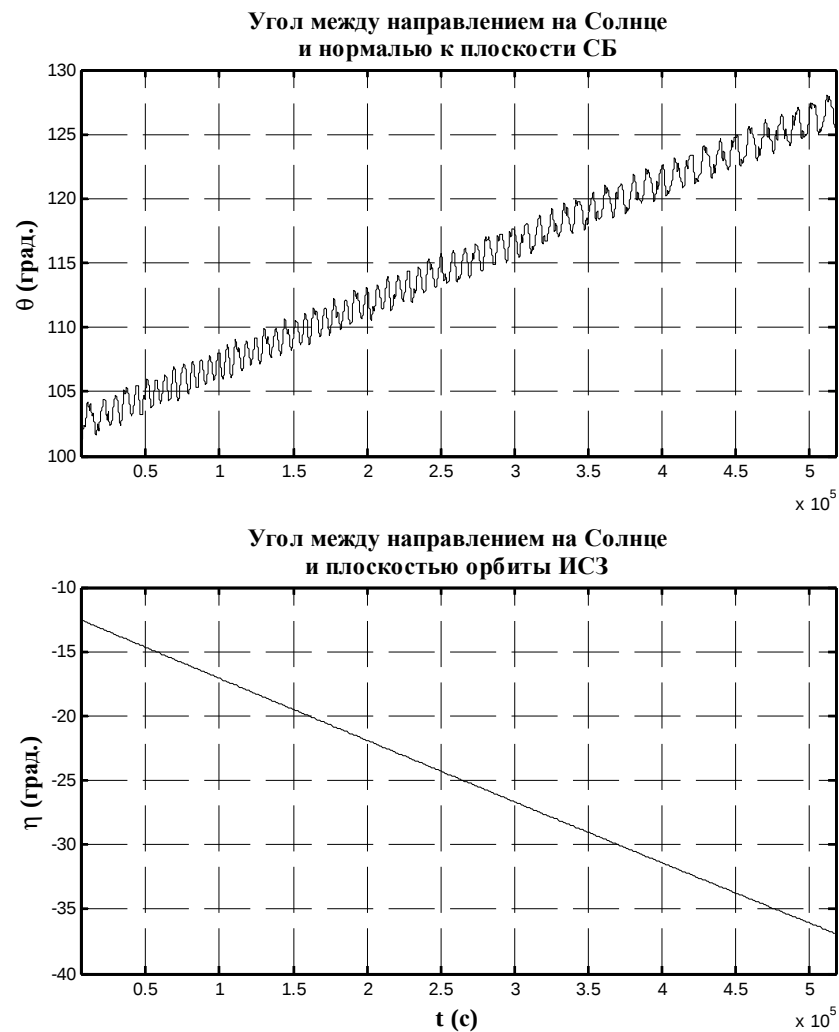


Рис. 3.7 Углы ориентации ИСЗ относительно Солнца и микроускорения (режим орбитальной ориентации).

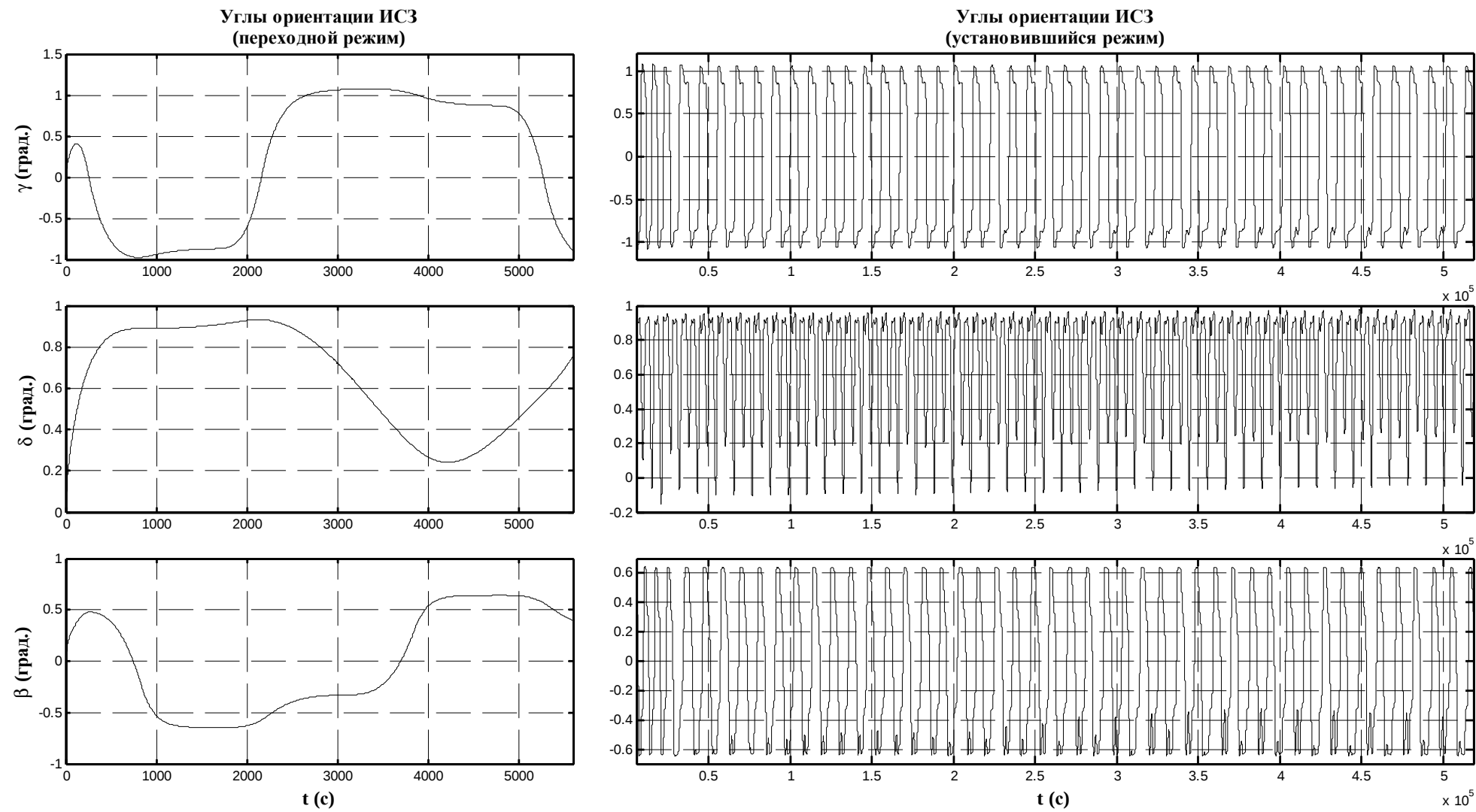


Рис. 3.8 Углы ориентации ИСЗ (режим точной орбитальной ориентации).

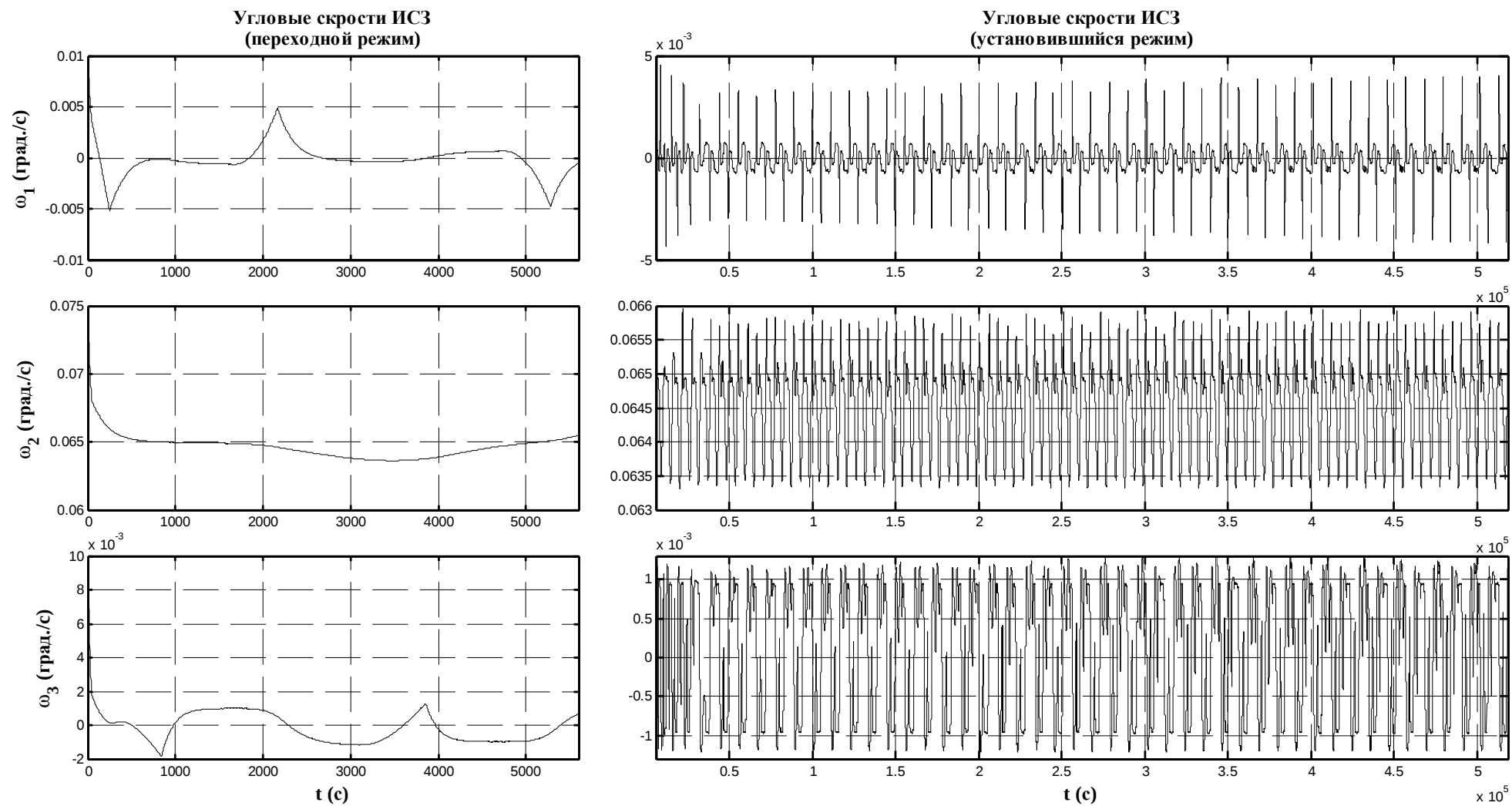


Рис. 3.9 Угловая скорость ИСЗ (режим точной орбитальной ориентации).

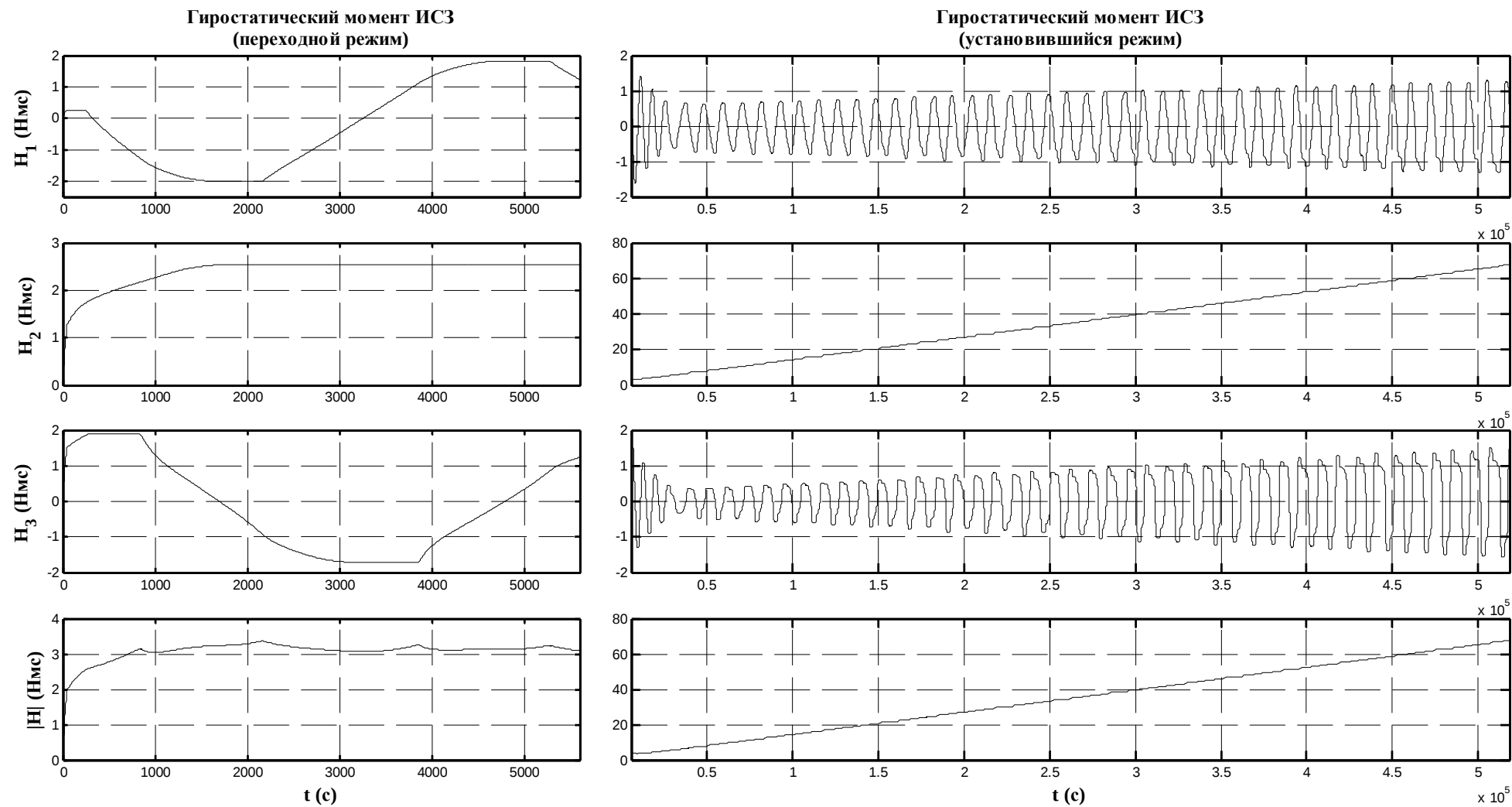


Рис. 3.10 Гиросtatический момент ИСЗ (режим точной орбитальной ориентации).

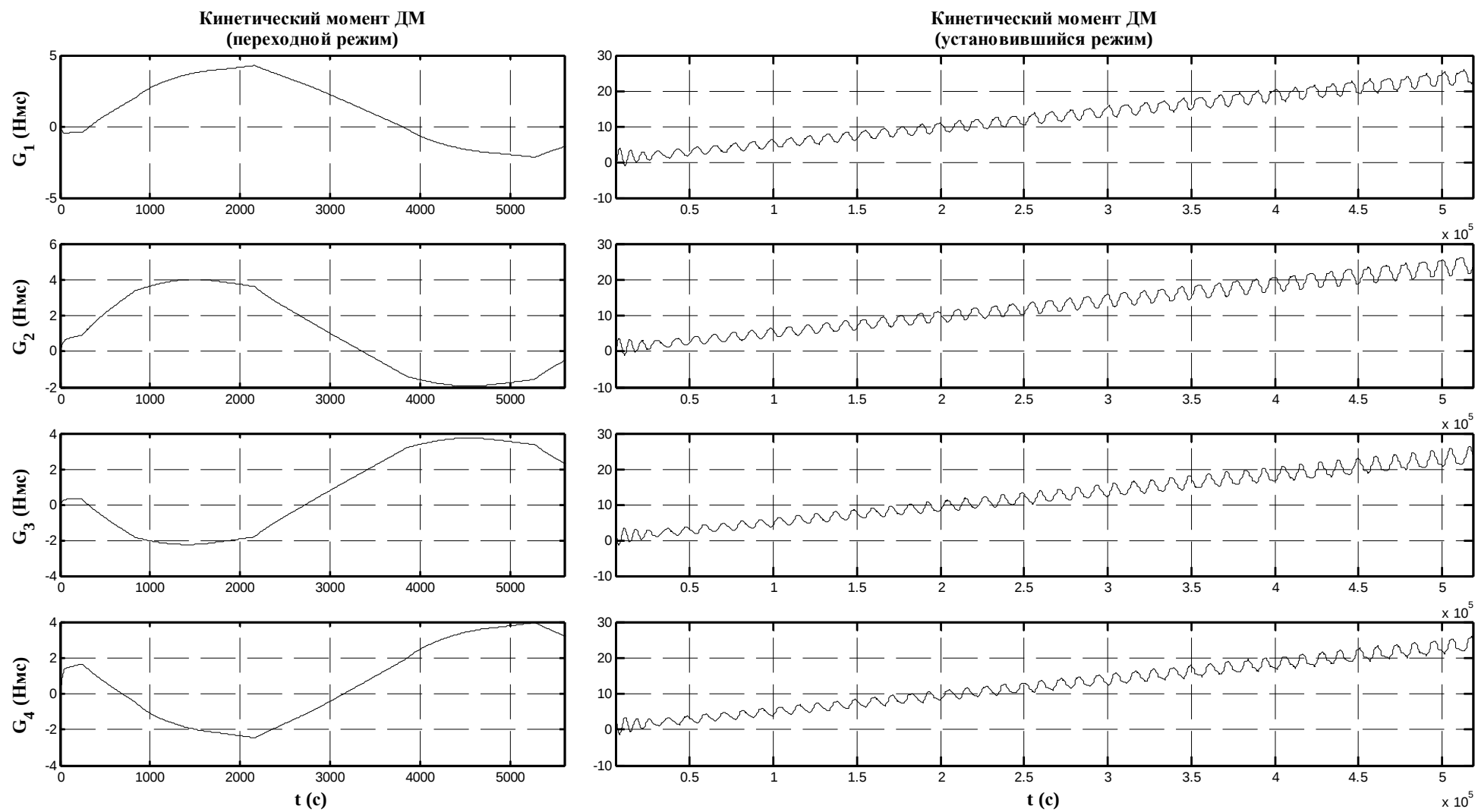


Рис. 3.11 Кинетический момент ДМ (режим точной орбитальной ориентации).

