

Федеральное государственное учреждение
«Федеральный исследовательский центр
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша
Российской академии наук»

На правах рукописи

Шестопёров Алексей Игоревич

**СТАБИЛИЗАЦИЯ ЗАДАННЫХ РЕЖИМОВ УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ
СПУТНИКОВ С НЕЖЕСТКИМИ ЭЛЕМЕНТАМИ КОНСТРУКЦИИ**

Специальность: 01.02.01 теоретическая механика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., проф.
М.Ю. Овчинников

Москва – 2022

Оглавление

Введение	4
Глава 1. Математическая модель КА с произвольным числом НЭ.....	16
1.1. Постановка задачи и системы координат	16
1.2. Вывод уравнений движения НЭ	20
1.3. Вычислительный аспект интегрирования уравнений движения НЭ.....	25
1.4. Вывод уравнений движения КА с N НЭ в обобщенных координатах	28
1.5. Тестирование программной реализации модели.....	37
Выводы к главе 1	43
Глава 2. Алгоритмы стабилизации КА с НЭ	44
2.1. Постановка задачи. Построение стабилизирующего закона управления.....	44
2.2. Линейно-квадратичные алгоритмы стабилизации КА с НЭ.....	49
2.3. Численное моделирование.....	56
Выводы к главе 2.....	61
Глава 3. Построение опорной траектории углового движения КА третьего порядка гладкости.....	62
3.1. Постановка задачи и закон управления	63
3.2. Влияние установившихся значений модальных переменных на процесс орбитальной стабилизации	66
3.3. Критерии построения опорной траектории КА с НЭ.....	70
3.4. Конструкция опорного кватерниона	73
3.5. Построение полиномов интерполяции.....	79
3.6. Поиск вспомогательных кватернионов.....	82
3.7. Численное моделирование.....	87
Выводы к главе 3.....	96
Заключение	97
Список литературы	98

Приложения.....	105
А. Уравнения движения КА с жестко закрепленными НЭ относительно центра масс	105
Б. Внешние обобщенные силы, действующие на элементы КА	108
В. Явные выражения производных опорной траектории	111

Введение

При разработке систем ориентации поведение космического аппарата (КА) в большинстве случаев может с хорошей степенью точности быть описано уравнениями движения твердого тела. Однако аппараты, содержащие в своей конструкции элементы большой протяжённости, зачастую изготавливающиеся из легких материалов, требуют иного подхода к моделированию их движения. Примерами таких элементов могут служить выносные штанги, солнечные панели и антенны, включенные в конструкции широко использующихся на практике спутников дистанционного зондирования Земли высокого и сверхвысокого разрешения, геостационарных спутников связи.

Ввиду все более возрастающих требований по точности ориентации, вибрации, возникающие в ходе орбитального и углового маневрирования в вышеуказанных элементах конструкции КА, оказываются фактором, который не только негативно сказывается на точности стабилизации требуемых режимов движения, но даже может приводить к их неустойчивости. В связи с этим при проектировании систем управления ориентацией КА с *нежесткими элементами* (НЭ) возникает необходимость

- составления высокоточной модели движения КА, учитывающей вибрации в элементах его конструкции;
- адаптации уже известных или разработки новых методов стабилизации заданных режимов углового движения КА с НЭ, учитывающих влияние вибраций на ориентацию КА;
- построения таких режимов углового движения КА, в процессе работы которых колебания в НЭ возмущались бы как можно меньше.

Остановимся подробнее на каждом из трех указанных этапов.

Существует множество подходов к построению математических моделей КА с НЭ, степень применимости которых в каждой конкретной ситуации зависит от целей и характера рассматриваемой прикладной задачи. В первую

очередь при моделировании упругих КА подлежат выбору базовые принципы механики [1, 2], выступающие фундаментом любой процедуры вывода уравнений движения КА. Распространенными являются методики, опирающиеся на принцип Даламбера-Лагранжа [3, 4], на уравнения Лагранжа 2-го рода [5] и Эйлера-Лагранжа для квазискоростей [6, 7, 4], а также на уравнения Кейна [8, 9]. Некоторые рассуждения, посвященные проблеме выбора базового принципа в случае систем упругих тел, содержатся в работах [10, 11]. В них же отмечено, что для КА, моделируемого как единое упругое тело, данный выбор во многом определяется предпочтениями автора.

По сравнению с задачами, в рамках которых КА моделируется как твердое тело, богаче становится набор используемых систем координат [12], за счет определения которых вид математических моделей может быть упрощен. Например, в случае КА с НЭ, корпус которого можно считать недеформируемым, удобно ввести так называемую «локально» связанную систему координат, жестко связанную с ним [13].

При разработке математической модели движения деформируемого КА в ряде случаев удастся описать поведение его элементов уравнениями в частных производных [14]. Однако зачастую возникает необходимость прибегать к методам дискретизации континуальных систем с целью сведения уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Последние являются более удобными с точки зрения численного интегрирования и в то же время позволяют использовать большой набор хорошо изученных методов теории управления. Наиболее эффективным подходом к дискретизации является модальный анализ [13, 1], в основе которого лежит представление упругих деформаций в виде бесконечного ряда по некоторой полной системе базисных функций, в качестве которых принимаются формы собственных колебаний НЭ. Он допускает использование собственных форм как всего КА, так и парциальных собственных форм колебаний НЭ в ситуации, когда последние содержатся в конструкции КА.

В настоящее время НЭ в большинстве своем имеют довольно сложную структуру (информацию о конструкции современных антенн можно найти в работах [15, 16]) и найти собственные формы их колебаний аналитически не удастся. В этом случае используются различные прикладные пакеты, такие как MSC NASTRAN [17], в основе которого лежит метод конечных элементов.

Следующий этап разработки системы ориентации КА с НЭ состоит в построении управления его угловым движением. При этом наличие слабозатухающих мод колебаний приводит к необходимости их активного гашения.

Для решения двух вышеуказанных задач используются различные методы, такие как пропорционально-интегрально-дифференцирующий (ПИД) регулятор [18], ляпуновское управление [19, 20], методы оптимального управления [21–23], включающие линейно-квадратичные [24, 25], скользящее [26] и адаптивное управление [27, 28], а также нейросетевое управление [29].

Несмотря на новизну и несомненную теоретическую ценность многих предложенных алгоритмов, необходимо брать в расчет возможность их реального использования на борту КА в условиях ограниченных возможностей в части бортовых вычислительных средств, актюаторов и измерительных устройств. В связи с этим следует выделить следующие аспекты.

Для активного гашения вибраций в последнее время все чаще используются пьезоактюаторы [30, 31], непосредственно крепящиеся на НЭ и влияющие на колебательный процесс напрямую. Однако также представляет интерес альтернативная ситуация, когда гашение осуществляется только при помощи актюаторов, расположенных на корпусе КА и используемых для осуществления его разворота (в частности, маховиков).

Процесс вибраций НЭ в математической модели КА описывается с помощью мод колебаний НЭ. Точность модели зависит от количества учтенных мод. В то же время их использование при построении законов управления влечет увеличение вычислительной сложности алгоритмов управления. Одним

из возможных способов преодоления данного затруднения является построение закона управления, основанного на редуцированной модели движения КА с НЭ [24, 32, 33].

При проектировании космических миссий процедура определения опорной траектории углового движения спутника предваряет процесс синтеза управления. Зачастую построение такой траектории сводится к интерполяции значений кинематических параметров, заранее заданных в указанные моменты времени [34]. При этом ограничения, накладываемые на искомую опорную траекторию, диктуются характером самой миссии.

Рядом исследователей [35–37] было высказано предположение, что гладкое управляющее воздействие позволяет предотвратить возбуждение колебаний в НЭ. Если искать закон управления как решение обратной задачи динамики, вышеуказанная гипотеза потребует построения опорной траектории третьего порядка гладкости.

Хорошо известны инструменты, с помощью которых могут быть построены гладкие кривые в евклидовом пространстве: кривые Безье, полиномы Лагранжа, Ньютона и Эрмита, сплайны, В-сплайны и т. д. [38]. Если взять в качестве кинематических параметров, например, углы Эйлера [39] или модифицированные параметры Родрига [39], то указанные способы интерполяции могут быть использованы напрямую. Однако в качестве кинематических параметров, при всем многообразии последних [40], часто выбираются кватернионы: во-первых, из-за того, что они не вырождаются, а во-вторых, подходят для бортовой реализации. Кватернионы ориентации должны удовлетворять условию нормировки, ввиду которого при построении опорной траектории по набору фиксированных значений кватерниона ориентации в заданные моменты времени, вместо евклидовой интерполяции в \mathbb{R}^3 приходится иметь дело с задачей интерполяции на сфере S^3 , погруженной в четырехмерное пространство \mathbb{R}^4 .

Важным шагом на пути решения данной проблемы стал метод сферической линейной интерполяции (SLERP), предложенный Шумэйком [41], который, однако, обеспечивал лишь непрерывность опорной траектории. В [42] был предложен способ обобщения концепции SLERP на случай опорных траекторий произвольной степени гладкости. В его основе лежит идея представления искомого углового движения в виде одновременно совершающихся элементарных поворотов, благодаря которой удается свести задачу к построению интерполянта заданной степени гладкости для скалярной функции времени. Помимо прочего, данный подход допускает простой способ дифференцирования опорной траектории, что является чрезвычайно важным фактором в случае, когда требуется обеспечить высокую степень гладкости последней. В работах [36, 43] методика [42] была успешно использована для решения задачи оптимального по времени разворота КА, а в [44] с ее помощью было модифицировано управление с прогнозирующими моделями (Model Predictive Control), предназначенное для переориентации КА.

Целью настоящей работы является создание научного и методического заделов в области разработки и проектирования систем управления ориентацией КА с НЭ в условиях возрастающих требований по точности управления его угловым движением.

Для достижения поставленной цели в работе решаются следующие **задачи**.

1. Составление математической модели движения КА с НЭ, допускающей различные типы сочленения последних с корпусом КА.
2. Разработка законов управления ориентацией КА и гашения низкочастотных колебаний в НЭ, реализуемых с помощью маховиков, расположенных на корпусе КА.
3. Построение опорных траекторий по заданному набору кватернионов, двигаясь по которым в процессе переориентации КА удастся уменьшить возбуждение колебаний в НЭ.

Положения, выносимые на защиту:

1. Нелинейная математическая модель КА с произвольным наперед заданным числом НЭ, допускающая основные типы сочленения последних с его корпусом.
2. Алгоритм управления, одновременно осуществляющий инерциальную стабилизацию геостационарного КА и гашение низкочастотных колебаний в НЭ его конструкции.
3. Методика построения опорных траекторий углового движения КА, при перемещении вдоль которых слабо возбуждаются колебания в НЭ в процессе переориентации КА. Закон управления, стабилизирующий полученные опорные движения КА.

Научная новизна проводимого в работе исследования заключается в следующем.

- Исследовано движение КА, имеющего протяженные НЭ с нулевыми декрементами затухания колебательных мод. Разработанная нелинейная модель КА с НЭ допускает изменение числа НЭ и типов их сочленения с корпусом КА, среди которых жесткое, а также с помощью одностепенного и двухстепенного шарниров. При этом структура полученных уравнений такова, что изменение конфигурации КА не приводит к необходимости их повторного вывода.

- Построен закон управления, обеспечивающий инерциальную стабилизацию геостационарного КА с НЭ и гашение вибраций в последних, не требующий информации о модальных переменных. Получены условия асимптотической устойчивости положения равновесия КА с НЭ в инерциальной системе координат. Отрицательная обратная связь по состоянию, описывающему поведение корпуса КА, представляется как решение задачи линейно-квадратичного регулирования. За счет выбора матриц в функционале качества удовлетворяется ограничение на максимально допустимую величину управляющего момента маховиков, а также в явном виде находится положительно определенное решение алгебраического уравнения Риккати. С

помощью последнего обеспечивается положительная определенность матриц обратной связи, благодаря чему и осуществляется режим инерциальной стабилизации.

- Построенная по заранее заданному набору кватернионов опорная траектория углового движения КА обладает третьей степенью гладкости и согласуется с условием нормировки на всем интервале движения. Движение вдоль нее не вызывает роста колебаний НЭ. Предложен алгоритм управления, реализующий указанный режим опорного движения.

Практическая ценность полученных результатов исследования состоит в том, что

- разработанная модель КА с НЭ масштабируется на случай любого наперед заданного числа НЭ, что делает ее подходящей для программной реализации;

- предложенные законы стабилизации заданных режимов углового движения КА не требуют выполнения процедуры идентификации обобщенных координат, описывающих колебания НЭ, что уменьшает общую вычислительную сложность работы алгоритма управления в процессе маневрирования КА. При этом управляющий момент реализуется только с помощью маховиков, расположенных на корпусе КА, и не требует установки дополнительных исполнительных устройств на НЭ;

- может быть увеличена точность ориентации телекоммуникационных и других геостационарных аппаратов за счет учета низкочастотных колебаний в НЭ при построении математической модели КА с НЭ и их последующего гашения с помощью предложенного алгоритма управления КА;

- слабо возбуждаются колебания НЭ, благодаря движению корпуса КА вдоль предложенных гладких опорных траекторий.

Апробация результатов исследования. Результаты работы были представлены на следующих конференциях:

- 1-я Международная конференция «Проблемы механики и управления», Махачкала, 16–22 сентября 2018 г.
- 53-е Научные чтения памяти К.Э. Циолковского, Калуга, 18–19 сентября 2018 г.
- XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Уфа, 19-24 августа 2019 г.
- 70th International Astronautical Congress (IAC), Washington, USA, 21-25 October, 2019.
- XLIV Академические чтения по космонавтике, Москва, 28–31 января 2020 г.
- 63-я Всероссийская научная конференция МФТИ, Московская область, Долгопрудный, 23–29 ноября 2020 г.
- XLV Академические чтения по космонавтике, Москва, 30 марта – 2 апреля 2021 г.

А также на научных семинарах:

- Семинар «Динамика космических систем» отдела №7 ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва, 2021 г., 2022 г.
- Семинар «Динамические системы и механика», МАИ, г. Москва, 2022 г.
- Семинар «Механика и управление движением» отдела № 5 ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва, 2022 г.

Публикации автора по теме диссертации. Основные положения и результаты работы были опубликованы в 13 изданиях, из них 6 включено в перечень рекомендованных ВАК РФ, 4 индексируются в базах данных Scopus и/или Web of Science, 2 – препринты ИПМ им. М.В. Келдыша РАН.

1. Овчинников М.Ю., Ткачев С.С., Шестопёров А.И. Алгоритмы стабилизации космического аппарата с нежесткими элементами // Известия РАН. Теория и системы управления, 2019, № 3, С. 147–163.

Пер.вер.: Ovchinnikov M.Y., Tkachev S.S., Shestoperov A.I. Algorithms of Stabilization of a Spacecraft with Flexible Elements // Journal of Computer and Systems Sciences International, 2019, V. 58, № 3, P. 474–490.

2. Овчинников М.Ю., Ткачев С.С., Шестопёров А.И. Математическая модель спутника с произвольным числом нежестких элементов // Математическое моделирование, 2020, Т. 32, № 12, С. 14-28.

Пер.вер.: Ovchinnikov M.Y., Tkachev S.S., Shestoperov A.I. Mathematical Model of a Satellite with an Arbitrary Number of Flexible Appendages // Mathematical Models and Computer Simulations, 2021, V. 13, № 4, P. 638–647.

3. Ткачев С.С., Шестопёров А.И. Построение опорной траектории третьего порядка гладкости углового движения космического аппарата // Математическое моделирование. 2021 г. Т. 33. № 10. с. 3-18.

Пер.вер.: Tkachev S.S., Shestoperov A.I. Construction of a Third Degree of Smoothness Reference Trajectory of the Angular Motion of a Spacecraft // Mathematical Models and Computer Simulations, 2022, V. 14, № 3, P. 357–366.

4. Ivanov D., Meus S., Nuralieva A., Ovchinnikov A., Ovchinnikov M., Roldugin D., Tkachev S., Shestoperov A., Shestakov S., Yakimov E. Coupled Motion Determination and Stabilization of a Satellite Equipped with Large Flexible Elements Using ADCS Only // Proceedings of the Astrodynamics Symposium. Held at the 70th International Astronautical Congress (IAC), Washington, USA, 21-25 October 2019, Curran Associates, Inc. Publ, 2020, V. 2. P. 603-609.

5. Шестопёров А.И., Ткачев С.С. Линейно-квадратичные методы гашения низкочастотных колебаний в нежестком элементе конструкции макета // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша, 2017, № 123, 28 С.

6. Шестопёров А.И., Ткачев С.С. Использование линейно-квадратичного управления для разворотов космического аппарата на большие углы // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша, 2019, № 142, 18 С.

7. Иванов Д.С., Меус С.В., Нуралиева А.Б., Овчинников А.В., Овчинников М.Ю., Ролдугин Д.С., Ткачев С.С., Шестопёров А.И., Шестаков

С.А., Якимов Е.Н. Алгоритмы управления и определения движения космического аппарата с двумя нежесткими элементами, Космические аппараты и технологии, 2019, Т. 3, № 3 (29), С. 132-139.

8. Шестопёров А.И., Ткачев С.С. Нелинейные алгоритмы управления космическим аппаратом с крупногабаритными нежесткими элементами. В книге: Идеи К.Э. Циолковского в контексте современного развития науки и техники. Материалы 53-х Научных чтений памяти К.Э. Циолковского. Калуга: ИП Стрельцов И.А., Изд-во «Эйдос», 2018, С.155-156.

9. Нуралиева А.Б., Ткачев С.С., Шестопёров А.И. Нелинейные алгоритмы управления ориентацией спутника с нежесткими элементами конструкции // Проблемы механики и управления. Материалы Международной конференции (16–22 сентября 2018 г., г. Махачкала). Ред. И.Г. Горячева – М.: Издательство Московского университета, 2018, С. 294-295.

10. Иванов Д.С., Овчинников М.Ю., Ткачев С.С., Шестопёров А.И. Алгоритмы управления ориентацией спутника с нежесткими крупногабаритными элементами // В сборнике: XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Сборник трудов. В 4-х томах, 2019. Т. 1, С. 463-465.

11. Ткачев С.С., Шестопёров А.И. Использование линейно-квадратичного управления для разворотов космического аппарата на большие углы // В сборнике тезисов: XLIV Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С.П. Королёва и других выдающихся отечественных ученых — пионеров освоения космического пространства. В 2-х томах — М.: Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2020, Т. 1, С. 258-259.

12. Ткачев С.С., Шестопёров А.И. Труды 63-й Всероссийской научной конференции МФТИ. 23–29 ноября 2020 года. Прикладная математика и информатика. М.: МФТИ, 2020. С. 57.

13. Шестопёров А.И., Ткачев С.С. Построение программных траекторий спутника с нежесткими элементами конструкции // В сборнике тезисов: XLV

Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С.П. Королёва и других выдающихся отечественных ученых — пионеров освоения космического пространства. В 2-х томах — М.: Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2021, Т. 1. С. 408-409.

Личный вклад автора. Содержание диссертационной работы и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора и получены лично автором. В наибольшей степени постановки задач и результаты исследований обсуждались с научным руководителем М.Ю. Овчинниковым и С.С. Ткачевым.

Диссертационная работа **соответствует паспорту специальности (ПС) 01.02.01 «Теоретическая механика»** по ряду направлений. Работа посвящена построению законов управления механической системой, в качестве которой выступает КА с НЭ (направление 3 ПС). При получении уравнений движения используются методы аналитической механики (направление 1 ПС), возможность применения предложенного стабилизирующего закона управления КА с НЭ опирается на методы теории устойчивости (направление 2 ПС). При этом, в ходе маневрирования КА, в НЭ возникают колебания, подлежащие учету в модели движения КА с целью их последующего гашения (направление 5 ПС).

Объем диссертационной работы составляет 113 страниц. Работа включает в себя 30 рисунков и 7 таблиц. Список литературы содержит 69 наименований. Диссертационная работа имеет следующую **структуру**. Она состоит из введения, трех глав, заключения, списка использованной литературы и приложения.

Во **введении** обосновывается актуальность и практическая значимость работы, а также проводится обзор существующих подходов к решению поставленных задач.

В **первой главе** рассматривается задача построения нелинейной математической модели КА с произвольным числом НЭ, прикрепленных к его

корпусу. Предложенная методика использует общие уравнения динамики, применительно к каждому элементу конструкции КА, после чего осуществляется переход к обобщённым координатам КА с НЭ. Производится тестирование полученной модели.

Вторая глава посвящена решению задачи инерциальной стабилизации КА с НЭ заданной конфигурации, движущегося по геостационарной орбите. Выводятся уравнения движения КА с НЭ относительно центра масс, использующиеся при разработке предложенного стабилизирующего закона управления. Строятся матрицы обратной связи линейно-квадратичного регулятора с целью обеспечения асимптотической устойчивости нулевого положения равновесия уравнений движения КА с НЭ относительно центра масс. Для этого находится в явном виде положительно определенное решение алгебраического уравнения Риккати. Проводится численное тестирование полученного закона управления.

В третьей главе рассматриваются два аспекта стабилизации заданных режимов углового движения КА с НЭ в неинерциальных системах координат. Первый связан с влиянием установившихся значений модальных переменных на реализуемость режима орбитальной стабилизации геостационарных КА с НЭ. Второй посвящен разработке методики интерполяции опорной траектории КА, движение вдоль которой обеспечивает невозбуждение вибраций в НЭ в процессе и после завершения его переориентации.

В заключении приводятся основные результаты диссертационной работы.

Наиболее объемные выкладки вынесены в **Приложение**.

Результаты работы использованы при выполнении грантов РФФИ (№ 16-01-00634 А, № 19-31-90047 Аспиранты) и РФФИ (№ 17-71-20117), а также контрактов с АО «Информационные спутниковые системы имени академика М.Ф. Решетнёва».

Глава 1. Математическая модель КА с произвольным числом НЭ

В настоящей главе выводятся уравнения движения космического аппарата (КА) с произвольным числом нежестких элементов (НЭ), прикрепленных к его корпусу. При этом рассматриваются основные типы сочленений НЭ с корпусом КА.

В диссертационном исследовании полагается, что ключевой характеристикой математической модели является ее модульность. Под модульностью понимается отсутствие необходимости в повторном выводе уравнений движения в символьной форме при изменении конфигурации КА. В основе предложенной процедуры вывода уравнений движения лежит общее уравнение динамики и предположение об идеальности связей в точках сочленения НЭ с КА.

Глава построена следующим образом. Раздел 1 посвящен постановке задачи и определению систем координат, используемых при описании движения КА с НЭ. В разделах 2 и 3 выводятся уравнения углового движения НЭ, а также разбираются отдельные вычислительные аспекты их использования на борту КА. В разделе 4 на основании уравнений движения каждого элемента конструкции КА, строится искомая математическая модель движения КА с НЭ, записанная в обобщенных координатах. В заключительном разделе производится тестирование полученной модели, которая заключается в проверке сохранения кинетического момента и энергии КА в отсутствие внешних моментов.

1.1. Постановка задачи и системы координат

В работе рассматривается КА, состоящий из корпуса – твердого тела, к которому в точках $P_n, n = \overline{1, N}$, крепятся N НЭ. Число НЭ, закрепленных жестко, полагается равным l_1 , а число НЭ, присоединенных с помощью

одностепенного и с помощью двухстепенного шарниров, равным l_2 и $N - l_1 - l_2$ соответственно.

Элементарные i -ые точечные массы корпуса, m_{Si} , и n -го НЭ, m_{ni} , относительно центра масс Земли, задаются, соответственно, векторами \mathbf{R}_{Si} и \mathbf{R}_{ni} (рис. 1.1). Полагается, что каждая элементарная масса имеет три поступательных степени свободы. При этом

$$\mathbf{R}_{Si} = \mathbf{R}_S + \mathbf{r}_{Si}, \quad \mathbf{R}_{ni} = \mathbf{R}_n + \mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni}, \quad (1.1)$$

где \mathbf{R}_S и \mathbf{R}_n – радиус-векторы центров масс корпуса КА и недеформированного n -го НЭ относительно центра масс Земли; \mathbf{r}_{Si} , \mathbf{r}_{ni} – радиус-векторы i -ых точек корпуса КА и недеформированного n -го НЭ, начала которых помещены в центры масс соответствующих тел; \mathbf{u}_{ni} – смещение i -ой точки n -го НЭ, вызванное упругими деформациями (рис. 1.1).

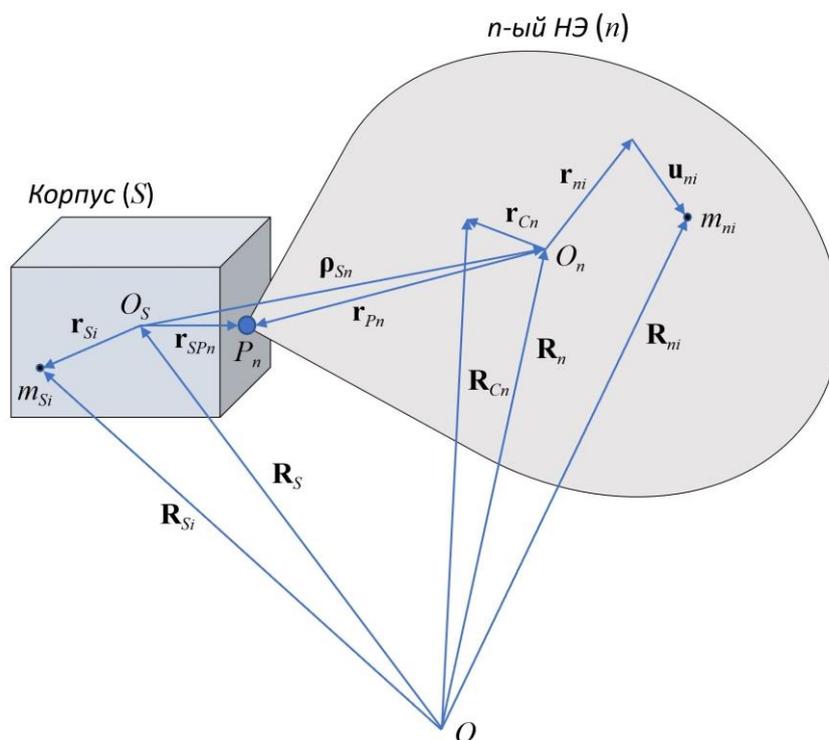


Рис. 1.1. Модель КА с НЭ

Предполагается, что $|\mathbf{u}_{ni}|/|\mathbf{r}_{ni}| \ll 1$ и справедлива теория малых деформаций. В этом случае [1, 3] смещение i -ой точки n -го НЭ относительно ее недеформированного состояния \mathbf{r}_{ni} , представляется в виде разложения

$$\mathbf{u}_{ni}(\mathbf{r}_{ni}, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_{nk}(\mathbf{r}_{ni}) q_k(t) \quad (1.2)$$

по собственным модам колебаний $\phi_{nk}(\mathbf{r}_{ni})$, $k = \overline{1, \infty}$, где $q_k(t)$, $k = \overline{1, \infty}$ – обобщенные координаты, характеризующие величину деформаций на каждой из собственных мод колебаний n -го НЭ (в дальнейшем, *модальных переменных*).

В реальных системах НЭ, как правило, представляют собой сложные конструкции, поэтому определить собственные моды колебаний аналитически обычно не представляется возможным. Однако в ходе конечно-элементного моделирования вектор упругих деформаций \mathbf{u}_{ni} i -ой точки n -ого НЭ аппроксимируется конечным рядом по модам колебаний в виде [45]

$$\mathbf{u}_{ni} = \mathbf{A}_{ni} \mathbf{q}_n. \quad (1.3)$$

В (1.3) вектор $\mathbf{q}_n(t) = (q_1(t) \ \cdots \ q_{k_n}(t))^T$ содержит k_n модальных переменных, а матрица

$$\mathbf{A}_{ni} = (\mathbf{a}_{n1i} \ \cdots \ \mathbf{a}_{nk_n i}) \quad (1.4)$$

– матрица собственных мод колебаний, столбцы \mathbf{a}_{nki} которой задают смещение i -ой точки n -ого НЭ относительно ее недеформированного положения \mathbf{r}_{ni} , вызванное его k -ой колебательной модой. Матрица \mathbf{A}_{ni} зависит лишь от положения точки недеформированного НЭ \mathbf{r}_{ni} . Отметим, что в работе используются нормальные моды колебаний, чьи матрицы собственных мод удовлетворяют условию нормировки $\sum_i m_{ni} \mathbf{A}_{ni}^T \mathbf{A}_{ni} = \mathbf{E}_{k_n \times k_n}$.

В отличие от (1.2) описание колебательного процесса в НЭ с помощью (1.3) позволяет представить модель движения КА с НЭ в виде конечномерной системы дифференциальных уравнений, что, как отмечалось во Введении, делает ее более подходящей для практического применения.

При описании движения КА с НЭ существуют различные способы определения наборов систем координат (СК), [12, 46]. В диссертационном исследовании, в соответствии с [45, 24], используются следующие правые ортогональные СК:

$OY_1Y_2Y_3$ (Y) – инерциальная СК (ИСК), ее начало лежит в центре масс Земли, ось OY_3 перпендикулярна плоскости экватора, ось OY_1 направлена на точку весеннего равноденствия, ось OY_2 дополняет систему до правой тройки;

O_Sxyz (x) – связанная с корпусом КА СК (ССК), ее начало лежит в центре масс корпуса КА, оси – его главные центральные оси;

$O_nx_ny_nz_n$ – связанная с n -ым НЭ СК, ее начало помещается в центр масс n -го недеформированного НЭ, оси – главные оси инерции недеформированного n -го НЭ;

$O_{Pn}\xi_n\eta_n\zeta_n$, $n = \overline{l_1 + 1, l_1 + l_2}$ – связанные с n -ым одностепенным шарниром СК;

$O_{Pn}\xi_n^1\eta_n^1\zeta_n^1$, $O_{Pn}\xi_n^2\eta_n^2\zeta_n^2$, $n = \overline{l_1 + l_2 + 1, N}$ – связанные n -ым с двухстепенным шарниром СК.

Во всех СК, связанных с шарнирами, оси $O_{Pn}\xi_n$, $O_{Pn}\xi_n^1$, $O_{Pn}\xi_n^2$ являются осями поворота в шарнире, а две другие перпендикулярны им и образуют правые тройки.