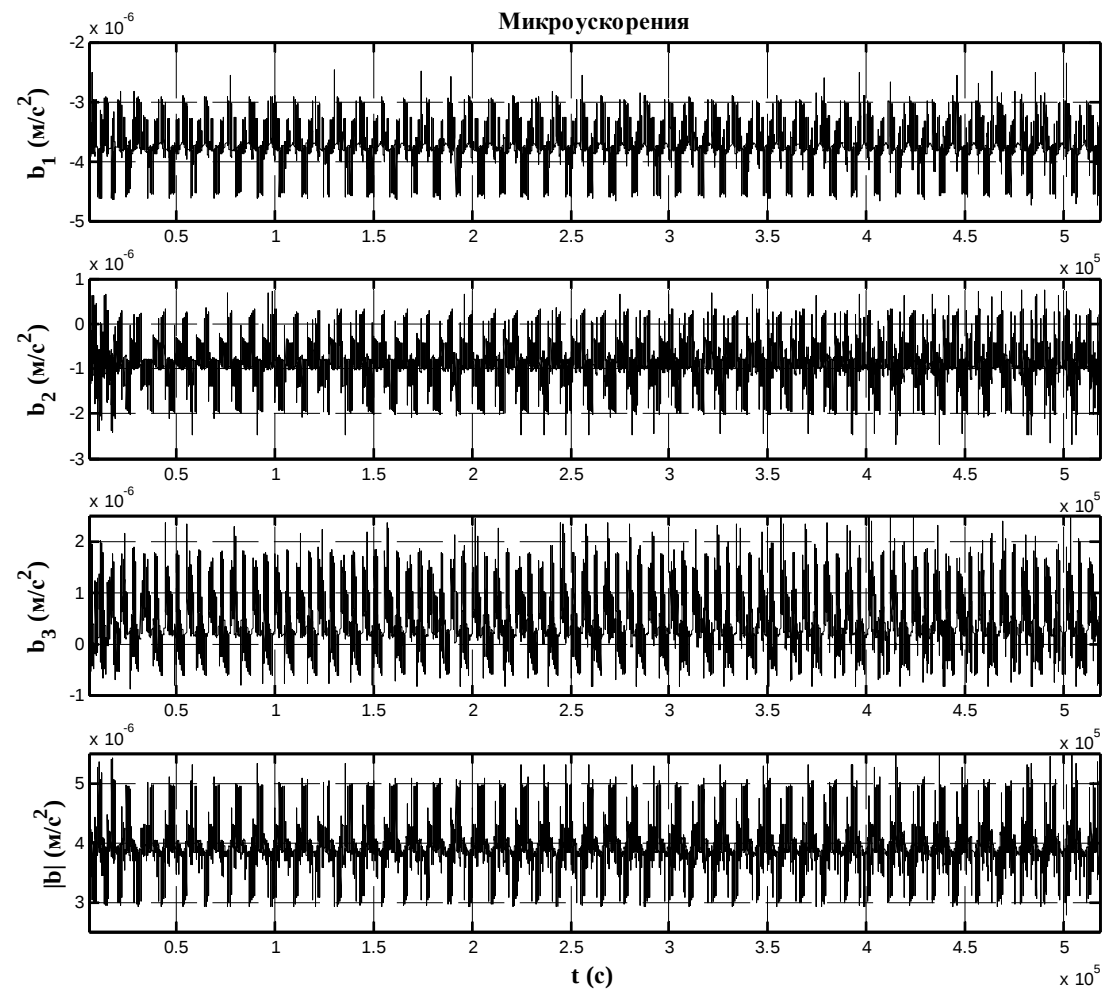
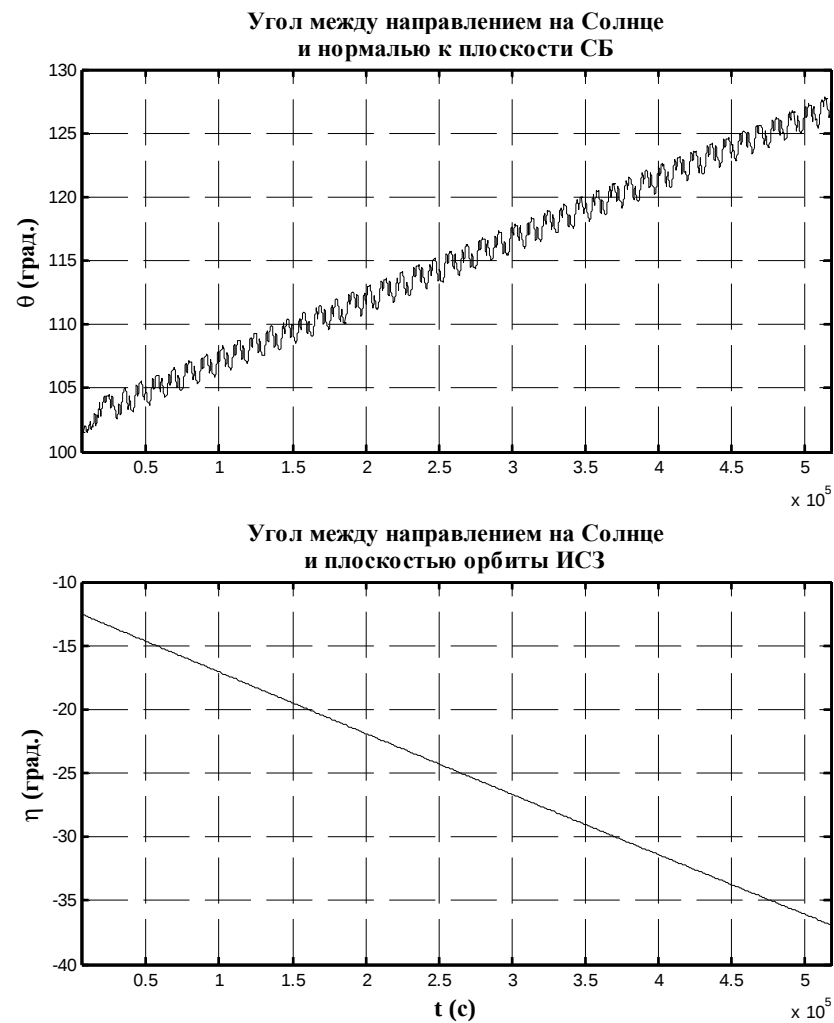


Рис. 3.12 Углы ориентации ИСЗ относительно Солнца и микроускорения (режим точной орбитальной ориентации).

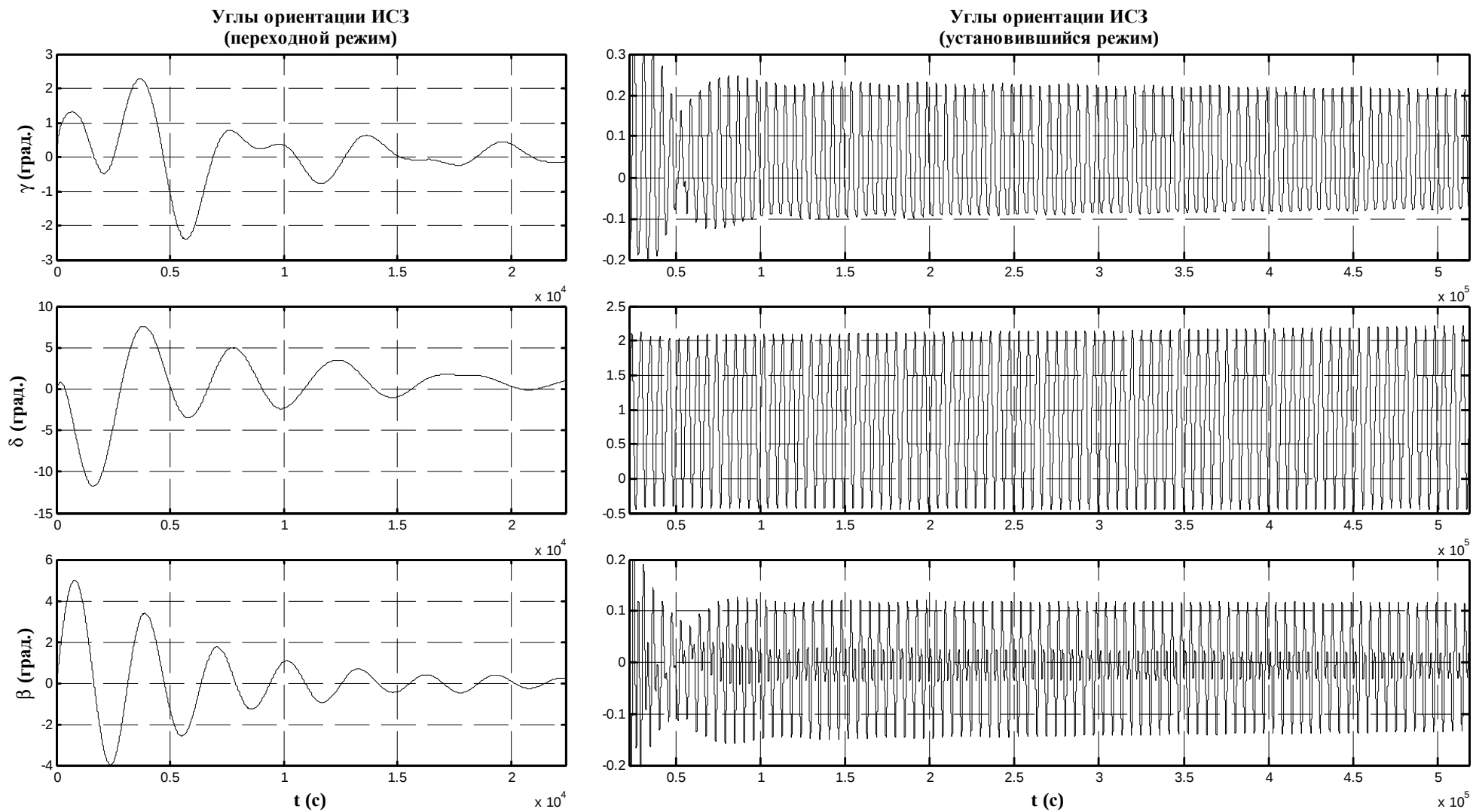


Рис. 3.13 Углы ориентации ИСЗ (режим полупассивной гравитационной ориентации).

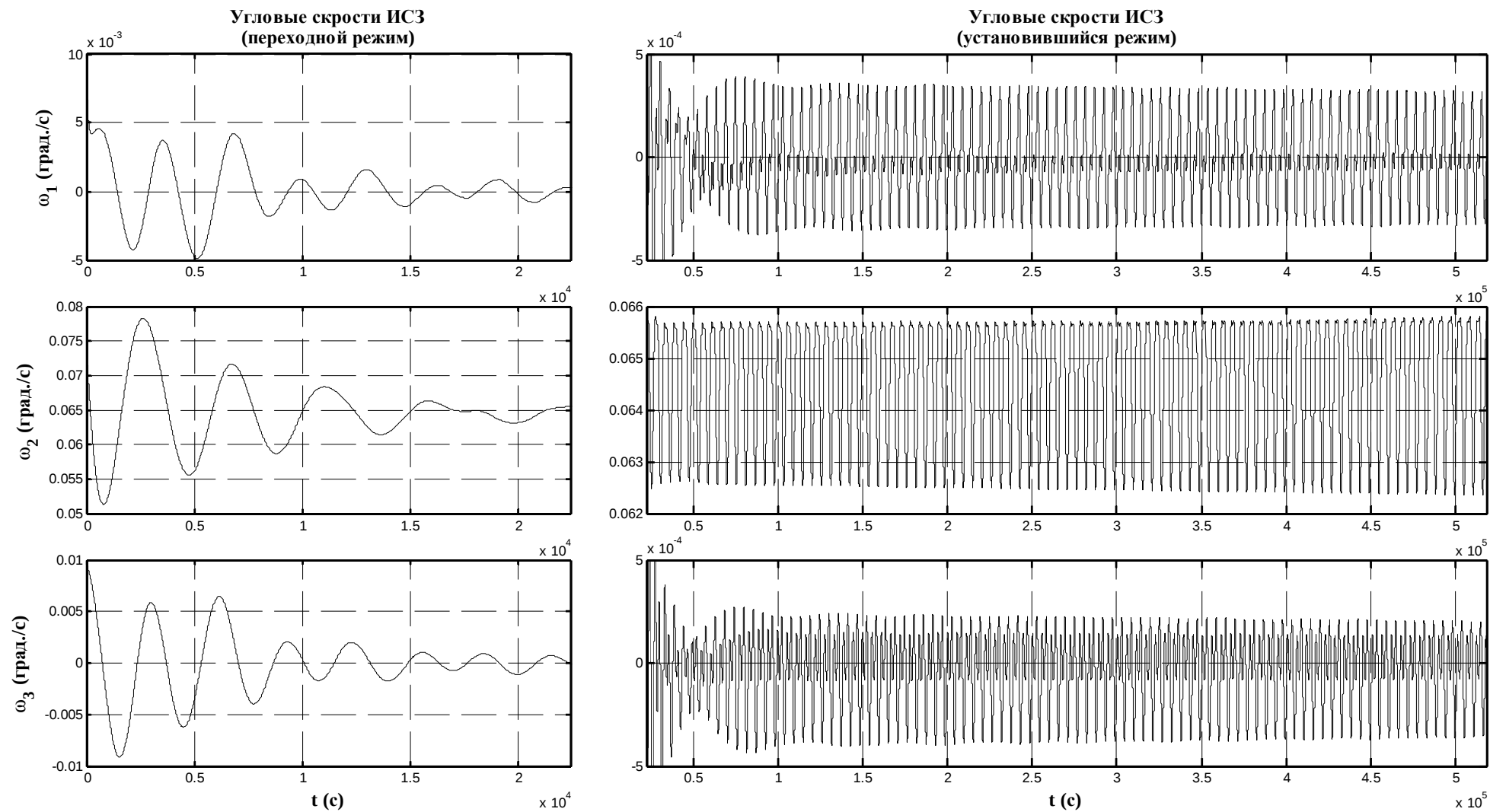


Рис. 3.14 Угловая скорость ИСЗ (режим полупассивной гравитационной ориентации).

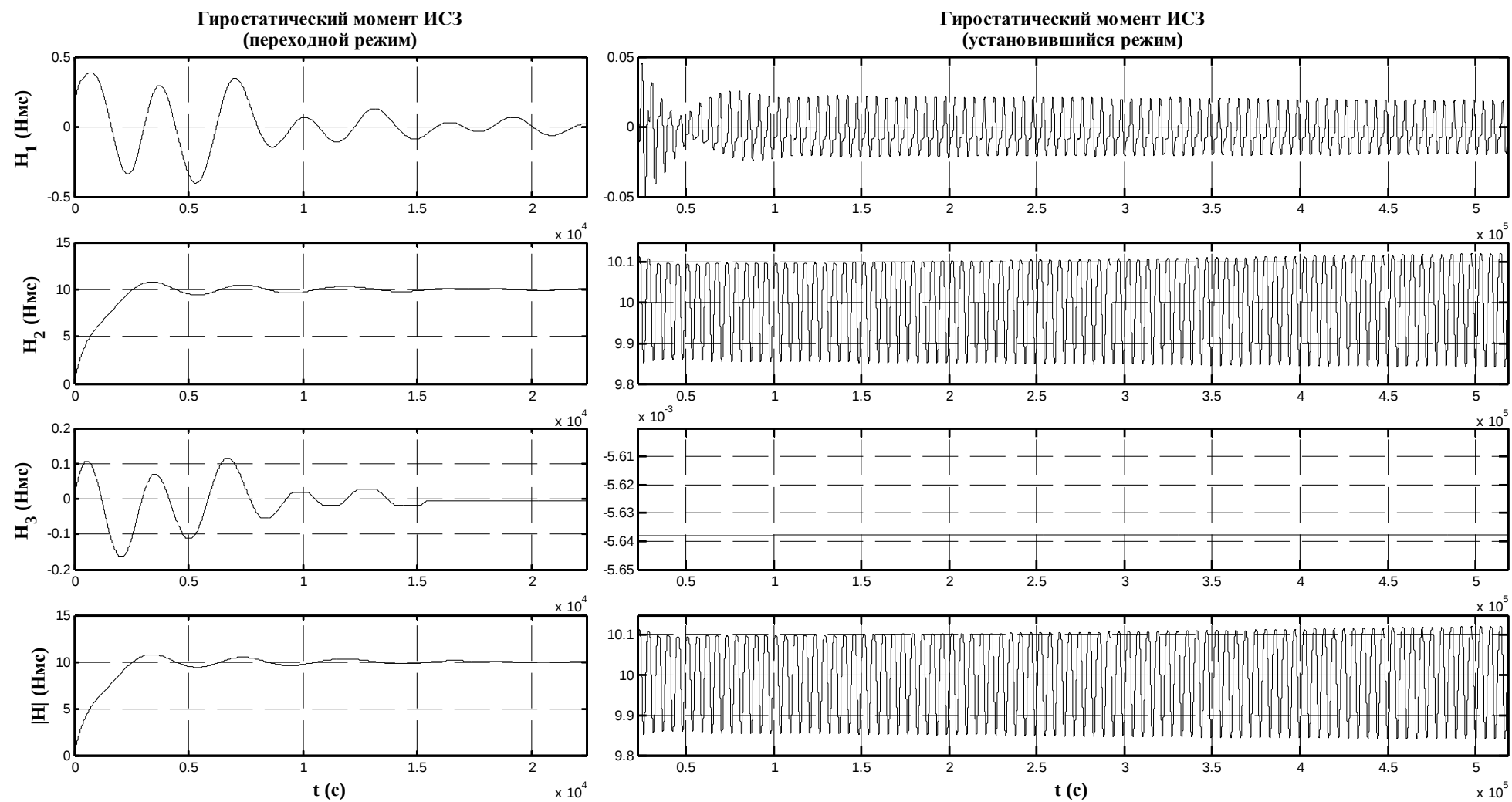


Рис. 3.15 Гиростатический момент ИСЗ (режим полупассивной гравитационной ориентации).

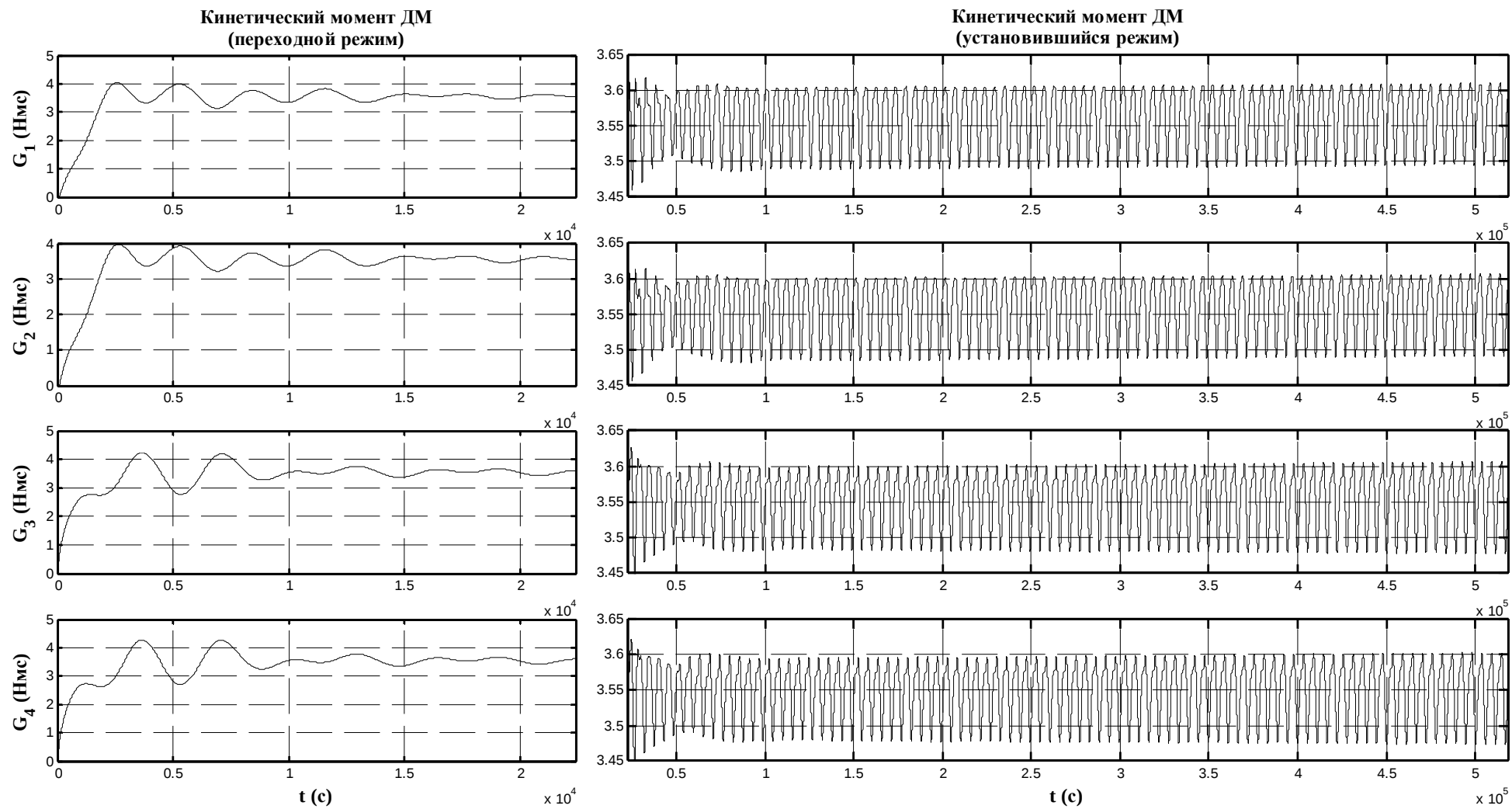


Рис. 3.16 Кинетический момент ДМ (режим полупассивной гравитационной ориентации).

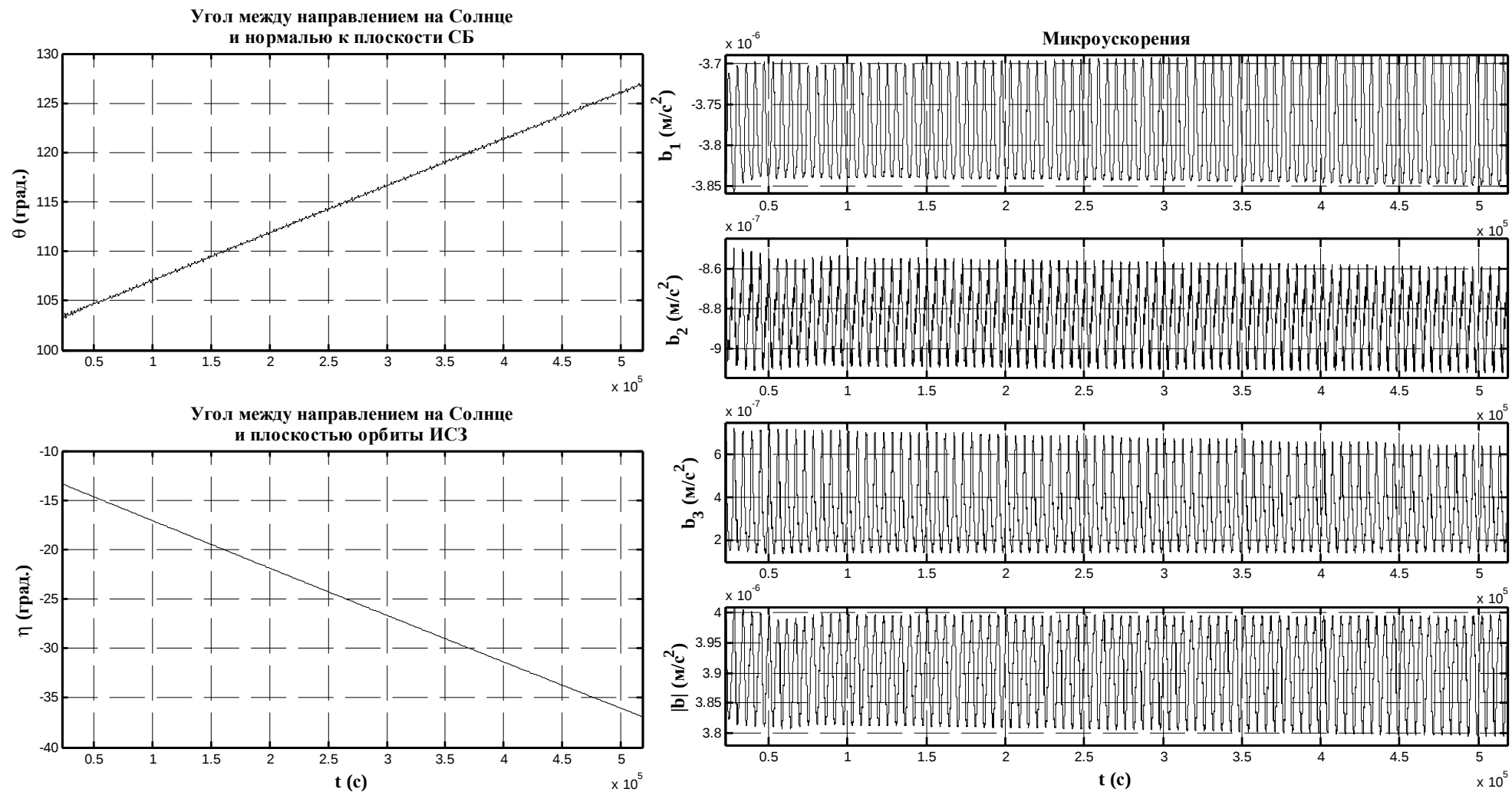


Рис. 3.17 Углы ориентации ИСЗ относительно Солнца и микроускорения (режим полупассивной гравитационной ориентации).

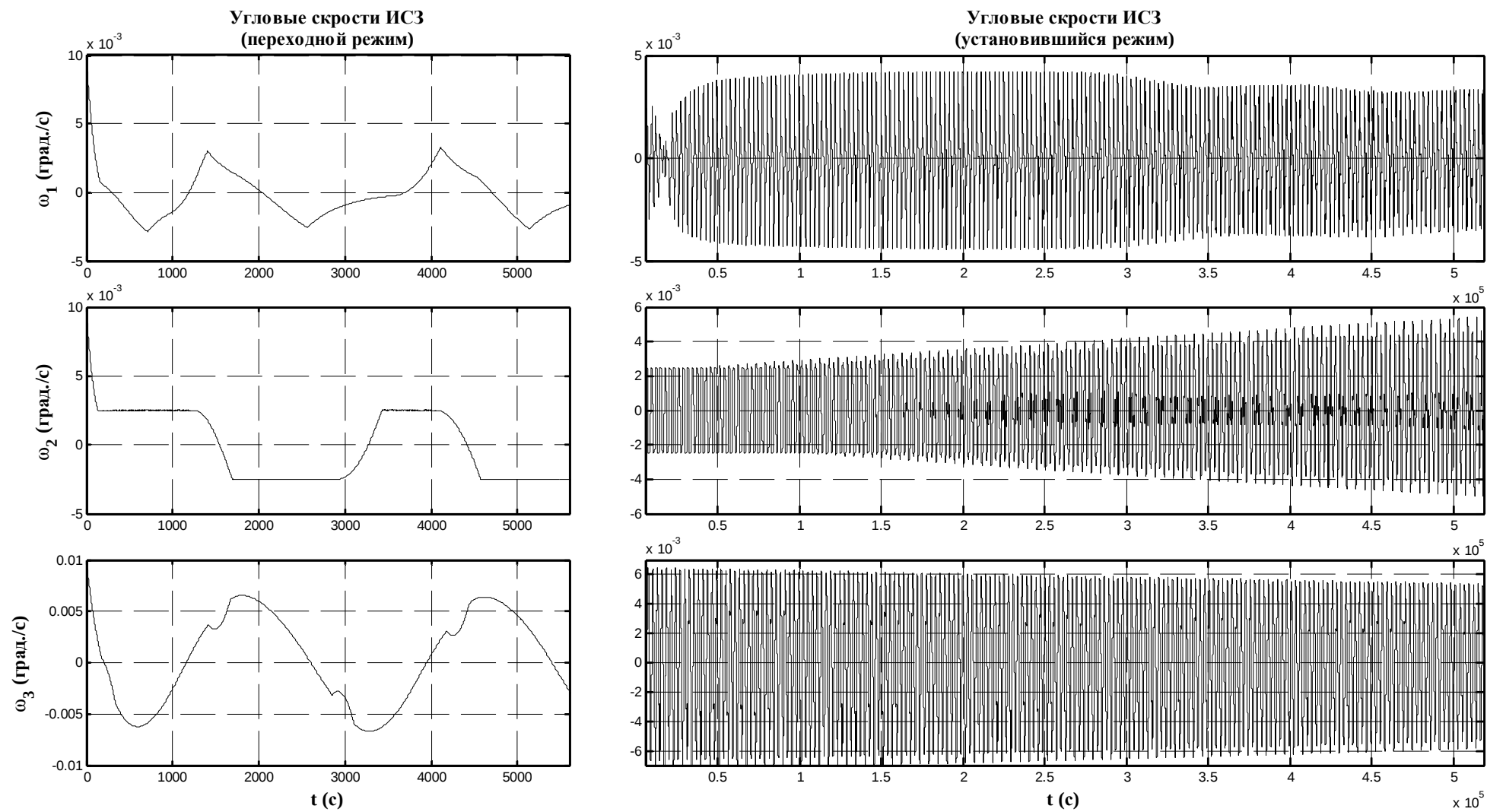


Рис. 3.18 Угловая скорость ИСЗ (режим одноосной солнечной ориентации).

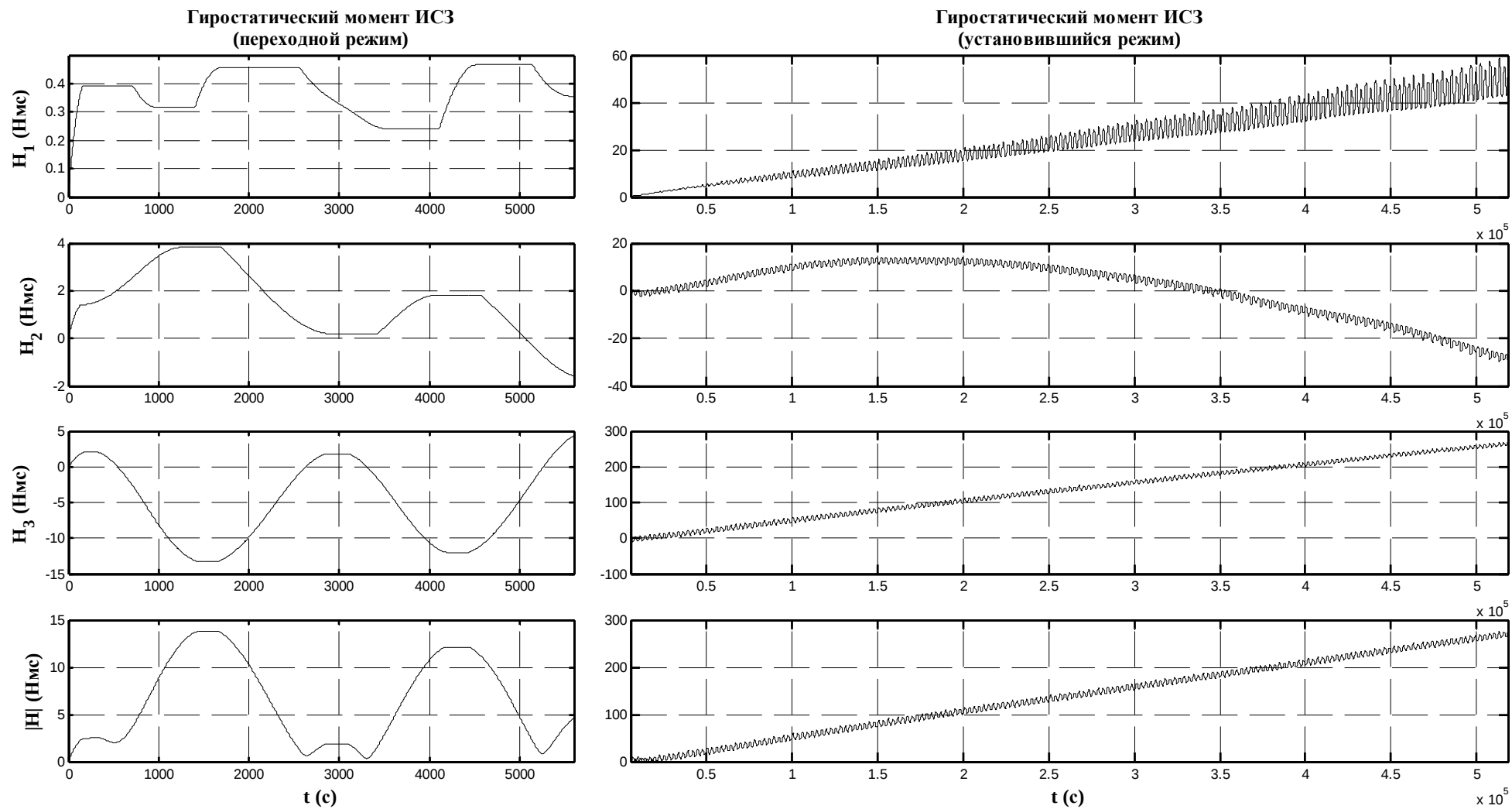


Рис. 3.19 Гиросtatический момент ИСЗ (режим одноосной солнечной ориентации).

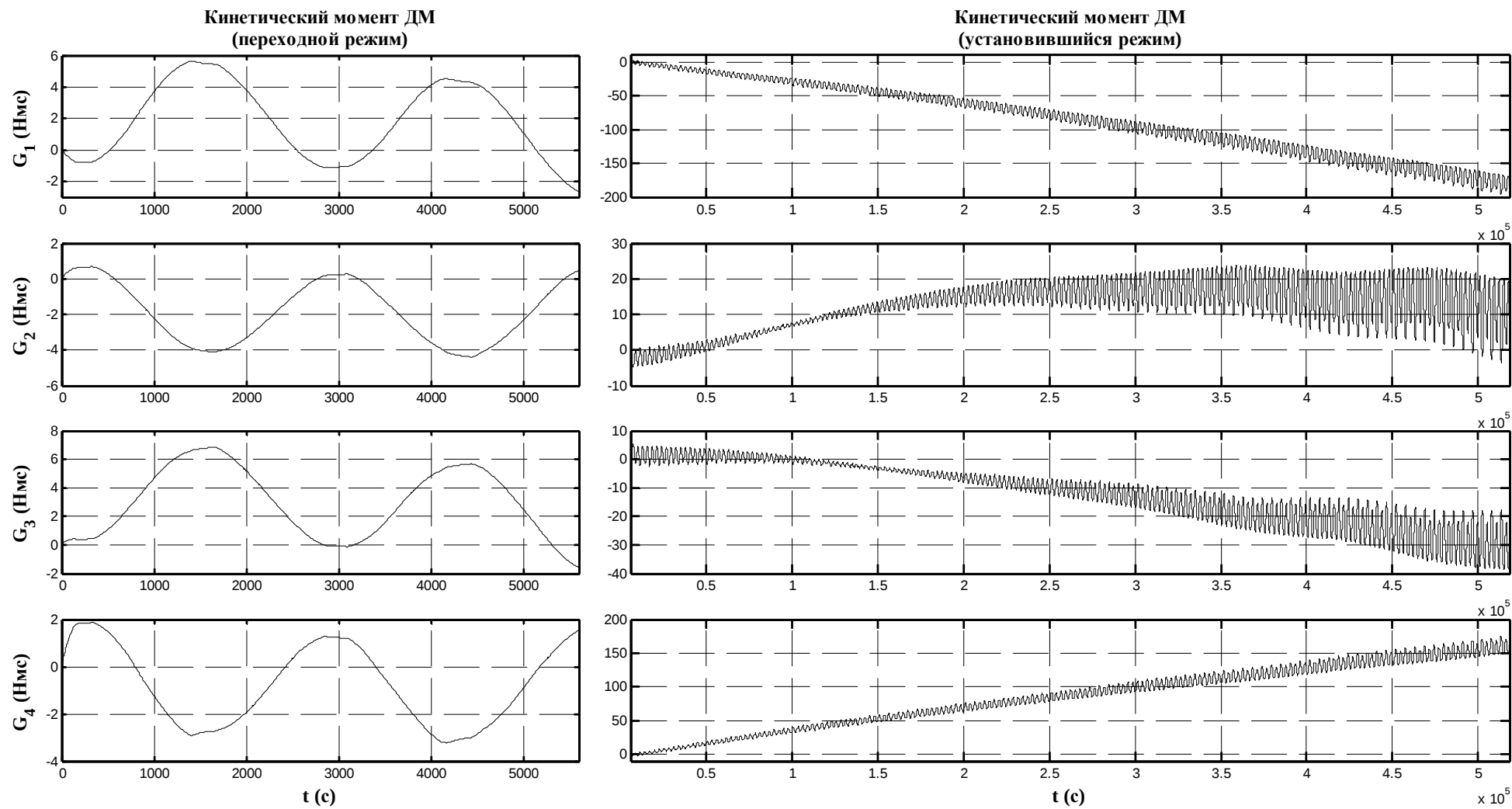


Рис. 3.20 Кинетический момент ДМ (режим одноосной солнечной ориентации).

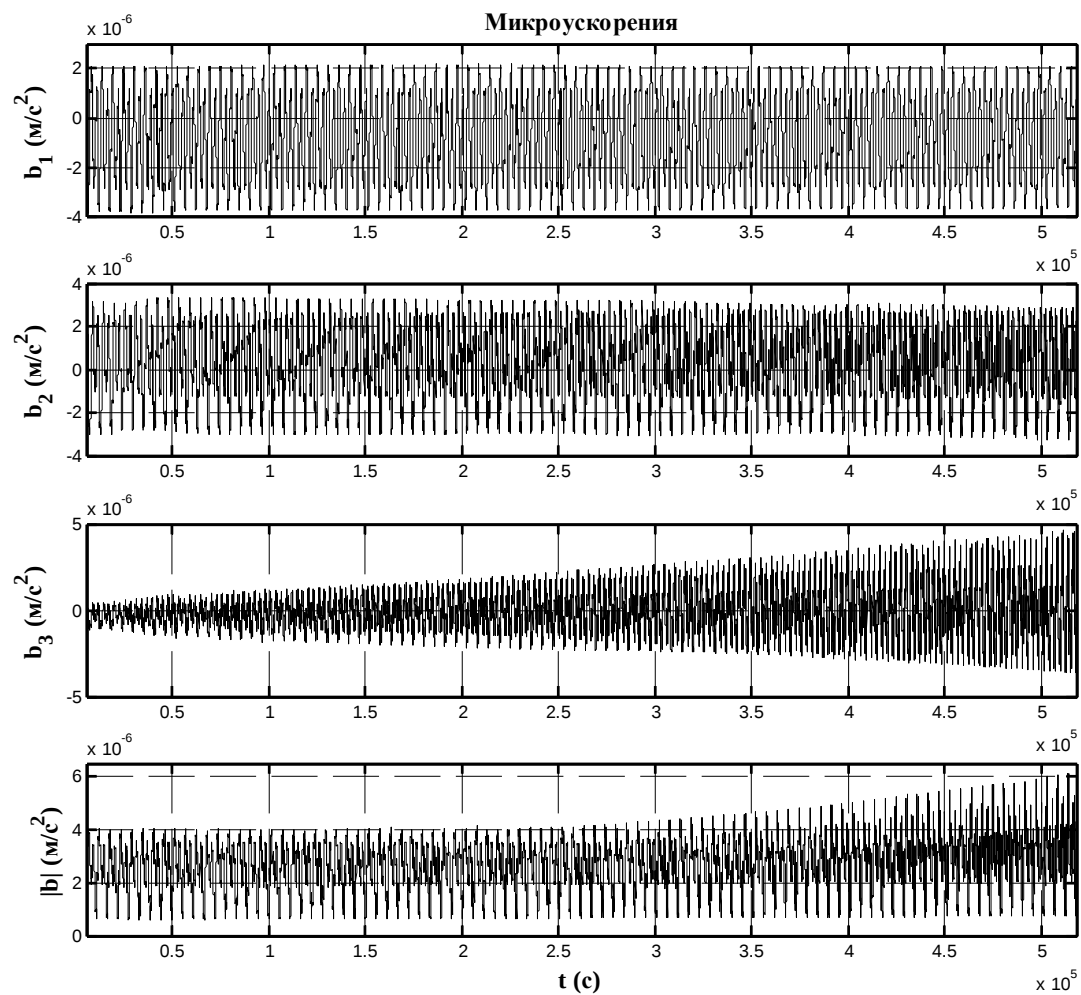
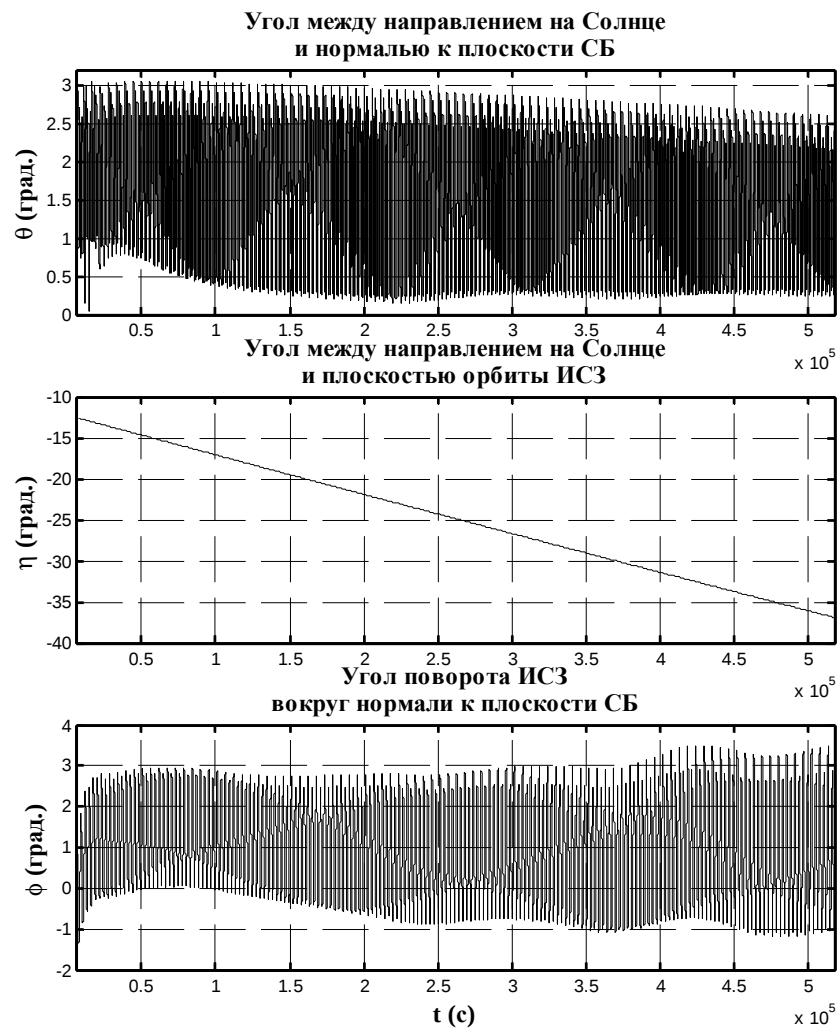


Рис. 3.21 Углы ориентации ИСЗ относительно Солнца и микроускорения (режим одноосной солнечной ориентации).