Введенные при определении ИСК и ССК индексы (Y) и (x) указывают на базис, по которому разложен тот или иной вектор. Например, запись \mathbf{r}^Y указывает на разложение по базису ИСК, \mathbf{r}^x – ССК.

В дальнейшем предполагается, что \mathbf{R}_{Si} , \mathbf{R}_{ni} , \mathbf{R}_S , \mathbf{R}_n заданы в ИСК; \mathbf{r}_{Si} в СК O_Sxyz ; \mathbf{r}_{ni} и \mathbf{u}_{ni} в $O_nx_ny_nz_n$. При выводе уравнений движения

соответствующие матрицы перехода опущены и считается, что все векторы записаны в одной системе координат.

В настоящей главе разрабатывается математическая модель КА с произвольным заранее заданным числом НЭ, прикрепленных к его корпусу. Как отмечалось во введении проблема адаптируемости последней к изменениям конфигурации КА является ключевой при ее формировании. С ней сталкиваются модели, полученные с помощью общего уравнения динамики, которое выписывается сразу для всего КА [45, 24].

Чтобы преодолеть указанное затруднение, предлагается [47] сначала выписать уравнения движения для отдельных составляющих КА и лишь затем осуществить переход к обобщенным координатам КА с НЭ.

1.2. Вывод уравнений движения НЭ

Как и в работах [3, 45, 48] для вывода уравнений движения n -го НЭ используется общее уравнение динамики

$$\sum_i (m_{ni} \ddot{\mathbf{R}}_{ni} - \mathbf{F}_{ni} - \mathbf{G}_{ni}) \delta \mathbf{R}_{ni} = 0, \quad (1.5)$$

в котором $\delta \mathbf{R}_{ni}$ – виртуальное перемещение i -ой точки n -го НЭ, \mathbf{F}_{ni} и \mathbf{G}_{ni} – равнодействующие всех активных сил и сил реакции, действующих на i -ую точку n -го НЭ. В (1.5) сумма берется по всем точкам n -го НЭ. Для виртуальных перемещений $\delta \mathbf{R}_{ni}$ из (1.1) и (1.3) вытекает выражение

$$\delta \mathbf{R}_{ni} = \delta \mathbf{R}_n + \delta \boldsymbol{\theta}_n \times (\mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni}) + \mathbf{A}_{ni} \delta \mathbf{q}_n. \quad (1.6)$$

Здесь $\delta \boldsymbol{\theta}_n$ – вектор бесконечно малого поворота НЭ. Тройка $\delta \mathbf{R}_n$, $\delta \boldsymbol{\theta}_n$, $\delta \mathbf{q}_n$ представляет собой вариации обобщенных координат НЭ [3]. Ввиду их независимости, после подстановки выражения (1.6) в (1.5) последнее распадается на три уравнения

$$\begin{aligned}
\sum_i (m_{ni} \ddot{\mathbf{R}}_{ni} - \mathbf{F}_{ni}) &= \mathbf{G}_{P_n}, \\
\sum_i (\mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni}) \times (m_{ni} \ddot{\mathbf{R}}_{ni} - \mathbf{F}_{ni}) &= (\mathbf{r}_{P_n} + \mathbf{u}_{P_n}) \times \mathbf{G}_{P_n}, \\
\sum_i \mathbf{A}_{ni}^T (m_{ni} \ddot{\mathbf{R}}_{ni} - \mathbf{F}_{ni}) &= \mathbf{A}_{P_n}^T \mathbf{G}_{P_n},
\end{aligned} \tag{1.7}$$

в которых \mathbf{r}_{P_n} – радиус-вектор из центра масс n -го недеформированного НЭ в точку P_n его крепления с корпусом КА, \mathbf{u}_{P_n} – смещение данной точки, вызванное упругими деформациями. В свою очередь, \mathbf{A}_{P_n} и \mathbf{G}_{P_n} обозначают матрицу собственных мод колебаний и силу реакции в точке крепления.

После суммирования по всем точкам НЭ, первое уравнение системы (1.7) представляется в виде

$$M_n \ddot{\mathbf{R}}_{C_n} = \mathbf{F}_n + \mathbf{G}_{P_n}, \tag{1.8}$$

где M_n – масса n -го НЭ, $\mathbf{F}_n = \sum_i \mathbf{F}_{ni}$ – равнодействующая всех активных сил, действующих на n -ый НЭ,

$$\mathbf{R}_{C_n} = \mathbf{R}_n + \mathbf{r}_{C_n} \tag{1.9}$$

– вектор центра масс деформированного НЭ относительно центра масс Земли,

$$\mathbf{r}_{C_n} = \frac{1}{M_n} \sum_i m_{ni} \mathbf{u}_{ni} = \mathbf{A}_n \mathbf{q}_n \tag{1.10}$$

– вектор смещения центра масс n -го НЭ, вызванное его деформацией, и

$$\mathbf{A}_n = \frac{1}{M_n} \sum_i m_{ni} \mathbf{A}_{ni}.$$

Пусть $\boldsymbol{\omega}_n$ – абсолютная угловая скорость СК $O_n x_n y_n z_n$, связанной с n -ым НЭ, относительно ИСК. Благодаря соотношениям

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{R}}_{ni} &= \dot{\mathbf{R}}_n + \boldsymbol{\omega}_n \times (\mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni}) + \dot{\mathbf{u}}_{ni}, \\
\ddot{\mathbf{R}}_{ni} &= \ddot{\mathbf{R}}_n + \dot{\boldsymbol{\omega}}_n \times (\mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni}) + \boldsymbol{\omega}_n \times \boldsymbol{\omega}_n \times (\mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni}) + 2\boldsymbol{\omega}_n \times \dot{\mathbf{u}}_{ni} + \ddot{\mathbf{u}}_{ni},
\end{aligned} \tag{1.11}$$

вытекающим из (1.1), последние два уравнения системы (1.7) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_i m_{ni} \right) \ddot{\mathbf{R}}_n + \tilde{\mathbf{J}}_n \dot{\boldsymbol{\omega}}_n + \boldsymbol{\omega}_n \times \tilde{\mathbf{J}}_n \boldsymbol{\omega}_n + \sum_i m_{ni} (\mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni}) \times (2\boldsymbol{\omega}_n \times \dot{\mathbf{u}}_{ni} + \ddot{\mathbf{u}}_{ni}) - \\
& - \sum_i (\mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni}) \times \mathbf{F}_{ni} = (\mathbf{r}_{Pn} + \mathbf{u}_{Pn}) \times \mathbf{G}_{Pn}, \\
& M_n \mathbf{A}_n^T \ddot{\mathbf{R}}_n + \sum_i m_{ni} \mathbf{A}_{ni}^T (\dot{\boldsymbol{\omega}}_n \times (\mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni})) + \left(\sum_i m_{ni} \mathbf{A}_{ni}^T \right) \ddot{\mathbf{u}}_{ni} + \\
& + \sum_i m_{ni} \mathbf{A}_{ni}^T (\boldsymbol{\omega}_n \times \boldsymbol{\omega}_n \times (\mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni}) + 2\boldsymbol{\omega}_n \times \dot{\mathbf{u}}_{ni}) - \sum_i \mathbf{A}_{ni}^T \mathbf{F}_{ni} = \mathbf{A}_{Pn}^T \mathbf{G}_{Pn}.
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Здесь матрица

$$\tilde{\mathbf{J}}_n = \sum_i m_{ni} \mathbf{K}(\mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni}, \mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni}) \tag{1.13}$$

– тензор инерции деформированного n -го НЭ. В (1.12) и (1.13) использованы следующие обозначения: матрица

$$[\mathbf{a}]_{\times} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$$

– матрица векторного произведения и матрица

$$\mathbf{K}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -[\mathbf{a}]_{\times} [\mathbf{b}]_{\times} = \begin{pmatrix} a_2 b_2 + a_3 b_3 & -a_2 b_1 & -a_3 b_1 \\ -a_1 b_2 & a_1 b_1 + a_3 b_3 & -a_3 b_2 \\ -a_1 b_3 & -a_2 b_3 & a_1 b_1 + a_2 b_2 \end{pmatrix}$$

– матрица двойного векторного произведения.

Подставим в (1.8) соотношение

$$\ddot{\mathbf{R}}_{Cn} = \ddot{\mathbf{R}}_n + \dot{\boldsymbol{\omega}}_n \times \mathbf{r}_{Cn} + \boldsymbol{\omega}_n \times \boldsymbol{\omega}_n \times \mathbf{r}_{Cn} + 2\boldsymbol{\omega}_n \times \dot{\mathbf{r}}_{Cn} + \ddot{\mathbf{r}}_{Cn},$$

связывающее на основании (1.9) вторые производные векторов \mathbf{R}_{Cn} и \mathbf{R}_n . Учитывая (1.10), получим окончательные уравнения углового движения n -го НЭ (1.8), (1.12) в матричном виде

$$\mathbf{S}_n \ddot{\mathbf{x}}_n = \mathbf{N}_n + \Phi_n + \Gamma_n, \quad (1.14)$$

где $\ddot{\mathbf{x}}_n \triangleq (\ddot{\mathbf{R}}_n^T \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}_n^T \quad \ddot{\mathbf{q}}_n^T)^T$ – вектор старших производных n -го НЭ и

$$\mathbf{S}_n = \begin{pmatrix} M_n \mathbf{E}_{3 \times 3} & -M_n [\mathbf{r}_{Cn}]_{\times} & M_n \mathbf{A}_n \\ M_n [\mathbf{r}_{Cn}]_{\times} & \tilde{\mathbf{J}}_n & \sum_i m_{ni} [\mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni}]_{\times} \mathbf{A}_{ni} \\ M_n \mathbf{A}_n^T & -\sum_i m_{ni} \mathbf{A}_{ni}^T [\mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni}]_{\times} & \sum_i m_{ni} \mathbf{A}_{ni}^T \mathbf{A}_{ni} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{N}_n = \begin{pmatrix} -M_n (\boldsymbol{\omega}_n \times \boldsymbol{\omega}_n \times \mathbf{r}_{Cn} + 2\boldsymbol{\omega}_n \times \dot{\mathbf{r}}_{Cn}) \\ -\boldsymbol{\omega}_n \times \tilde{\mathbf{J}}_n \boldsymbol{\omega}_n - \sum_i m_{ni} (\mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni}) \times (2\boldsymbol{\omega}_n \times \dot{\mathbf{u}}_{ni}) \\ -\sum_i m_{ni} \mathbf{A}_{ni}^T (\boldsymbol{\omega}_n \times \boldsymbol{\omega}_n \times (\mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni}) + 2\boldsymbol{\omega}_n \times \dot{\mathbf{u}}_{ni}) \end{pmatrix},$$

$$\Phi_n = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_n \\ \sum_i (\mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni}) \times \mathbf{F}_{ni} \\ \sum_i \mathbf{A}_{ni}^T \mathbf{F}_{ni} \end{pmatrix}, \Gamma_{Pn} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{Pn} \\ [\mathbf{r}_{Pn} + \mathbf{u}_{Pn}]_{\times} \mathbf{G}_{Pn} \\ \mathbf{A}_{Pn}^T \mathbf{G}_{Pn} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что на i -ую точку n -го НЭ действуют как внешние силы \mathbf{F}_{ni}^{ext} , так и внутренние \mathbf{F}_{ni}^{int} , возникновение которых вызвано упругими деформациями. Последние описываются формулой [3, 49]

$$\mathbf{F}_{ni}^{int} = -m_{ni} \mathbf{A}_{ni} \boldsymbol{\Omega}_n \mathbf{q}_n. \quad (1.15)$$

Здесь $\mathbf{\Omega}_n = \text{diag} \left\| (2\pi\kappa_i)^2 \right\|_{i=1}^{k_n}$ – матрица собственных частот колебаний n -го НЭ, где κ_i – собственные частоты колебаний НЭ. Присутствие тех или иных внешних сил в \mathbf{F}_{ni}^{ext} зависит от выбора орбиты КА.

Выпишем уравнения движения корпуса КА. Пусть на каждую i -ую точку корпуса КА действует главный вектор внешних сил \mathbf{F}_{Si} , а в N точках сочленения корпуса с НЭ к нему приложены силы реакции $\mathbf{G}_{SPn}, n = \overline{1, N}$. Так как корпус КА моделируется как твердое тело, его уравнения движения имеют вид

$$\mathbf{S}_S \ddot{\mathbf{x}}_S = \mathbf{N}_S + \mathbf{\Phi}_S + \mathbf{\Gamma}_S, \quad (1.16)$$

где $\ddot{\mathbf{x}}_S \triangleq (\ddot{\mathbf{R}}_S^T \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}_S^T)^T$ – вектор старших производных корпуса КА и

$$\mathbf{S}_S = \begin{pmatrix} M_S \mathbf{E}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{J}_S \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N}_S = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ -\boldsymbol{\omega}_S \times \mathbf{J}_S \boldsymbol{\omega}_S \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Phi}_S = \begin{pmatrix} \sum_i \mathbf{F}_{Si} \\ \sum_i \mathbf{r}_{Si} \times \mathbf{F}_{Si} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma}_S = \begin{pmatrix} \sum_{n=1}^N \mathbf{G}_{SPn} \\ \sum_{n=1}^N \mathbf{r}_{SPn} \times \mathbf{G}_{SPn} \end{pmatrix}.$$

В (1.16) введены следующие обозначения: $\mathbf{r}_{SPn}, n = \overline{1, N}$ – вектор из центра масс корпуса КА в точку его сочленения с n -ым НЭ; \mathbf{G}_{SPn} – сила реакции, действующая на корпус КА со стороны n -го НЭ в точке их сочленения; $\boldsymbol{\omega}_S$ – абсолютная угловая скорость СК O_Sxyz , связанной с корпусом, относительно ИСК; M_S и \mathbf{J}_S – масса и тензор инерции корпуса.

Суммирование в приведенных выше формулах происходит по всем элементарным частицам НЭ. Расчет постоянных матриц, таких как \mathbf{A}_n и $\sum_i m_{ni} \mathbf{A}_{ni}^T \mathbf{A}_{ni}$, не вызывает труда. Однако в ряде случаев возникает необходимость «вычленять» из цикла суммирования обобщенные координаты (в частности, $\boldsymbol{\omega}_n$ и \mathbf{q}_n), которые являются переменными величинами в течение

полета. Это позволяет произвести суммирование по точкам НЭ ($\sum_i(\bullet)$) в (1.14) независимо от численного интегрирования.

1.3. Вычислительный аспект интегрирования уравнений движения НЭ

Выберем некоторый НЭ и положим, что количество его колебательных мод равно n . В основе процедуры суммирования по точкам НЭ лежит возможность представить вектор упругих деформаций i -ой точки НЭ в виде суммы

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{a}_{i1}q_1 + \dots + \mathbf{a}_{in}q_n, \quad (1.17)$$

где $\mathbf{A}_i = (\mathbf{a}_{i1} \ \dots \ \mathbf{a}_{in})$. Для дальнейших вычислений определим две матрицы

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} q_1 \mathbf{E}_{3 \times 3} \\ \vdots \\ q_n \mathbf{E}_{3 \times 3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Omega}_S = \underbrace{\begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega}_n & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \dots & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} & \boldsymbol{\omega}_n & \dots & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \dots & \boldsymbol{\omega}_n & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \dots & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \boldsymbol{\omega}_n \end{pmatrix}}_n,$$

зависящие от модальных переменных $\mathbf{q} = (q_1 \ \dots \ q_n)^T$ и угловой скорости НЭ $\boldsymbol{\omega}_n$, а также ряд постоянных матриц:

$$\mathbf{K}_{AA} = \begin{pmatrix} \sum_i m_i \mathbf{K}(\mathbf{a}_{i1}, \mathbf{a}_{i1}) & \dots & \sum_i m_i \mathbf{K}(\mathbf{a}_{i1}, \mathbf{a}_{in}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_i m_i \mathbf{K}(\mathbf{a}_{in}, \mathbf{a}_{i1}) & \dots & \sum_i m_i \mathbf{K}(\mathbf{a}_{in}, \mathbf{a}_{in}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_{Ar} = \begin{pmatrix} \sum_i m_i \mathbf{K}(\mathbf{a}_{i1}, \mathbf{r}_i) \\ \vdots \\ \sum_i m_i \mathbf{K}(\mathbf{a}_{in}, \mathbf{r}_i) \end{pmatrix}, \quad (1.18)$$

$$\mathbf{K}_{rA} = \begin{pmatrix} \sum_i m_i \mathbf{K}(\mathbf{r}_i, \mathbf{a}_{i1}) & \dots & \sum_i m_i \mathbf{K}(\mathbf{r}_i, \mathbf{a}_{in}) \end{pmatrix},$$

и

$$\mathbf{C}_{AA} = \begin{pmatrix} \sum_i m_i \mathbf{a}_{i1} \times \mathbf{a}_{i1} & \cdots & \sum_i m_i \mathbf{a}_{i1} \times \mathbf{a}_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_i m_i \mathbf{a}_{in} \times \mathbf{a}_{i1} & \cdots & \sum_i m_i \mathbf{a}_{in} \times \mathbf{a}_{in} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}_{rA} = \begin{pmatrix} \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{a}_{i1} & \cdots & \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{a}_{in} \end{pmatrix}.$$

В первую очередь, выполним суммирование в элементах матрицы динамики \mathbf{S}_n и начнем с тензора инерции деформированного НЭ $\tilde{\mathbf{J}}$. Из (1.13), (1.3) и (1.17) вытекает, что

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{J}} &= \mathbf{J} + \sum_i m_i \mathbf{K} \left(\mathbf{r}_i, \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} q_j \right) + \sum_i m_i \mathbf{K} \left(\sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} q_j, \mathbf{r}_i \right) + \\ &+ \sum_i m_i \mathbf{K} \left(\sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} q_j, \sum_{k=1}^n \mathbf{a}_{ik} q_k \right) = \mathbf{J} + \sum_{j=1}^n \left(\sum_i m_i \mathbf{K}(\mathbf{r}_i, \mathbf{a}_{ij}) \right) q_j + \\ &+ \sum_{j=1}^n \left(\sum_i m_i \mathbf{K}(\mathbf{a}_{ij}, \mathbf{r}_i) \right) q_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\sum_i m_i \mathbf{K}(\mathbf{a}_{ij}, \mathbf{a}_{ik}) \right) q_j q_k \end{aligned}$$

и, используя вышеопределенные матрицы, окончательно

$$\tilde{\mathbf{J}} = \mathbf{J} + \mathbf{K}_{rA} \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T \mathbf{K}_{Ar} + \mathbf{Q}^T \mathbf{K}_{AA} \mathbf{Q}. \quad (1.19)$$

Здесь $\mathbf{J} = \sum_i m_i \mathbf{K}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_i)$ – тензор инерции недеформированного НЭ. Далее,

преобразуя суммы

$$\begin{aligned} \sum_i m_i [\mathbf{r}_i]_{\times} \mathbf{A}_i &= \begin{pmatrix} \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{a}_{i1} & \cdots & \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{a}_{in} \end{pmatrix}, \\ \sum_i m_i [\mathbf{u}_i]_{\times} \mathbf{A}_i &= \sum_i m_i \left[\sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} q_j \right]_{\times} (\mathbf{a}_{i1} \cdots \mathbf{a}_{in}) = \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \left(\sum_i m_i \mathbf{a}_{ij} \times \mathbf{a}_{i1} \right) q_j & \cdots & \sum_{j=1}^n \left(\sum_i m_i \mathbf{a}_{ij} \times \mathbf{a}_{in} \right) q_j \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

для элемента $\sum_i m_i [\mathbf{r}_i + \mathbf{u}_i]_{\times} \mathbf{A}_i$ матрицы \mathbf{S}_n получаем

$$\sum_i m_i [\mathbf{r}_i + \mathbf{u}_i]_{\times} \mathbf{A}_i = \mathbf{C}_{\mathbf{rA}} + \mathbf{Q}^T \mathbf{C}_{\mathbf{AA}}. \quad (1.20)$$

Перейдем к расчету сумм в векторе правых частей \mathbf{N}_n . Для этого используется пара вспомогательных соотношений:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{ik}^T (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}_{ij}) &= (\mathbf{a}_{ik}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{a}_{ij}) = -(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{a}_{ik}, \mathbf{a}_{ij}) = -\boldsymbol{\omega}^T (\mathbf{a}_{ik} \times \mathbf{a}_{ij}), \\ \mathbf{a}_{ik}^T (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}_{ij}) &= (\mathbf{a}_{ik}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}_{ij}) = -(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{a}_{ik}, \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}_{ij}) = \\ &= -\boldsymbol{\omega}^T (\mathbf{a}_{ik} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}_{ij}]) = -\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{K}(\mathbf{a}_{ik}, \mathbf{a}_{ij}) \boldsymbol{\omega}. \end{aligned}$$

Снова, воспользовавшись (1.17), получаем

$$\begin{aligned} &\sum_i m_i (\mathbf{r}_i + \mathbf{u}_i)_{\times} (2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{u}}_i) = \\ &= 2 \sum_{j=1}^n \left(\sum_i m_i \mathbf{K}(\mathbf{r}_i, \mathbf{a}_{ij}) \boldsymbol{\omega} \right) \dot{q}_j + 2 \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\sum_i m_i \mathbf{K}(\mathbf{a}_{ik}, \mathbf{a}_{ij}) \boldsymbol{\omega} \right) \dot{q}_k \dot{q}_j, \\ &\sum_i m_i \mathbf{A}_i^T (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_i + \mathbf{u}_i) + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{u}}_i) = \sum_i m_i \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{i1}^T (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{i1}^T (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \end{pmatrix} + \\ &+ \sum_i m_i \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{i1}^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{i1}^T \end{pmatrix} (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}_{i1} \quad \cdots \quad \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}_{in}) \mathbf{q} + 2 \sum_i m_i \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{i1}^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{i1}^T \end{pmatrix} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}_{i1} \quad \cdots \quad \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}_{in}) \dot{\mathbf{q}} = \\ &= - \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega}^T \sum_i m_i \mathbf{K}(\mathbf{a}_{i1}, \mathbf{r}_i) \boldsymbol{\omega} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\omega}^T \sum_i m_i \mathbf{K}(\mathbf{a}_{i1}, \mathbf{r}_i) \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega}^T \sum_i m_i \mathbf{K}(\mathbf{a}_{i1}, \mathbf{a}_{i1}) \boldsymbol{\omega} \quad \cdots \quad \boldsymbol{\omega}^T \sum_i m_i \mathbf{K}(\mathbf{a}_{i1}, \mathbf{a}_{in}) \boldsymbol{\omega} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{\omega}^T \sum_i m_i \mathbf{K}(\mathbf{a}_{in}, \mathbf{a}_{i1}) \boldsymbol{\omega} \quad \cdots \quad \boldsymbol{\omega}^T \sum_i m_i \mathbf{K}(\mathbf{a}_{in}, \mathbf{a}_{in}) \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix} \mathbf{q} - \\ &- 2 \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega}^T \sum_i m_i \mathbf{a}_{i1} \times \mathbf{a}_{i1} \quad \cdots \quad \boldsymbol{\omega}^T \sum_i m_i \mathbf{a}_{i1} \times \mathbf{a}_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{\omega}^T \sum_i m_i \mathbf{a}_{in} \times \mathbf{a}_{i1} \quad \cdots \quad \boldsymbol{\omega}^T \sum_i m_i \mathbf{a}_{in} \times \mathbf{a}_{in} \end{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}, \end{aligned}$$

или в матричном виде

$$\begin{aligned}
 \sum_i m_i (\mathbf{r}_i + \mathbf{u}_i) \times (2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{u}}_i) &= 2(\mathbf{K}_{\Gamma A} + \mathbf{Q}^T \mathbf{K}_{AA}) \mathbf{Q} \boldsymbol{\omega}, \\
 \sum_i m_i \mathbf{A}_i^T (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_i + \mathbf{u}_i) + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{u}}_i) &= \\
 &= -(\boldsymbol{\Omega}^T \mathbf{K}_{A\Gamma} \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}^T \mathbf{K}_{AA} \boldsymbol{\Omega} \mathbf{q} + 2\boldsymbol{\Omega}^T \mathbf{C}_{AA} \dot{\mathbf{q}}).
 \end{aligned} \tag{1.21}$$

Формулы (1.19), (1.20) и (1.21) позволяют произвести суммирование в уравнениях движения (1.14) по точкам НЭ один раз до начала численного интегрирования, что существенно оптимизирует данный процесс. При этом постоянные матрицы $\mathbf{K}_{\Gamma A}, \mathbf{K}_{A\Gamma}, \mathbf{K}_{AA}, \mathbf{C}_{\Gamma A}, \mathbf{C}_{AA}$ зависят лишь от матриц собственных мод колебаний.

1.4. Вывод уравнений движения КА с N НЭ в обобщенных координатах

Система уравнений (1.14) и (1.16) описывает движение КА с N НЭ. Она содержит неизвестные силы реакции, а набор координат, определяющих поведение КА, является избыточным. Эти координаты, удовлетворяют уравнениям связи, которые выписываются для каждой пары корпус-НЭ. Однако, так как рассматриваемая конфигурация КА имеет структуру дерева, имеется возможность получить уравнения движения в обобщенных координатах системы КА с N НЭ, используя подход, предложенный в работе [47] для вывода уравнений движения системы твердых тел.

Считая связи, наложенные на КА, идеальными, сумма работ их сил реакций Γ_S и $\Gamma_n, n = \overline{1, N}$, действующих на корпус КА и НЭ, на любом виртуальном перемещении системы равна нулю:

$$\delta \mathbf{x}_S^T \Gamma_S + \sum_{n=1}^N \delta \mathbf{x}_n^T \Gamma_n = 0. \tag{1.22}$$

Здесь $\delta \mathbf{x}_S = (\delta \mathbf{R}_S^T \quad \delta \boldsymbol{\theta}_S^T)^T$ и $\delta \mathbf{x}_n = (\delta \mathbf{R}_n^T \quad \delta \boldsymbol{\theta}_n^T \quad \delta \mathbf{q}_n^T)^T$ – вариации обобщенных координат КА и n -го НЭ, соответственно. Вариации $\delta \mathbf{R}_S$ и $\delta \boldsymbol{\theta}_S$ определяют виртуальное перемещение центра масс корпуса КА и его бесконечно малый поворот.

После подстановки (1.14) и (1.16) в уравнение (1.22), последнее принимает вид

$$\delta \mathbf{x}_S^T (\mathbf{S}_S \ddot{\mathbf{x}}_S - \mathbf{N}_S - \boldsymbol{\Phi}_S) + \sum_{n=1}^N \delta \mathbf{x}_n^T (\mathbf{S}_n \ddot{\mathbf{x}}_n - \mathbf{N}_n - \boldsymbol{\Phi}_n) = 0. \quad (1.23)$$

В текущей работе в соответствии с [45, 48] вектор вариаций обобщенных координат КА с N НЭ определяется как

$$\delta \mathbf{x} = (\delta \mathbf{x}_S^T \quad \delta \mathbf{x}_{E1}^T \quad \dots \quad \delta \mathbf{x}_{EN}^T)^T,$$

где вариации $\delta \mathbf{x}_{En}$, описывающие поведение n -го НЭ, в зависимости от типа его сочленения с корпусом КА имеют вид

$$\delta \mathbf{x}_{En} = \begin{cases} \delta \mathbf{q}_n, & n = \overline{1, l_1}, \\ (\delta \varphi_n \quad \delta \mathbf{q}_n^T)^T, & n = \overline{l_1 + 1, l_1 + l_2}, \\ (\delta \varphi_n^1 \quad \delta \varphi_n^2 \quad \delta \mathbf{q}_n^T)^T, & n = \overline{l_1 + l_2 + 1, N}. \end{cases}$$

Здесь $\delta \varphi_n$ определяет бесконечно малый поворот в одностепенном шарнире, $\delta \varphi_n^1, \delta \varphi_n^2$ – в двухстепенном.

Для того чтобы выписать уравнения движения КА в обобщенных координатах, необходимо

- связать вектор вариаций обобщенных координат $\delta \mathbf{x}_n$ каждого отдельного НЭ с вариациями обобщенных координат КА $\delta \mathbf{x}$, а также

- выразить вектор старших производных НЭ $\ddot{\mathbf{x}}_n$ через соответствующий вектор всего КА $\ddot{\mathbf{x}} \triangleq (\ddot{\mathbf{x}}_S^T \quad \ddot{\mathbf{x}}_{E1}^T \quad \dots \quad \ddot{\mathbf{x}}_{EN}^T)^T$, в котором

$$\ddot{\mathbf{x}}_{En} = \begin{cases} \ddot{\mathbf{q}}_n, & n = \overline{1, l_1}, \\ \left(\dot{\psi}_n \quad \ddot{\mathbf{q}}_n^T \right)^T, & n = \overline{l_1 + 1, l_1 + l_2}, \\ \left(\dot{\psi}_n^1 \quad \dot{\psi}_n^2 \quad \ddot{\mathbf{q}}_n^T \right)^T, & n = \overline{l_1 + l_2 + 1, N}. \end{cases}$$

Здесь переменная ψ_n обозначает угловую скорость в одностепенном шарнире, а переменные ψ_n^1, ψ_n^2 – угловые скорости вокруг осей вращения \mathbf{e}_n^1 и \mathbf{e}_n^2 двухстепенного шарнира.

Поиск зависимостей $\delta \mathbf{x}_n$ от $\delta \mathbf{x}$ проводится в два этапа.

1. Для каждого НЭ $\delta \mathbf{x}_n$ выражается через совокупность вариаций $\delta \mathbf{R}_s, \delta \boldsymbol{\theta}_s, \delta \boldsymbol{\theta}_n^{ref}, \delta \mathbf{q}_n$. Здесь $\delta \boldsymbol{\theta}_n^{ref}$ определяет бесконечно малый поворот n -го НЭ относительно корпуса КА.

2. Устанавливается связь $\delta \boldsymbol{\theta}_n^{ref}$ с бесконечно малыми поворотами $\delta \varphi_n, \delta \varphi_n^1, \delta \varphi_n^2$ для каждого из трех типов сочленения корпуса КА и НЭ.

Связь между $\ddot{\mathbf{x}}_n$ от $\ddot{\mathbf{x}}$ находится в два этапа аналогичным образом.

На первом этапе выразим радиус-вектор центра масс n -го недеформированного НЭ через радиус-вектор центра масс корпуса КА

$$\mathbf{R}_n = \mathbf{R}_s + \boldsymbol{\rho}_{Sn}. \quad (1.24)$$

Здесь $\boldsymbol{\rho}_{Sn} = \mathbf{r}_{SPn} - \mathbf{r}_{Pn}$. Тогда

$$\delta \mathbf{x}_n = \mathbf{D}_n^S \begin{pmatrix} \delta \mathbf{R}_s \\ \delta \boldsymbol{\theta}_s \end{pmatrix} + \mathbf{D}_n^E \begin{pmatrix} \delta \boldsymbol{\theta}_n^{ref} \\ \delta \mathbf{q}_n \end{pmatrix}, \quad (1.25)$$

где

$$\mathbf{D}_n^S = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{3 \times 3} & -[\boldsymbol{\rho}_{Sn}]_{\times} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{E}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{k_n \times 3} & \mathbf{0}_{k_n \times 3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_n^E = \begin{pmatrix} [\mathbf{r}_{Pn}]_{\times} & \mathbf{0}_{3 \times k_n} \\ \mathbf{E}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times k_n} \\ \mathbf{0}_{k_n \times 3} & \mathbf{E}_{k_n \times k_n} \end{pmatrix}. \quad (1.26)$$

На втором этапе выражаем $\delta\boldsymbol{\theta}_n^{ref}$ через возможные повороты $\delta\varphi_n$, $\delta\varphi_n^1$, $\delta\varphi_n^2$ для каждого из трех типов сочленения корпуса КА и НЭ:

$$\delta\boldsymbol{\theta}_n^{ref} = \begin{cases} \mathbf{0}_{3 \times 1}, & n = \overline{1, l_1}, \\ \mathbf{e}_n \delta\varphi_n, & n = \overline{l_1 + 1, l_1 + l_2}, \\ (\mathbf{e}_n^1 \ \mathbf{e}_n^2) (\delta\varphi_n^1 \ \delta\varphi_n^2)^T, & n = \overline{l_1 + l_2 + 1, N}. \end{cases} \quad (1.27)$$

В (1.27) единичный вектор \mathbf{e}_n определяет ось поворота в одностепенном шарнире, а единичные векторы \mathbf{e}_n^1 и \mathbf{e}_n^2 задают оси поворота в двухстепенном шарнире. При этом \mathbf{e}_n и \mathbf{e}_n^1 заданы в СК O_Sxyz , а \mathbf{e}_n^2 в СК $O_{Pn}\xi_n^1\eta_n^1\zeta_n^1$.

Окончательно, из (1.25) и (1.27) получаем соотношения между $\delta\mathbf{x}_n$ и парой $\delta\mathbf{x}_S$, $\delta\mathbf{x}_{En}$:

$$\delta\mathbf{x}_n = \mathbf{D}_n^S \delta\mathbf{x}_S + \begin{cases} \mathbf{D}_n^{E0} \delta\mathbf{q}_n, & n = \overline{1, l_1}, \\ \mathbf{D}_n^{EI} (\delta\varphi_n \ \delta\mathbf{q}_n^T)^T, & n = \overline{l_1 + 1, l_1 + l_2}, \\ \mathbf{D}_n^{EII} (\delta\varphi_n^1 \ \delta\varphi_n^2 \ \delta\mathbf{q}_n^T)^T, & n = \overline{l_1 + l_2 + 1, N}. \end{cases} \quad (1.28)$$

Здесь

$$\mathbf{D}_n^{E0} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3 \times k_n} \\ \mathbf{0}_{3 \times k_n} \\ \mathbf{E}_{k_n \times k_n} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_n^{EI} = \begin{pmatrix} [\mathbf{r}_{Pn}]_{\times} \mathbf{e}_n & \mathbf{0}_{3 \times k_n} \\ \mathbf{e}_n & \mathbf{0}_{3 \times k_n} \\ \mathbf{0}_{k_n \times 1} & \mathbf{E}_{k_n \times k_n} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_n^{EII} = \begin{pmatrix} [\mathbf{r}_{Pn}]_{\times} (\mathbf{e}_n^1 \ \mathbf{e}_n^2) & \mathbf{0}_{3 \times k_n} \\ (\mathbf{e}_n^1 \ \mathbf{e}_n^2) & \mathbf{0}_{3 \times k_n} \\ \mathbf{0}_{k_n \times 2} & \mathbf{E}_{k_n \times k_n} \end{pmatrix}. \quad (1.29)$$

Теперь установим связь между $\ddot{\mathbf{x}}_n$ и $\ddot{\mathbf{x}}$. Так как абсолютная угловая скорость n -го НЭ $\boldsymbol{\omega}_n$ представляется в виде суммы

$$\boldsymbol{\omega}_n = \boldsymbol{\omega}_S + \boldsymbol{\omega}_n^{ref}, \quad (1.30)$$

его угловое ускорение удовлетворяет соотношению

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_n = \dot{\boldsymbol{\omega}}_S + \dot{\boldsymbol{\omega}}_n^{ref} + \boldsymbol{\omega}_S \times \boldsymbol{\omega}_n^{ref}. \quad (1.31)$$

В (1.30) и (1.31) угловая скорость n -го НЭ относительно корпуса КА обозначена как $\boldsymbol{\omega}_n^{ref}$. Дважды дифференцируя (1.24), получим выражение

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{R}}_n &= \ddot{\mathbf{R}}_S + \dot{\boldsymbol{\omega}}_S \times \mathbf{r}_{SPn} + \boldsymbol{\omega}_S \times \boldsymbol{\omega}_S \times \mathbf{r}_{SPn} - \dot{\boldsymbol{\omega}}_n \times \mathbf{r}_{Pn} - \boldsymbol{\omega}_n \times \boldsymbol{\omega}_n \times \mathbf{r}_{Pn} = \\ &= \ddot{\mathbf{R}}_S + \dot{\boldsymbol{\omega}}_S \times \boldsymbol{\rho}_{Sn} - \dot{\boldsymbol{\omega}}_n^{ref} \times \mathbf{r}_{Pn} + \boldsymbol{\omega}_S \times \boldsymbol{\omega}_S \times \mathbf{r}_{SPn} - \boldsymbol{\omega}_S \times \boldsymbol{\omega}_n^{ref} \times \mathbf{r}_{Pn} - \boldsymbol{\omega}_n \times \boldsymbol{\omega}_n \times \mathbf{r}_{Pn},\end{aligned}\quad (1.32)$$

которое, в совокупности с (1.31), влечет за собой связь

$$\ddot{\mathbf{x}}_n = \mathbf{D}_n^S \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{R}}_S \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_S \end{pmatrix} + \mathbf{D}_n^E \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\omega}}_n^{ref} \\ \ddot{\mathbf{q}}_n \end{pmatrix} + \mathbf{d}_n, \quad (1.33)$$

где

$$\mathbf{d}_n = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega}_S \times \boldsymbol{\omega}_S \times \mathbf{r}_{SPn} - \boldsymbol{\omega}_S \times \boldsymbol{\omega}_n^{ref} \times \mathbf{r}_{Pn} - \boldsymbol{\omega}_n \times \boldsymbol{\omega}_n \times \mathbf{r}_{Pn} \\ \boldsymbol{\omega}_S \times \boldsymbol{\omega}_n^{ref} \\ \mathbf{0}_{k_n \times 1} \end{pmatrix}.$$

Формула (1.33) завершает первый этап.

Определим $\dot{\boldsymbol{\omega}}_n^{ref}$ через угловые скорости в шарнирах. Так как для каждого типа сочленения выполняется одно из соотношений

$$\boldsymbol{\omega}_n^{ref} = \begin{cases} \mathbf{0}_{3 \times 1} & , n = \overline{1, l_1}, \\ \psi_n \mathbf{e}_n & , n = \overline{l_1 + 1, l_1 + l_2}, \\ \psi_n^1 \mathbf{e}_n^1 + \psi_n^2 \mathbf{e}_n^2, & n = \overline{l_1 + l_2 + 1, N}, \end{cases} \quad (1.34)$$

соответствующие угловые ускорения представляются в виде

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_n^{ref} = \begin{cases} \mathbf{0}_{3 \times 1} & , n = \overline{1, l_1}, \\ \dot{\psi}_n \mathbf{e}_n & , n = \overline{l_1 + 1, l_1 + l_2}, \\ \dot{\psi}_n^1 \mathbf{e}_n^1 + \dot{\psi}_n^2 \mathbf{e}_n^2 + \psi_n^1 \mathbf{e}_n^1 \times \psi_n^2 \mathbf{e}_n^2, & n = \overline{l_1 + l_2 + 1, N}, \end{cases} \quad (1.35)$$

Из (1.32), (1.31), (1.34), (1.35) получаем искомую связь между $\ddot{\mathbf{x}}_n$ и $\ddot{\mathbf{x}}_S$, $\ddot{\mathbf{x}}_{En}$

$$\ddot{\mathbf{x}}_n = \mathbf{D}_n^S \ddot{\mathbf{x}}_S + \begin{cases} \mathbf{D}_n^{E0} \ddot{\mathbf{q}}_n + \mathbf{d}_n^0, & n = \overline{1, l_1}, \\ \mathbf{D}_n^{EI} (\dot{\psi}_n \quad \ddot{\mathbf{q}}_n^T)^T + \mathbf{d}_n^I, & n = \overline{l_1 + 1, l_1 + l_2}, \\ \mathbf{D}_n^{EII} (\dot{\psi}_n^1 \quad \dot{\psi}_n^2 \quad \ddot{\mathbf{q}}_n^T)^T + \mathbf{d}_n^{II}, & n = \overline{l_1 + l_2 + 1, N}, \end{cases} \quad (1.36)$$

где

$$\mathbf{d}_n^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{d}_n^{01} \\ \mathbf{d}_n^{02} \\ \mathbf{d}_n^{03} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega}_S \times \boldsymbol{\omega}_S \times \boldsymbol{\rho}_{S_n} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{k_n \times 1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}_n^I = \begin{pmatrix} \mathbf{d}_n^{I1} \\ \mathbf{d}_n^{I2} \\ \mathbf{d}_n^{I3} \end{pmatrix} = \mathbf{d}_n, \quad \mathbf{d}_n^{II} = \mathbf{d}_n + \begin{pmatrix} -(\psi_n^1 \mathbf{e}_n^1 \times \psi_n^2 \mathbf{e}_n^2) \times \mathbf{r}_{P_n} \\ \psi_n^1 \mathbf{e}_n^1 \times \psi_n^2 \mathbf{e}_n^2 \\ \mathbf{0}_{k_n \times 1} \end{pmatrix} \quad (1.37)$$

Подстановка (1.28) и (1.36) в (1.23) приводит к соотношению

$$\begin{aligned} & \delta \mathbf{x}_S^T (\mathbf{S}_S \ddot{\mathbf{x}}_S - \mathbf{N}_S - \Phi_S) + \\ & + \sum_{n=1}^N \left(\delta \mathbf{x}_S^T (\mathbf{D}_n^S)^T + \delta \mathbf{x}_{En}^T (\mathbf{D}_n^E)^T \right) (\mathbf{S}_n (\mathbf{D}_n^S \ddot{\mathbf{x}}_S + \mathbf{D}_n^E \ddot{\mathbf{x}}_{En} + \mathbf{d}_n) - \mathbf{N}_n - \Phi_n) = 0. \end{aligned}$$

Ввиду независимости обобщенных координат получаем итоговые динамические уравнения движения КА с N НЭ

$$\mathbf{S}_\Sigma \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{N}_\Sigma + \Phi_\Sigma, \quad (1.38)$$

где $\mathbf{N}_\Sigma = (\mathbf{N}_{\Sigma 0}^T \quad \mathbf{N}_{\Sigma 1}^T \quad \dots \quad \mathbf{N}_{\Sigma N}^T)^T$, $\Phi_\Sigma = (\Phi_{\Sigma 0}^T \quad \Phi_{\Sigma 1}^T \quad \dots \quad \Phi_{\Sigma N}^T)^T$,

$$\mathbf{S}_\Sigma = \left(\begin{array}{c|ccc} \mathbf{S}_{00} & \mathbf{S}_{01} & \dots & \dots & \mathbf{S}_{0N} \\ \mathbf{S}_{01}^T & \mathbf{S}_{11} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{0N}^T & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{S}_{NN} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|ccc} \mathbf{S}_{00} & \mathbf{S}_{0\Sigma} & & \\ \mathbf{S}_{0\Sigma}^T & \mathbf{S}_{diag} & & \end{array} \right) \quad (1.39)$$

и

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_{00} &= \mathbf{S}_S + \sum_{n=1}^N (\mathbf{D}_n^S)^T \mathbf{S}_n \mathbf{D}_n^S, \quad \mathbf{S}_{0n} = (\mathbf{D}_n^S)^T \mathbf{S}_n \mathbf{D}_n^E, \quad \mathbf{S}_{mn} = (\mathbf{D}_n^E)^T \mathbf{S}_n \mathbf{D}_n^E, \quad n = \overline{1, N}, \\
\mathbf{N}_{\Sigma 0} &= \mathbf{N}_S + \sum_{n=1}^N (\mathbf{D}_n^S)^T (\mathbf{N}_n - \mathbf{S}_n \mathbf{d}_n), \quad \mathbf{N}_{\Sigma n} = (\mathbf{D}_n^E)^T (\mathbf{N}_n - \mathbf{S}_n \mathbf{d}_n), \quad n = \overline{1, N}, \\
\Phi_{\Sigma 0} &= \Phi_S + \sum_{n=1}^N (\mathbf{D}_n^S)^T \Phi_n, \quad \Phi_{\Sigma n} = (\mathbf{D}_n^E)^T \Phi_n, \quad n = \overline{1, N}.
\end{aligned} \tag{1.40}$$

При этом в зависимости от типа крепления НЭ к корпусу КА матрицы \mathbf{D}_n^e , $n = \overline{1, N}$ в \mathbf{S}_Σ и \mathbf{N}_Σ из (1.38) принимают вид

$$\mathbf{D}_n^e = \begin{cases} \mathbf{D}_n^{e0}, & n = \overline{1, l_1}, \\ \mathbf{D}_n^{eI}, & n = \overline{l_1 + 1, l_1 + l_2}, \\ \mathbf{D}_n^{eII}, & n = \overline{l_1 + l_2 + 1, N}, \end{cases}$$

где \mathbf{D}_n^{e0} , \mathbf{D}_n^{eI} , \mathbf{D}_n^{eII} определяются в (1.29).

Добавление $N + 1$ НЭ в уравнения движения (1.38) требует выполнения следующих шагов.

1. В соответствии с (1.14) формируются матрица \mathbf{S}_{N+1} и векторы \mathbf{N}_{N+1} , Φ_{N+1} . При этом суммирование по точкам НЭ производится один раз до начала численного интегрирования по формулам (1.19), (1.20) и (1.21) (раздел 1.3).
2. Рассчитываются постоянные матрицы \mathbf{D}_{N+1}^S (формула (1.26)), \mathbf{D}_{N+1}^E (формула (1.29)) и формируется вектор \mathbf{d}_{N+1} (формула (1.37)), причем \mathbf{D}_{N+1}^E и \mathbf{d}_{N+1} зависят от типа сочленения корпуса и НЭ.
3. По формуле (1.40) производится масштабирование следующих матриц и векторов:

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_{00}(N+1) &= \mathbf{S}_{00}(N) + (\mathbf{D}_{N+1}^S)^T \mathbf{S}_{N+1} \mathbf{D}_{N+1}^S, \\
\mathbf{N}_{\Sigma 0}(N+1) &= \mathbf{N}_{\Sigma 0}(N) + (\mathbf{D}_{N+1}^S)^T (\mathbf{N}_{N+1} - \mathbf{S}_{N+1} \mathbf{d}_{N+1}), \\
\Phi_{\Sigma 0}(N+1) &= \Phi_{\Sigma 0}(N) + (\mathbf{D}_{N+1}^S)^T \Phi_{N+1}.
\end{aligned}$$

4. Рассчитываются матрицы $\mathbf{S}_{0(N+1)}$, $\mathbf{S}_{(N+1)(N+1)}$ и векторы $\mathbf{N}_{\Sigma(N+1)}$, $\Phi_{\Sigma(N+1)}$ по формуле (1.40).

5. В уравнениях движения (1.39) матрица системы \mathbf{S}_{Σ} масштабируется по следующему принципу:

$$\mathbf{S}_{\Sigma}(N) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{S}_{00}(N) & \mathbf{S}_{0\Sigma}(N) \\ \hline \mathbf{S}_{0\Sigma}^T(N) & \mathbf{S}_{diag}(N) \end{array} \right) \rightarrow \mathbf{S}_{\Sigma}(N+1) = \left(\begin{array}{c|c} \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{S}_{00}(N+1) & \mathbf{S}_{0\Sigma}(N) \\ \hline \mathbf{S}_{0\Sigma}^T(N) & \mathbf{S}_{diag}(N) \end{array} \right) & \begin{array}{c} \mathbf{S}_{0(N+1)} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{array} \\ \hline \mathbf{S}_{0(N+1)}^T & \mathbf{0} \quad \dots \quad \mathbf{0} \end{array} \right),$$

а векторы в правых частях

$$\mathbf{N}_{\Sigma}(N) \rightarrow \mathbf{N}_{\Sigma}(N+1) = \begin{pmatrix} \mathbf{N}_{\Sigma}(N) \\ \mathbf{N}_{\Sigma(N+1)} \end{pmatrix}, \quad \Phi_{\Sigma}(N) \rightarrow \Phi_{\Sigma}(N+1) = \begin{pmatrix} \Phi_{\Sigma}(N) \\ \Phi_{\Sigma(N+1)} \end{pmatrix}.$$

Шаги 1-5 демонстрируют модульный характер предложенной математической модели КА с НЭ, что является существенным преимуществом для ее программной реализации.

Остановимся подробнее на способе обращения матрицы динамики \mathbf{S}_{Σ} и представлении системы (1.38) в нормальной форме. Так как $\det(\mathbf{S}_{ii}) \neq 0$, то в работе оно производится в соответствии с формулой Фробениуса [50, стр. 59]

$$\mathbf{S}_{\Sigma}^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{S}_{inv}^{-1} & -\mathbf{S}_{inv}^{-1} \mathbf{S}_{0\Sigma} \mathbf{S}_{diag}^{-1} \\ \hline -\mathbf{S}_{diag}^{-1} \mathbf{S}_{0\Sigma}^T \mathbf{S}_{inv}^{-1} & \mathbf{S}_{diag}^{-1} + \mathbf{S}_{diag}^{-1} \mathbf{S}_{0\Sigma}^T \mathbf{S}_{inv}^{-1} \mathbf{S}_{0\Sigma} \mathbf{S}_{diag}^{-1} \end{array} \right), \quad (1.41)$$

где

$$\mathbf{S}_{diag}^{-1} = \text{diag} \left\{ \mathbf{S}_{nn}^{-1} \right\}_{n=1}^N,$$

$$\mathbf{S}_{inv} = \left(\mathbf{S}_{00} - \sum_{n=1}^N \mathbf{S}_{0i} \mathbf{S}_{ii}^{-1} \mathbf{S}_{0i}^T \right).$$

Отметим, что в работах [24, 45] в качестве обобщенных координат вместо радиус-вектора центра масс корпуса КА \mathbf{R}_S выступал радиус-вектор центра масс всего КА \mathbf{R}_C , что приводило к отделению орбитального движения КА от углового. Сравним два подхода с точки зрения процедуры обращения матрицы динамики. В последнем случае она имеет вид

$$\mathbf{S}_\Sigma = \left(\begin{array}{c|c} M\mathbf{E}_{3 \times 3} & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{S}_{att} \end{array} \right),$$

в котором \mathbf{S}_{att} – положительно определенная матрица, не обладающая свойством блочной диагональности. Пусть k_n и h_n – число модальных переменных и степеней свободы в шарнире (в точке крепления), описывающих поведение n -го НЭ. Тогда подлежащая обращению квадратная матрица \mathbf{S}_{att} имеет размер $3 + \sum_{n=1}^N (k_n + h_n)$. В то же время размер обращаемых в (1.41) квадратных матриц \mathbf{S}_{nn} , $n = \overline{1, N}$ равен $k_n + h_n$, а $\dim(\mathbf{S}_{inv}) = 6 \times 6$. Таким образом, используемая в работе математическая модель КА с НЭ является более предпочтительной в плане обращения матрицы динамики, особенно в случае возрастающего числа мод колебаний НЭ, учтенных в модели КА.

Динамические уравнения (1.38) дополняются кинематическими соотношениями

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}}_S &= \mathbf{V}_S, \\ \dot{\phi}_n &= \psi_n, \quad n = \overline{l_1 + 1, l_1 + l_2}, \\ \dot{\phi}_n^1 &= \psi_n^1, \quad \dot{\phi}_n^2 = \psi_n^2, \quad n = \overline{l_1 + l_2 + 1, N}, \\ \dot{\mathbf{q}}_n &= \mathbf{V}_{q_n}, \quad n = \overline{1, N}, \end{aligned} \tag{1.42}$$

а также кинематическими уравнениями Пуассона

$$\dot{\Lambda}_S = \frac{1}{2} \Lambda_S \circ \omega_S. \tag{1.43}$$

В (1.42) \mathbf{V}_S обозначает скорость центра масс корпуса КА, \mathbf{V}_{q_n} – скорость изменения модальных переменных, а в (1.43) $\Lambda_S = (\lambda_{0S} \quad \lambda_S^T)^T$ – кватернион ориентации корпуса КА, задающий переход из ИСК в СК, связанную с корпусом КА. Символом \circ определяется операция умножения кватернионов Λ и M :

$$\Lambda \circ M = \begin{pmatrix} \lambda_0 \mu_0 - \lambda^T \boldsymbol{\mu} \\ \lambda_0 \boldsymbol{\mu} + \mu_0 \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\lambda} \times \boldsymbol{\mu} \end{pmatrix},$$

с помощью которой уравнения Пуассона можно записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_{0S} &= -\frac{1}{2}(\boldsymbol{\lambda}_S, \boldsymbol{\omega}_S), \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}_S &= \frac{1}{2}(\lambda_{0S} \boldsymbol{\omega}_S + \boldsymbol{\lambda}_S \times \boldsymbol{\omega}_S). \end{aligned} \tag{1.44}$$

Заметим, что $\boldsymbol{\omega}_S$ в (1.43) и (1.44) записана в ССК O_Sxyz , т.е. $\boldsymbol{\omega}_S = \boldsymbol{\omega}_S^x$.

Уравнения (1.38), (1.42) и (1.43) полностью определяют искомые нелинейные уравнения движение КА с НЭ.

1.5. Тестирование программной реализации модели

Тестирование математической модели заключается в проверке сохранения кинетического момента (в ИСК) и энергии КА в отсутствии внешних моментов [51]. Кинетический момент относительно центра масс системы определяется как сумма

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_S + \sum_{n=1}^N \mathbf{L}_n$$

кинетических моментов корпуса КА

$$\mathbf{L}_S = \sum_i \hat{\mathbf{r}}_{Si} \times m_{Si} \dot{\mathbf{R}}_{Si}$$

и всех НЭ

$$\mathbf{L}_n = \sum_i \hat{\mathbf{r}}_{ni} \times m_{ni} \dot{\mathbf{R}}_{ni}, \quad n = \overline{1, N},$$

в которых радиус-векторы

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}}_{Si} &= \mathbf{R}_S - \mathbf{R}_C + \mathbf{r}_{Si}, \\ \hat{\mathbf{r}}_{ni} &= \mathbf{R}_n - \mathbf{R}_C + \mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni} \end{aligned} \quad (1.45)$$

направлены из центра масс всего КА в i -ую точку корпуса КА и n -го НЭ, соответственно. При этом последний определяется по формуле

$$\mathbf{R}_C = \frac{1}{M} \left(M_S \mathbf{R}_S + \sum_n M_n \mathbf{R}_{Cn} \right), \quad (1.46)$$

где $M = M_S + \sum_{n=1}^N M_n$ – масса всего КА.

Исходя из (1.45), соотношения $\dot{\mathbf{R}}_{Si} = \dot{\mathbf{R}}_S + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{Si}$ и того факта, что $\sum_i m_{Si} \mathbf{r}_{Si} = 0$, для кинетического момента корпуса КА выполняется

$$\mathbf{L}_S = M_S (\mathbf{R}_S - \mathbf{R}_C) \times \dot{\mathbf{R}}_S + \mathbf{J}_S \boldsymbol{\omega}_S.$$

На основании (1.46), (1.9), (1.24) заметим, что

$$\mathbf{R}_S - \mathbf{R}_C = -\mathbf{r}_{SC}, \quad (1.47)$$

где

$$\mathbf{r}_{SC} = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^N M_n (\boldsymbol{\rho}_{Sn} + \mathbf{r}_{Cn}).$$

Окончательно, запишем выражение кинетического момента корпуса КА в матричном виде

$$\mathbf{L}_S = \mathbf{L}_S \dot{\mathbf{x}}_S, \quad (1.48)$$

где

$$\mathbf{E}_S = \left(-M_S [\mathbf{r}_{SC}]_x \mid \mathbf{J}_S \right).$$

Для вывода кинетического момента n -го НЭ воспользуемся формулами (1.45), (1.24), (1.47) и (1.11). Производя суммирование по точкам НЭ и, учитывая, что $\sum_i m_{ni} \mathbf{r}_{ni} = 0$, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_n = & M_n (\boldsymbol{\rho}_{Sn} - \mathbf{r}_{SC} + \mathbf{r}_{Cn}) \times \dot{\mathbf{R}}_n + M_n (\boldsymbol{\rho}_{Sn} - \mathbf{r}_{SC}) \times (\boldsymbol{\omega}_n \times \mathbf{r}_{Cn} + \dot{\mathbf{r}}_{Cn}) + \\ & + \tilde{\mathbf{J}}_n \boldsymbol{\omega}_n + \sum_i m_{ni} (\mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni}) \times \dot{\mathbf{u}}_{ni}, \end{aligned}$$

или по аналогии с (1.48)

$$\mathbf{L}_n = \Xi_n \dot{\mathbf{x}}_n, \quad (1.49)$$

где

$$\Xi_n = \begin{pmatrix} \left(M_n [\boldsymbol{\rho}_{Sn} - \mathbf{r}_{SC} + \mathbf{r}_{Cn}]_{\times} \right)^T \\ \left(M_n [\mathbf{r}_{SC} - \boldsymbol{\rho}_{Sn}]_{\times} [\mathbf{r}_{Cn}]_{\times} + \tilde{\mathbf{J}}_n \right)^T \\ \left(M_n [\boldsymbol{\rho}_{Sn} - \mathbf{r}_{SC}]_{\times} \mathbf{A}_n + \sum_i m_{ni} [\mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni}]_{\times} \mathbf{A}_{ni} \right)^T \end{pmatrix}^T.$$

В итоге, с учетом (1.25), (1.48) и (1.49) для вектора кинетического момента всего КА имеем

$$\mathbf{L} = \Xi \dot{\mathbf{x}}, \quad (1.50)$$

где

$$\Xi = \left(\Xi_S + \sum_{n=1}^N \Xi_n \mathbf{D}_n^S \mid \Xi_1 \mathbf{D}_1^E \mid \dots \mid \Xi_N \mathbf{D}_N^E \right).$$

Кинетическая энергия КА представляется в виде суммы

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_S + \sum_{n=1}^N \mathbf{T}_n$$

кинетической энергии корпуса КА

$$T_s = \frac{1}{2} \sum_i m_{Si} (\dot{\mathbf{R}}_{Si}, \dot{\mathbf{R}}_{Si}) = \frac{1}{2} M_s (\dot{\mathbf{R}}_s)^2 + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}_s, \mathbf{J}_s \boldsymbol{\omega}_s) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}_s^T \mathbf{S}_s \dot{\mathbf{x}}_s,$$

и N НЭ

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{2} \sum_i m_{ni} (\dot{\mathbf{R}}_{ni}, \dot{\mathbf{R}}_{ni}) = \\ &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}_n^T \left(\sum_i m_{ni} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{3 \times 3} \\ [\mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni}]_{\times} \\ \mathbf{A}_{ni}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{3 \times 3} & -[\mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni}]_{\times} & \mathbf{A}_{ni} \end{pmatrix} \right) \dot{\mathbf{x}}_n = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}_n^T \mathbf{S}_n \dot{\mathbf{x}}_n. \end{aligned}$$

Из вышеуказанных выражений для T_s и T_n , с учетом (1.25), заключаем, что кинетическая энергия КА может быть представлена как

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{S}_{\Sigma} \dot{\mathbf{x}}. \quad (1.51)$$

Полная энергия КА

$$E = T + \sum_{n=1}^N \Pi_n \quad (1.52)$$

помимо кинетической, определенной в (1.51), включает в себя также сумму потенциальных энергий деформаций НЭ $\Pi_n = \mathbf{q}_n^T \boldsymbol{\Omega}_n \mathbf{q}_n$, где $\boldsymbol{\Omega}_n$ – матрица собственных частот колебаний n -го НЭ [3].

Для тестирования полученных в разделе 1.4 уравнений движения использовалась модель КА с тремя жестко прикрепленными к его корпусу НЭ – двумя панелями и антенной. Число мод НЭ, учтенных в модели КА, указано в таблице 1.1. Предполагается, что движение КА происходит по круговой геостационарной орбите. В этом случае орбитальная угловая скорость постоянна и равна $7.08 \cdot 10^{-5}$ град/с. Численное интегрирование производилось методом Рунге-Кутты четвертого порядка на временном отрезке в один час при

начальных условиях, собранных в таблице 1.2. При этом шаг интегрирования в первом случае полагался равным 0.1 секунды, а во втором – 0.05 секунды.