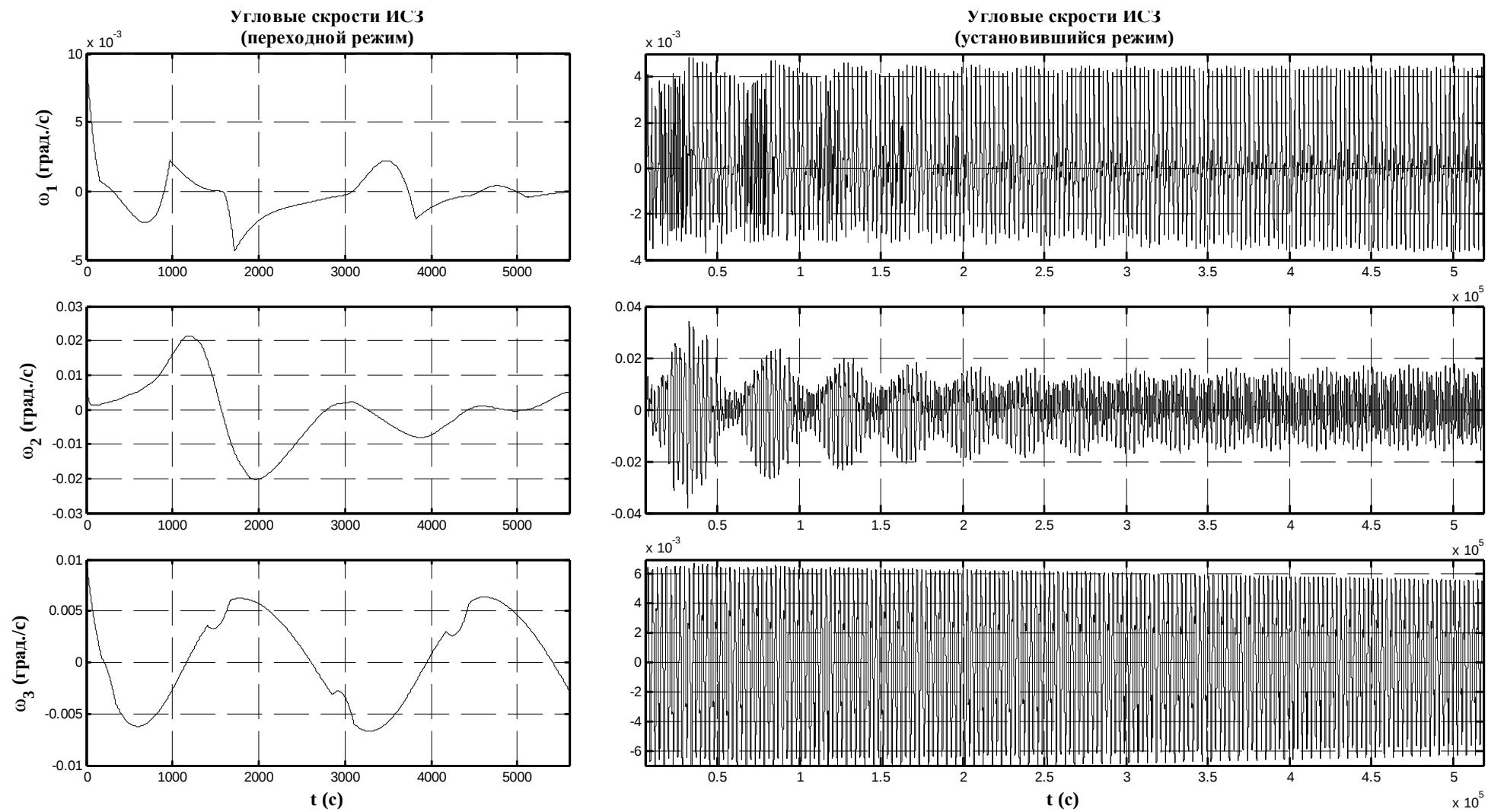


Рис. 3.22 Угловая скорость ИСЗ (режим ограничения роста кинетического момента).

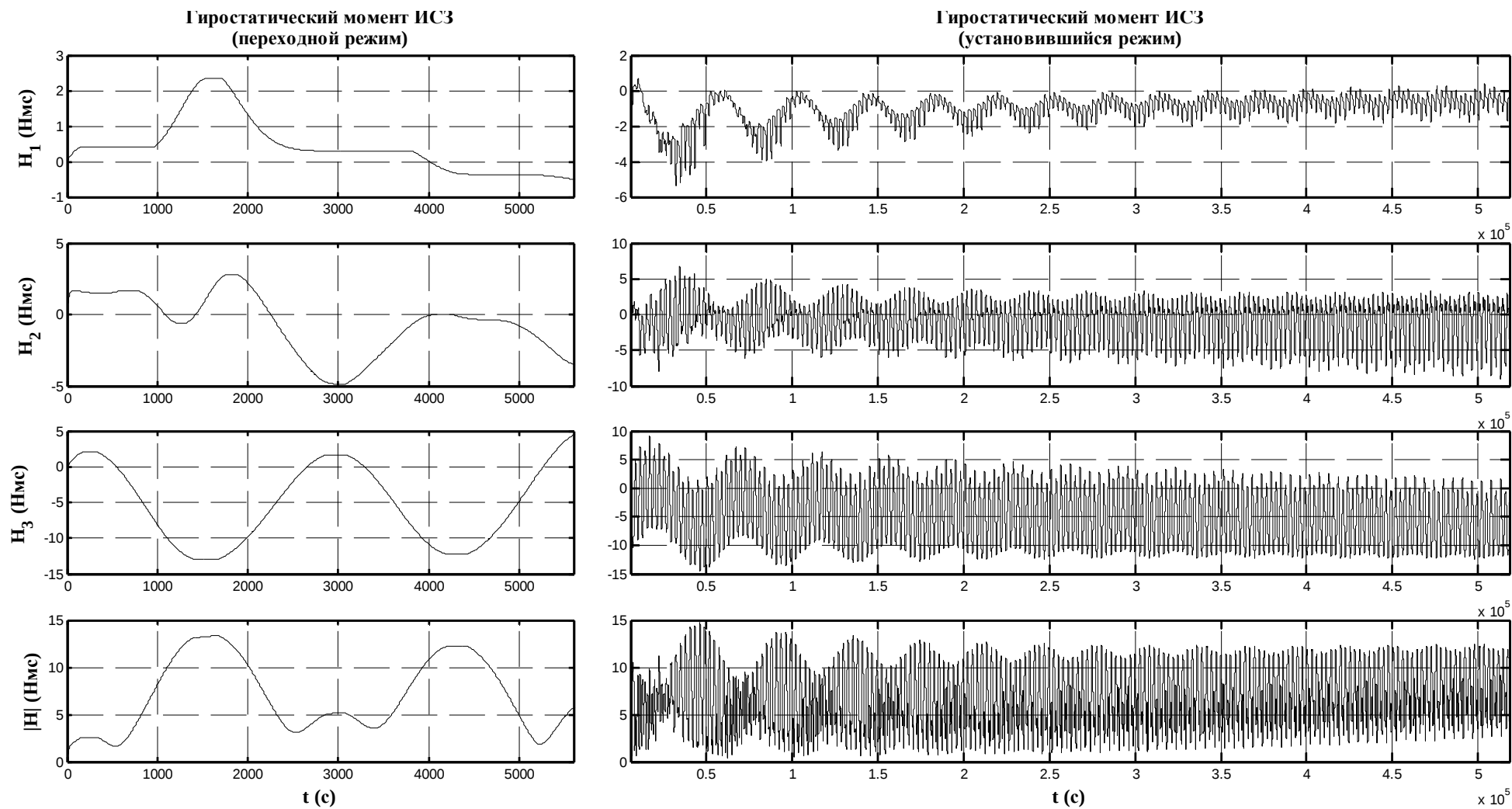


Рис. 3.23 Гиростатический момент ИСЗ (режим ограничения роста кинетического момента).

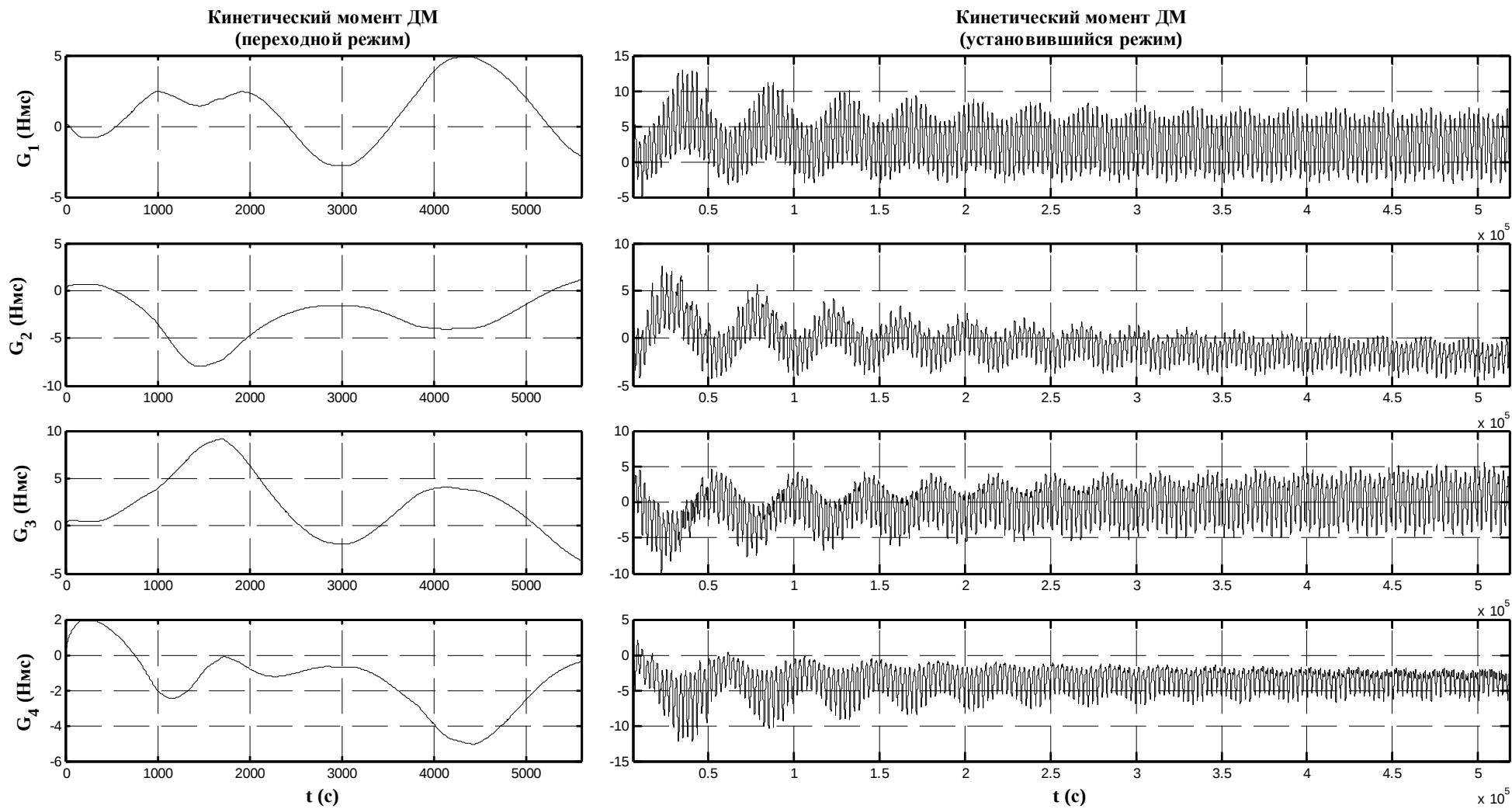


Рис. 3.24 Кинетический момент ДМ (режим ограничения роста кинетического момента).

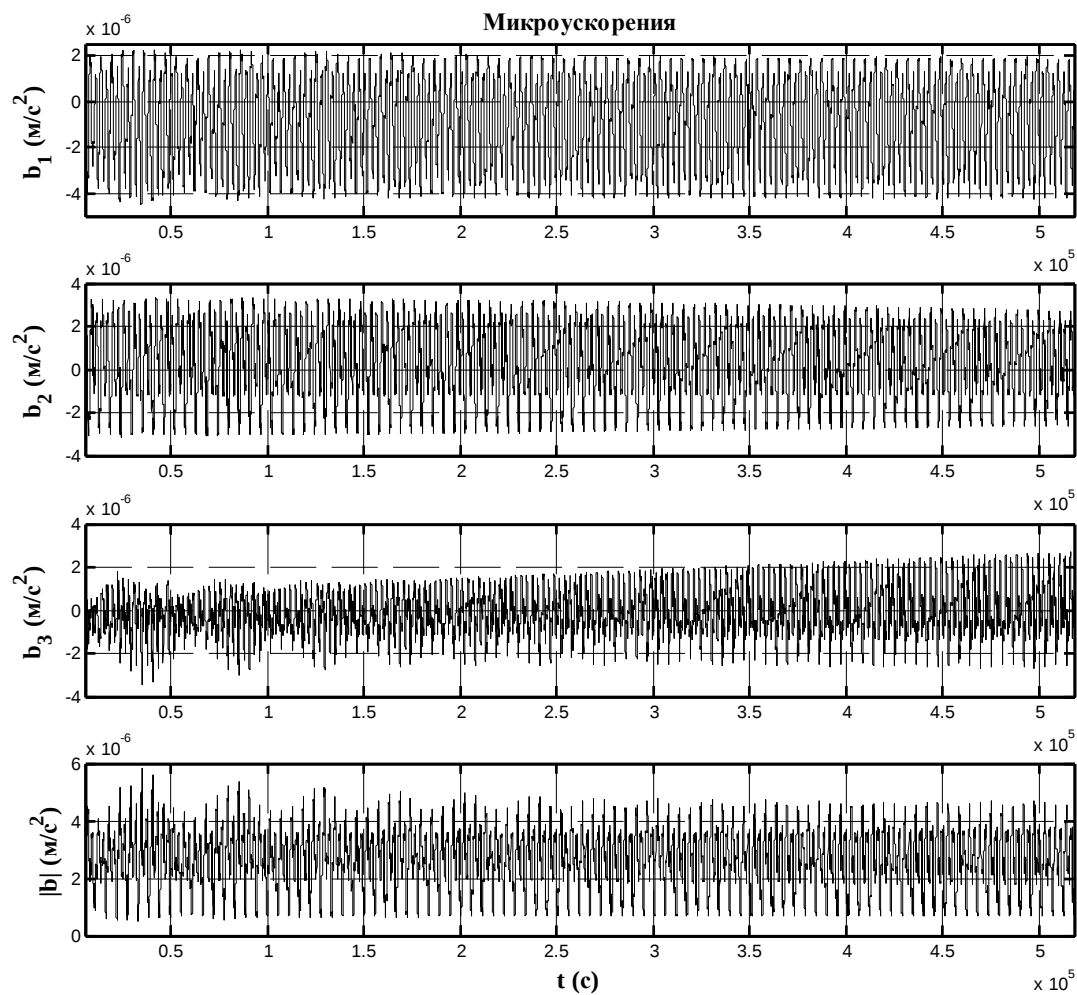
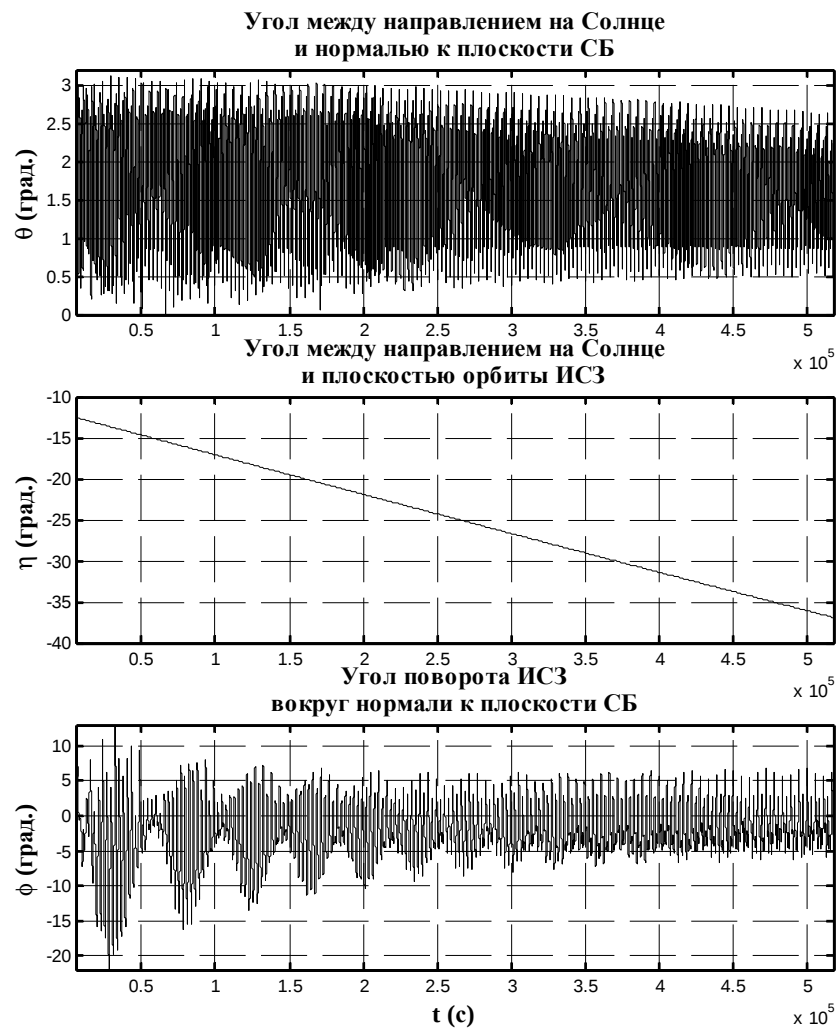


Рис. 3.25 Углы ориентации ИСЗ относительно Солнца и микроускорения (режим ограничения роста кинетического момента).