Таблица 1.1

Инерциальная стабилизация. Параметры интегрирования

Параметр	Значение
Время интегрирования	3600 с
Число мод панелей, $k_{p_i}, i = 1, 2$	2
Число мод антенны, k_a	3

Таблица 1.2

Инерциальная стабилизация. Начальные условия интегрирования

Параметр	Начальное значение
Положение, \mathbf{R}_s	$(4.3 \cdot 10^7 \ 0 \ 0)^T$ м
Скорость, \mathbf{V}_s	$(0 \ 3045 \ 0)^T$ м/с
Кватернион ориентации, Λ_s	$(0.9274 \ 0.3 \ 0.1 \ 0.2)^T$
Угловая скорость, $\boldsymbol{\omega}_s$	$(1 \ 1 \ 1)^T \times 7.08 \cdot 10^{-4}$ град/с
Модальные переменные панелей, $\mathbf{q}_{p_i}, i = 1, 2$	$\underbrace{(0.1 \ 0 \ \dots \ 0)^T}_{k_{p1}}, \underbrace{(0.2 \ 0 \ \dots \ 0)^T}_{k_{p2}}$
Модальные переменные антенны, \mathbf{q}_a	$\underbrace{(0 \ 0 \ \dots \ 0)^T}_{k_a}$
Скорости изменения модальных переменных панелей, $\mathbf{V}_{p_i}, i = 1, 2$	$\underbrace{(0.1 \ 0 \ \dots \ 0)^T}_{k_{p1}}, \underbrace{(0.2 \ 0 \ \dots \ 0)^T}_{k_{p2}}$
Скорости изменения модальных переменных антенны, \mathbf{V}_a	$\underbrace{(0 \ 0 \ \dots \ 0)^T}_{k_a}$

Результаты численного моделирования кинетического момента и полной энергии в соответствии с формулами (1.50) и (1.52) представлены на рис. 1.2–1.5.

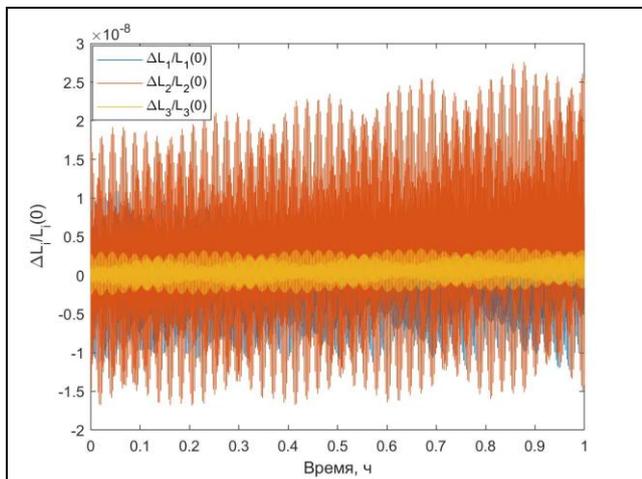


Рис. 1.2. Относительное изменение кинетического момента, шаг по времени 0.1 с

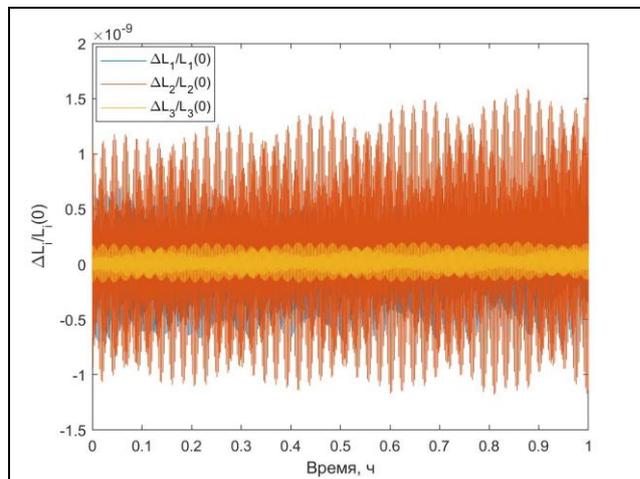


Рис. 1.3. Относительное изменение кинетического момента, шаг по времени 0.05 с

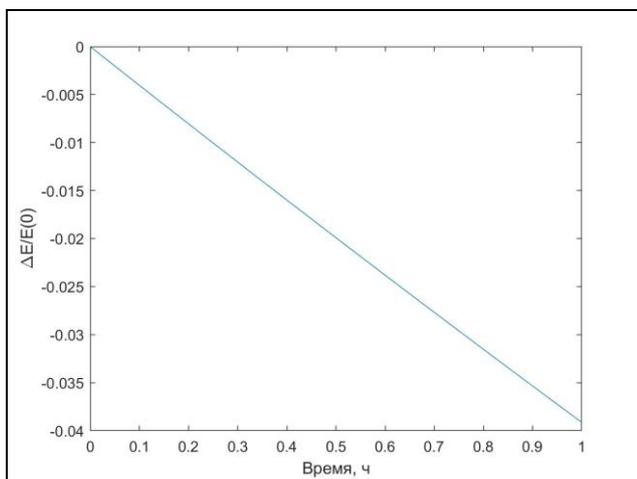


Рис. 1.4. Относительное изменение энергии, шаг по времени 0.1 с

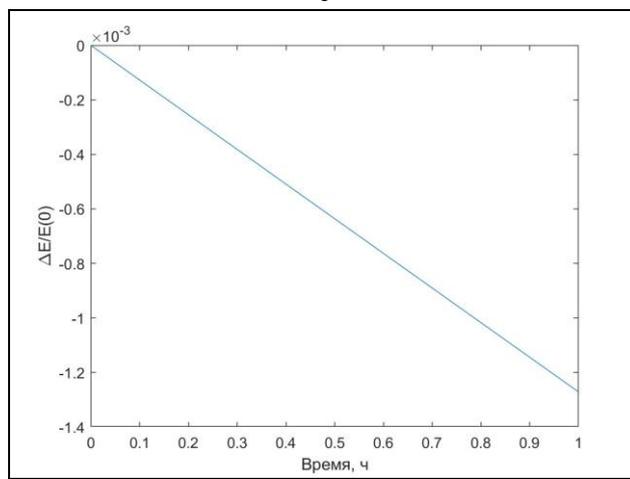


Рис. 1.5. Относительное изменение энергии, шаг по времени 0.05 с

Из графиков видно, что кинетический момент (рис. 1.2) и энергия (рис. 1.4) системы сохраняются с удовлетворительной точностью, причем уменьшение шага интегрирования вдвое увеличивает последнюю на порядок (рис. 1.3, 1.5) и тем самым улучшает точность моделирования движения КА с НЭ.

Выводы к главе 1

В настоящей главе получена нелинейная математическая модель КА с произвольно заданным числом НЭ, прикрепленных к его корпусу.

Главным преимуществом предложенной модели КА является ее масштабируемость на случай любого заранее заданного числа НЭ, не требующая повторного вывода уравнений движения в символьной форме при изменении конфигурации КА. При этом она обладает рядом дополнительных положительных характеристик:

- описывается конечномерной системой дифференциальных уравнений, что упрощает процесс ее численного интегрирования и разработку законов управления;
- записывается в обобщенных координатах системы КА с НЭ, что минимизирует число описывающих его движение уравнений;
- допускает основные типы сочленения НЭ с корпусом КА, а именно консольное, с помощью одностепенного и двухстепенного шарниров;

Результаты исследований были опубликованы в работе [52].

Глава 2. Алгоритмы стабилизации КА с НЭ

Настоящая глава посвящена разработке алгоритмов инерциальной стабилизации КА с НЭ. Особенностью задачи является наличие низкочастотных колебаний НЭ. Как следствие, искомые алгоритмы управления также обязаны уменьшить их влияние на точность ориентации корпуса КА.

Обычно для гашения колебаний непосредственно на НЭ устанавливаются демпфирующие устройства, например, пьезоэлектрические актюаторы [32, 33]. Однако, практический интерес представляет ситуация, когда стабилизация КА с НЭ осуществляется лишь при помощи исполнительных органов системы управления, расположенных на его корпусе.

Глава построена следующим образом. Раздел 1 содержит постановку задачи, а также закон управления, обеспечивающий стабилизацию КА с НЭ в ИСК. В разделе 2 строится линейно-квадратичный регулятор, который обеспечивает асимптотическую устойчивость заданного положения равновесия КА с НЭ и гашение колебаний в НЭ. В заключительном разделе приводятся результаты численного моделирования предложенного закона управления.

2.1. Постановка задачи. Построение стабилизирующего закона управления

В главе рассматривается движение КА, состоящего из корпуса и трех жестко закрепленных НЭ – антенны и двух панелей. Его центр масс движется по геостационарной (круговой кеплеровой с нулевым наклоном) орбите в гравитационном (центральном, ньютоновом) поле Земли.

При разработке закона управления ориентацией КА в работе используются уравнения его движения относительно центра масс (см. Приложение А):

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{J}} & \tilde{\mathbf{S}}_{\omega\mathbf{q}} \\ \tilde{\mathbf{S}}_{\omega\mathbf{q}}^T & \tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{q}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\omega}}_S \\ \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{N}_\omega \\ \mathbf{N}_\mathbf{q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{ctrl} + \tilde{\mathbf{M}}_{ext}(\mathbf{q}) \\ \boldsymbol{\Phi}_{att}^{\mathbf{q}} \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

в которых $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1^T \quad \mathbf{q}_2^T \quad \mathbf{q}_3^T)^T$ и $\mathbf{V}_q = (\mathbf{V}_{q_1}^T \quad \mathbf{V}_{q_2}^T \quad \mathbf{V}_{q_3}^T)^T$ – векторы модальных переменных всех НЭ и скоростей их изменения, соответственно, векторы $\mathbf{N}_\omega = \mathbf{N}_\omega(\boldsymbol{\omega}_s, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ и $\mathbf{N}_q = \mathbf{N}_q(\boldsymbol{\omega}_s, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ содержат нелинейные слагаемые по обобщенным координатам КА с НЭ, $\tilde{\mathbf{J}}$ – тензор инерции деформированного КА относительно его центра масс, \mathbf{M}_{ctrl} – управляющий момент, $\tilde{\mathbf{M}}_{ext}$ – момент внешних сил, действующих на КА. В случае движения КА по геостационарной орбите он включает в себя моменты гравитационных сил $\tilde{\mathbf{M}}_{grav}$ и сил светового давления \mathbf{M}_{sp} . В (2.1) символ $\tilde{\alpha}$ обозначает зависимость соответствующей величины от модальных переменных, т.е. $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(\mathbf{q})$. Явные выражения соответствующих моментов внешних сил вынесены в Приложение Б.

Итоговая нелинейная система уравнений движения КА с НЭ относительно центра масс помимо динамических уравнений (2.1) содержит уравнение Пуассона (1.44) и кинематические соотношения для модальных переменных из (1.42).

Проводя линеаризацию уравнений движения КА с НЭ (2.1) в отсутствие внешних сил (за исключением управляющего момента) в окрестности положения равновесия

$$\boldsymbol{\omega}_s = \mathbf{0}_{3 \times 1}, \quad \boldsymbol{\Lambda}_s = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}_{3 \times 1}^T \end{pmatrix}^T, \quad \mathbf{q} = \mathbf{0}_{k_\Sigma \times 1}, \quad \mathbf{V} = \mathbf{0}_{k_\Sigma \times 1}, \quad (2.2)$$

получаем линейные уравнения (см. Приложение Б)

$$\begin{pmatrix} \mathbf{J} & \mathbf{S}_{\omega q} \\ \mathbf{S}_{\omega q}^T & \mathbf{S}_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\omega}}_s \\ \dot{\mathbf{V}}_q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{ctrl} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Здесь \mathbf{J} – тензор инерции КА, НЭ которого находятся в недеформированном состоянии (в дальнейшем *недеформированный* ТИ), $\boldsymbol{\Omega} = \text{diag}(\boldsymbol{\Omega}_1 \quad \boldsymbol{\Omega}_2 \quad \boldsymbol{\Omega}_3)$ – диагональная матрица собственных частот колебаний НЭ, $k_\Sigma = \sum_{n=1}^3 k_n$, где k_n –

число колебательных мод n -го НЭ, учтенных в математической модели. Матрица при первых производных является положительно определенной. Система (2.3) дополняется линеаризованными около (2.2) кинематическими соотношениями

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}_s = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_s, \quad \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{V}_q. \quad (2.4)$$

Разрешив систему дифференциальных уравнений (2.3) относительно старших производных и дополнив их кинематическими соотношениями (2.4), запишем линейные уравнения углового движения в нормальной форме

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{M}_{ctrl}, \quad (2.5)$$

где

$$\mathbf{x} = \left(\boldsymbol{\omega}_s^T \quad \mathbf{V}_q^T \quad \boldsymbol{\lambda}_s^T \quad \mathbf{q}^T \right)^T \quad (2.6)$$

– вектор состояния КА с НЭ, постоянные матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B} равны имеют вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times n} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{J}^{-1} \mathbf{S}_{\omega q} \left(\mathbf{S}_q - \mathbf{S}_{\omega q}^T \mathbf{J}^{-1} \mathbf{S}_{\omega q} \right)^{-1} \boldsymbol{\Omega} \\ \mathbf{0}_{n \times 3} & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times 3} & - \left(\mathbf{S}_q - \mathbf{S}_{\omega q}^T \mathbf{J}^{-1} \mathbf{S}_{\omega q} \right)^{-1} \boldsymbol{\Omega} \\ \frac{1}{2} \mathbf{E}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times n} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times n} \\ \mathbf{0}_{n \times 3} & \mathbf{E}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times 3} & \mathbf{0}_{n \times n} \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}^{-1} \left(\mathbf{E}_{3 \times 3} + \mathbf{S}_{\omega q} \left(\mathbf{S}_q - \mathbf{S}_{\omega q}^T \mathbf{J}^{-1} \mathbf{S}_{\omega q} \right)^{-1} \mathbf{S}_{\omega q}^T \mathbf{J}^{-1} \right) \\ - \left(\mathbf{S}_q - \mathbf{S}_{\omega q}^T \mathbf{J}^{-1} \mathbf{S}_{\omega q} \right)^{-1} \mathbf{S}_{\omega q}^T \mathbf{J}^{-1} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{n \times 3} \end{pmatrix}.$$

В главе решается задача построения управляющего момента \mathbf{M}_{ctrl} , обеспечивающего инерциальную стабилизацию ($\boldsymbol{\omega}_S = \mathbf{0}_{3 \times 1}$) КА с НЭ в угловом положении $\Lambda_S^f = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}_{3 \times 1}^T \end{pmatrix}^T$. При этом предполагается следующее.

1. Исполнительные органы системы управления и датчики расположены только на корпусе КА.
2. Роль исполнительных органов играют маховики, создающие суммарный относительный кинетический момент \mathbf{H} . В этом случае управляющий момент рассчитывается по формуле

$$\mathbf{M}_{ctrl} = -\dot{\mathbf{H}} - \boldsymbol{\omega}_S \times \mathbf{H}. \quad (2.8)$$

Управление происходит за счет изменения угловой скорости вращения маховиков. Проблема выбора конфигурации маховичной системы ориентации, задачи распределения кинетического момента по маховикам, а также их разгрузки в работе не рассматриваются.

3. При формировании управления не используется информация о модальных переменных, т.к. их идентификация усложняет алгоритмы определения движения [53, 54].

Исходя из последнего предположения, для решения задачи инерциальной стабилизации в работе используется управление

$$\mathbf{M}_{ctrl} = -\mathbf{M}_{ext} + \mathbf{u}_{stab}(\boldsymbol{\omega}_S, \boldsymbol{\lambda}_S), \quad (2.9)$$

в рамках которого

- 1) компенсируется часть момента внешних сил \mathbf{M}_{ext} , действующего на *недеформированный* КА, то есть КА с недеформированным тензором инерции \mathbf{J} ;
- 2) слагаемое \mathbf{u}_{stab} представляет собой отрицательную обратную связь по состоянию, описывающему угловое движение корпуса КА,

$$\mathbf{u}_{stab} = -\mathbf{K}_\omega \boldsymbol{\omega}_S - \mathbf{K}_\lambda \boldsymbol{\lambda}_S, \quad (2.10)$$

где \mathbf{K}_ω и \mathbf{K}_λ – положительно определенные матрицы.

Получим достаточные условия, при которых закон управления \mathbf{u}_{stab} обеспечит асимптотическую устойчивость нулевого положения равновесия линеаризованных уравнений движения КА с НЭ относительно центра масс (2.3), (2.4) в отсутствие внешних возмущений. Линейная система (2.3), замкнутая управлением (2.10), принимает вид

$$\begin{pmatrix} \mathbf{J} & \mathbf{S}_{\omega\mathbf{q}} \\ \mathbf{S}_{\omega\mathbf{q}}^T & \mathbf{S}_{\mathbf{q}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\omega}}_S \\ \dot{\mathbf{V}}_{\mathbf{q}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{K}_\omega & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega}_S \\ \mathbf{V}_{\mathbf{q}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{K}_\lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda}_S \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Для доказательства асимптотической устойчивости положения равновесия (2.11) в линейном случае рассмотрим определенно-положительную функцию Ляпунова

$$V = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega}_S^T & \mathbf{V}_{\mathbf{q}}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{J} & \mathbf{S}_{\omega\mathbf{q}} \\ \mathbf{S}_{\omega\mathbf{q}}^T & \mathbf{S}_{\mathbf{q}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega}_S \\ \mathbf{V}_{\mathbf{q}} \end{pmatrix} + \boldsymbol{\lambda}_S^T \mathbf{K}_\lambda \boldsymbol{\lambda}_S + \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{q}. \quad (2.12)$$

Её производная в силу уравнений движения является знакоотрицательной:

$$\dot{V} = -\boldsymbol{\omega}_S^T \mathbf{K}_\omega \boldsymbol{\omega}_S \leq 0.$$

Согласно теореме Барбашина-Красовского [55], необходимо убедиться в отсутствии целых траекторий на множестве $\{\dot{V} = 0\}$, кроме положения равновесия. Таковым здесь является множество $\boldsymbol{\omega}_S = \mathbf{0}$. На нем уравнения движения принимают вид

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\omega\mathbf{q}} \dot{\mathbf{V}}_{\mathbf{q}} &= -\mathbf{K}_\lambda \boldsymbol{\lambda}_S, \\ \mathbf{S}_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{V}}_{\mathbf{q}} &= -\boldsymbol{\Omega} \mathbf{q}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Так как во втором уравнении системы (2.13) матрицы $\mathbf{S}_{\mathbf{q}}$ и $\boldsymbol{\Omega}$ положительно определенные, его решение представимо в виде

$$\mathbf{q} = \mathbf{Z} \begin{pmatrix} C_1 \cos(\nu_1 t + \varphi_{01}) \\ C_2 \cos(\nu_2 t + \varphi_{02}) \\ \vdots \\ C_{k_\Sigma} \cos(\nu_{k_\Sigma} t + \varphi_{0k_\Sigma}) \end{pmatrix} = \mathbf{Z}\Theta(t),$$

где матрица \mathbf{Z} состоит из собственных векторов \mathbf{z}_i , $i = \overline{1, k_\Sigma}$, определяемых из соотношений

$$(\mathbf{\Omega} - \nu_i \mathbf{S}_q) \mathbf{z}_i = 0, \quad i = \overline{1, k_\Sigma}.$$

Подстановка \mathbf{q} в первое уравнение из (2.13) дает

$$\mathbf{S}_{\omega q} \mathbf{Z} \ddot{\Theta}(t) = -\mathbf{K}_\lambda \lambda_s.$$

На множестве $\omega_s = \mathbf{0}$ имеем $\lambda_s = const$. В итоге, если

- 1) все частоты ν_i , $i = \overline{1, k_\Sigma}$ имеют различные значения,
- 2) $rank(\mathbf{S}_{\omega q} \mathbf{Z}) = 3$,

условие $\mathbf{S}_{\omega q} \mathbf{Z} \ddot{\Theta}(t) = const$ не выполняется ни при каких значениях констант $C_i \neq 0$, φ_{0i} . Таким образом, при выполнении двух вышеуказанных условий закон управления (2.10) обеспечивает асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (2.1) в отсутствие внешних возмущений.

В диссертационной работе положительно-определенные матрицы обратной связи \mathbf{K}_ω и \mathbf{K}_λ строятся как решение задачи линейно-квадратичного регулирования [56].

2.2. Линейно-квадратичные алгоритмы стабилизации КА с НЭ

Линейно-квадратичный регулятор (ЛКР) является классическим методом управления, применяющимся в общем случае для линейных стационарных систем вида (2.5). Он представляет собой линейную стационарную

отрицательную обратную связь по вектору состояния \mathbf{x} , определяется выражением [57]

$$\mathbf{u}_{stab} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{x} \quad (2.14)$$

и минимизирует функционал

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}_{stab}^T\mathbf{R}\mathbf{u}_{stab}) dt. \quad (2.15)$$

В (2.15) матрицы \mathbf{Q} и \mathbf{R} – положительно-определенные ($\mathbf{Q} > 0, \mathbf{R} > 0$), а \mathbf{P} – положительно определенная матрица, являющаяся решением алгебраического уравнения Риккати (АУР)

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0}. \quad (2.16)$$

Выбор ЛКР в качестве метода построения отрицательной обратной связи \mathbf{u}_{stab} из закона (2.10) продиктован тем, что он позволяет штрафовать за чрезмерное увеличение затрат ресурсов управления и за отклонение вектора состояния от заданных значений. В качестве параметров алгоритма выступают матрицы функционала качества \mathbf{Q} и \mathbf{R} .

В случае управления угловым движением КА с НЭ матрицы системы \mathbf{A} и \mathbf{B} задаются в виде (2.7), вектор состояния имеет вид (2.6). ЛКР (2.14), построенный для данной модели, обеспечивает асимптотическую устойчивость положения равновесия (2.2) системы (2.5) [57]. Численное моделирование проведенное в работе [24] подтвердило, что с помощью закона управления (2.14) имеется возможность как стабилизировать корпус КА в заданном угловом положении, так и погасить колебания в НЭ его конструкции. Однако такой подход к построению ЛКР обладает двумя недостатками.

1. При его формировании используются модальные переменные $\mathbf{q}(t)$.

2. Потенциально большая размерность вектора состояния \mathbf{x} . Действительно, его размерность равна $2(3+k_\Sigma)$. Модель движения тем точнее, чем больше размерность вектора $\mathbf{q}(t)$. Однако рост размерности вектора $\mathbf{q}(t)$ приводит к увеличению вычислительной сложности линейно-квадратичных алгоритмов управления, использующих матрицу системы \mathbf{A} размерности $2(3+k_\Sigma) \times 2(3+k_\Sigma)$. Особенно остро последняя проблема показывает себя при попытке использования нелинейного аналога ЛКР – SRDE-управления [58], так как последний требует решения алгебраического уравнения Риккати на каждом шаге интегрирования.

В связи с вышесказанным в диссертационной работе ЛКР строится на основе линейной системы углового движения корпуса КА, в рамках которой в (2.5) вектор состояния имеет вид $\mathbf{x}_s = (\boldsymbol{\omega}_s^T \quad \boldsymbol{\lambda}_s^T)^T$, а матрицы системы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \frac{1}{2} \mathbf{E}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}^{-1} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Представим положительно-определенное решение АУР (2.16) \mathbf{P} и матрицу \mathbf{Q} из функционала качества в блочном виде

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{12}^T & \mathbf{P}_{22} \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} \\ \mathbf{Q}_{12}^T & \mathbf{Q}_{22} \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

где $\mathbf{P}_{11} = \mathbf{P}_{11}^T$, \mathbf{P}_{12} , $\mathbf{P}_{22} = \mathbf{P}_{22}^T$, $\mathbf{Q}_{11} > 0$, $\mathbf{Q}_{22} > 0$ – матрицы размера 3×3 . Тогда уравнение Риккати (2.16), решением которого является матрица \mathbf{P} , записывается так:

$$\frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{12}^T & \mathbf{P}_{22} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{12} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{P}_{22} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{pmatrix} \right) - \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{11} \mathbf{Z} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{11} \mathbf{Z} \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{12}^T \mathbf{Z} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12}^T \mathbf{Z} \mathbf{P}_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} \\ \mathbf{Q}_{12}^T & \mathbf{Q}_{22} \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Здесь $\mathbf{Z} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{J}^{-1}$ – положительно определенная матрица, так как тензор инерции $\mathbf{J} > 0$.

В итоге вместо (2.16) получаем систему из трех уравнений

$$\frac{1}{2} (\mathbf{P}_{12}^T + \mathbf{P}_{12}) - \mathbf{P}_{11} \mathbf{Z} \mathbf{P}_{11} + \mathbf{Q}_{11} = \mathbf{0}, \quad \frac{1}{2} \mathbf{P}_{22} = \mathbf{P}_{11} \mathbf{Z} \mathbf{P}_{12} + \mathbf{Q}_{12}, \quad \mathbf{P}_{12}^T \mathbf{Z} \mathbf{P}_{12} = \mathbf{Q}_{22}. \quad (2.20)$$

Еще одно уравнение в точности повторяет второе уравнение системы (2.20)

$$\mathbf{P}_{12}^T \mathbf{Z} \mathbf{P}_{11} + \mathbf{Q}_{12}^T = \frac{1}{2} \mathbf{P}_{22} = \frac{1}{2} \mathbf{P}_{22}^T = (\mathbf{P}_{12}^T \mathbf{Z} \mathbf{P}_{11})^T = \mathbf{P}_{11} \mathbf{Z} \mathbf{P}_{12} + \mathbf{Q}_{12}.$$

Уравнение Риккати (2.16), а, следовательно, система (2.20) имеет единственное решение $\mathbf{P} > 0$ [57].

ЛКР (2.14) с учетом (2.17) имеет вид

$$\mathbf{u}_{stab} = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{J}^{-1} (\mathbf{P}_{11} \boldsymbol{\omega}_S + \mathbf{P}_{12} \boldsymbol{\lambda}_S) \quad (2.21)$$

и, следовательно, матрицы обратной связи из (2.10) определяются следующими выражениями:

$$\mathbf{K}_\omega = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{P}_{11}, \quad \mathbf{K}_\lambda = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{P}_{12}. \quad (2.22)$$

Для положительной определенности матрицы \mathbf{K}_ω из (2.22) достаточно, чтобы положительно определенные матрицы \mathbf{R}^{-1} , \mathbf{J}^{-1} и \mathbf{P}_{11} коммутировали. Аналогично, при условии положительной определенности матрицы \mathbf{P}_{12} , для выполнения условия $\mathbf{K}_\lambda > 0$ достаточно коммутативности матриц \mathbf{R}^{-1} , \mathbf{J}^{-1} и \mathbf{P}_{12} . Для того, чтобы три положительно определенные квадратичные формы коммутировали достаточно, чтобы они имели диагональный вид в одном и том же базисе. Подберем матрицы \mathbf{Q} и \mathbf{R} таким образом, чтобы найти

положительно определенное решение (2.18) системы уравнений (2.20) в явном виде, и покажем, что соответствующие матрицы обратной связи (2.22) будут положительно определенными.

Пусть \mathbf{J} – диагональный тензор инерции. Тогда, если \mathbf{Q} и \mathbf{R} диагональные матрицы с элементами $r_i > 0, i = \overline{1,3}$ и $q_i > 0, i = \overline{1,6}$, то матрица $\mathbf{Z} = \mathbf{J}^{-1}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{J}^{-1}$ является диагональной, то есть $\mathbf{Z} = \text{diag}(z_1 \ z_2 \ z_3)$, где $z_i = 1/(r_i J_i^2), i = \overline{1,3}$. Покажем, что искомое положительно определенное решение системы (2.20) состоит из диагональных матриц $\mathbf{P}_{11}, \mathbf{P}_{12}, \mathbf{P}_{22}$ вида

$$\mathbf{P}_{11} = \begin{pmatrix} p'_1 & 0 & 0 \\ 0 & p'_2 & 0 \\ 0 & 0 & p'_3 \end{pmatrix}, \mathbf{P}_{12} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix}, \mathbf{P}_{22} = \begin{pmatrix} p''_1 & 0 & 0 \\ 0 & p''_2 & 0 \\ 0 & 0 & p''_3 \end{pmatrix}.$$

Действительно, в данном случае частным решением третьего уравнения из системы (2.20) является матрица \mathbf{P}_{12} с диагональными элементами

$$p_i = \pm \sqrt{q_{i+3}/z_i} = \pm J_i \sqrt{r_i q_{i+3}}, i = \overline{1,3}. \quad (2.23)$$

Тогда, найдя из первого уравнения (2.20) диагональные элементы \mathbf{P}_{11}

$$\begin{aligned} p'_i &= \pm \sqrt{\frac{p_i + q_i}{z_i}} = \pm \sqrt{\frac{\pm \sqrt{q_{i+3}/z_i} + q_i}{z_i}} = \\ &= \pm J_i \sqrt{r_i (\pm J_i \sqrt{r_i q_{i+3}} + q_i)}, i = \overline{1,3} \end{aligned} \quad (2.24)$$

и подставляя коэффициенты p_i и p'_i во второе уравнение, получаем диагональные элементы матрицы \mathbf{P}_{22}

$$\begin{aligned} p''_i &= 2z_i p'_i p_i = 2z_i \sqrt{\frac{q_{i+3}}{z_i} \frac{p_i + q_i}{z_i}} = 2\sqrt{q_{i+3} (p_i + q_i)} = \\ &= 2\sqrt{q_{i+3} (\sqrt{q_{i+3}/z_i} + q_i)}, i = \overline{1,3}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

На заключительном этапе воспользуемся леммой Шура.

Лемма Шура [59]. Пусть матрица \mathbf{P} имеет вид (2.18). Тогда для того, чтобы $\mathbf{P} > 0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из двух следующих условий:

1. $\mathbf{P}_{11} > 0$ и $\mathbf{P}_{22} - \mathbf{P}_{12}^T \mathbf{P}_{11}^{-1} \mathbf{P}_{12} > 0$;
2. $\mathbf{P}_{22} > 0$ и $\mathbf{P}_{11} - \mathbf{P}_{12} \mathbf{P}_{22}^{-1} \mathbf{P}_{12}^T > 0$.

Из леммы следует, что для выполнения неравенства $\mathbf{P} > 0$, необходимо, чтобы $\mathbf{P}_{11} > 0$ и $\mathbf{P}_{22} > 0$. Отсюда следует, что для положительной определенности решения уравнения Риккати при извлечении корней в формулах (2.23), (2.24), (2.25) требуется выбирать решения со знаком “плюс”. В этом случае условие $\mathbf{P}_{22} - \mathbf{P}_{12}^T \mathbf{P}_{11}^{-1} \mathbf{P}_{12} > 0$ после подстановки выражений (2.23), (2.24), (2.25) для коэффициентов p_i , p'_i и p''_i принимает вид $\sqrt{q_{i+3}/z_i} + 2q_i > 0$, $i = \overline{1,3}$, и, следовательно, выполняется в силу положительности коэффициентов z_i , $i = \overline{1,3}$ и q_i , $i = \overline{1,6}$. В результате найдено положительно определенное решение АУР, имеющее структуру

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{12}^T & \mathbf{P}_{22} \end{pmatrix} = \left(\frac{\text{diag}(p'_1 \ p'_2 \ p'_3) \mid \text{diag}(p_1 \ p_2 \ p_3)}{\text{diag}(p_1 \ p_2 \ p_3) \mid \text{diag}(p''_1 \ p''_2 \ p''_3)} \right), \quad (2.26)$$

причем \mathbf{P}_{12} также является положительно определенной.

Построенный на основе (2.26) стабилизирующий ЛКР (2.21) в рассматриваемом случае имеет вид

$$\mathbf{u}_{stab} = -\text{diag} \left(\sqrt{(y_i J_i + q_i/r_i)} \right)_{i=1}^3 \boldsymbol{\omega}_S - \text{diag} (y_i)_{i=1}^3 \boldsymbol{\lambda}_S, \quad (2.27)$$

где $y_i = \sqrt{q_{i+3}/r_i}$, $i = \overline{1,3}$.

Перейдем к случаю недиагонального тензора инерции \mathbf{J} . Поскольку последний задан заранее, он определяет базис, в котором остальные матрицы

должны иметь диагональный вид. Представим \mathbf{J} в виде $\mathbf{J} = \mathbf{W}\mathbf{J}^{diag}\mathbf{W}^T$, где \mathbf{W} – ортогональная матрица и $\mathbf{J}^{diag} = diag(J_1 \ J_2 \ J_3)$. Пусть матрицы \mathbf{Q}_{11} , \mathbf{Q}_{22} и \mathbf{R} являются диагональными в том же базисе, что и тензор инерции \mathbf{J} , то есть

$$\mathbf{Q}_{11} = \mathbf{W}\mathbf{Q}_{11}^{diag}\mathbf{W}^T, \quad \mathbf{Q}_{22} = \mathbf{W}\mathbf{Q}_{22}^{diag}\mathbf{W}^T, \quad \mathbf{R} = \mathbf{W}\mathbf{R}^{diag}\mathbf{W}^T,$$

где матрицы $\mathbf{Q}_{11}^{diag} = diag(q_1 \ q_2 \ q_3)$, $\mathbf{Q}_{22}^{diag} = diag(q_4 \ q_5 \ q_6)$, $\mathbf{R}^{diag} = diag(r_1 \ r_2 \ r_3)$ имеют положительные диагональные элементами. Указанный выбор матрицы функционала качества свел поиск положительно определенного решения уравнения Риккати к диагональному случаю. Действительно, прямой подстановкой в третье уравнение системы (2.20) убеждаемся в том, что его частное решение \mathbf{P}_{12} представляется в виде

$$\mathbf{P}_{12} = \mathbf{W}\mathbf{P}_{12}^{diag}\mathbf{W}^T, \quad (2.28)$$

где $\mathbf{P}_{12}^{diag} = diag(p_1 \ p_2 \ p_3)$ – диагональная матрица с соответствующими коэффициентами (2.23) для случая диагонального тензора инерции. Аналогично из первого уравнения системы (2.20) находится матрица

$$\mathbf{P}_{11} = \mathbf{W}\mathbf{P}_{11}^{diag}\mathbf{W}^T, \quad (2.29)$$

где $\mathbf{P}_{11}^{diag} = diag(p'_1 \ p'_2 \ p'_3)$ задаётся выражением (2.24). Наконец, матрица \mathbf{P}_{22} имеет вид

$$\mathbf{P}_{22} = \mathbf{W}\mathbf{P}_{22}^{diag}\mathbf{W}^T, \quad (2.30)$$

где диагональные элементы матрицы $\mathbf{P}_{22}^{diag} = diag(p''_1 \ p''_2 \ p''_3)$ определяются выражением (2.25). Положительная определенность матриц (2.28), (2.29), (2.30) вытекает из факта, что для ортогональной матрицы \mathbf{W} и произвольной положительно определенной диагональной матрицы $\mathbf{\Xi}$ матрица $\mathbf{W}\mathbf{\Xi}\mathbf{W}^T$

является положительно определенной. Решение уравнения Риккати представляется в виде

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{W} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{11}^{diag} & \mathbf{P}_{12}^{diag} \\ \mathbf{P}_{12}^{diag} & \mathbf{P}_{22}^{diag} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{W}^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{W}^T \end{pmatrix}$$

и также является положительно определенным.

В результате, за счет выбора матриц функционала качества, получены тройки положительно определенных матриц \mathbf{R}^{-1} , \mathbf{J}^{-1} , \mathbf{P}_{11} и \mathbf{R}^{-1} , \mathbf{J}^{-1} , \mathbf{P}_{12} , диагональных в одном базисе, что, как следует из вышесказанного, влечет за собой положительную определенность матриц обратной связи (2.22). При этом соответствующий ЛКР

$$\mathbf{u}_{stab} = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{J}^{-1} \left(\mathbf{W} \mathbf{P}_{11}^{diag} \mathbf{W}^T \boldsymbol{\omega}_s + \mathbf{W} \mathbf{P}_{12}^{diag} \mathbf{W}^T \boldsymbol{\lambda}_s \right) \quad (2.31)$$

стабилизирует линейную систему (2.3), (2.4).

Таким образом, получена отрицательная обратная связь (2.10) с положительно определенными матрицами \mathbf{K}_ω и \mathbf{K}_λ из (2.22), построенными как решение задачи линейно-квадратичного регулирования. На этом процедура построения закона управления (2.9), обеспечивающего инерциальную стабилизацию КА с НЭ в заданном положении, завершена.

2.3. Численное моделирование

Демонстрация работы алгоритма управления (2.9), (2.31), призванного обеспечить инерциальную стабилизацию ($\boldsymbol{\omega}_s = \mathbf{0}_{3 \times 1}$) КА с НЭ в угловом положении $\Lambda_s^f = (1 \quad \mathbf{0}_{3 \times 1}^T)^T$, проводилась в рамках следующей задачи. Как говорилось в разделе 2.1 объектом управления является КА, состоящий из корпуса и трех жестко закрепленных НЭ – антенны и двух идентичных панелей. Его центр масс движется по геостационарной орбите. Число мод НЭ, учтенных в модели КА, указано в таблице 2.1. Собственные частоты мод

панелей имеют значения порядка 1 Гц, в то время как антенна обладает низкими частотами, лежащими в диапазоне 0.05–1 Гц. Отметим, что естественные декременты затухания мод всех НЭ полагаются нулевыми, что влечет за собой необходимость их внешнего гашения.

Управляющий момент создается маховиками и его максимальное значение полагается равным 0.1 Н·м. Кинетический момент последних не должен превышать 70 Н·м·с. Начальное значение накопленного маховиками кинетического момента $\mathbf{H} = \mathbf{0}_{3 \times 1}$ Н·м·с.

Матрицы функционала качества ЛКР (2.31) полагались следующими:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 30245.238 & 123.221 & -16559.459 \\ 123.221 & 21327.031 & 2986.202 \\ -16559.459 & 2986.202 & 531995.775 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{Q}_2 \end{pmatrix}, \quad (2.32)$$

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{pmatrix} 0.851 & -0.013 & 0.000 \\ -0.013 & 1.337 & -0.003 \\ 0.000 & -0.003 & 0.856 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_2 = \begin{pmatrix} 653.891 & -8.633 & 21.149 \\ -8.633 & 988.751 & -5.971 \\ 21.149 & -5.971 & 14.594 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что для рассматриваемой конфигурации КА оба условия асимптотической устойчивости из раздела 2.1 выполняются.

Моделирование происходит на основании полной нелинейной математической модели, предложенной в главе 1. Численное интегрирование производилось методом Рунге-Кутты четвертого порядка на витке геостационарной орбиты. Постоянные шаги интегрирования и управления указаны в таблице 2.1.

Таблица 2.1

Инерциальная стабилизация. Параметры интегрирования

Параметр	Значение
Время интегрирования	86400 с
Шаг интегрирования	0.1 с
Шаг управления	0.1 с
Число мод панелей, k_{p_i} , $i = 1, 2$	2
Число мод антенны, k_a	3

Численная иллюстрация работы алгоритма получена при следующих начальных условиях (табл. 2.2) и представлена на рис. 2.1–2.7.

Таблица 2.2

Инерциальная стабилизация. Начальные условия интегрирования

Параметр	Начальное значение
Положение, \mathbf{R}_S	$(4.3 \cdot 10^7 \ 0 \ 0)^T$ м
Скорость, \mathbf{V}_S	$(0 \ 3045 \ 0)^T$ м/с
Кватернион ориентации, Λ_S	$(0.9274 \ 0.3 \ 0.1 \ 0.2)^T$
Угловая скорость, $\boldsymbol{\omega}_S$	$(0.2 \ 0.1 \ 0.3)^T \times 7.08 \cdot 10^{-5}$ град/с
Модальные переменные панелей, \mathbf{q}_{p_i} , $i = 1, 2$	$\underbrace{(0.1 \ 0 \ \dots \ 0)^T}_{k_{p_1}}$, $\mathbf{0}_{k_{p_2} \times 1}$
Модальные переменные антенны, \mathbf{q}_a	$\mathbf{0}_{k_a \times 1}$
Скорости изменения модальных переменных панелей, \mathbf{V}_{p_i} , $i = 1, 2$	$\mathbf{0}_{k_{p_i} \times 1}$
Скорости изменения модальных переменных антенны, \mathbf{V}_a	$\mathbf{0}_{k_a \times 1}$

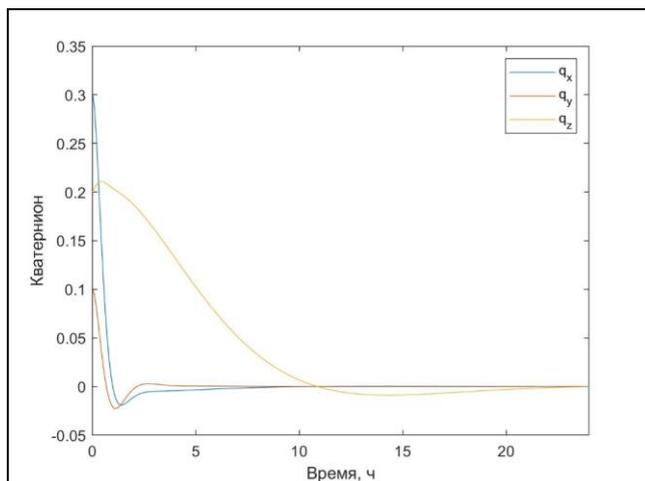


Рис. 2.1. Инерциальная стабилизация.
Векторная часть кватерниона ориентации

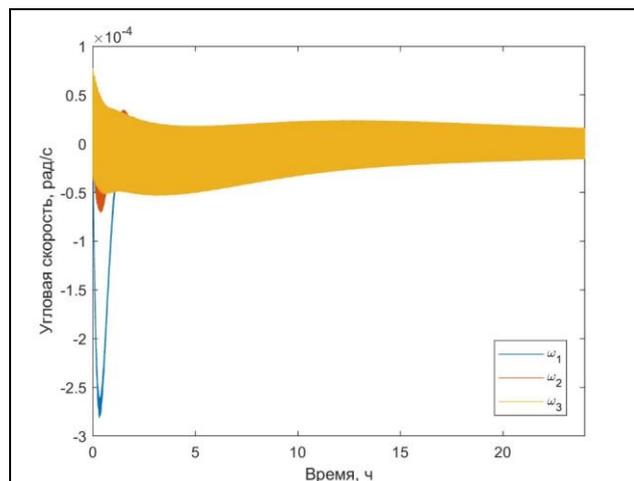


Рис. 2.2. Инерциальная стабилизация.
Угловая скорость

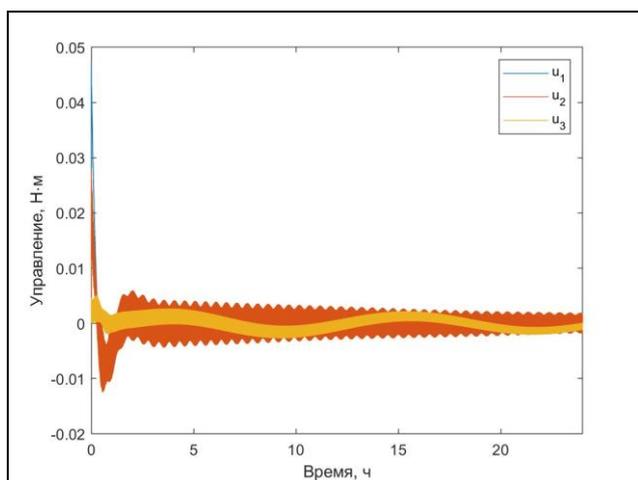


Рис. 2.3. Инерциальная стабилизация.
Управляющий момент

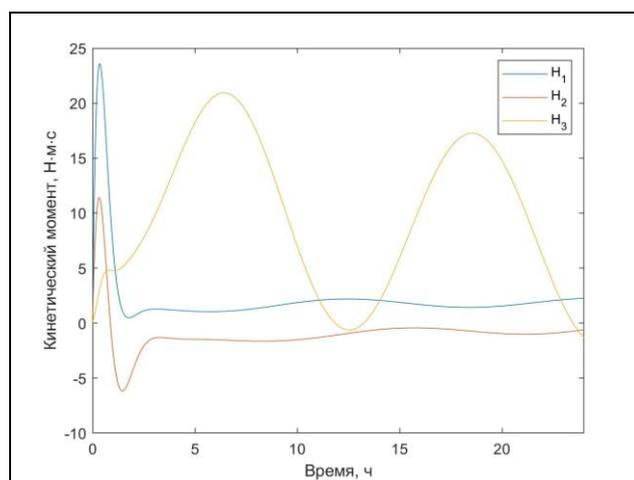


Рис. 2.4. Инерциальная стабилизация.
Кинетический момент маховиков

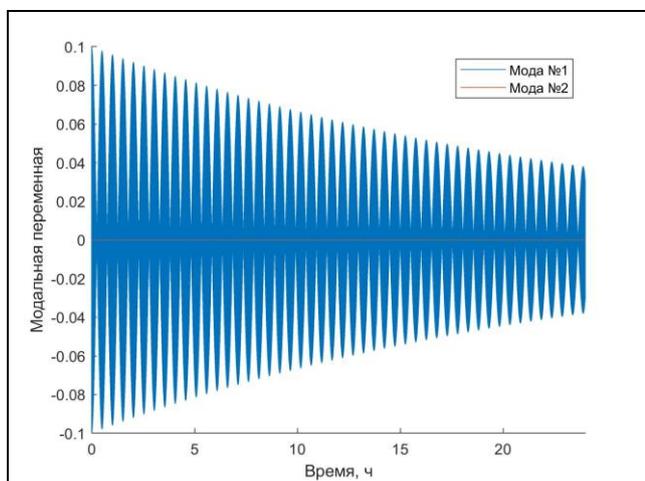


Рис. 2.5. Инерциальная стабилизация.
Модальные переменные 1ой панели

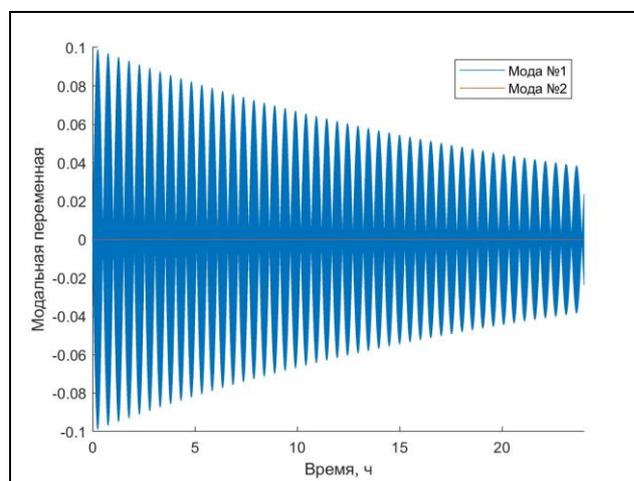


Рис. 2.6. Инерциальная стабилизация.
Модальные переменные 2ой панели

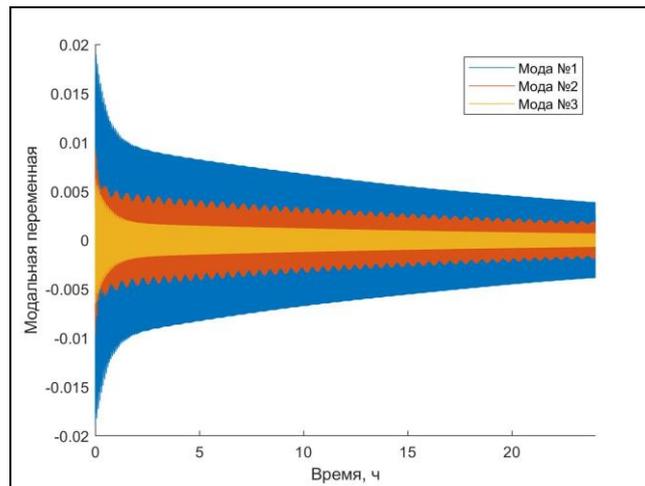


Рис. 2.7. Инерциальная стабилизация. Модальные переменные антенны

Из графиков на рис. 2.1, 2.2 следует, что построенное управление решает задачу инерциальной стабилизации корпуса КА в заданном угловом положении. При этом в процессе стабилизации КА уменьшаются и значения модальных переменных каждого НЭ (рис. 2.5–2.7). Как величина управляющего момента, так и величина кинетического момента маховиков не выходят за рамки допустимых значений (рис. 2.6) и могут быть реализованы исполнительными органами. Отметим, что наличие остаточных значений управляющего момента в установившемся режиме обусловлены компенсацией внешних моментов сил гравитации и сил солнечного давления.

Выводы к главе 2

В настоящей главе изучено движение геостационарного КА с НЭ, состоящего из корпуса и двух НЭ. На основании математической модели, разработанной в главе 1, получены уравнения углового движения КА с НЭ.

Построен закон управления, стабилизирующий корпус КА в заданном угловом положении в ИСК, который

- реализуется с помощью маховиков, расположенных на корпусе КА,
- не требует знания модальных переменных,
- гасит низкочастотные вибрации в НЭ.

Ограниченность величины максимального управляющего момента потребовала разработки ЛКР, причем, благодаря выбору матриц в функционале качества, в явном виде найдены как решение алгебраического уравнения Риккати, так и соответствующие ему положительно определенные матрицы обратной связи по состоянию, описывающему поведение корпуса КА. С помощью указанного подхода удалось обеспечить асимптотическую устойчивость управляемого движения КА с НЭ в ИСК, достаточные условия которой также получены в текущей главе.

Результаты исследований опираются на опубликованные статью [24] и препринт [56].

Глава 3. Построение опорной траектории углового движения КА третьего порядка гладкости

В предыдущей главе была решена задача инерциальной стабилизации КА с НЭ. Настоящая глава посвящена двум особенностям, возникающим при разработке алгоритмов стабилизации заданных неинерциальных опорных режимов ориентации (или движений) КА с НЭ. Под опорным движением понимается изменение ориентации и угловой скорости КА по заранее заданному закону.

Первой особенностью является наличие ненулевых остаточных деформаций НЭ после завершения процесса стабилизации КА. Другая особенность связана с необходимостью построения опорных траекторий КА, движение вдоль которых обеспечивает невозбуждение вибраций в НЭ в процессе и после завершения его переориентации.

Глава структурирована следующим образом. В разделе 1 формулируется постановка задачи, предлагается метод стабилизации заданных опорных режимов движения КА с НЭ. В разделе 2 изучается влияние остаточных деформаций на процесс орбитальной стабилизации КА с НЭ, движущегося по геостационарной орбите Земли. Методика построения опорных траекторий, заданных набором в указанные моменты времени, излагается в разделах 3-6. В ее рамках кватернион ориентации удовлетворяет условию нормировки кватернионов ориентации, а также обеспечивается третья степень гладкости опорной траектории на всем интервале движения. В заключительном разделе приводятся результаты численного моделирования движения КА с НЭ вдоль полученной опорной траектории под действием предложенного закона управления.

3.1 Постановка задачи и закон управления

Глава посвящена задаче стабилизации опорных режимов углового движения корпуса КА с НЭ, жестко прикрепленными к корпусу. Для описания опорных режимов используется опорная система координат (ОСК) $OX_1X_2X_3$ (X). Ее начало лежит в центре масс корпуса КА, а положение осей относительно ИСК, задается матрицей направляющих косинусов $\mathbf{B}_{YX}(t)$ или единичным опорным кватернионом $\mathbf{Q}(t)$. Как $\mathbf{B}_{YX}(t)$, так и $\mathbf{Q}(t)$ являются заданными функциями времени и описывают поворот из ИСК в ОСК. Преобразование компонент произвольного вектора \mathbf{r} определяется формулами

$$\begin{aligned}\mathbf{r}^X &= \mathbf{B}_{YX} \mathbf{r}^Y, \\ \mathbf{r}^X &= \tilde{\mathbf{Q}}(t) \circ \mathbf{r}^Y \circ \mathbf{Q}(t),\end{aligned}$$

где \mathbf{r}^Y и \mathbf{r}^X – проекции вектора \mathbf{r} на оси ИСК $OY_1Y_2Y_3$ (Y) и ОСК, соответственно. Вращение ОСК относительно ИСК определяется опорной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}(t)$.

Выпишем уравнения углового движения КА с НЭ относительно ОСК. Для этого кватернион ориентации корпуса КА Λ_S представляется в виде произведения

$$\Lambda_S = \mathbf{Q} \circ \Lambda_{rel}, \quad (3.1)$$

где кватернион Λ_{rel} определяет переход из ОСК в ССК. Следует отметить, что кватернионы Λ_S , \mathbf{Q} , Λ_{rel} задаются параметрами Родрига-Гамильтона.

В свою очередь абсолютная угловая скорость корпуса КА также представляется в виде суммы

$$\boldsymbol{\omega}_S^x = \boldsymbol{\omega}_{rel}^x + \mathbf{B}_{Xx} \boldsymbol{\omega}^X, \quad (3.2)$$

где $\boldsymbol{\omega}_{rel}$ – угловая скорость вращения ССК, относительно ОСК. Соотношение записано в проекциях на оси ССК. В (3.2) используется матрица перехода из ОСК в ССК

$$\mathbf{V}_{xx} = (2\lambda_{0rel}^2 - 1)\mathbf{E}_{3 \times 3} - 2\lambda_{0rel} [\boldsymbol{\lambda}_{rel}]_{\times} + 2\boldsymbol{\lambda}_{rel} \boldsymbol{\lambda}_{rel}^T, \quad (3.3)$$

поскольку опорная угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ задается проекциями на оси ОСК. Исходя из (3.2), абсолютное угловое ускорение рассчитывается по формуле

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_s = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel} + \dot{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{\omega}_{rel} \times \boldsymbol{\omega},$$

после подстановки которой динамические уравнения движения КА с НЭ относительно центра масс принимают следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{J}} & \tilde{\mathbf{S}}_{\omega\mathbf{q}} \\ \tilde{\mathbf{S}}_{\omega\mathbf{q}}^T & \tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{q}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel} \\ \dot{\mathbf{V}}_{\mathbf{q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{q})(-\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega}_{rel} \times \boldsymbol{\omega}) \\ \tilde{\mathbf{S}}_{\omega\mathbf{q}}^T(\mathbf{q})(-\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega}_{rel} \times \boldsymbol{\omega}) \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} \mathbf{N}_{\omega}(\boldsymbol{\omega}_s, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ \mathbf{N}_{\mathbf{q}}(\boldsymbol{\omega}_s, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{ctrl} + \tilde{\mathbf{M}}_{ext} \\ -\boldsymbol{\Omega}\mathbf{q} + \boldsymbol{\Phi}_q^{ext} \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Предполагается, что для опорной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ выполняются уравнения Пуассона

$$\dot{\mathbf{Q}} = \frac{1}{2} \mathbf{Q} \circ \boldsymbol{\omega}^X. \quad (3.5)$$

Соотношение (3.5) в совокупности с уравнениями Пуассона для абсолютного движения (1.43) приводят к кинематическим соотношениям

$$\dot{\boldsymbol{\Lambda}}_{rel} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Lambda}_{rel} \circ \boldsymbol{\omega}_{rel}. \quad (3.6)$$

Последние наряду с динамическими уравнениями (3.4) и равенством $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{V}_{\mathbf{q}}$, полностью описывают движение КА с НЭ относительно центра масс.

В главе решается задача построения управляющего момента \mathbf{M}_{ctrl} , обеспечивающего стабилизацию ($\boldsymbol{\omega}_{rel} = \mathbf{0}_{3 \times 1}$) КА с НЭ в ОСК в угловом положении $\Lambda_{rel}^f = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}_{3 \times 1}^T \end{pmatrix}^T$. Для этого используется закон управления

$$\mathbf{M}_{ctrl}^x = -\mathbf{M}_{ext}^x + \boldsymbol{\omega}_S^x \times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_S^x - \mathbf{J} (\boldsymbol{\omega}_{rel}^x \times \mathbf{V}_{Xx} \boldsymbol{\omega}^X) + \mathbf{J} \mathbf{V}_{Xx} \dot{\boldsymbol{\omega}}^X + \mathbf{u}_{stab}, \quad (3.7)$$

где $\mathbf{V}_{Xx} = \mathbf{V}_{Xx} \mathbf{V}_{YX}^T$, предложенный в [60, 61] для стабилизации опорных режимов твердотельного КА. Как и в главе 2 управление (3.7) не включает в себя модальных переменных, а, следовательно, компенсирует составляющую моментов сил, действующих лишь на недеформированный КА с НЭ. В (3.7) \mathbf{J} – тензор инерции недеформированного КА, а \mathbf{M}_{ext}^x – момент внешних сил, действующих на недеформированный КА. Слагаемое \mathbf{u}_{stab} определяется выражением (2.31) в котором вместо абсолютных значений угловой скорости и ориентации подставляются относительные, вычисленные с помощью соотношений

$$\begin{aligned} \Lambda_{rel} &= \tilde{\mathbf{Q}} \circ \Lambda_S, \\ \boldsymbol{\omega}_{rel}^x &= \boldsymbol{\omega}_S^x - \mathbf{V}_{Xx} \boldsymbol{\omega}^X. \end{aligned}$$

Как отмечалось во введении, применение закона (3.7) для стабилизации заданных режимов углового движения КА с НЭ имеет два аспекта, которые рассматриваются ниже в текущей главе. Первый связан с влиянием установившихся значений модальных переменных на реализуемость режима орбитальной стабилизации КА с НЭ. Под установившимся подразумевается режим углового движения КА, при котором $\boldsymbol{\omega}_{rel} = 0$ и корпус КА находится в требуемом положении в ОСК. Второй аспект посвящен построению опорных траекторий КА, движение вдоль которых обеспечивало бы невозбуждение вибраций в НЭ в процессе и после завершения его переориентации.

3.2 Влияние установившихся значений модальных переменных на процесс орбитальной стабилизации

В рамках задачи орбитальной стабилизации в качестве опорной выступает орбитальная система координат (ОрбСК) $Oy_1y_2y_3(y)$, вращающаяся с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_{orb}$. Центр масс последней совпадает с центром масс КА и движется по геостационарной орбите, ось Oy_3 сонаправлена с радиус-вектором аппарата, Oy_2 сонаправлена с вектором орбитального кинетического момента, Oy_1 дополняет систему до правой ортогональной.