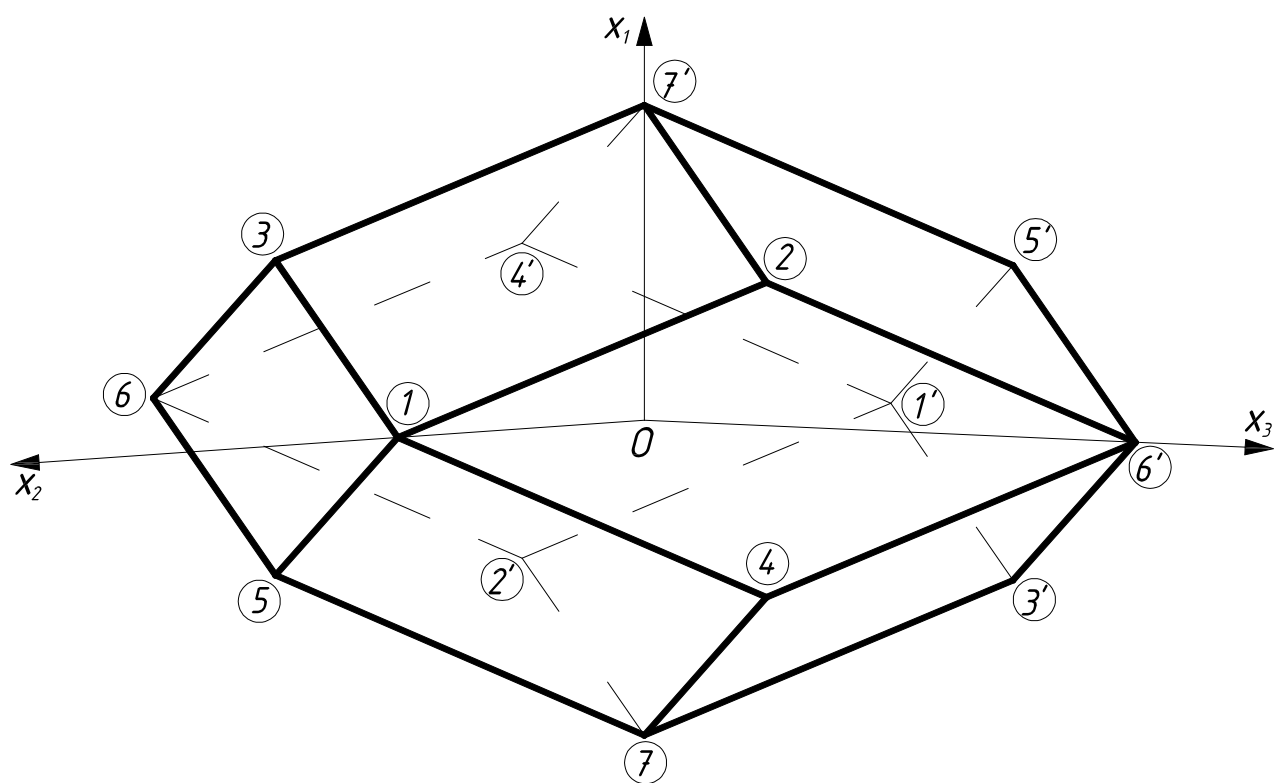


Рис. 4.1 Общий вид многогранника P .

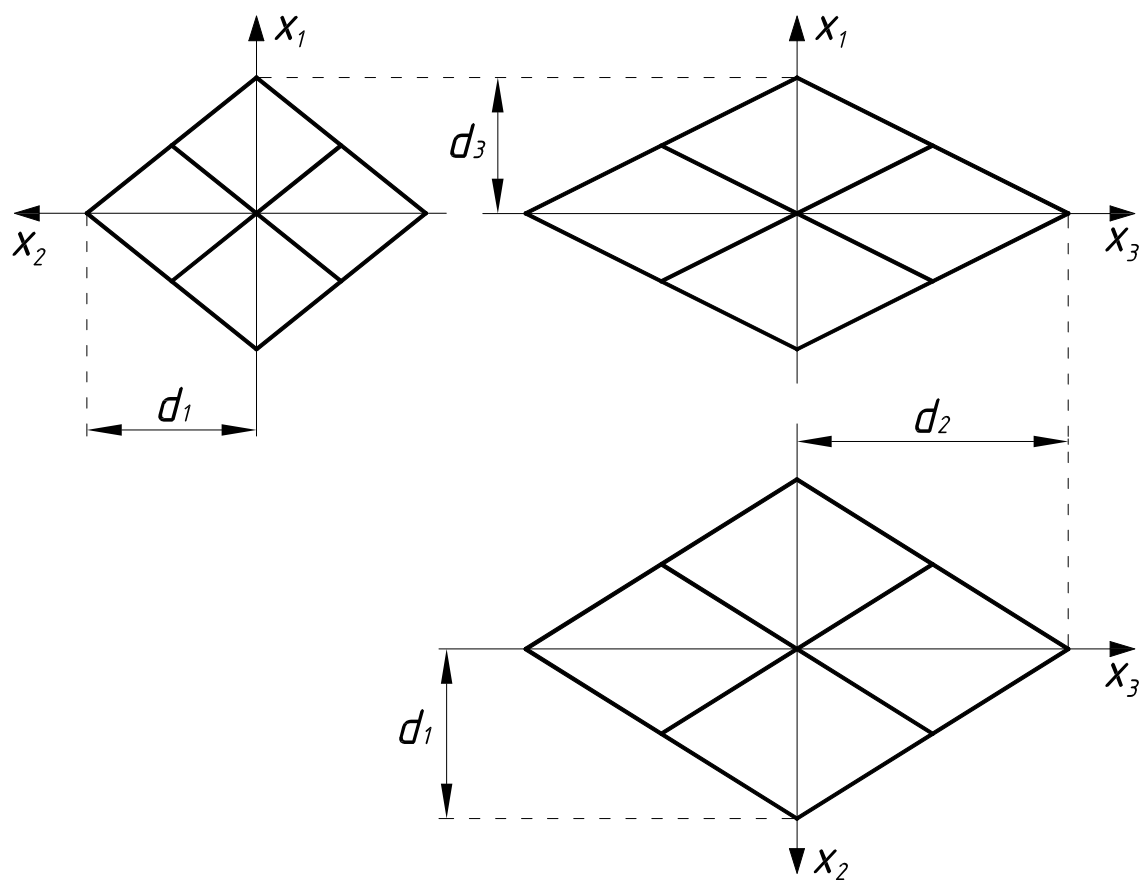


Рис. 4.2 Проекции многогранника P на координатные плоскости связанной с ИСЗ системы координат.

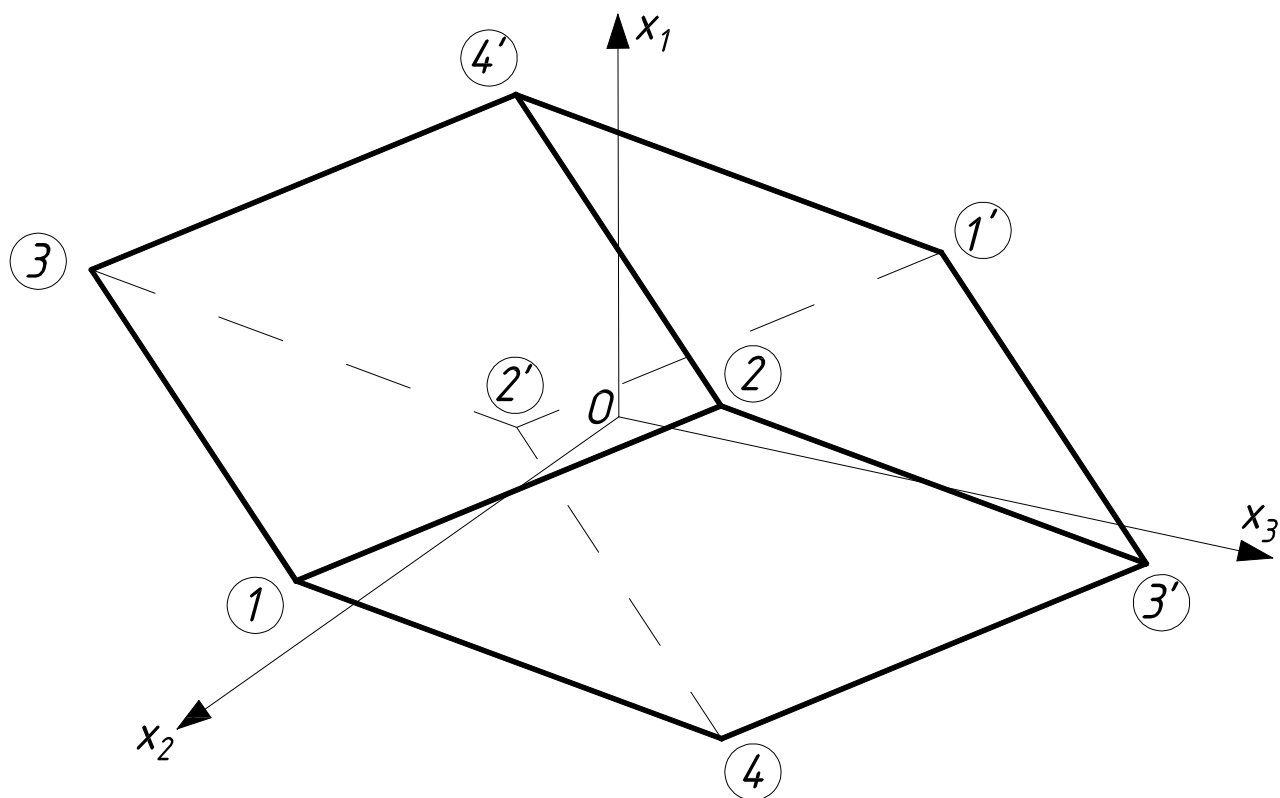


Рис. 4.3 Общий вид параллелепипеда P' .

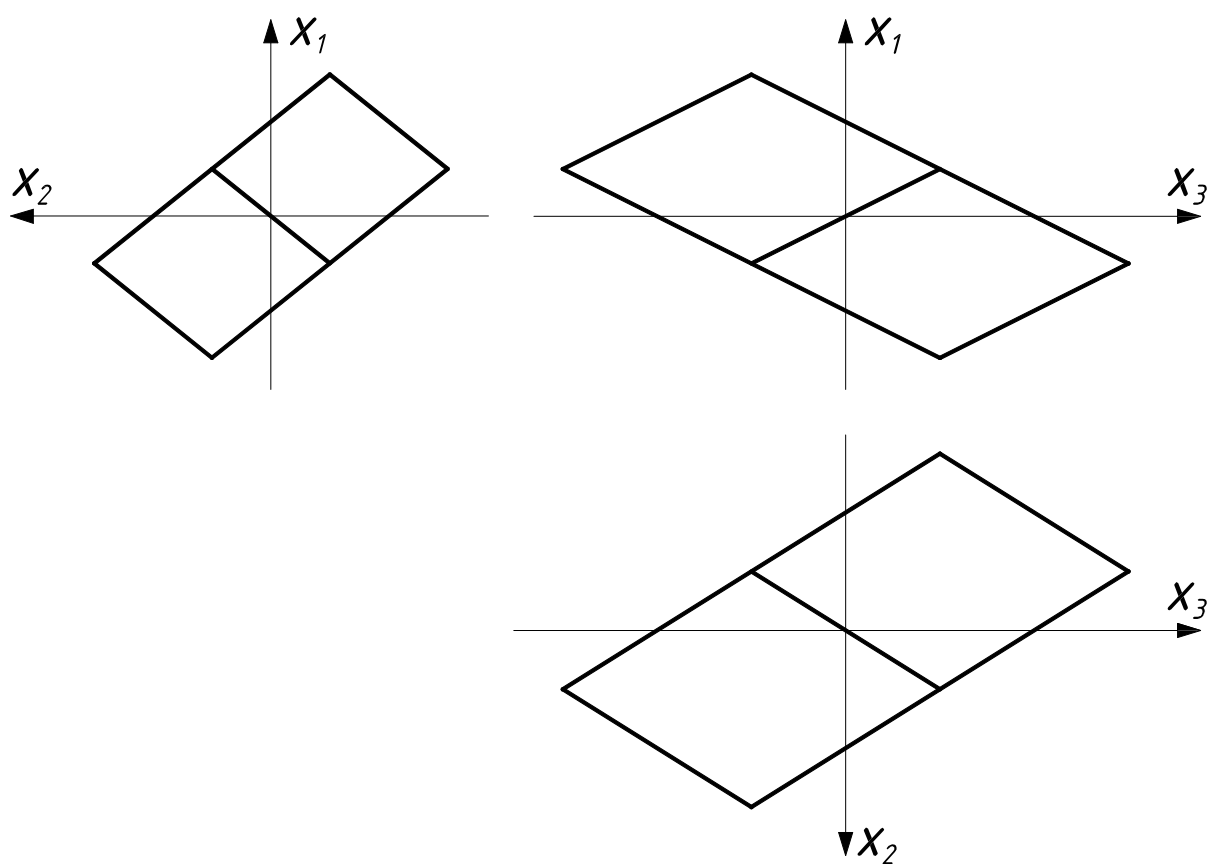


Рис. 4.4 Проекции параллелепипеда P' на координатные плоскости связанной с ИСЗ системы координат.

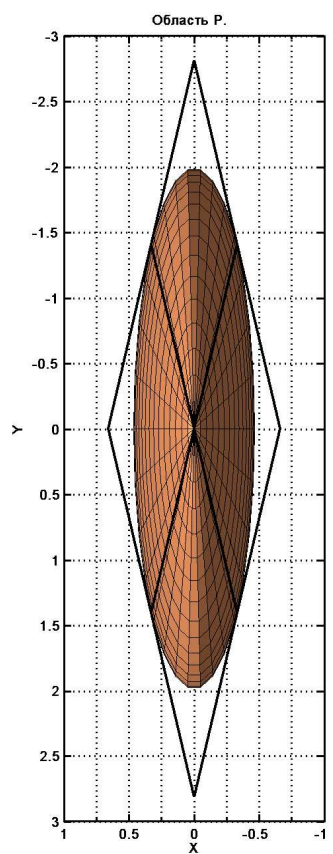
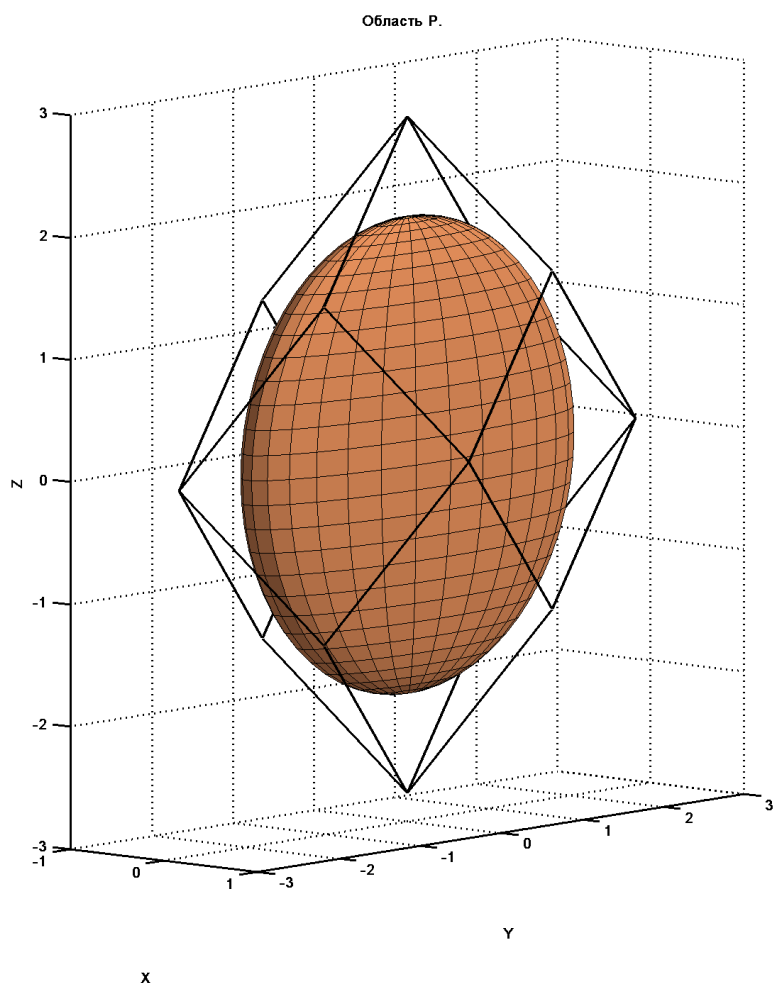
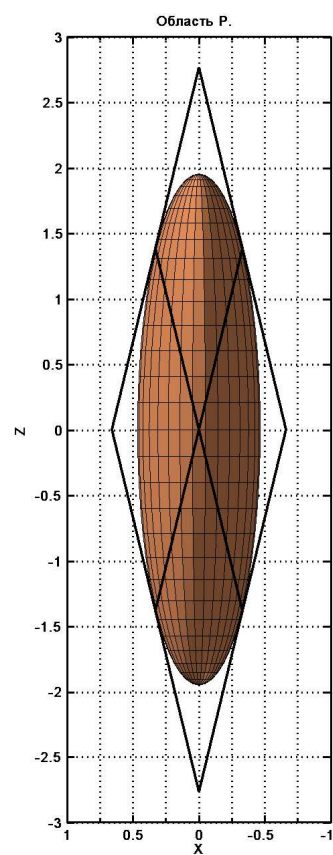
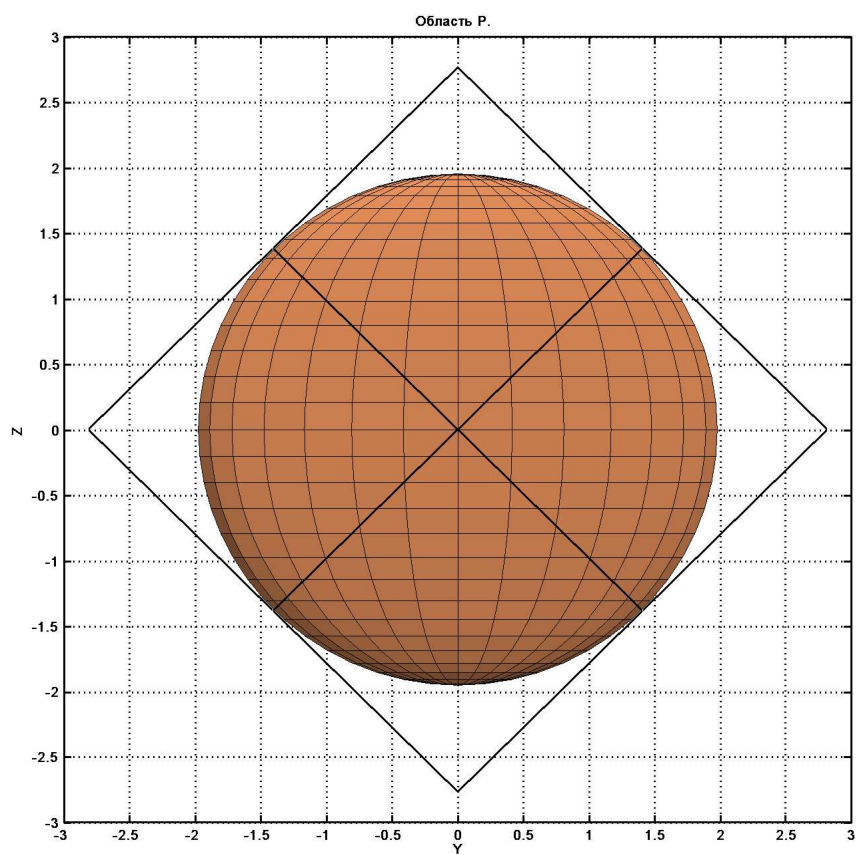


Рис. 4.5 Взаимное расположение многогранника P и эллипсоида H_T .

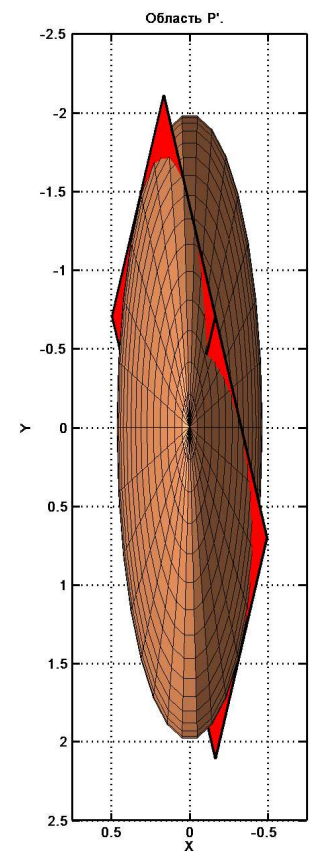
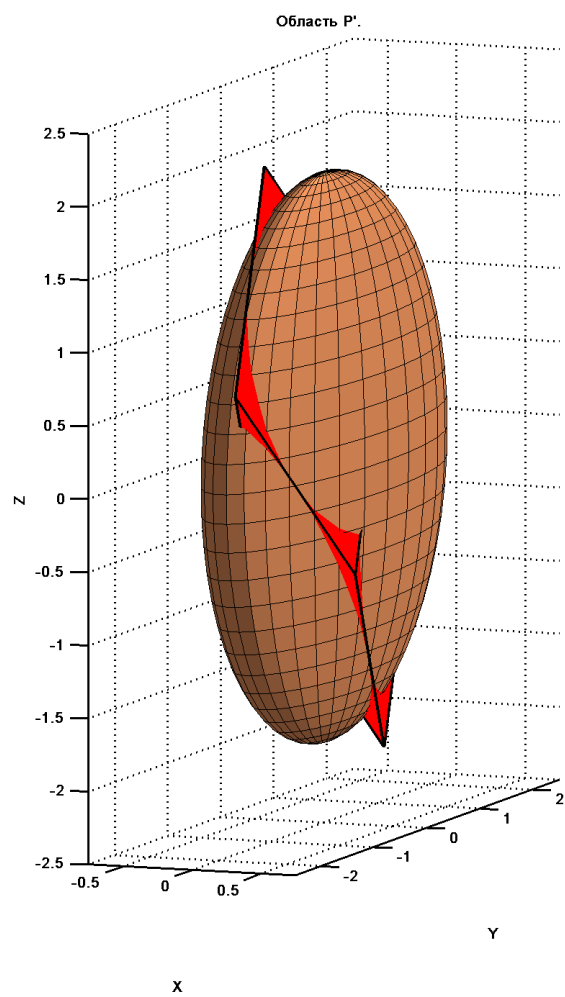
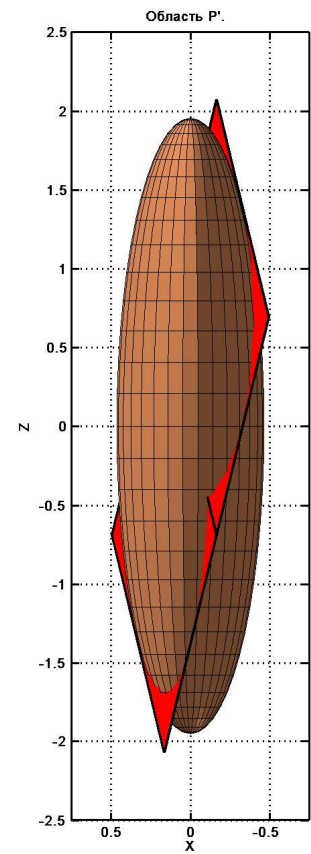
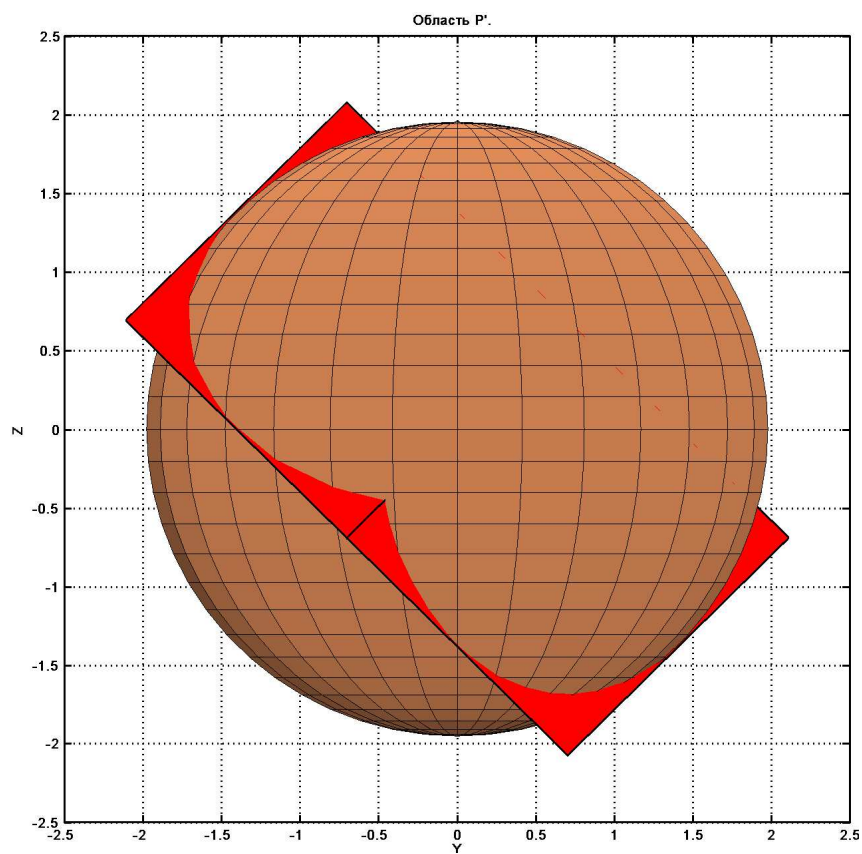


Рис. 4.6 Взаимное расположение многогранника P' и эллипсоида H_T .

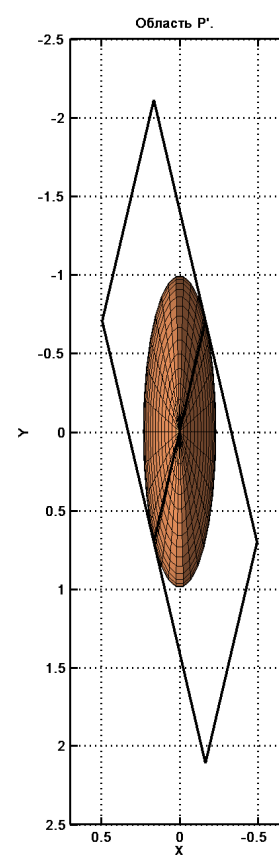
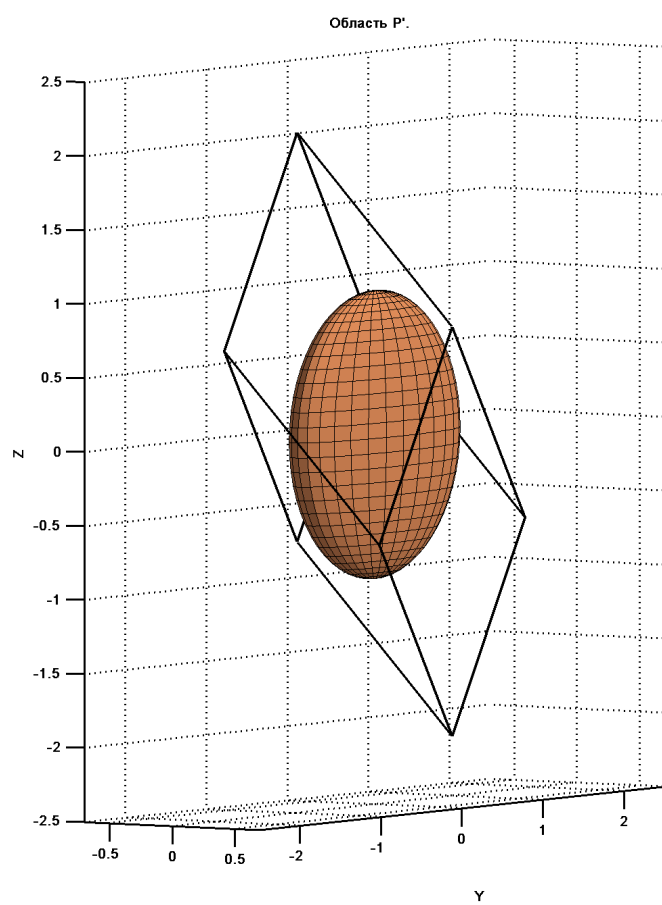
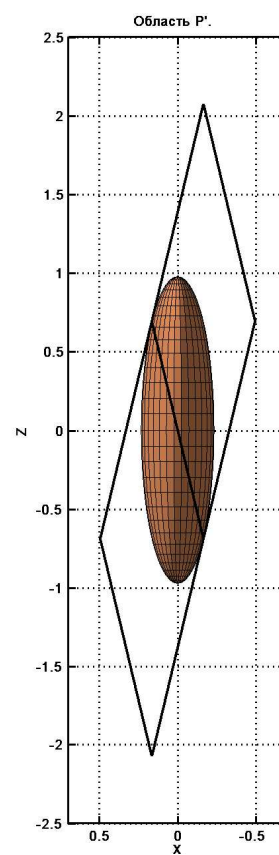
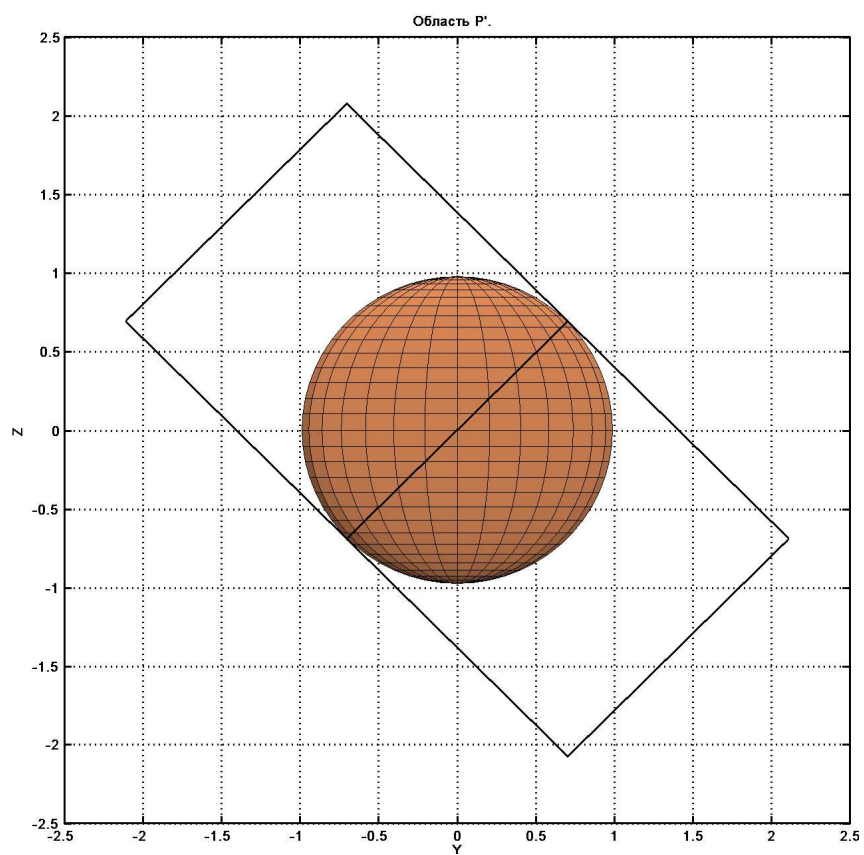


Рис. 4.7 Взаимное расположение многогранника P' и уменьшенного в два раза эллипсоида H_T .

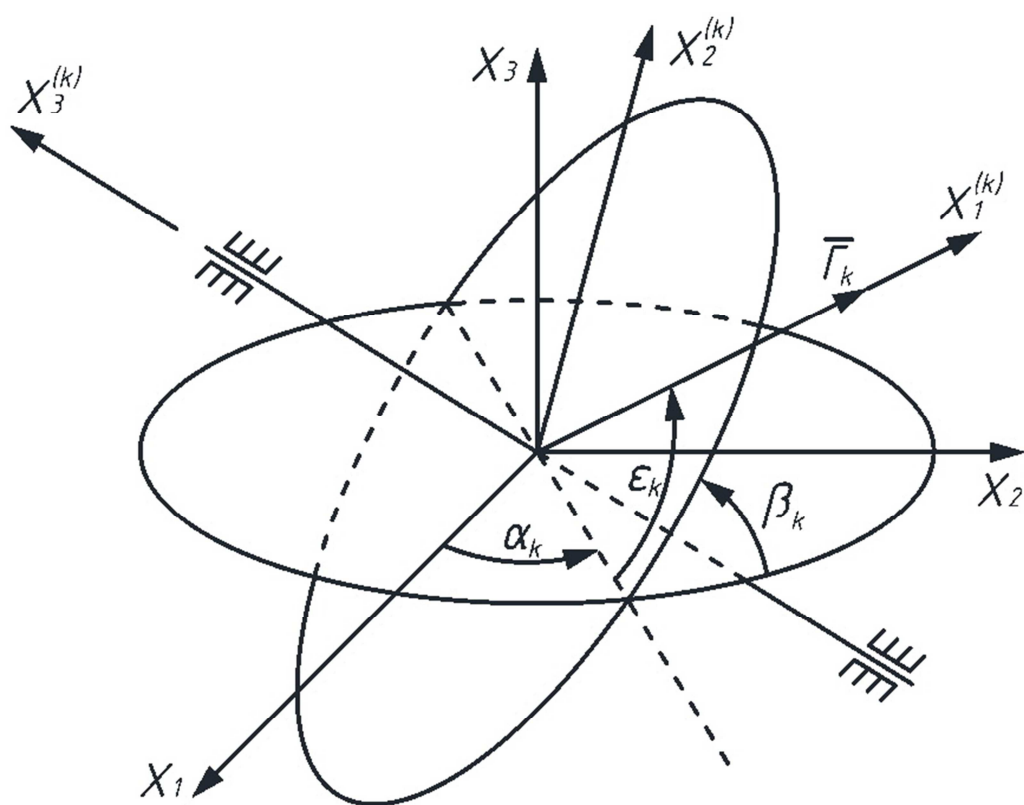


Рис. 5.1 Взаимное расположение систем координат.

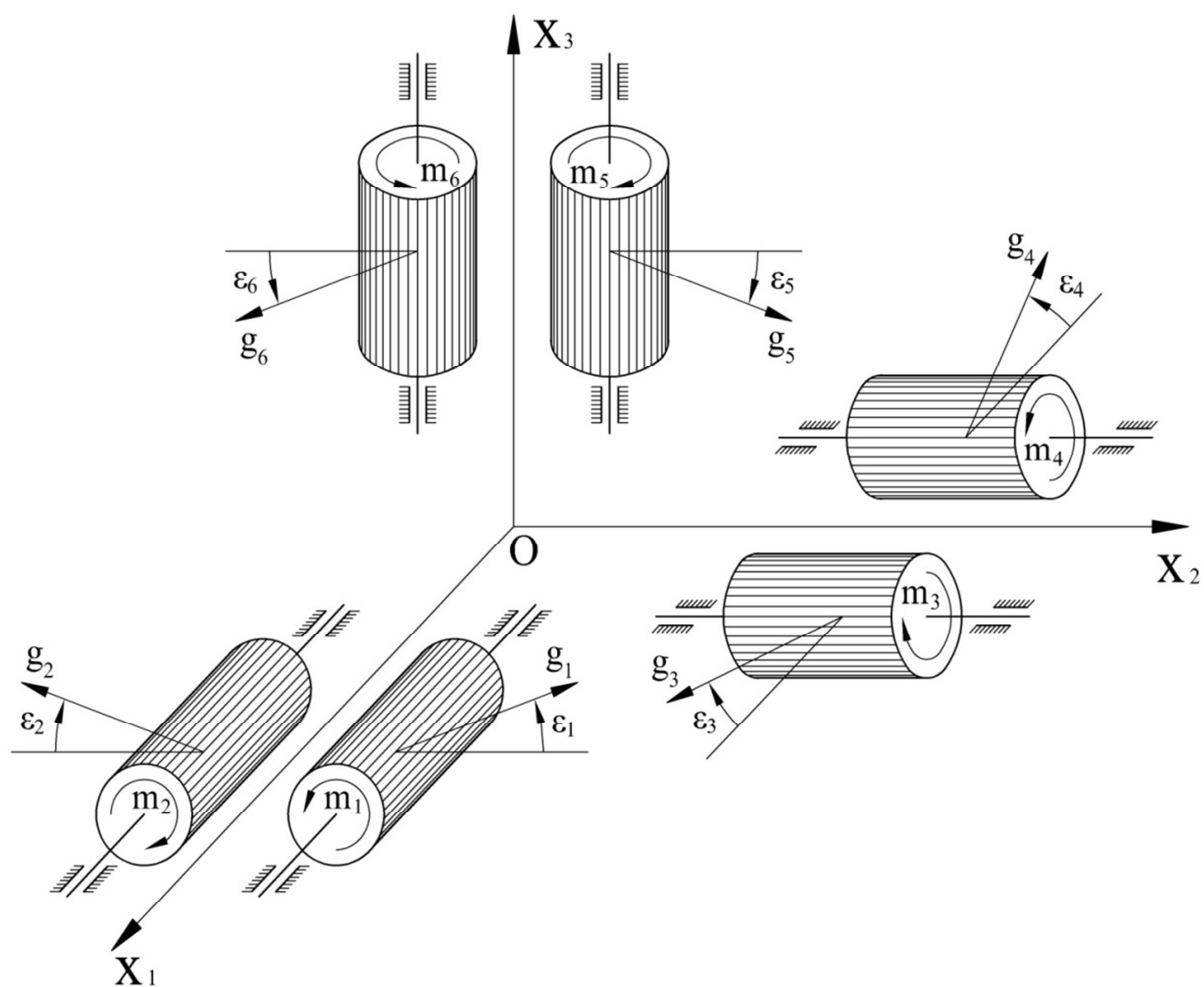


Рис. 5.2 Система гироскопов 3-SPE.