Поскольку на геостационарной орбите угловая скорость ОрбСК

$$\boldsymbol{\omega}_{orb} = \frac{\mathbf{R}_S \times \mathbf{V}_S}{|\mathbf{R}_S|^2} \quad (3.8)$$

постоянна, закон управления (3.7) принимает вид

$$\mathbf{M}_{ctrl}^x = -\mathbf{M}_{ext}^x + \boldsymbol{\omega}_S^x \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_S^x - \mathbf{J}(\boldsymbol{\omega}_{rel}^x \times \mathbf{B}_{yx} \mathbf{B}_{yy} \boldsymbol{\omega}_{orb}^y) + \mathbf{u}_{stab}. \quad (3.9)$$

Здесь матрица \mathbf{B}_{yx} задается формулой (3.3), а матрица направляющих косинусов

$$\mathbf{B}_{yy} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{y1}^T \\ \mathbf{e}_{y2}^T \\ \mathbf{e}_{y3}^T \end{pmatrix},$$

определяющая переход из ИСК в ОрбСК, задается проекциями базисных векторов ОрбСК на оси ИСК следующим образом:

$$\mathbf{e}_{y1} = \mathbf{e}_{y2} \times \mathbf{e}_{y3}, \mathbf{e}_{y2} = \frac{\mathbf{R}_S \times \mathbf{V}_S}{|\mathbf{R}_S \times \mathbf{V}_S|}, \mathbf{e}_{y3} = \frac{\mathbf{R}_S}{|\mathbf{R}_S|}. \quad (3.10)$$

Пусть КА содержит N НЭ. В установившемся режиме в них присутствуют остаточные деформации, зависящие от установившихся значений модальных

переменных $\mathbf{q}^{ss} = (\mathbf{q}_n^{ss})_{n=1}^N$. Последние, в отличие от случая инерциальной стабилизации, не являются нулевыми. Это приводит к наличию не скомпенсированных законом управления (3.9) остаточных постоянно действующих возмущений, величина которых, зависит от разности $\Delta\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{q}^{ss}) = \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{q}^{ss}) - \mathbf{J}$ тензоров деформированного $\tilde{\mathbf{J}}$ и недеформированного \mathbf{J} КА. Действительно, ввиду уравнений движения (3.4), управляющий момент должен компенсировать влияние гироскопических и гравитационных сил, величина которых зависит от тензора инерции деформированного КА $\tilde{\mathbf{J}}$. Однако, при построении закона (3.9) информация о модальных переменных не используется, благодаря чему в его основу заложена величина тензора инерции КА без учета деформаций \mathbf{J} . Закон управления (3.9) применим в том случае, когда указанные возмущения малы по сравнению в величиной управляющего момента. Следовательно, для оценки $\Delta\tilde{\mathbf{J}}$ требуется определить значение вектора \mathbf{q}^{ss} . Исходя из (3.4), он удовлетворяет алгебраической системе уравнений

$$\mathbf{N}_{q_n}^{ss}(\boldsymbol{\omega}_{orb}, \mathbf{q}^{ss}) - \boldsymbol{\Omega}\mathbf{q}_n^{ss} + \boldsymbol{\Phi}_{q_n}^{ext} = \mathbf{0}_{k_n \times 1}, \quad n = \overline{1, N} \quad (3.11)$$

относительно переменных \mathbf{q}_n^{ss} , $n = \overline{1, N}$, где

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{q_n}^{ss} = & - \sum_i m_{ni} \mathbf{A}_{ni}^T (\boldsymbol{\omega}_{orb} \times \boldsymbol{\omega}_{orb} \times (\mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni})) - M_n \mathbf{A}_n^T (\boldsymbol{\omega}_{orb} \times \boldsymbol{\omega}_{orb} \times \boldsymbol{\rho}_{Sn}) + \\ & + 1/M \sum_{n=1}^N M_n \mathbf{A}_n^T (M_n (\boldsymbol{\omega}_{orb} \times \boldsymbol{\omega}_{orb} \times \mathbf{r}_{Cn}) + M_n \boldsymbol{\omega}_{orb} \times \boldsymbol{\omega}_{orb} \times \boldsymbol{\rho}_{Sn}), \quad n = \overline{1, N}. \end{aligned}$$

После подстановки второго равенства из (1.21) в (3.11) вышеуказанное выражение $\mathbf{N}_{q_n}^{ss}$ приобретает вид

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{q_n}^{ss} = & \boldsymbol{\Omega}_{orb}^T \mathbf{K}_{(\text{Ar})_n} \boldsymbol{\omega}_{orb} + \boldsymbol{\Omega}_{orb}^T \mathbf{K}_{(\text{AA})_n} \boldsymbol{\Omega}_{orb} \mathbf{q}_n^{ss} - M_n \mathbf{A}_n^T (\boldsymbol{\omega}_{orb} \times \boldsymbol{\omega}_{orb} \times \boldsymbol{\rho}_n) + \\ & + \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N M_n \mathbf{A}_n^T (\boldsymbol{\omega}_{orb} \times \boldsymbol{\omega}_{orb} \times M_j \mathbf{A}_j \mathbf{q}_j^{ss}), \quad n = \overline{1, N}, \end{aligned}$$

где $\mathbf{K}_{(\text{Ar})_n}, \mathbf{K}_{(\text{AA})_n}$ – соответствующие матрицы из (1.18), выписанные для n -го НЭ, $\boldsymbol{\Omega}_{orb}$ – матрица $\boldsymbol{\Omega}_S$ из раздела 1.3 с точностью до замены $\boldsymbol{\omega}_n$ до $\boldsymbol{\omega}_{orb}$,

$$\boldsymbol{\rho}_n = \boldsymbol{\rho}_{Sn} - \frac{1}{M} \left(\sum_{n=1}^N M_n \boldsymbol{\rho}_{Sn} \right), \quad n = \overline{1, N}.$$

Введем матрицы

$$\mathbf{K}_{\mathbf{A}_n \mathbf{A}_j} = M_j \begin{pmatrix} \mathbf{K}(\mathbf{a}_1^n, \mathbf{a}_1^j) & \cdots & \mathbf{K}(\mathbf{a}_1^n, \mathbf{a}_{k_j}^j) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{K}(\mathbf{a}_{k_n}^n, \mathbf{a}_1^j) & \cdots & \mathbf{K}(\mathbf{a}_{k_n}^n, \mathbf{a}_{k_j}^j) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_{\mathbf{A}_n \boldsymbol{\rho}_n} = M_n \begin{pmatrix} \mathbf{K}(\mathbf{a}_1^n, \boldsymbol{\rho}_n) \\ \vdots \\ \mathbf{K}(\mathbf{a}_{k_n}^n, \boldsymbol{\rho}_n) \end{pmatrix},$$

в которых векторы \mathbf{a}_i^j являются столбцами матрицы

$$\mathbf{A}_n = (\mathbf{a}_1^n \quad \cdots \quad \mathbf{a}_{k_n}^n) = \frac{1}{M_n} \sum_i m_{ni} \mathbf{A}_{ni}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{q_n}^{ss} = & \boldsymbol{\Omega}_{orb}^T \mathbf{K}_{(\text{Ar})_n} \boldsymbol{\omega}_S + \boldsymbol{\Omega}_{orb}^T \mathbf{K}_{(\text{AA})_n} \boldsymbol{\Omega}_{orb} \mathbf{q}_n^{ss} + \boldsymbol{\Omega}_{orb}^T \mathbf{K}_{\mathbf{A}_n \boldsymbol{\rho}_n} \boldsymbol{\omega}_S - \\ & - \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N M_n \boldsymbol{\Omega}_{orb}^T \mathbf{K}_{\mathbf{A}_n \mathbf{A}_j} \boldsymbol{\Omega}_{orb} \mathbf{q}_j^{ss} = \boldsymbol{\Omega}_{orb}^T (\mathbf{K}_{(\text{Ar})_n} + \mathbf{K}_{\mathbf{A}_n \boldsymbol{\rho}_n}) \boldsymbol{\omega}_S + \\ & + \boldsymbol{\Omega}_{orb}^T \left(\mathbf{K}_{(\text{AA})_n} - \frac{M_n}{M} \mathbf{K}_{\mathbf{A}_n \mathbf{A}_n} \right) \boldsymbol{\Omega}_{orb} \mathbf{q}_n^{ss} - \frac{1}{M} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^N M_n \boldsymbol{\Omega}_{orb}^T \mathbf{K}_{\mathbf{A}_n \mathbf{A}_j} \boldsymbol{\Omega}_{orb} \mathbf{q}_j^{ss}. \end{aligned}$$

Подставляя получившееся выражение в (3.11)

$$\begin{aligned} & \Phi_{q_n}^{ext} + \Omega_{orb}^T \left(\mathbf{K}_{(Ar)_n} + \mathbf{K}_{A_n p_n} \right) \omega_S + \\ & + \left(\Omega_{orb}^T \left(\mathbf{K}_{(AA)_n} - \frac{M_n}{M} \mathbf{K}_{A_n A_n} \right) \Omega_{orb} - \Omega_n \right) \mathbf{q}_n^{ss} - \\ & - \frac{1}{M} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^N M_n \Omega_{orb}^T \mathbf{K}_{A_n A_j} \Omega_{orb} \mathbf{q}_j^{ss} = \mathbf{0}_{k_n \times 1}, \quad n = \overline{1, N} \end{aligned}$$

и разрешая последнюю систему уравнений относительно \mathbf{q}_n^{ss} , $n = \overline{1, N}$, получаем формулу расчета установившихся значений модальных переменных

$$\mathbf{q}^{ss} = -\mathbf{X}^{-1} \mathbf{x}, \quad (3.12)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \left(\mathbf{X}_{nj} \right)_{n,j=1}^N, \quad \mathbf{x} = \left(\mathbf{x}_n \right)_{n=1}^N, \\ \mathbf{x}_n &= \Phi_{q_n}^{ext} + \Omega_{orb}^T \left(\mathbf{K}_{(Ar)_n} + \mathbf{K}_{A_n p_n} \right) \omega_{orb}, \\ \mathbf{X}_{nj} &= \begin{cases} \Omega_{orb}^T \left(\mathbf{K}_{(AA)_n} - \frac{M_n}{M} \mathbf{K}_{A_n A_n} \right) \Omega_{orb} - \Omega_n, & n = j \\ -\frac{M_n}{M} \Omega_{orb}^T \mathbf{K}_{A_n A_j} \Omega_{orb}, & n \neq j \end{cases} \end{aligned}$$

В качестве демонстрации для конфигурации КА с НЭ, описанной в разделе 2.3, приведем разность

$$\Delta \tilde{\mathbf{J}} = 10^{-4} \begin{pmatrix} -2.93 \cdot 10^{-2} & 5.33 & 1.92 \cdot 10^{-2} \\ 5.33 & -2.39 \cdot 10^{-3} & -8.69 \\ 1.92 \cdot 10^{-2} & -8.69 & 3.67 \cdot 10^{-2} \end{pmatrix} \text{кг} \cdot \text{м}^2,$$

определяющую величину постоянно действующих возмущений и тензор инерции

$$\mathbf{J} = 10^5 \begin{pmatrix} 0.8353 & -0.0471 & -0.0770 \\ -0.0471 & 2.6129 & 0.0018 \\ -0.0770 & 0.0018 & 3.1767 \end{pmatrix} \text{кг} \cdot \text{м}^2$$

недеформированного КА, от которого зависит величина управляющего момента. Сравнение указанных величин позволяет говорить о малости некомпенсируемых законом управления постоянно действующих возмущений, а, следовательно, и корректности применения закона управления (3.9) для решения задачи орбитальной стабилизации КА с НЭ.

Ниже в разделе 3.7 проводится численное тестирование закона управления (3.9) в рамках задачи орбитальной стабилизации КА с НЭ. В качестве конкретной модели КА берется модель, описанная в разделе 2.4.

3.3. Критерии построения опорной траектории КА с НЭ

Как в случае инерциальной, так и в случае орбитальной стабилизаций опорные кватернион и угловая скорость КА с НЭ задавались функциями, известными в каждый момент времени миссии. На практике, однако, опорное движение корпуса КА нередко определяет набором кинематических параметров лишь в некоторые заданные моменты времени, и требуется построить его как функцию этих параметров в виде некоторой интерполяции. Оставшаяся часть главы посвящена изложению и применению методики интерполяции опорной траектории КА, движение вдоль которой обеспечивает невозбуждение вибраций в НЭ в процессе и после завершения его переориентации. В качестве кинематических параметров в работе выступают кватернионы ориентации.

В диссертационной работе ставится задача построить опорную траекторию КА с НЭ, обладающую двумя следующими свойствами.

1. Естественным требованием является сохранение нормы опорного кватерниона ориентации на всем интервале движения, т.е. $\|\mathbf{Q}(t)\| = 1$
2. Первая производная опорного ускорения $\dot{\mathbf{e}}$ (или *рывок ускорения*) должна быть непрерывной функцией. В [35, 36] выдвигалась гипотеза, что движение вдоль опорной траектории, удовлетворяющей указанному условию, позволит уменьшить возбуждение колебаний в НЭ. Отметим, что непрерывность $\dot{\mathbf{e}}$

влечет за собой непрерывность, первой производной $\dot{\mathbf{M}}_{ctrl}^x$ закона управления (3.7).

Условие 2 приводит к необходимости построения опорной траектории $\mathbf{Q}(t)$ третьей степени гладкости. Действительно, найдем зависимость угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ и углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon} \triangleq \dot{\boldsymbol{\omega}}$ от $\mathbf{Q}(t)$. Из (3.5) получим угловую скорость ОСК, заданной в проекции на эту систему,

$$\boldsymbol{\omega} = 2\tilde{\mathbf{Q}} \circ \dot{\mathbf{Q}} \quad (3.13)$$

как функцию опорного кватерниона $\mathbf{Q}(t)$. Находя производную (3.5)

$$\ddot{\mathbf{Q}} = \frac{1}{4}\mathbf{Q} \circ \boldsymbol{\omega} \circ \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}\mathbf{Q} \circ \dot{\boldsymbol{\omega}}, \quad (3.14)$$

получаем выражение для углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = 2\tilde{\mathbf{Q}} \circ \ddot{\mathbf{Q}} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \circ \boldsymbol{\omega}. \quad (3.15)$$

Здесь зависимость $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{Q}(t))$ устанавливается формулой (3.13).

Аналогичным образом из (3.5), (3.14) находим явную зависимость $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ от $\mathbf{Q}(t)$:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = 2\tilde{\mathbf{Q}} \circ \ddot{\mathbf{Q}} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} \circ \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \circ \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{4}\boldsymbol{\omega} \circ \boldsymbol{\omega} \circ \boldsymbol{\omega}, \quad (3.16)$$

где $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{Q}(t))$, $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{Q}(t))$ описываются формулами (3.13) и (3.15). Исходя из (3.13), (3.15) и (3.16), заключаем, что для непрерывности $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ необходима непрерывность $\ddot{\mathbf{Q}}(t)$.

Пусть на фиксированном отрезке времени $[t_0, t_N]$ задан набор кватернионов \mathbf{Q}_i в моменты времени t_i , где $i = \overline{0, N}$. В дальнейшем пару (\mathbf{Q}_i, t_i) будем называть *узлом*. В начальный момент времени движение КА полагается

полностью определенным, то есть при $t = t_0$ определены кватернион ориентации \mathbf{Q}_0 , угловая скорость $\boldsymbol{\omega}(t_0) = \boldsymbol{\omega}_0$, а также угловое ускорение $\boldsymbol{\varepsilon}(t_0) = \boldsymbol{\varepsilon}_0$ и его производная $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t_0) = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0$.

Приступим к изложению методики построения опорной траектории $\mathbf{Q}(t)$. Пусть между каждой парой узлов (\mathbf{Q}_i, t_i) и $(\mathbf{Q}_{i+1}, t_{i+1})$ построена ее часть $\mathbf{Q}_{i,i+1}(t)$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$, имеющая степень гладкости не ниже третьей, а искомая кривая имеет вид:

$$\mathbf{Q}(t) = \begin{cases} \mathbf{Q}_{0,1}(t), t \in [t_0, t_1] \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_{i,i+1}(t), t \in [t_i, t_{i+1}] \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_{N-1,N}(t), t \in [t_{N-1}, t_N] \end{cases} . \quad (3.17)$$

Тогда из формул (3.13), (3.15), (3.16) следует, что на каждом отрезке $[t_i, t_{i+1}]$ опорное ускорение $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ является непрерывной функцией.

Для того чтобы степень гладкости траектории $\mathbf{Q}(t)$ не понижалась в узлах (\mathbf{Q}_i, t_i) , производится процедура склейки участков $\mathbf{Q}_{i,i+1}(t)$ [62]. Если при заданном номере узла i либо угловая скорость $\boldsymbol{\omega}(t_i)$, либо угловое ускорение $\boldsymbol{\varepsilon}(t_i)$, либо рывок ускорения $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t_i)$ не заданы, то в соответствии с формулами (3.13), (3.15), (3.16) находятся их значения на правом конце $\mathbf{Q}_{i-1,i}(t)$, которые затем полагаются начальными значениями соответствующих параметров на левом конце куска $\mathbf{Q}_{i,i+1}(t)$. Так как в момент времени t_0 значения всех указанных величин считаются заданными, то вследствие предложенной процедуры на всем отрезке времени $[t_0, t_N]$ функции $\boldsymbol{\omega}(t)$, $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)$ не терпят разрывов.

В [62] было рассмотрено несколько способов определения параметров $\omega(t_i)$, $\varepsilon(t_i)$, $\dot{\varepsilon}(t_i)$ в узлах $t_i, i = \overline{1, N}$. В диссертационной работе рассматривается случай, когда в каждом узле траектории указанная тройка считается известной и процедура склейки не требуется. На практике значения $\omega(t_i), i = \overline{1, N}$ обычно задаются наряду с информацией об узлах, в то время как векторы $\varepsilon(t_i)$, $\dot{\varepsilon}(t_i)$ в узлах доопределяются и становятся параметрами искомой траектории.

Задача поиска опорной траектории сводится к построению ее составляющих $\mathbf{Q}_{i,i+1}(t)$, которые удовлетворяют в узлах (\mathbf{Q}_i, t_i) и $(\mathbf{Q}_{i+1}, t_{i+1})$ заданным условиям на угловую скорость $\omega(t)$, угловое ускорение $\varepsilon(t)$ и его рывок $\dot{\varepsilon}(t)$. Без ограничения общности будем рассматривать элемент опорной траектории на отрезке времени $[t_1, t_2]$, который проходит через узлы (\mathbf{Q}_1, t_1) и (\mathbf{Q}_2, t_2) , т.е. выполняются равенства

$$\mathbf{Q}_{1,2}(t_1) = \mathbf{Q}_1, \quad (3.18)$$

$$\mathbf{Q}_{1,2}(t_2) = \mathbf{Q}_2. \quad (3.19)$$

3.4. Конструкция опорного кватерниона

Для соблюдения условия нормировки кватерниона, вместо задачи интерполяции в евклидовом пространстве R^3 , необходимо рассматривать задачу интерполяции на сфере S^3 . Шумэйком [41] был предложен метод гладкой интерполяции между парой узлов $(\mathbf{Q}_1, 0)$ и $(\mathbf{Q}_2, 1)$, который носит название *сферической линейной интерполяции (SLERP)*. В его рамках строить опорную траекторию предлагается в виде

$$\mathbf{Q}_{1,2}(t) = \mathbf{Q}_1 \circ (\mathbf{Q}_1^{-1} \circ \mathbf{Q}_2)^t, t \in [0, 1]. \quad (3.20)$$

Показательная функция в (3.20), основанием которой является нормированный кватернион $\mathbf{Q} = (Q_0 \ Q_1 \ Q_2 \ Q_3)^T$, определяется выражением [63]:

$$\mathbf{Q}^t = \exp(t \ln(\mathbf{Q})). \quad (3.21)$$

Исходя из (3.20) и (3.21), получаем эквивалентную запись SLERP:

$$\mathbf{Q}_{1,2}(t) = \mathbf{Q}_1 \circ \exp\left(t \ln\left(\mathbf{Q}_1^{-1} \circ \mathbf{Q}_2\right)\right). \quad (3.22)$$

В дальнейшем в работе используется выражение (3.20), предложенное Шумэйком.

Следует отметить тот факт, что определить экспоненту и логарифм в формуле (3.21) можно двумя способами. Данные преобразования, практически не отличаясь друг от друга, существенно расходятся в плане их трактовок.

«Математическая трактовка» [42, 63]. Экспонента и логарифм в формуле (3.21) определяются следующим образом:

$$\mathbf{Q} = \exp(|\bar{\boldsymbol{\varphi}}|) = \begin{cases} \left(\cos(|\bar{\boldsymbol{\varphi}}|) \ \frac{\bar{\boldsymbol{\varphi}}^T}{|\bar{\boldsymbol{\varphi}}|} \sin(|\bar{\boldsymbol{\varphi}}|) \right)^T, & |\bar{\boldsymbol{\varphi}}| \neq 0 \\ (1 \ \mathbf{0}^T)^T, & |\bar{\boldsymbol{\varphi}}| = 0 \end{cases}, \quad (3.23)$$

$$\bar{\boldsymbol{\varphi}} = \ln(\mathbf{Q}) = \begin{cases} \arccos(Q_0) \frac{(Q_1 \ Q_2 \ Q_3)^T}{\sqrt{Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2}}, & \sqrt{Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2} \neq 0 \\ \mathbf{0}, & \sqrt{Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2} = 0 \end{cases}. \quad (3.24)$$

Отображения (3.23) и (3.24) устанавливают связь между нормированными кватернионами $\mathbf{Q} \in S^3$ и векторами $\bar{\boldsymbol{\varphi}} \in R^3$ [64], что позволяет использовать известные методы интерполяции. Правомерность такой формы записи продемонстрирована, например, в монографии [65, глава 4].

Однако, имеет место

«Механическая трактовка» экспоненты и логарифма, которой отдается предпочтение в рамках данной работы. Указанные функции определяются формулами [36]

$$\mathbf{Q} = \exp(|\bar{\boldsymbol{\varphi}}|) = \begin{cases} \left(\cos\left(\frac{|\bar{\boldsymbol{\varphi}}|}{2}\right) \frac{\bar{\boldsymbol{\varphi}}^T}{|\bar{\boldsymbol{\varphi}}|} \sin\left(\frac{|\bar{\boldsymbol{\varphi}}|}{2}\right) \right)^T, & |\bar{\boldsymbol{\varphi}}| \neq 0 \\ (1 \quad \mathbf{0}^T)^T, & |\bar{\boldsymbol{\varphi}}| = 0 \end{cases}, \quad (3.25)$$

$$\bar{\boldsymbol{\varphi}} = \ln(\mathbf{Q}) = \begin{cases} 2 \arccos(Q_0) \frac{(Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3)^T}{\sqrt{Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2}}, & \sqrt{Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2} \neq 0 \\ \mathbf{0}, & \sqrt{Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2} = 0 \end{cases}. \quad (3.26)$$

Непосредственная проверка показывает, что $\exp(\ln(\mathbf{Q})) = \mathbf{Q}$, а значит функция $\ln(\mathbf{Q})$ является обратной к $\exp(\bar{\boldsymbol{\varphi}})$. Запись преобразований в виде (3.25) и (3.26), по-прежнему осуществляя связь между $\mathbf{Q} \in S^3$ и $\bar{\boldsymbol{\varphi}} \in R^3$, делает правомерной наглядную механическую интерпретацию сферической линейной интерполяции и, в частности, вектора $\bar{\boldsymbol{\varphi}}$.

Нормированный кватернион $\mathbf{Q} = (Q_0 \quad Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3)^T$ всегда можно трактовать двумя способами: как конкретную ориентацию (точку на S^3) или же как поворот из точки $(1 \quad \mathbf{0}^T)^T \in S^3$ в заданную ориентацию $\mathbf{Q} \in S^3$. По теореме Эйлера о конечном повороте [66] любое положение твердого тела с неподвижной точкой может быть получено из начального положения одним поворотом вокруг неподвижной оси (*элементарный поворот*)

$$\hat{\boldsymbol{\omega}} = \frac{(Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3)^T}{\sqrt{Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2}} \quad (3.27)$$

на угол $\varphi(t)$, где

$$\varphi(t) = 2 \arccos(Q_0). \quad (3.28)$$

При этом кватернион, определяющий эйлеров поворот, и, следовательно, соединяющий два узла $\left((1 \ \mathbf{0}^T)^T, 0 \right)$ и $(\mathbf{Q}, 1)$, записывается в виде

$$\mathbf{Q}(t) = \left(\cos\left(\frac{1}{2}\varphi(t)\right) \ \hat{\omega}^T \sin\left(\frac{1}{2}\varphi(t)\right) \right)^T. \quad (3.29)$$

Предположим теперь, что твердое тело совершает элементарный поворот с постоянной угловой скоростью $\omega = |\omega| \hat{\omega}$ вокруг неподвижной оси $\hat{\omega}$. За время t оно повернется на угол $\varphi(t) = |\omega|t$. Из (3.24), (3.27) и (3.28) следует, что $\bar{\varphi} = \varphi(t) \hat{\omega}$, то есть является вектором ориентации. Так как $\bar{\varphi} = |\omega|t \hat{\omega} = \omega t$ и $\mathbf{Q}(t) = \exp(\omega t)$, то заключаем, что SLERP (3.22) описывает элементарный поворот с постоянной угловой скоростью $\tilde{\omega} \triangleq \ln(\mathbf{Q}_1^{-1} \circ \mathbf{Q}_2)$ вокруг неподвижной оси $\hat{\omega} = \tilde{\omega}/|\tilde{\omega}|$.

Как способ интерполяции между двумя узлами SLERP обладает следующими свойствами.

1. $\mathbf{Q}_{1,2}(t) \in C^\infty[0,1]$.
2. Выполняется условие нормировки кватерниона на всем интервале движения. Так как по условию $|\mathbf{Q}_1| = 1$ и по определению $|\exp(\bar{\varphi})| = 1$ при $\forall \bar{\varphi}$, из (3.22) следует, что $|\mathbf{Q}_{1,2}(\tau)| = 1, \tau \in [0,1]$.
3. Так как $\exp(\mathbf{0}) = (1 \ \mathbf{0}^T)^T$, то $\mathbf{Q}_{1,2}(0) = \mathbf{Q}_1$. В свою очередь, $\mathbf{Q}_{1,2}(1) = \mathbf{Q}_2$. Отсюда следует, что траектория проходит через заданные узлы.
4. [63, утв. 29] SLERP соединяет кватернионы \mathbf{Q}_1 и \mathbf{Q}_2 по соответствующей геодезической линии на S^3 , т.е. проходит по кратчайшей части ее большой окружности. Таким образом, SLERP дает кратчайший возможный путь интерполяции между двумя кватернионами на единичной сфере.

Каждая составляющая часть опорной траектории $\mathbf{Q}_{i,i+1}(t)$ определена на временном отрезке $[t_i, t_{i+1}]$. Для дальнейших вычислений удобно на каждом таком отрезке перейти к новой независимой переменной $\tau_i \in [0,1]$, которая будет именоваться *виртуальным временем*. Соответствующее преобразование осуществляется по формуле

$$\tau_i = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} = \frac{t - t_i}{\Delta t_i}. \quad (3.30)$$

Пусть теперь некоторая достаточно гладкая функция $\alpha(t)$ задана на отрезке $[t_i, t_{i+1}]$. Положим $\beta(\tau_i) \triangleq \alpha(t_i + \tau_i \Delta t_i)$, где $\tau_i \in [0,1]$, и установим связь между производными $(\dot{}) = d/dt$ и $()' = d/d\tau_i$. Имеем

$$\dot{\beta}(\tau_i(t)) = \frac{d\beta(\tau_i)}{d\tau_i} \dot{\tau}_i = \frac{1}{\Delta t_i} \beta'(\tau_i). \quad (3.31)$$

Отсюда для первых трех производных выполняются

$$\begin{aligned} \beta'(\tau_i) &= \Delta t_i \dot{\beta}(\tau_i(t)), \\ \beta''(\tau_i) &= \Delta t_i^2 \ddot{\beta}(\tau_i(t)), \\ \beta'''(\tau_i) &= \Delta t_i^3 \dddot{\beta}(\tau_i(t)). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Так как процедура построения интерполянта рассматривается между конкретной парой узлов, далее вместо τ_i будет использоваться обозначение τ .

Таким образом, если траектория задана на отрезке времени $[t_1, t_2]$, то, исходя из формул (3.20) и (3.30), SLERP между парой узлов (\mathbf{Q}_1, t_1) и (\mathbf{Q}_2, t_2) будет иметь вид

$$\mathbf{Q}_{1,2}(t) = \mathbf{Q}_1 \circ (\mathbf{Q}_1^{-1} \circ \mathbf{Q}_2)^{\frac{t-t_1}{t_2-t_1}}.$$

Пусть суммарное число значений $\omega(t)$, $\varepsilon(t)$, $\dot{\varepsilon}(t)$, заданных на паре узлов, равно n . На этот случай в [42] Кимом и другими была предложена методика построения интерполирующей кривой, позволяющая обобщить SLERP. Вводя обозначения: $\mu_0 \triangleq \mathbf{Q}_1$, $\mu_{n+1} \triangleq \mathbf{Q}_2$, опорный кватернион предлагается искать в виде [40]

$$\mathbf{Q}_{1,2}(t) = \mu_0 \circ \Pi_{\mathbf{Q}}(\tau), \quad (3.33)$$

где

$$\begin{aligned} \Pi_{\mathbf{Q}}(\tau) &= \prod_{i=0}^n (\mu_i^{-1} \circ \mu_{i+1})^{\beta_{i+1}(\tau)} = (\mu_0^{-1} \circ \mu_1)^{\beta_1(\tau)} \circ \dots \circ \\ &\circ (\mu_i^{-1} \circ \mu_{i+1})^{\beta_{i+1}(\tau)} \circ \dots \circ (\mu_n^{-1} \circ \mu_{n+1})^{\beta_{n+1}(\tau)}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

а μ_{i+1} , $i = \overline{1, n}$ – постоянные кватернионы, называемые *вспомогательными*. В условиях поставленной задачи $n = 6$.

На основании (3.21) и (3.22) $\Pi_{\mathbf{Q}}(\tau)$ можно переписать в виде

$$\Pi_{\mathbf{Q}}(\tau) = \prod_{i=0}^n \exp(\beta_{i+1}(\tau) \tilde{\omega}_i), \quad (3.35)$$

где $\tilde{\omega}_i = \ln(\mu_i^{-1} \circ \mu_{i+1})$. Именно в виде (3.33), (3.35) Кимом [42] и было предложено строить опорное движение. Оно начинается с ориентации $\mathbf{Q}_1 \equiv \mu_0$ и представляет собой последовательность из $n + 1$ одновременно совершающихся элементарных поворотов на угол $\beta_{i+1}(\tau) |\tilde{\omega}_i|$ вокруг осей $\tilde{\omega}_i / |\tilde{\omega}_i|$, соответственно.

Как следует из (3.34) и (3.35), задача интерполяции между двумя узлами (\mathbf{Q}_1, t_1) и (\mathbf{Q}_2, t_2) разбивается на две: задачу построения функций $\beta_i(\tau)$, $i = \overline{1, n+1}$, $\tau \in [0, 1]$, удовлетворяющих вместе со своими производными

$\beta_i^{(k)}, k = \overline{1,3}, i = \overline{1,n+1}$ некоторым условиям в точках $\tau = 0$ и $\tau = 1$, и задачу определения вспомогательных кватернионов $\mu_{i+1}, i = \overline{1,n}$.

3.5. Построение полиномов интерполяции

В качестве функций $\beta_i(\tau), i = \overline{1,m}$ в настоящей работе берутся полиномы степени m от виртуального времени

$$\beta_i(\tau) = \sum_{j=0}^m a_j^i \tau^j, i = \overline{1,m} \quad (3.36)$$

В (3.36) верхний индекс коэффициента a_j^i означает принадлежность коэффициента к i -ому полиному, а нижний индекс соответствует степени j слагаемого τ^j , при которой находится коэффициент. Для удовлетворения всем граничным условиям, наложенным на векторы $\mathbf{Q}_{1,2}(t), \boldsymbol{\omega}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)$, степень полиномов должна быть на единицу меньше их суммарного числа, то есть $m = 2 + n - 1 = 7$.

Коэффициенты $a_j^i, j = \overline{1,m+1}$ каждого полинома $\beta_i(\tau)$ зависят от заданных значений краевых условий $\beta_i^{(k)}(0), \beta_i^{(k)}(1), k = \overline{0,3}, i = \overline{1,m}$. В работе основным фактором при определении последних являлось желание упростить процесс построения вспомогательных кватернионов, излагающийся в следующем разделе.

Чтобы опорная траектория $\mathbf{Q}_{1,2}(t)$ в начальный и конечный моменты времени находилась в положениях \mathbf{Q}_1 и \mathbf{Q}_2 соответственно, для всех полиномов $\beta_i(\tau)$ необходимо потребовать выполнение следующих условий:

$$\beta_i(0) = 0, i = \overline{1,m}, \quad (3.37)$$

$$\beta_i(1) = 1, i = \overline{1,m}. \quad (3.38)$$

Из (3.37) сразу заключаем, что для $\forall i$ свободные члены $a_0^i = 0$.