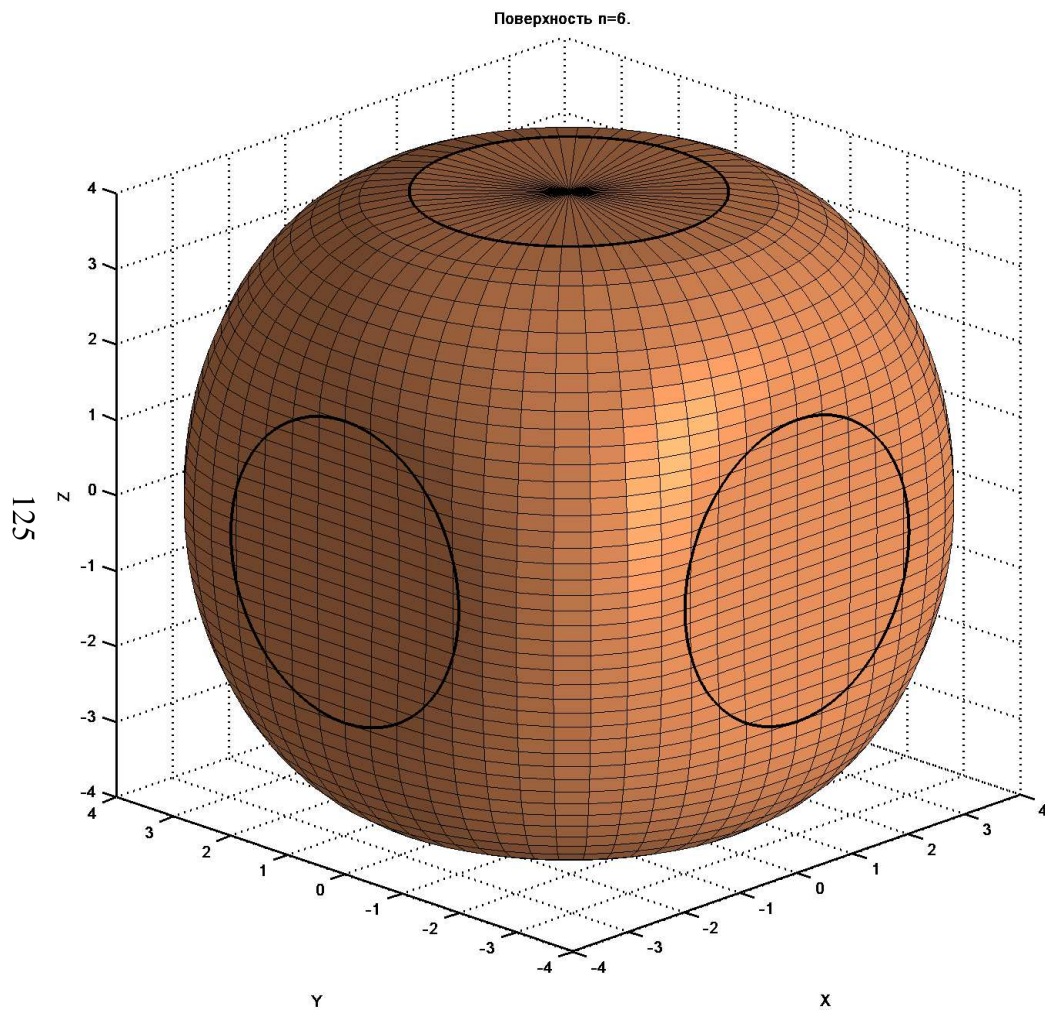


Рис. 5.3 Общий вид поверхности $S^0(n=6)$.

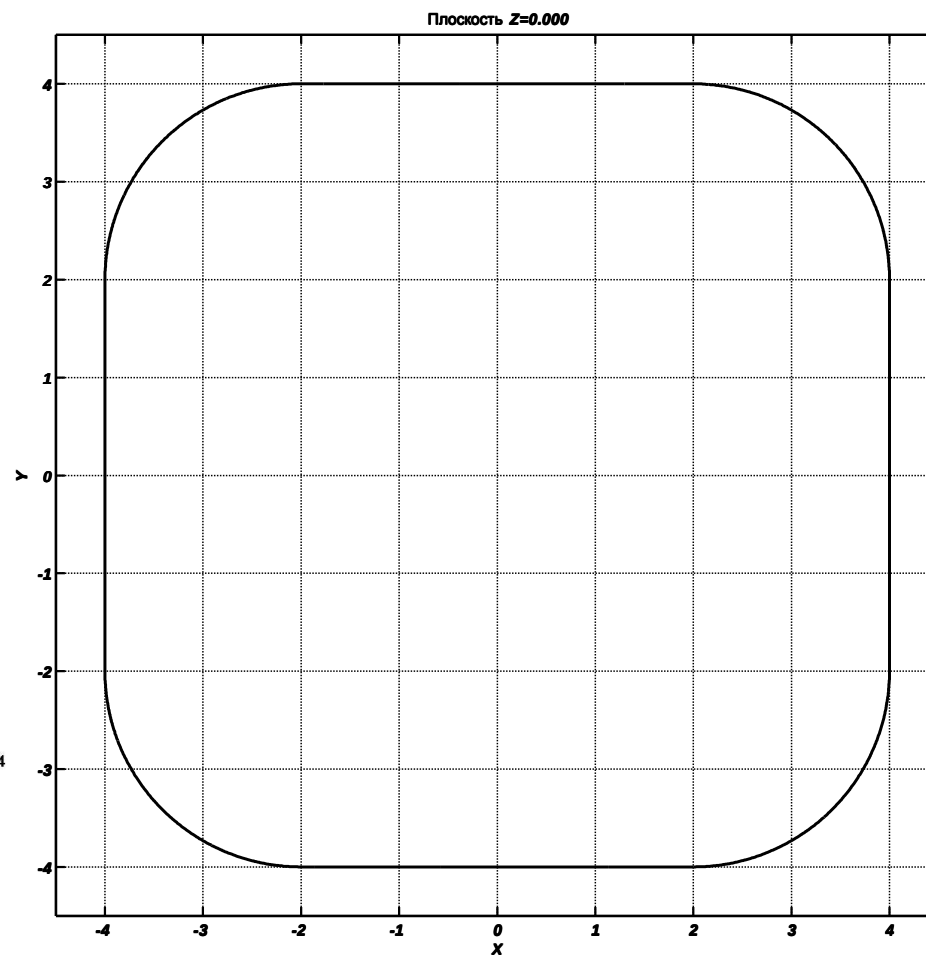


Рис. 5.4 Сечение поверхности $S^0(n=6)$
плоскостью $H_3=0$.

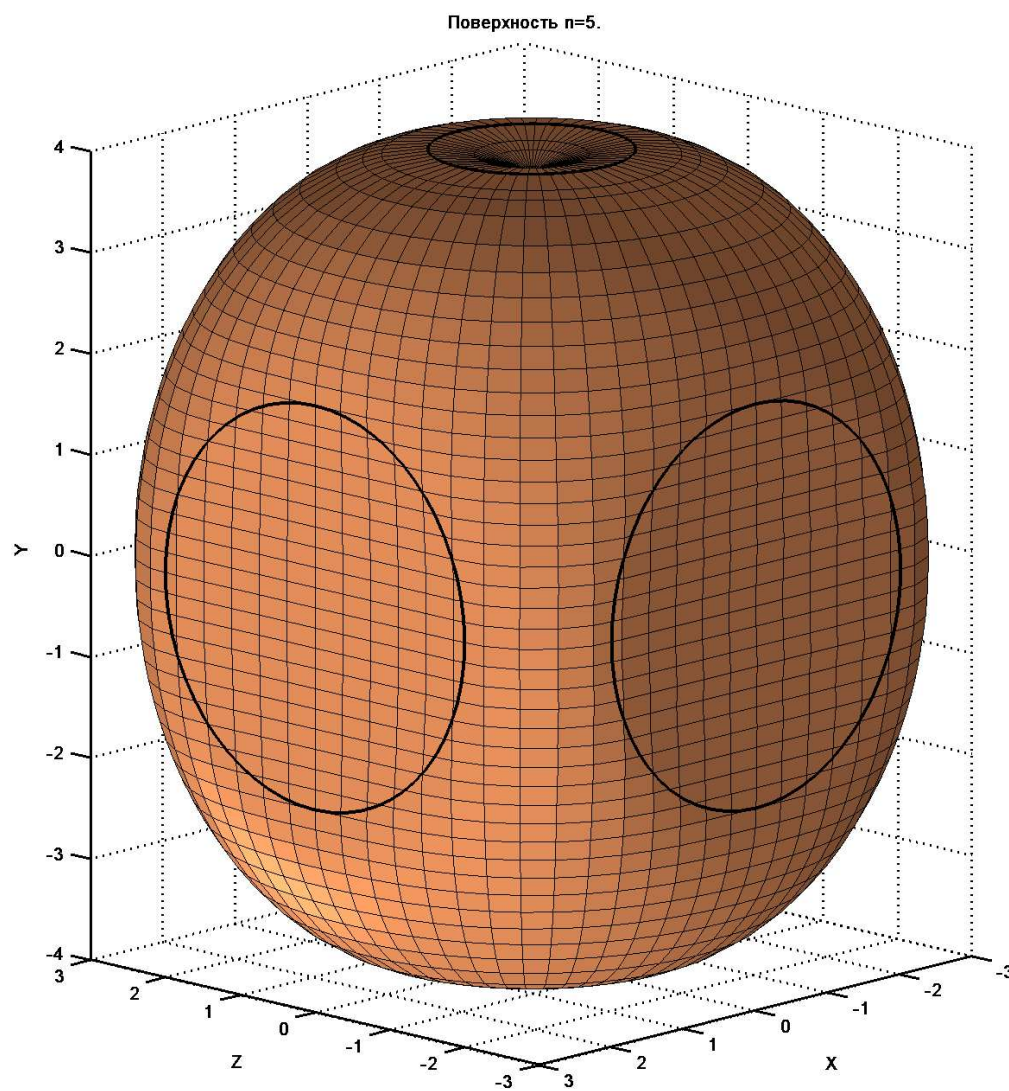


Рис. 5.5 Общий вид поверхности $S^0(n=5)$.

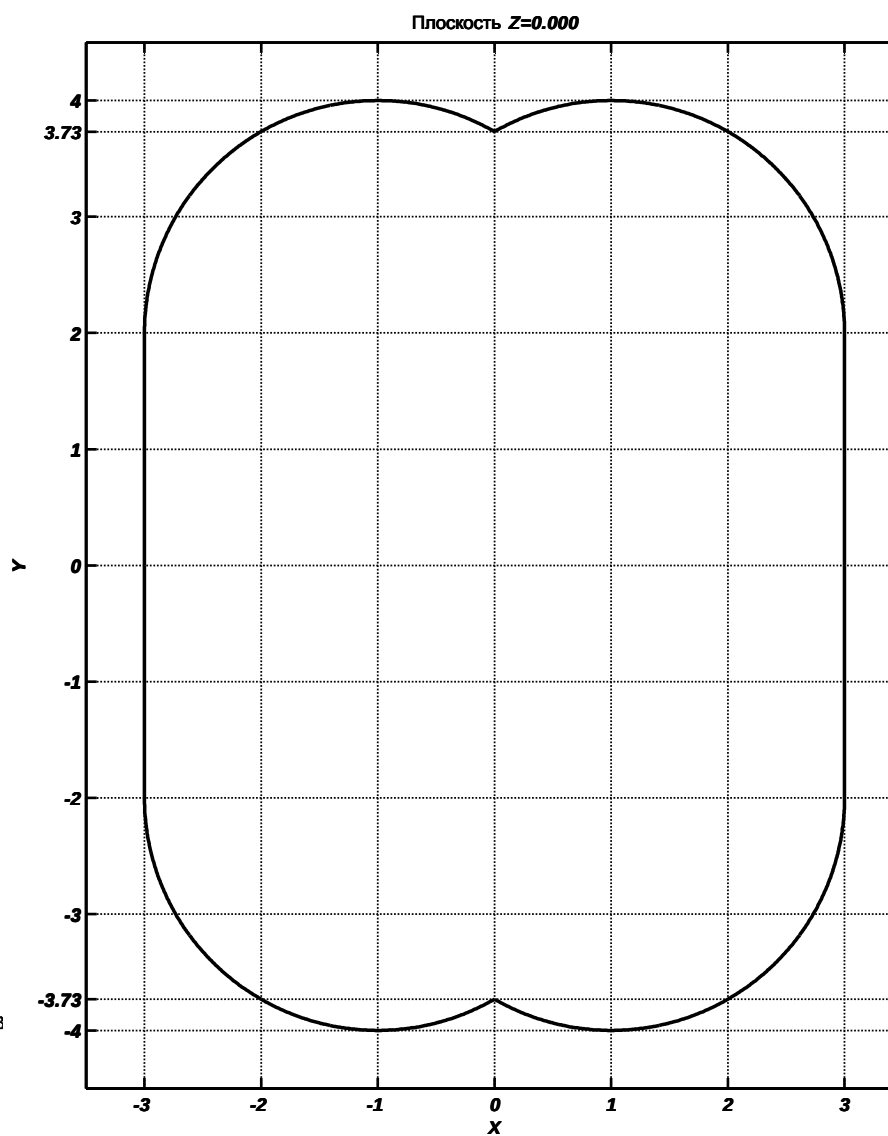


Рис. 5.6 Сечение поверхности $S^0(n=5)$ плоскостью $H_3=0$.

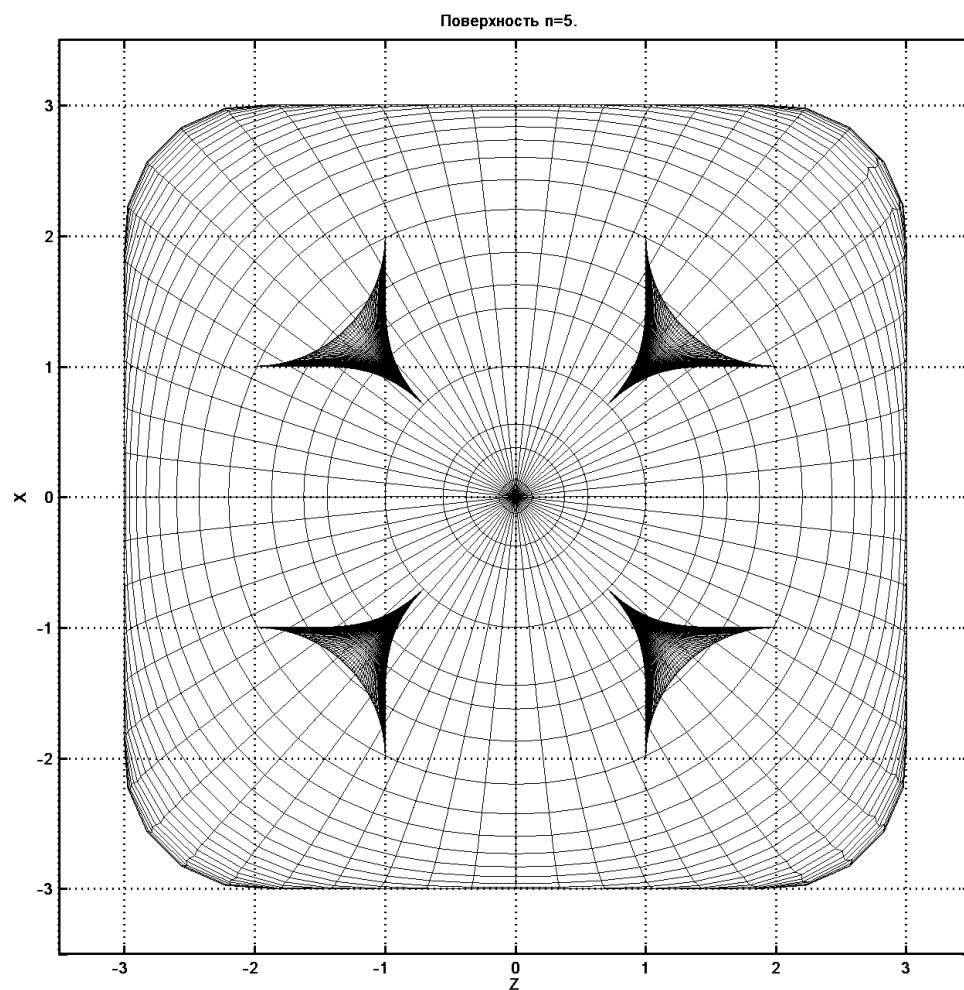


Рис. 5.7 Вид поверхностей S^0 и S^* ($n=5$)
с конца оси X_2 .

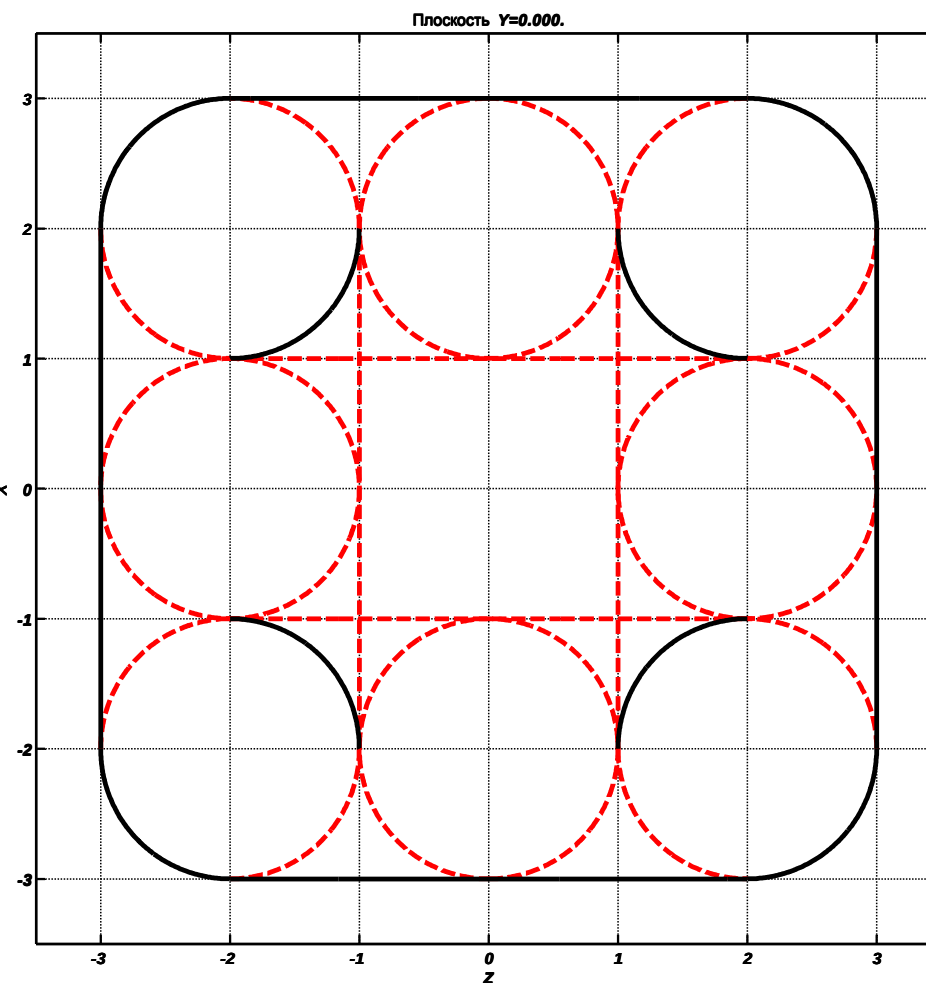


Рис. 5.8 Сечение поверхностей S^0 и S^* ($n=5$)
плоскостью $H_2=0$.

Плоскость $X=1.000$.

The plot shows a coordinate system with a horizontal axis labeled Z and a vertical axis labeled Y . The Z -axis ranges from -3 to 3, and the Y -axis ranges from -4 to 4. A large black circle is centered at the origin $(0,0)$ with a radius of 2. A red dashed curve is plotted, which is symmetric about both the Z and Y axes. The curve has four main lobes, each extending towards the corners of the plot. The lobes are connected by a central region that forms a four-pointed star shape. The red dashed curve is contained within the black circle.