На левой границе определим значения производных $\beta_i^{(k)}$, $k = \overline{1,3}$, $i = \overline{1,m}$ следующим образом:

$$\beta_i^{(k)}(0) \begin{cases} \neq 0, & i = k \\ = 0, & i \neq k \end{cases} \quad (3.39)$$

Идея «вложенного» задания граничных условий в значительной степени почерпнута в работе [67].

Важно отметить, что производные опорной траектории, а следовательно, и производные $\beta_i^{(k)}$, заданные в (3.39), являются производными по времени t . В то же время полиномы (3.36) зависят от τ и, следовательно, их дифференцирование проводится по виртуальному времени τ в соответствии с формулами

$$\begin{aligned} \beta_i'(\tau) &= \sum_{j=1}^m j a_j^i \tau^{j-1}, \quad \beta_i''(\tau) = \sum_{j=2}^m j(j-1) a_j^i \tau^{j-2}, \quad i = \overline{1,m}, \\ \beta_i'''(\tau) &= \sum_{j=3}^m j(j-1)(j-2) a_j^i \tau^{j-3}, \quad i = \overline{1,m}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

В связи с этим, в процессе поиска полиномиальных коэффициентов необходимо пользоваться формулами перехода (3.32), связывающими производные по реальному и виртуальному временам.

При условии (3.39) по формулам (3.40) и (3.32) получаем значения коэффициентов

$$\begin{aligned} a_1^1 &= \dot{\beta}_1(0) \Delta t, \quad a_2^1 = a_3^1 = 0; \\ a_2^2 &= \frac{1}{2} \ddot{\beta}_2(0) \Delta t^2, \quad a_1^2 = a_3^2 = 0; \\ a_3^3 &= \frac{1}{6} \ddot{\beta}_3(0) \Delta t^3, \quad a_1^3 = a_2^3 = 0; \end{aligned} \quad (3.41)$$

и

$$a_1^j = a_2^j = a_3^j = 0, \quad j = \overline{4,7}. \quad (3.42)$$

В момент времени t_2 значения производных $\beta_i^{(k)}, k = \overline{1,3}, i = \overline{1,7}$ полагаются следующими:

$$\beta_i^{(k)}(1) \begin{cases} \neq 0, & i = 8 - k, \\ = 0, & i \neq 8 - k. \end{cases} \quad (3.43)$$

Коэффициенты $a_j^i, j = \overline{4,7}$ находятся из условий (3.38), (3.43) по формуле

$$\mathbf{a}_{4:7}^i = A^{-1}B_i, \quad (3.44)$$

где $\mathbf{a}_{4:7}^i \triangleq (a_4^i \ a_5^i \ a_6^i \ a_7^i)^T$,

$$A_{III} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 12 & 20 & 30 & 42 \\ 24 & 60 & 120 & 210 \end{pmatrix}, \det(A_{III}) \neq 0$$

и в зависимости от номера полинома i

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 - a_1^1 \\ -a_1^1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 - a_2^2 \\ -2a_2^2 \\ -2a_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 1 - a_3^3 \\ -3a_3^3 \\ -6a_3^3 \\ -6a_3^3 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$B_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \ddot{\beta}_5(1)\Delta t^3 \end{pmatrix}, \quad B_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \ddot{\beta}_6(1)\Delta t^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_7 = \begin{pmatrix} 1 \\ \dot{\beta}_7(1)\Delta t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты, полученные в (3.41), (3.42) и (3.44), удобно записать в виде таблицы, в которой i -ый столбец состоит из всех коэффициентов i -го

полинома $\beta_i(\tau)$, а в i -ой строке расположены коэффициенты при степени τ^i для всех полиномов.

Таблица 3.1.

Коэффициенты полиномов $\beta_i(\tau)$, $i = \overline{1,7}$

	a_j^1	a_j^2	a_j^3	a_j^4	a_j^5	a_j^6	a_j^7
a_1^i	$\dot{\beta}_1(0)\Delta t$	0	0	0	0	0	0
a_2^i	0	$\frac{1}{2}\ddot{\beta}_2(0)\Delta t^2$	0	0	0	0	0
a_3^i	0	0	$\frac{1}{6}\ddot{\beta}_3(0)\Delta t^3$	0	0	0	0
$\mathbf{a}_{4:7}^i$	$A^{-1}B_1$	$A^{-1}B_2$	$A^{-1}B_3$	$A^{-1}B_4$	$A^{-1}B_5$	$A^{-1}B_6$	$A^{-1}B_7$

Таким образом, найдены коэффициенты всех полиномов $\beta_i(\tau)$, $i = \overline{1, n+1}$, подстановка которых в (3.36) решает задачу построения последних.

3.6. Поиск вспомогательных кватернионов

Основным стимулом при определении краевых значений производных $\beta_i^{(k)}$, $k = \overline{1,3}$, $i = \overline{1, n+1}$, являлось желание упростить процесс построения вспомогательных кватернионов, состоящий из следующих шагов.

Шаг 1. Вычисление трех производных $\dot{\mathbf{Q}}_{1,2}(t)$, $\ddot{\mathbf{Q}}_{1,2}(t)$, $\ddot{\mathbf{Q}}_{1,2}(t)$ опорной траектории (3.33), (3.34).

Шаг 2. Поиск значений $\dot{\mathbf{Q}}_{1,2}(t)$, $\ddot{\mathbf{Q}}_{1,2}(t)$, $\ddot{\mathbf{Q}}_{1,2}(t)$ в моменты времени t_1 и t_2 . Необходимые для этого значения полиномов $\beta_i(\tau)$, $i = \overline{1, m}$ и производных $\beta_i^{(k)}$, $i = \overline{1, m}$, $k = \overline{1,3}$ при $\tau = 0$ и $\tau = 1$ берутся из (3.37), (3.38), (3.39), (3.43).

Шаг 3. Установление связей между тройкой векторов $\dot{\mathbf{Q}}_{1,2}(t)$, $\ddot{\mathbf{Q}}_{1,2}(t)$, $\ddot{\mathbf{Q}}_{1,2}(t)$ и граничными значениями векторов $\boldsymbol{\omega}(t)$, $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)$ в моменты времени t_1 и t_2

по формулам (3.13), (3.15) и (3.16). Здесь также учитывается, что $\mathbf{Q}_{1,2}(t_1) = \boldsymbol{\mu}_0$ и $\mathbf{Q}_{1,2}(t_2) = \boldsymbol{\mu}_{n+1}$.

Шаг 4. Разрешение уравнений, полученных на шаге 3, относительно вспомогательных кватернионов.

Выведем выражения для трех первых производных опорной траектории (3.33). Для этого заметим, что [63, утверждение 23]

$$\frac{d}{dt} \mathbf{Q}^t = \frac{1}{2} \mathbf{Q}^t \circ \ln(\mathbf{Q}). \quad (3.45)$$

По правилу дифференцирования произведения функций, находим

$$\dot{\mathbf{Q}}_{1,2} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}_0 \circ \sum_{j=0}^n \frac{d \dot{\beta}_{j+1}}{d\tau} (\Pi_{\mathbf{Q}}(\tau)). \quad (3.46)$$

Здесь слагаемое

$$\begin{aligned} \frac{d \dot{\beta}_{j+1}}{d\tau} (\Pi_{\mathbf{Q}}(\tau)) &= (\boldsymbol{\mu}_0^{-1} \circ \boldsymbol{\mu}_1)^{\beta_1(\tau)} \circ \dots \circ \dot{\beta}_{j+1}(\tau) (\boldsymbol{\mu}_j^{-1} \circ \boldsymbol{\mu}_{j+1})^{\beta_{j+1}(\tau)} \circ \\ &\circ \ln(\boldsymbol{\mu}_j^{-1} \circ \boldsymbol{\mu}_{j+1}) \circ \dots \circ (\boldsymbol{\mu}_n^{-1} \circ \boldsymbol{\mu}_{n+1})^{\beta_{n+1}(\tau)} \end{aligned} \quad (3.47)$$

получается в результате дифференцирования скобки $(\boldsymbol{\mu}_j^{-1} \circ \boldsymbol{\mu}_{j+1})^{\beta_{j+1}(\tau)}$ и поэтому содержит $\dot{\beta}_{j+1}(\tau)$. В дальнейшем слагаемые (3.47) идентифицируются по наличию в них производных полиномов и используется нотация $d \dot{\beta}_{j+1} / d\tau$. Её мы будем придерживаться и при записи старших производных.

В процессе построения вспомогательных кватернионов используются значения (3.46) в моменты времени t_1 и t_2 . Для первой производной они имеют вид

$$\frac{d \dot{\beta}_{j+1}}{d\tau} (\mathbf{Q}(t_1)) = \dot{\beta}_{j+1}(0) \ln(\boldsymbol{\mu}_j^{-1} \circ \boldsymbol{\mu}_{j+1}), \quad j = \overline{0, n}, \quad (3.48)$$

$$\frac{d\dot{\beta}_{j+1}}{d\tau}(\mathbf{Q}(t_2)) = \boldsymbol{\mu}_0^{-1} \circ \boldsymbol{\mu}_{j+1} \circ \dot{\beta}_{j+1}(1) \ln(\boldsymbol{\mu}_j^{-1} \circ \boldsymbol{\mu}_{j+1}) \circ \boldsymbol{\mu}_{j+1}^{-1} \circ \boldsymbol{\mu}_{n+1}, \quad j = \overline{0, n}. \quad (3.49)$$

На основании (3.46) и (3.47), путем однократного и двукратного дифференцирования получим выражения второй и третьей производных части опорного кватерниона $\mathbf{Q}_{1,2}$:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{Q}}_{1,2} &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}_0 \circ \sum_{\substack{j,k=1 \\ k < j}}^n \frac{d\dot{\beta}_{k+1}, \dot{\beta}_{j+1}}{d\tau}(\Pi_{\mathbf{Q}}(\tau)) + \\ &+ \frac{1}{4} \boldsymbol{\mu}_0 \circ \sum_{j=0}^n \frac{d\dot{\beta}_{j+1}^2}{d\tau}(\Pi_{\mathbf{Q}}(\tau)) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}_0 \circ \sum_{j=0}^n \frac{d\ddot{\beta}_{j+1}}{d\tau}(\Pi_{\mathbf{Q}}(\tau)), \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{Q}}_{1,2} &= \frac{3}{4} \boldsymbol{\mu}_0 \circ \sum_{\substack{j,k=0 \\ k < j}}^n \frac{d\ddot{\beta}_{k+1}, \ddot{\beta}_{j+1}}{d\tau}(\Pi_{\mathbf{Q}}(\tau)) + \frac{3}{4} \boldsymbol{\mu}_0 \circ \sum_{\substack{j,k=0 \\ k < j}}^n \frac{d\dot{\beta}_{k+1}, \dot{\beta}_{j+1}}{d\tau}(\Pi_{\mathbf{Q}}(\tau)) + \\ &+ \frac{3}{8} \boldsymbol{\mu}_0 \circ \sum_{\substack{j,k=0 \\ k < j}}^n \frac{d\dot{\beta}_{k+1}, \dot{\beta}_{j+1}}{d\tau}(\Pi_{\mathbf{Q}}(\tau)) + \frac{3}{8} \boldsymbol{\mu}_0 \circ \sum_{\substack{j,k=0 \\ k < j}}^n \frac{d\dot{\beta}_{k+1}, \dot{\beta}_{j+1}^2}{d\tau}(\Pi_{\mathbf{Q}}(\tau)) + \\ &+ \frac{3}{4} \boldsymbol{\mu}_0 \circ \sum_{\substack{j,k,m=0 \\ m < k < j}}^n \frac{d\dot{\beta}_{m+1}, \dot{\beta}_{k+1}, \dot{\beta}_{j+1}}{d\tau}(\Pi_{\mathbf{Q}}(\tau)) + \frac{3}{4} \boldsymbol{\mu}_0 \circ \sum_{j=0}^n \frac{d\dot{\beta}_{j+1}, \ddot{\beta}_{j+1}}{d\tau}(\Pi_{\mathbf{Q}}(\tau)) + \\ &+ \frac{1}{8} \boldsymbol{\mu}_0 \circ \sum_{j=0}^n \frac{d\dot{\beta}_{j+1}^3}{d\tau}(\Pi_{\mathbf{Q}}(\tau)) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}_0 \circ \sum_{j=0}^n \frac{d\ddot{\beta}_{j+1}}{d\tau}(\Pi_{\mathbf{Q}}(\tau)). \end{aligned} \quad (3.51)$$

Явный вид слагаемых в суммах из (3.50), (3.51), вынесен в Приложение В.

Вспомогательные кватернионы удастся определить последовательно благодаря способу, по которому в предыдущем разделе были заданы значения производных $\beta_i^{(k)}(0)$, $\beta_i^{(k)}(1)$, $k = \overline{1,3}$. В соответствии с (3.37) и (3.39), в выражении (3.46) останется одно слагаемое, содержащее $\dot{\beta}_1(0)$, в выражении (3.50) два слагаемых, одно из которых содержит $\dot{\beta}_1^2(0)$, а второе – $\ddot{\beta}_2(0)$. Наконец, в (3.51) не равны нулю три слагаемых, содержащих $\dot{\beta}_1^3(0)$, $\dot{\beta}_1(0)\ddot{\beta}_2(0)$, $\ddot{\beta}_3(0)$, соответственно.

Из (3.48) следует, что значение первой производной (3.46) в момент времени t_1 на левом конце принимает вид

$$\dot{\mathbf{Q}}_{1,2}(t_1) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}_0 \circ \ln(\boldsymbol{\mu}_0^{-1} \circ \boldsymbol{\mu}_1) \dot{\beta}_1(0).$$

Учитывая, что $\mathbf{Q}_{1,2}(t_1) = \boldsymbol{\mu}_0$, из (3.13) получаем выражения для логарифма

$$\ln(\boldsymbol{\mu}_0^{-1} \circ \boldsymbol{\mu}_1) = \frac{\boldsymbol{\omega}(t_1)}{\dot{\beta}_1(0)} \quad (3.52)$$

и первого вспомогательного кватерниона

$$\boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_0 \circ \exp\left(\frac{\boldsymbol{\omega}(t_1)}{\dot{\beta}_1(0)}\right). \quad (3.53)$$

Чтобы найти второй вспомогательный кватернион, выписываем вторую производную (3.50) и с учетом (3.37) находим ее значение в момент времени t_1 :

$$\ddot{\mathbf{Q}}_{1,2}(t_1) = \frac{1}{4} \boldsymbol{\mu}_0 \circ \ln(\boldsymbol{\mu}_0^{-1} \circ \boldsymbol{\mu}_1) \circ \ln(\boldsymbol{\mu}_0^{-1} \circ \boldsymbol{\mu}_1) \dot{\beta}_1^2(0) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}_0 \circ \ln(\boldsymbol{\mu}_1^{-1} \circ \boldsymbol{\mu}_2) \ddot{\beta}_2(0).$$

Подставляя выражение $\ddot{\mathbf{Q}}_{1,2}(t_1)$ в (3.15), получаем связь

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}(t_1) = & \frac{1}{2} \ln(\boldsymbol{\mu}_0^{-1} \circ \boldsymbol{\mu}_1) \circ \ln(\boldsymbol{\mu}_0^{-1} \circ \boldsymbol{\mu}_1) \dot{\beta}_1^2(0) + \\ & + \ln(\boldsymbol{\mu}_1^{-1} \circ \boldsymbol{\mu}_2) \ddot{\beta}_2(0) - \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}(t_1) \circ \boldsymbol{\omega}(t_1) \end{aligned}$$

или, учитывая (3.52),

$$\ln(\boldsymbol{\mu}_1^{-1} \circ \boldsymbol{\mu}_2) = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}(t_1)}{\ddot{\beta}_2(0)}. \quad (3.54)$$

В результате второй вспомогательный кватернион имеет вид

$$\boldsymbol{\mu}_2 = \boldsymbol{\mu}_1 \circ \exp\left(\frac{\boldsymbol{\varepsilon}(t_1)}{\ddot{\beta}_2(0)}\right). \quad (3.55)$$

Для нахождения вспомогательного кватерниона $\boldsymbol{\mu}_3$ выпишем значение третьей производной (3.51) на левом конце:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{Q}}_{1,2}(t_1) &= \frac{3}{4}\boldsymbol{\mu}_0 \circ \ln(\boldsymbol{\mu}_0^{-1} \circ \boldsymbol{\mu}_1) \dot{\beta}_1(0) \circ \ln(\boldsymbol{\mu}_1^{-1} \circ \boldsymbol{\mu}_2) \ddot{\beta}_2(0) + \\ &+ \frac{1}{8}\boldsymbol{\mu}_0 \circ \dot{\beta}_1^3(0) \ln(\boldsymbol{\mu}_0^{-1} \circ \boldsymbol{\mu}_1) \circ \ln(\boldsymbol{\mu}_0^{-1} \circ \boldsymbol{\mu}_1) \circ \ln(\boldsymbol{\mu}_0^{-1} \circ \boldsymbol{\mu}_1) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\mu}_0 \circ \ln(\boldsymbol{\mu}_2^{-1} \circ \boldsymbol{\mu}_3) \ddot{\beta}_3(0). \end{aligned}$$

Здесь также было использовано условие (3.37). Отсюда и из (3.16) получаем

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t_1) &= \frac{3}{2}\ln(\boldsymbol{\mu}_0^{-1} \circ \boldsymbol{\mu}_1) \dot{\beta}_1(0) \circ \ln(\boldsymbol{\mu}_1^{-1} \circ \boldsymbol{\mu}_2) \ddot{\beta}_2(0) + \\ &+ \frac{1}{4}\dot{\beta}_1^3(0) \ln(\boldsymbol{\mu}_0^{-1} \circ \boldsymbol{\mu}_1) \circ \ln(\boldsymbol{\mu}_0^{-1} \circ \boldsymbol{\mu}_1) \circ \ln(\boldsymbol{\mu}_0^{-1} \circ \boldsymbol{\mu}_1) + \ln(\boldsymbol{\mu}_2^{-1} \circ \boldsymbol{\mu}_3) \ddot{\beta}_3(0) - \\ &- \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}(t_1) \circ \boldsymbol{\omega}(t_1) - \boldsymbol{\omega}(t_1) \circ \boldsymbol{\varepsilon}(t_1) - \frac{1}{4}\boldsymbol{\omega}(t_1) \circ \boldsymbol{\omega}(t_1) \circ \boldsymbol{\omega}(t_1). \end{aligned}$$

Подставляя логарифмы (3.52) и (3.54), приходим к следующей формуле:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t_1) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}(t_1) \circ \boldsymbol{\varepsilon}(t_1) - \boldsymbol{\varepsilon}(t_1) \circ \boldsymbol{\omega}(t_1)) + \ln(\boldsymbol{\mu}_2^{-1} \circ \boldsymbol{\mu}_3) \ddot{\beta}_3(0).$$

Учитывая, что $\boldsymbol{\omega} \circ \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon} \circ \boldsymbol{\omega} = 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\varepsilon}$, находим выражение вспомогательного кватерниона

$$\boldsymbol{\mu}_3 = \boldsymbol{\mu}_2 \circ \exp\left(\frac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t_1) - 2\boldsymbol{\omega}(t_1) \times \boldsymbol{\varepsilon}(t_1)}{\ddot{\beta}_3(0)}\right). \quad (3.56)$$

Пришло время обратиться к ситуации на правом конце временного интервала $[t_1, t_2]$. Значение $\mathbf{Q}_{1,2}(t_2)$ считается известным, все значения $\boldsymbol{\omega}(t_2), \boldsymbol{\varepsilon}(t_2), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t_2)$ задаются изначально. При предлагаемом в (3.43) способе определения коэффициентов $\beta_i^{(k)}(1)$, в (3.46) остаются слагаемые, содержащие

$\dot{\beta}_7(1)$, в (3.50) – $\dot{\beta}_7^2(1)$, $\ddot{\beta}_6(1)$, и в (3.51) – $\dot{\beta}_7^3(1)$, $\ddot{\beta}_6(0)\dot{\beta}_7(0)$, $\ddot{\beta}_5(0)$. Положим $\mathbf{Q}_{1,2}(t_2) = \mu_7$. Повторяя в точности все шаги, пройденные в процессе поиска тройки вспомогательных кватернионов μ_i , $i = \overline{1,3}$, получаем выражения для трех оставшихся:

$$\mu_6 = \mu_7 \circ \exp\left(-\frac{\boldsymbol{\omega}(t_2)}{\dot{\beta}_7(1)}\right). \quad (3.57)$$

$$\mu_5 = \mu_6 \circ \exp\left(-\mu_6^{-1} \circ \mu_7 \circ \frac{\boldsymbol{\varepsilon}(t_2)}{\ddot{\beta}_6(1)} \circ \mu_7^{-1} \circ \mu_6\right). \quad (3.58)$$

$$\mu_4 = \mu_5 \circ \exp\left(-\mu_5^{-1} \circ \mu_7 \circ \frac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t_2) + 2\boldsymbol{\omega}(t_2) \times \boldsymbol{\varepsilon}(t_2)}{\ddot{\beta}_5(1)} \circ \mu_7^{-1} \circ \mu_5\right). \quad (3.59)$$

Опорная траектория (3.33), определяется вспомогательными кватернионами (3.53), (3.55), (3.56), (3.57), (3.58) и (3.59), а полиномы $\beta_i(\tau)$, $i = \overline{1,7}$ с коэффициентами a_j^i собранными в таблице 3, рассчитываются по формуле (3.36). Таким образом, для любого отрезка времени $[t_i, t_{i+1}]$ построен кусок опорной траектории $\mathbf{Q}_{i,i+1}(t)$, а, следовательно, и она целиком.

3.7. Численное моделирование

В данном разделе проводится демонстрация применения

- 1) алгоритма управления (3.9), (2.31) для решения задачи орбитальной стабилизации геостационарного КА с НЭ (раздел 3.2) в положении

$$\Lambda_{rel}^{fin} = (1 \ 0 \ 0 \ 0)^T;$$

- 2) алгоритма управления (3.7), (2.31) для решения задачи стабилизации заданного опорного режима КА с НЭ (раздел 3.1), построенного по методике, изложенной в разделах 3.3–3.6.

В качестве демонстрационной берется конфигурация КА, описанная в разделе 2.4. То же касается и исполнительных органов. Матрицы в функционале качества (2.15), минимизируемом ЛКР (2.31), заданы в (2.32).

В качестве опорного режима рассматривается программный поворот из углового положения, определяемого кватернионом $\mathbf{Q}^{in} = \Lambda_S^{in} = (1 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ в ИСК, в угловое положение, определяемое кватернионом $\Lambda_{rel}^{fin} = (1 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ в ОрбСК, совершаемый за время 10000 с. Заметим, что в этом случае положение корпуса КА в конечный момент времени относительно ИСК определяется кватернионом $\mathbf{Q}^{fin} = \Lambda_S^{fin} = (0.2957 \ 0.2957 \ 0.6423 \ 0.6423)^T$. Полагается также, что в начальный момент времени корпус КА движется поступательно в ИСК ($\boldsymbol{\omega}^{in} = \boldsymbol{\omega}_S^{in} = \mathbf{0}_{3 \times 1}$), а в результате переориентации должен быть стабилизирован в ОрбСК ($\boldsymbol{\omega}^{fin} = \boldsymbol{\omega}_{rel}^{fin} = \mathbf{0}_{3 \times 1}$). Это означает, что $\boldsymbol{\omega}_S^{fin} = \boldsymbol{\omega}_{orb}$. При построении опорной траектории в начальном и конечном узлах значения опорного углового ускорения и его рывка доопределяются нулевыми значениями, т.е. $\boldsymbol{\varepsilon}^{in} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{in} = \boldsymbol{\varepsilon}^{fin} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{fin} = \mathbf{0}_{3 \times 1}$. Такой подход соответствует ситуации переориентации корпуса КА из состояния покоя в ИСК в состояние покоя в ОрбСК. Таким образом, согласно методике, изложенной в разделах 3.3–3.6, опорная траектория $\mathbf{Q}(t)$ строится между двумя узлами $(\mathbf{Q}^{in} \ 0)$ и $(\mathbf{Q}^{fin} \ 10000)$ в которых определены значения $\boldsymbol{\omega}^{in}, \boldsymbol{\varepsilon}^{in}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{in}$ и $\boldsymbol{\omega}^{fin}, \boldsymbol{\varepsilon}^{fin}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{fin}$, соответственно.

Моделирование происходит с использованием полной нелинейной математической модели, построенной в главе 1. Как в случае задачи орбитальной стабилизации, так и задачи стабилизации вышеописанного опорного режима, численное интегрирование производилось методом Рунге-Кутты четвертого порядка. Величины постоянных шагов интегрирования и управления указаны в таблице 3.2. Начальные условия для обоих циклов интегрирования совпадают и собраны в таблице 3.3.

Численное моделирование процесса орбитальной стабилизации КА с НЭ производится на витке геостационарной орбиты (рис. 3.1–3.9).

Графики на рис. 3.1, 3.2, 3.4 показывают, что задача орбитальной стабилизации геостационарного КА с НЭ в заданном угловом положении с помощью закона управления (3.9), (2.31) успешно решена. Управление не выходит за рамки допустимых значений и в установившемся режиме имеет порядок 10^{-4} Н·м. То же касается и кинетического момента маховиков (рис. 3.6) из чего вытекает реализуемость предложенного закона управления с помощью имеющихся исполнительных органов. В процессе маневрирования КА колебания в НЭ при отсутствии естественного затухания также угасают.

Таблица 3.2.

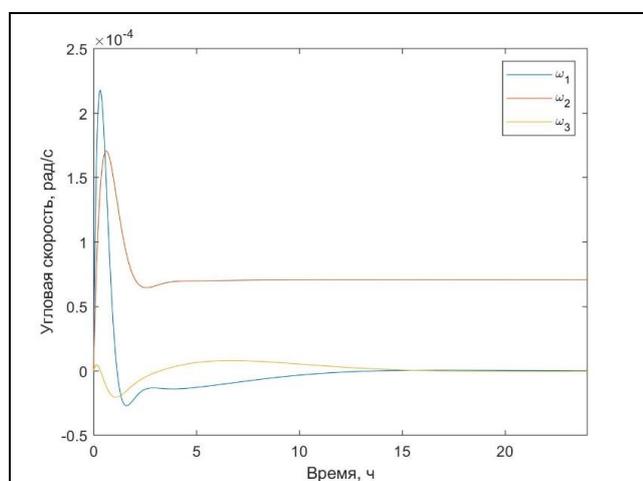
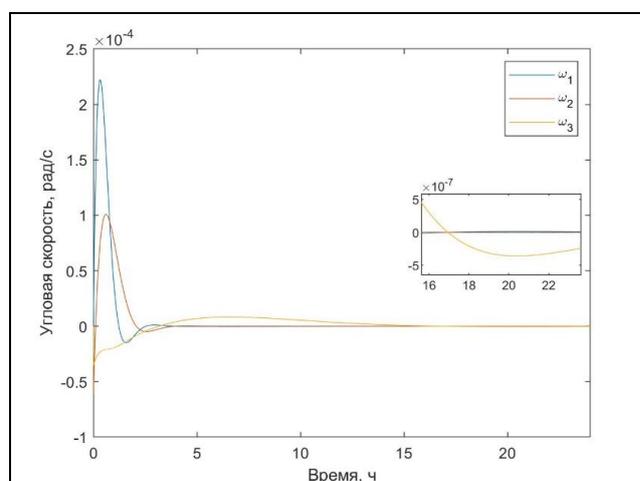
Параметры интегрирования

Параметр	Значение
Время интегрирования (орбитальная стабилизация)	86400 с
Время интегрирования (опорный режим)	11000 с
Продолжительность опорного режима	10000 с
Шаг интегрирования	0.1 с
Шаг управления	0.1 с
Число мод панелей, k_{p_i} , $i = 1, 2$	2
Число мод антенны, k_a	3

Таблица 3.3.