Рис. 5.10 Сечение поверхностей S^0 и S^* ($n=5$) плоскостью $H_1=1$.

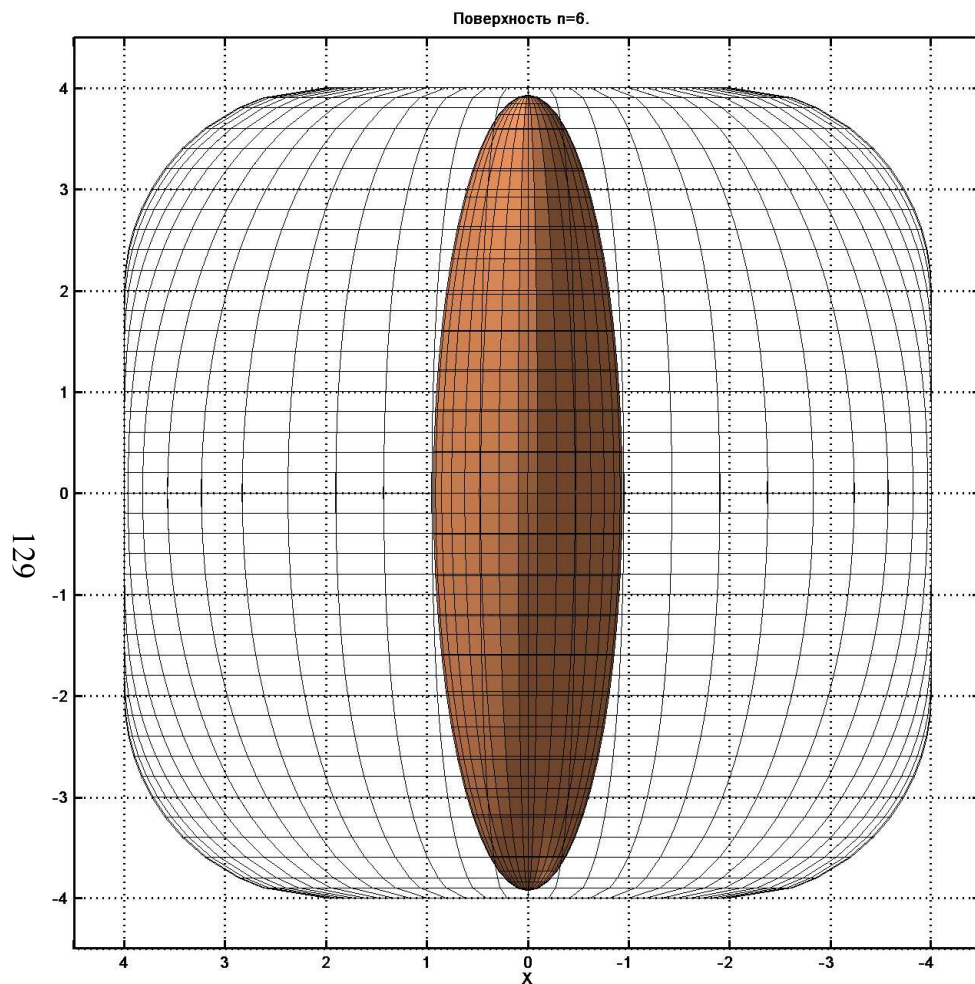


Рис. 5.11 Вид поверхности S^0 ($n=6$) и эллипсоида требуемых значений кин. момента с конца оси X_2 .

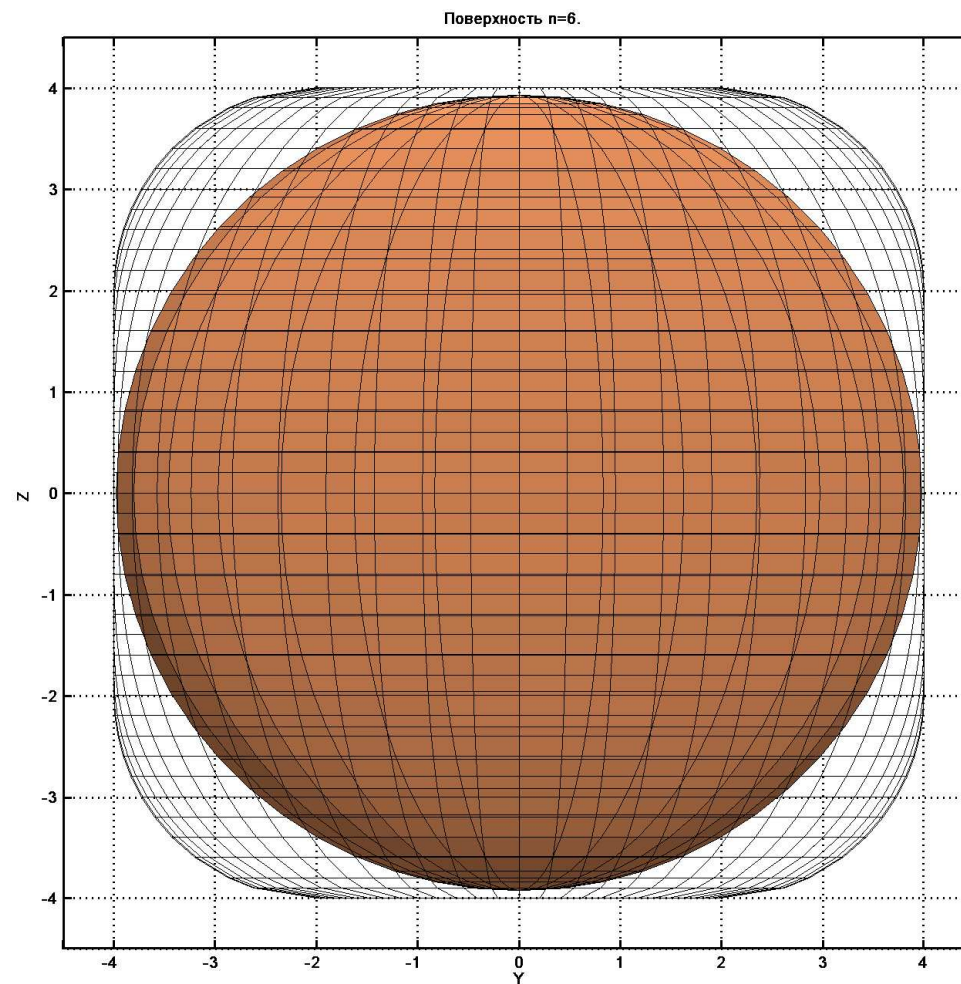


Рис. 5.12 Вид поверхности S^0 ($n=6$) и эллипсоида требуемых значений кин. момента с конца оси X_1 .

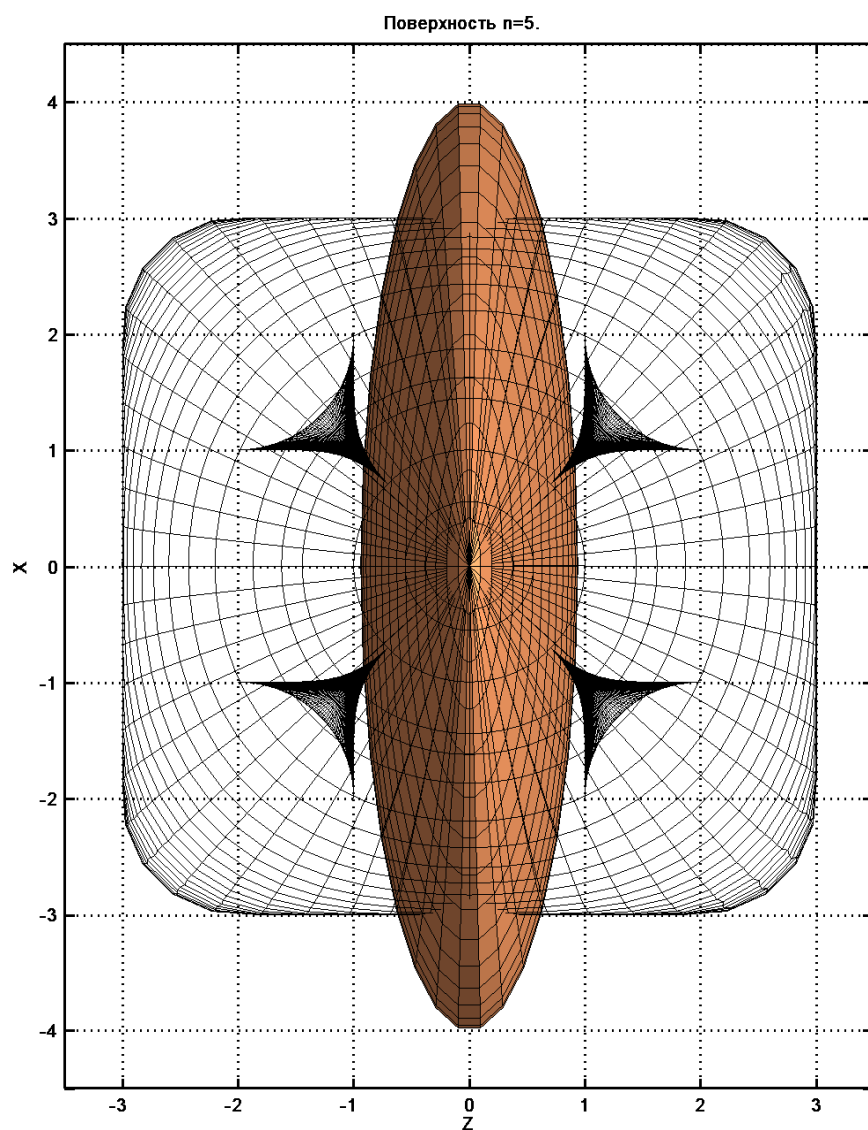


Рис. 5.13 Вид поверхностей S^0 , S^* ($n=5$) и эллипсоида требуемых значений кин. момента с конца оси X_2 .

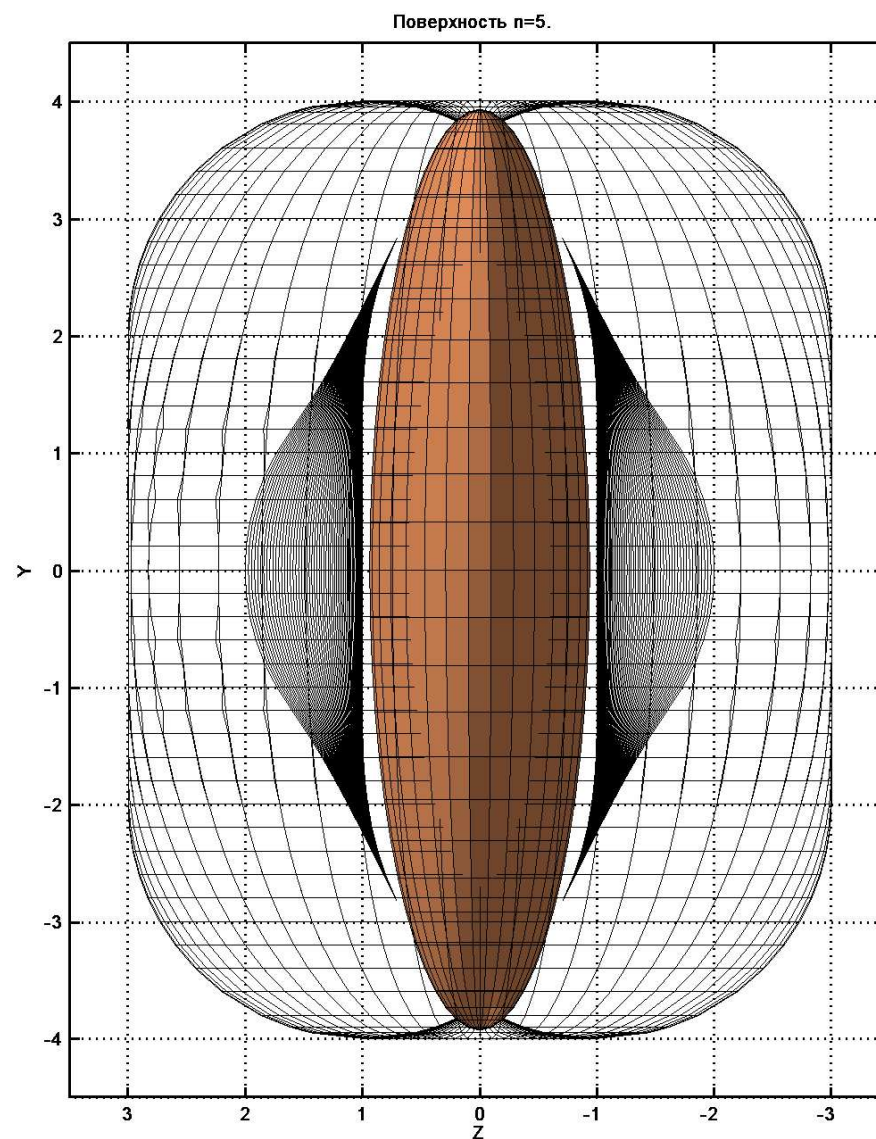


Рис. 5.14 Вид поверхностей S^0 , S^* ($n=5$) и эллипсоида требуемых значений кин. момента с конца оси X_1 .

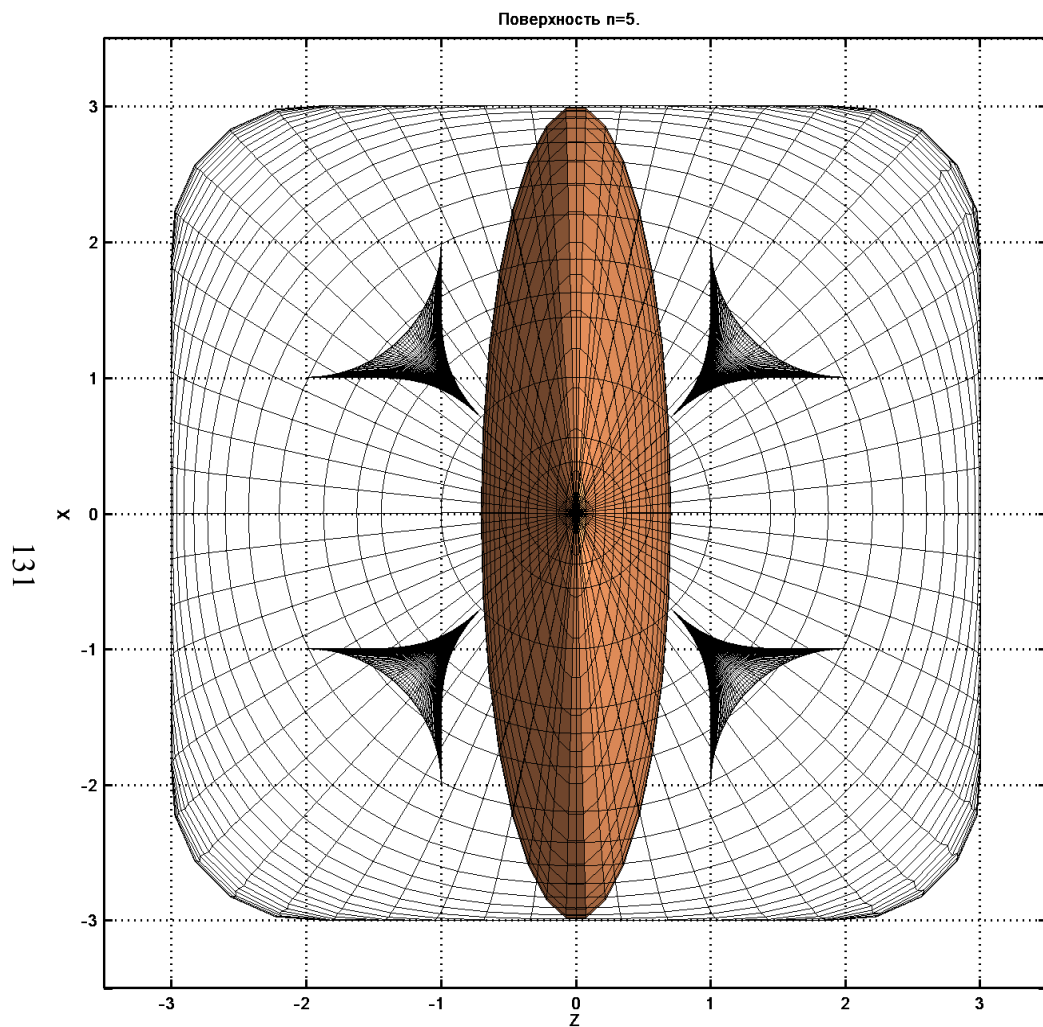


Рис. 5.15 Вид поверхностей S^0 , S^* ($n=5$) и уменьшенного эллипсоида требуемых значений кин. момента с конца оси X_2 .

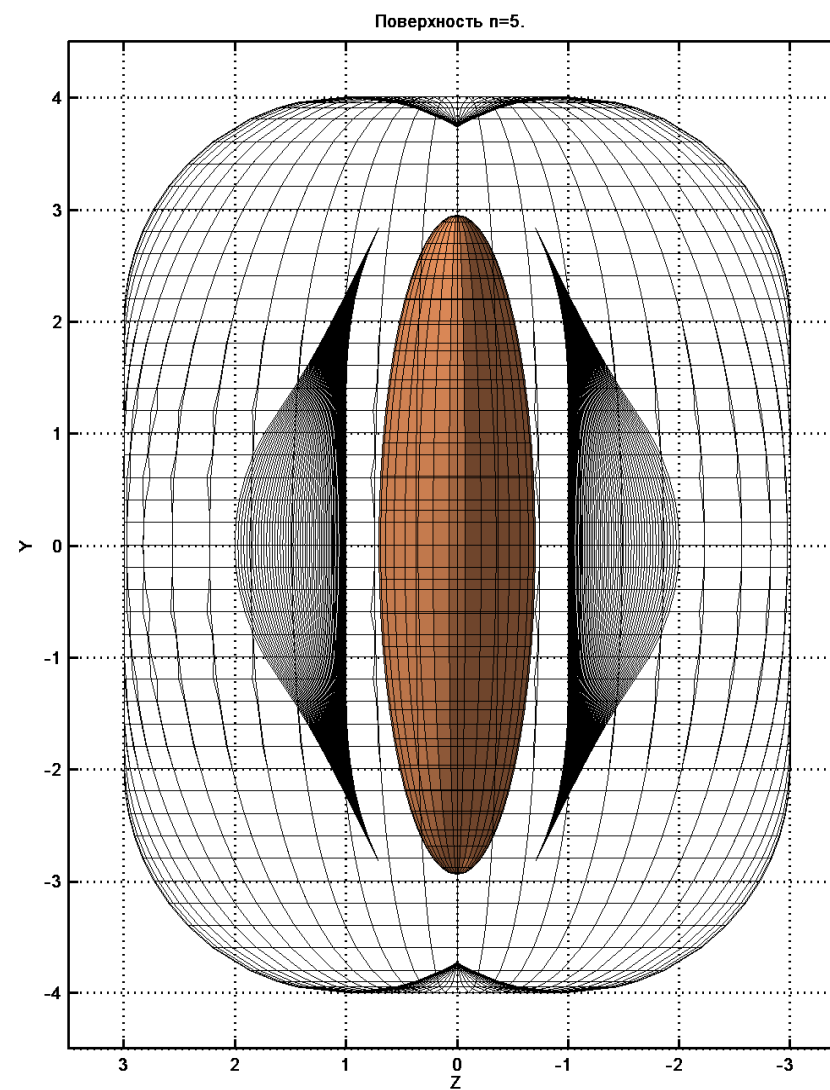


Рис. 5.16 Вид поверхностей S^0 , S^* ($n=5$) и уменьшенного эллипсоида требуемых значений кин. момента с конца оси X_1