Начальные условия интегрирования

Параметр	Начальное значение
Положение, \mathbf{R}_S	$(4.3 \cdot 10^7 \ 0 \ 0)^T$ м
Скорость, \mathbf{V}_S	$(0 \ 3045 \ 0)^T$ м/с
Кватернион ориентации, Λ_S	$(0.7071 \ 0.4 \ 0.3 \ 0.5)^T$
Угловая скорость, $\boldsymbol{\omega}_S$	$\mathbf{0}_{3 \times 1}$ град/с
Модальные переменные панелей, $\mathbf{q}_{p_i}, i = 1, 2$	$\mathbf{0}_{k_{p_i} \times 1}$
Модальные переменные антенны, \mathbf{q}_a	$\mathbf{0}_{k_a \times 1}$
Скорости изменения модальных переменных панелей, $\mathbf{V}_{p_i}, i = 1, 2$	$\mathbf{0}_{k_{p_i} \times 1}$
Скорости изменения модальных переменных антенны, \mathbf{V}_a	$\mathbf{0}_{k_a \times 1}$

Рис. 3.1. Орбитальная стабилизация.
Абсолютная угловая скоростьРис. 3.2. Орбитальная стабилизация.
Относительная угловая скорость

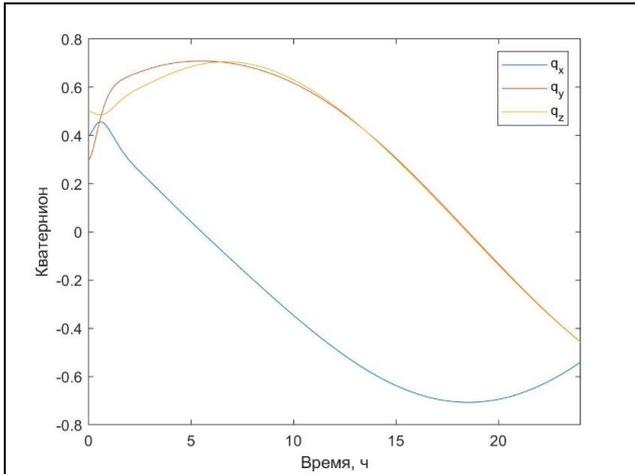


Рис. 3.3. Орбитальная стабилизация.
Векторная часть абсолютного кватерниона ориентации

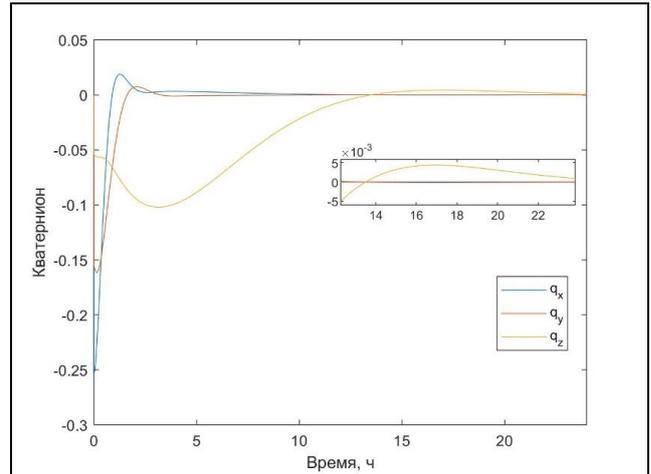


Рис. 3.4. Орбитальная стабилизация.
Векторная часть относительного кватерниона ориентации

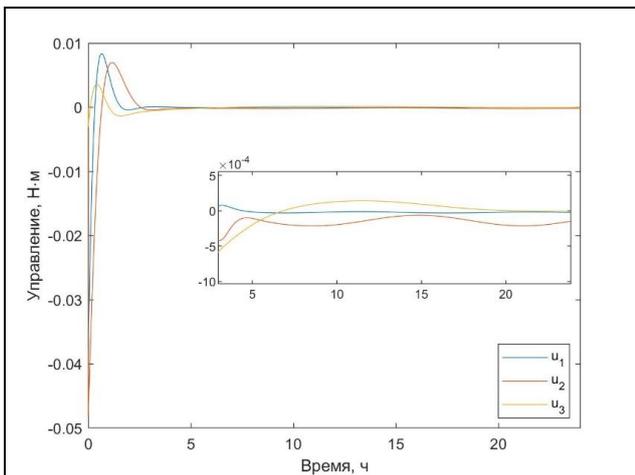


Рис. 3.5. Орбитальная стабилизация.
Управляющий момент

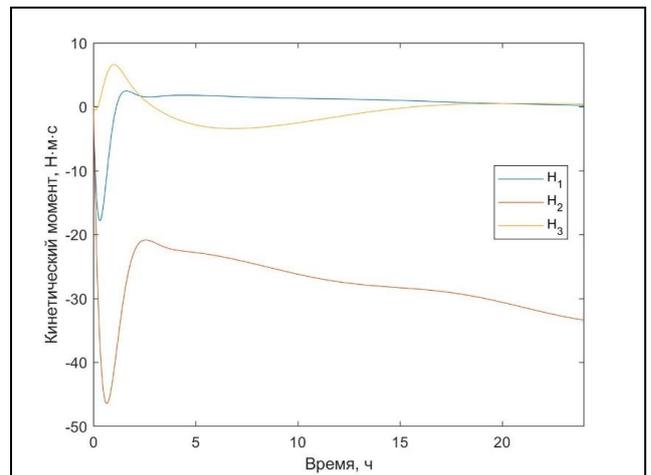


Рис. 3.6. Орбитальная стабилизация.
Кинетический момент маховиков

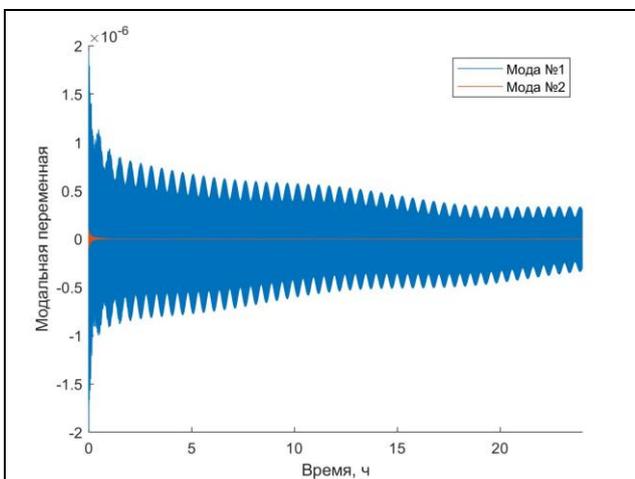


Рис. 3.7. Орбитальная стабилизация.
Модальные переменные 1ой панели

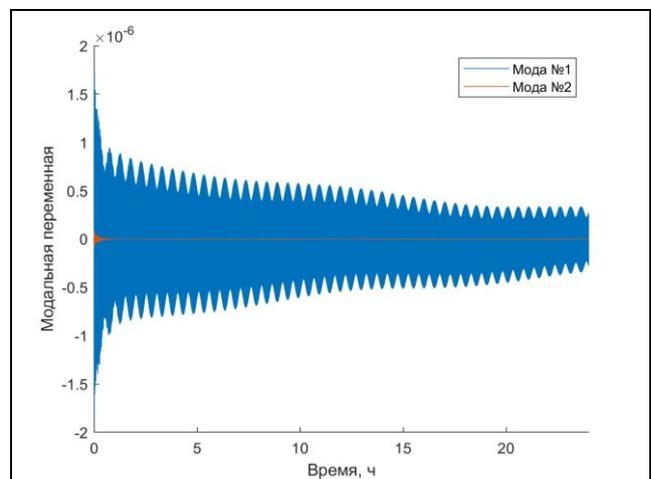


Рис. 3.8. Орбитальная стабилизация.
Модальные переменные 2ой панели

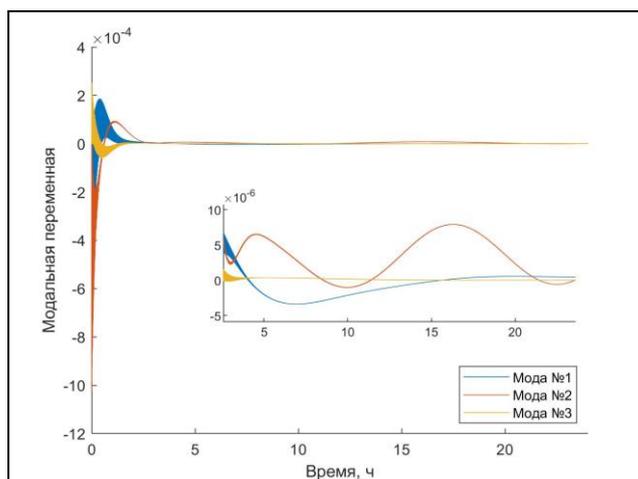


Рис. 3.9. Орбитальная стабилизация. Модальные переменные антенны

Опорные траектории, конструкция которых описана в разделах 3.3–3.6, обладают третьей степенью гладкости и автоматически удовлетворяют условию нормировки кватерниона ориентации. Предполагалось, что перемещение по траекториям указанного класса, позволит меньше возбуждать колебания в НЭ в процессе переориентации КА.

Численная иллюстрация работы алгоритма стабилизации (3.7), (2.31) КА с НЭ на примере конкретного опорного режима, описанного выше в текущем разделе, представлена на рис. 3.10–3.18. Моделирование производится на временном интервале, превышающем продолжительность маневра переориентации, что позволяет увидеть поведение КА после его завершения. Время завершения переориентации отмечено на рис. 3.10, 3.12, 3.14, 3.15, 3.18 соответствующей вертикальной линией.

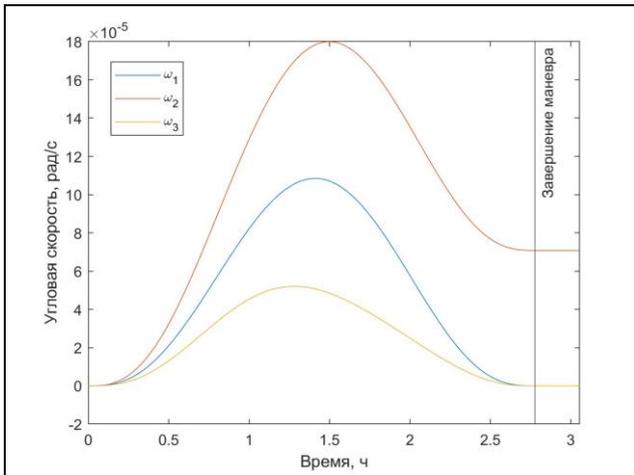


Рис. 3.10. Опорный режим. Абсолютная угловая скорость

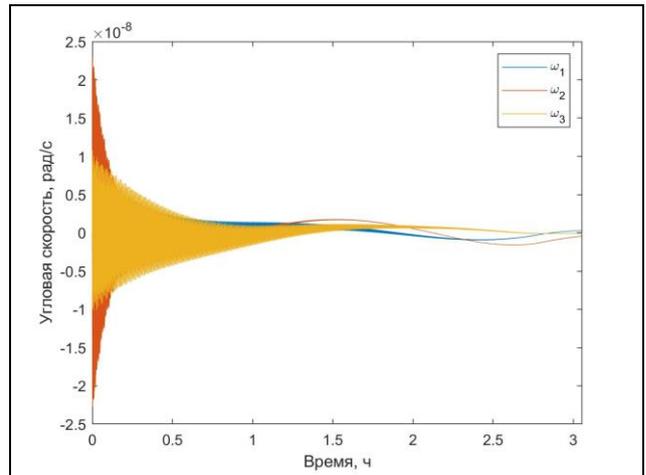


Рис. 3.11. Опорный режим. Относительная угловая скорость

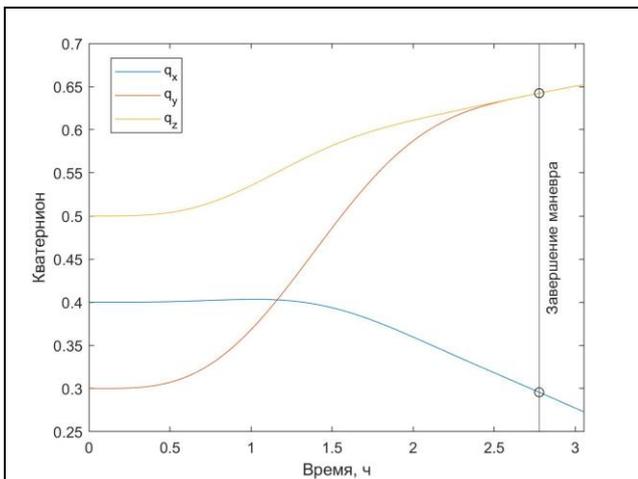


Рис. 3.12. Опорный режим. Векторная часть абсолютного кватерниона ориентации

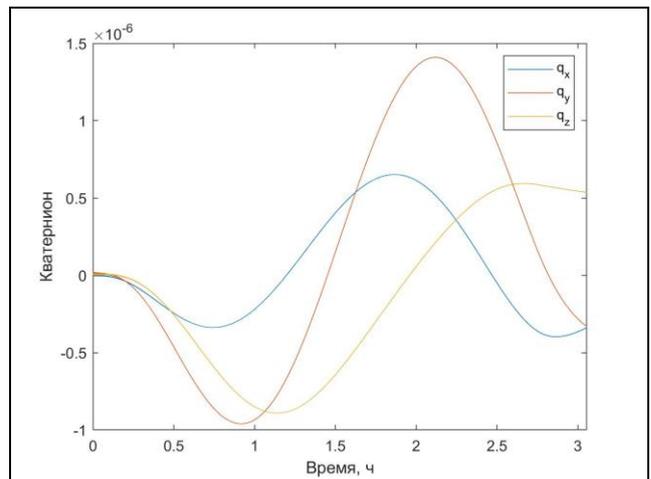


Рис. 3.13. Опорный режим. Векторная часть относительного кватерниона ориентации

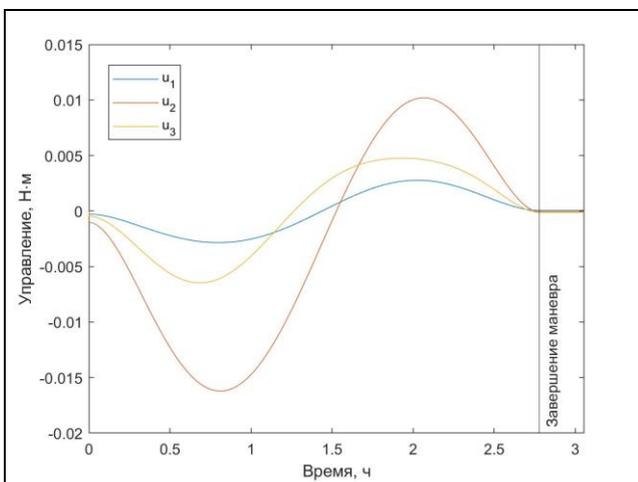


Рис. 3.14. Опорный режим. Управляющий момент

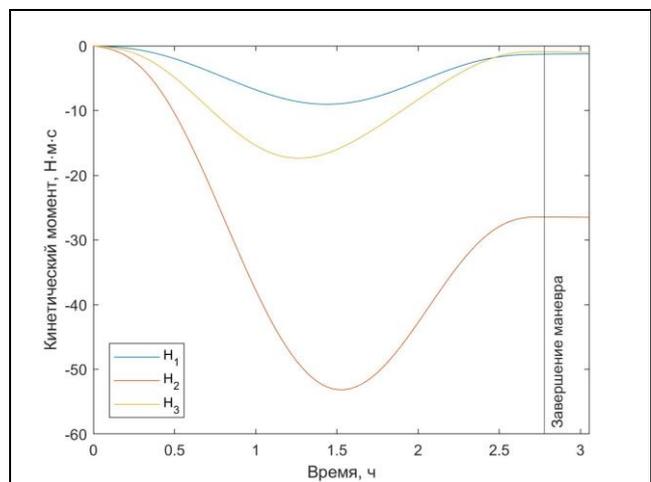


Рис. 3.15. Опорный режим. Кинетический момент маховиков

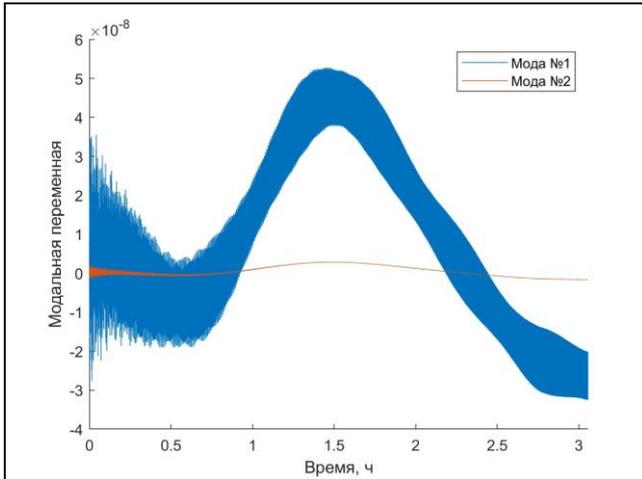


Рис. 3.16. Опорный режим. Модальные переменные 1ой панели

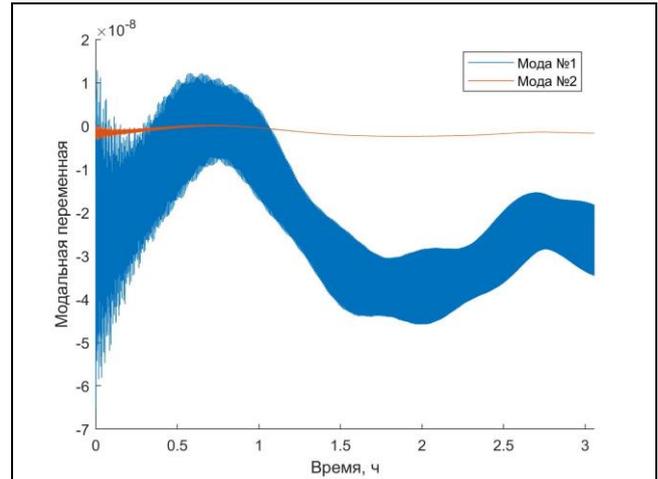


Рис. 3.17. Опорный режим. Модальные переменные 2ой панели

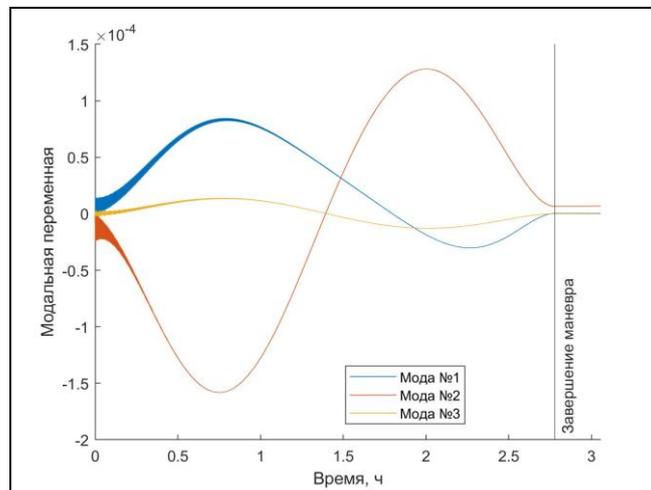


Рис. 3.18. Опорный режим. Модальные переменные антенны

Из графиков на рис. 3.12 заключаем, что опорный кватернион ориентации в момент завершения переориентации действительно принимает заранее заданные значения (отмечены символом \circ). В свою очередь угловая скорость в конечный момент времени равна орбитальной угловой скорости КА на геостационарной орбите (рис. 3.10). Следовательно, планируемый маневр переориентации выполнен успешно. На протяжении всего маневра как относительная угловая скорость (рис. 3.11), так и векторная часть относительного кватерниона ориентации (рис. 3.13) имеют малые значения, порядок которых равен 10^{-8} рад/с и 10^{-6} соответственно. Это связано с тем, что в начальный момент времени КА находится на заданной траектории по

построению, а в дальнейшем высокая точность его удержания обеспечивается работой алгоритма управления. Более того, по завершению маневра корпус КА не уходит из заданного углового положения (рис. 3.13). Данный эффект виден и на графиках управлявшего момента (рис. 3.14), который по завершении маневра имеет практически нулевые значения. Отметим, что, как и в задачах инерциальной и орбитальной стабилизаций, управляющий момент и кинетический момент маховиков не выходят за пределы допустимых значений (рис. 3.14, 3.15). Отдельного внимания требует поведение модальных переменных (рис. 3.16–3.18).

Сравним течение колебательных процессов в НЭ в ситуациях режима орбитальной стабилизации и стабилизации предложенного опорного режима углового движения КА. Данное сравнение уместно, так как численное моделирование проводилось для одной и той же конфигурации КА с НЭ при общих начальных условиях. При этом результатом стабилизации в обоих случаях является приведение КА в заданное угловое положение в ОрбСК с нулевой относительной угловой скоростью. Отличие заключается лишь в траектории перехода.

На основании графиков на рис. 3.16 и 3.17 заключаем, что разбалтывание панелей практически отсутствует. Порядок величин модальных переменных равен 10^{-8} , что на два порядка ниже по сравнению с режимом орбитальной стабилизации. В случае с модальными переменными антенны движение вдоль предложенной в разделах 3.3–3.6 дает улучшение на один порядок (рис. 3.9, 3.18). При этом после завершения переориентации последние имеют порядок 10^{-6} . Тем самым приведенные численные результаты подтверждают гипотезу (раздел 3.3) о целесообразности построения опорной траектории углового движения КА третьей степени гладкости в контексте влияния на колебательные процессы НЭ.

Выводы к главе 3

В настоящей главе предложен закон управления, целью которого является стабилизация заданных неинерциальных режимов ориентации КА с НЭ.

Решена задача орбитальной стабилизации геостационарного КА с НЭ, конфигурация которого описана в разделе 2.4. Для этого в конечном виде получено выражение для поиска установившихся значений модальных переменных, характеризующих величину внешних постоянно действующих на КА с НЭ возмущений, некомпенсируемых законом управления.

Построено опорное угловое движение корпуса КА с НЭ, имеющее в фиксированные моменты времени заданные значения кватерниона ориентации, угловых скоростей, угловых ускорений и его рывков. Полученная траектория обладает третьей степенью гладкости и естественным образом сохраняет условие нормировки кватерниона ориентации.

На модельном примере продемонстрировано, что движение вдоль опорной траектории КА, обладающей вышеуказанными свойствами, позволяет предотвратить возбуждение колебаний в НЭ его конструкции.

Результаты исследований были опубликованы в работе [62].

Заключение

В диссертационной работе исследованы различные аспекты актуальной в настоящее время задачи стабилизации заданных режимов углового движения КА с НЭ и получены следующие результаты.

1. Разработана и апробирована нелинейная математическая модель КА с произвольным наперед заданным числом НЭ, прикрепленных к его корпусу. Она допускает основные типы сочленения НЭ с корпусом КА, встречающиеся на практике. Ключевым преимуществом предложенной модели можно считать ее масштабируемость на случай любого заранее заданного числа НЭ.
2. Разработан алгоритм инерциальной стабилизации геостационарного КА с НЭ. С его помощью решена задача гашения низкочастотных колебательных мод НЭ. При формировании предложенного закона управления не используются модальные переменные. В роли исполнительных органов выступают маховики, расположенные на корпусе КА.
3. Предложена методика построения опорной траектории углового движения корпуса КА с НЭ третьей степени гладкости, проходящей в фиксированные моменты времени через заданные кватернионы ориентации и в силу своей конструкции удовлетворяющей условию нормировки кватерниона ориентации на всем интервале движения. Построен закон управления, стабилизирующий полученные неинерциальные опорные режимы углового движения КА с НЭ. С помощью численного моделирования продемонстрировано, что движение КА вдоль траекторий указанного типа мало возбуждает колебания в НЭ его конструкции.

Список литературы

1. Докучаев Л.В. Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами. М.: Машиностроение, 1987, 232 с.
2. Kane T.R., Levinson D.A. Formulation of equations of motion of complex spacecraft // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1980, Vol. 3, P. 99–112.
3. Баничук Н.В., Карпов И.И., Климов Д.М., Маркеев А.П., Соколов Б.Н., Шаранюк А.В. Механика больших космических конструкций. М.: Факториал, 1997, 302 с.
4. Шклярчук Ф.Н. Нелинейные и линеаризованные уравнения упругих космических конструкций // *Известия РАН МТТ*, 1996, № 1 с. 161-175.
5. Meirovitch L., Quinn R.D. Equations of motion for maneuvering flexible spacecraft // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1987, Vol. 10, P. 453–465.
6. Meirovitch L., Kwak M.K. Dynamics and Control of Spacecraft with Retargeting Flexible Antenna // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1990, Vol. 13, P. 241–248.
7. Fonseca I.M., Bainum P.M., Silva A.R. Structural control interaction for an LSS attitude control system using thrusters and reaction wheels // *Acta Astronautica*, 2007, Vol. 60, P. 865–872.
8. Banerjee A.K., Dickens J.M. Dynamics of an Arbitrary Flexible Body in Large Rotation and Translation // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1990, Vol. 13, P. 221–227.
9. Feng L., Baozeng Y., Banerjee A.K., Yong T., Wenjun W., Zhengyong L. Large Motion Dynamics of In-Orbit Flexible Spacecraft with Large-Amplitude Propellant Slosh // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2020, Vol. 43, P. 438–450.

10. Santini P., Gasbarri P. General background and approach to multibody dynamics for space applications // *Acta Astronautica*, 2009, Vol. 64, P. 1224–1251.
11. Banerjee A.K. Contributions of Multibody Dynamics to Space Flight: A Brief Review // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2003, Vol. 26, P. 385–394.
12. Canavin J.R., Likins P.W. Floating Reference Frames for Flexible Spacecraft // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1977, Vol. 14, P. 724–732.
13. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961, 824 с.
14. Junkins J.L., Kim Y. Introduction to Dynamics and Control of Flexible Structures. Washington DC: AIAA Education Series, 1993. 452 P.
15. Лопатин А.В., Рутковская М.А. Обзор Конструкций современных трансформируемых космических антенн // *Вестник Сибирского государственного университета науки и технологии имени Академика М.Ф. Решетнева*, 2007, №2, с. 51–57.
16. Лопатин А.В., Рутковская М.А. Обзор Конструкций современных трансформируемых космических антенн // *Вестник Сибирского государственного университета науки и технологии имени Академика М.Ф. Решетнева*, 2007, №3, с. 78–81.
17. MSC Nastran [Электронный ресурс]. URL: <http://www.mscsoftware.ru/products/msc-nastran> (дата доступа: 22.03.2022).
18. Fonseca I.M., Rade D.A., Luiz CS. Goes, Paula Sales T., Attitude and vibration control of a satellite containing flexible solar arrays by using reaction wheels, and piezoelectric transducers as sensors and actuators // *Acta Astronautica*, 2017, Vol. 139, P. 357–366.
19. Di Gennaro S. Active Vibration Suppression in Flexible Spacecraft Attitude tracking // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1998, Vol. 21, № 3, P. 400–408.

20. Xiao Y., Ruitter A.H., Ye D., Sun Z. Attitude tracking control for rigid-flexible coupled spacecraft with guaranteed performance bounds // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2020, Vol. 43, №. 2, P. 327–337.
21. Дегтярев Г.Л., Сиразетдинов Т.К. Теоретические основы оптимального управления упругими космическими аппаратами. М.: Машиностроение, 1986, 216 с.
22. Breakwell J.A. Optimal Feedback Slewing of Flexible Spacecraft // *Journal Guidance, Control, and Dynamics*, 1981, Vol. 4, № 5, P. 472–479.
23. Kida T., Yamaguchi I., Ohkami Y. An Optimal Slewing Maneuver Approach for a Class of Spacecraft with Flexible Appendages // *Acta Astronautica*, 1986, Vol. 13, № 6/7, P. 311–318.
24. Овчинников М.Ю., Ткачев С.С., Шестопёров А.И. Алгоритмы стабилизации космического аппарата с нежесткими элементами // *Известия РАН. Теория и системы управления*, 2019, № 3, с. 177–193.
25. Modi V.J., Morita Y. Dynamics and Control of the Shuttle based Large Antenna System During Slewing Maneuvers // *Acta Astronautica*, 1992, Vol. 26, № 6, P. 395–409.
26. Bang H., Ha C.-K., Kim J.H. Flexible Spacecraft Attitude Maneuver by Application of Sliding Mode Control // *Acta Astronautica*, 2005, Vol. 57, P. 841–850.
27. Agrawal B.N., Elshafel M.A., Song G. Adaptive Antenna Shape Control Using Piezoelectric Actuators // *Acta Astronautica*, 1997, Vol. 40, № 11, P. 821–826.
28. Maganti G.B., Singh S.N. Simplified adaptive control of an orbiting flexible spacecraft // *Acta Astronautica*, 2007, Vol. 61, № 7-8, P. 575–589.
29. Nayeri M.R.D., Alasty A., Daneshjou K. Neural optimal control of flexible spacecraft slew maneuver // *Acta Astronautica*, 2004, Vol. 55, № 10, P. 817–827.

30. Sabatini M., Monti R., Gasbarri P., Palmerini G.B. Vibration control of a flexible space manipulator during on orbit operations // *Acta Astronautica*, 2012, Vol. 73, P. 109–121.
31. Hu Q., Ma G. Variable structure control and active vibration suppression of flexible spacecraft during attitude maneuver // *Aerospace Science and Technology*, 2005, Vol. 9, Is. 4, P. 307–317.
32. Gasbarri P., Monti R., Sabatini M. Very large space structures: Non-linear control and robustness to structural uncertainties // *Acta Astronautica*, 2014, Vol. 93, P. 252–265.
33. Gasbarri P., Monti R., De Angelis C., Sabatini M. Effects of uncertainties and flexible dynamic contributions on the control of a spacecraft full-coupled model // *Acta Astronautica*, 2014, Vol. 94, P. 515–526.
33. Tanygin S. Attitude interpolation // AAS 03-197, 2003, 20 P.
35. Kim J.-J., Agrawal B.N. Experiments on Jerk-Limited Slew Maneuvers of a Flexible Spacecraft // *Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*. Keystone, Colorado, 21-24 August, 2006. — P. 1–20.
36. Boyarko G.A., Romano M., Yakimenko O.A. Time-optimal reorientation of a spacecraft using an inverse dynamics optimization method // *Journal of Guidance, Control, Dynamics*, 2011, Vol. 34, № 4, P. 1197–1208.
37. Caubet A., Biggs J. A Motion Planning Method for Spacecraft Attitude Maneuvers Using Single Polynomials // *Proceedings of the AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference*, AAS 15-627, Vail, CO, USA, August 9-13, 2015, 17 P.
38. Роджерс Д., Адамс Д. Математические основы машинной графики, М.: Мир, 2001, 604 с.
39. Ventura J., Romano M., Walter U. Performance evaluation of the inverse dynamics method for optimal spacecraft reorientation // *Acta Astronautica*, 2015, Vol. 110, P. 266–278.

40. Shuster M.D. A Survey of Attitude Representations // *Journal of the Astronautical Sciences*, 1993, Vol. 41, № 4, P. 439–517.
41. Shoemake K. Animating rotation with quaternion curves // *Computer Graphics*, 1985, Vol. 19, № 3, P. 245–254.
42. Kim, M.-J., Kim, M.-S., and Shin, S.-Y. A General Construction Scheme for Unit Quaternion Curves with Simple High Order Derivatives // *Proceedings of the 22nd Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques ACM*, New York, 1995, P. 369–376.
43. Yang J., Stoll E. Time-optimal Spacecraft Reorientation with Attitude Constraints Based on A Two-stage Strategy // *Proceedings of the AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference*, AAS 18-201, Snowbird, UT, USA, August 19-23, P. 17.
44. Song C., Islas G., Schilling K. Inverse Dynamics based Model Predictive Control for Spacecraft Rapid Attitude Maneuver // *IFAC PapersOnLine*, 2019, Vol. 52, Is. 12, P. 111–116.
45. Ovchinnikov M.Yu., Tkachev S.S., Roldugin, A.B. Nuralieva D.S., Mashtakov Y.V. Angular Motion Equations for a Satellite with Hinged Flexible Solar Panel // *Acta Astronautica*, 2016. Vol. 128. P. 534–539.
46. Докучаев Л.В. Нелинейная динамика упругого летательного аппарата. Итоги науки и техники. Общая механика. М.: ВИНТИ, 1982, Т. 5, с. 135–197.
47. Погорелов Д.Ю. Введение в моделирование динамики систем тел: Учебное пособие. Брянск: БГТУ, 1997, 164 с.
48. Каргашин А.Ю., Мирер С.А., Сазонов В.В. Математическая модель манипулятора с грузом // *Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша*, 1981, № 169.
49. Santini P. Stability of Flexible Spacecrafts // *Acta Astronautica*, 1976. Vol. 3, P. 685–713.
50. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц, 5-е изд. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010, 560 с.

51. Нуралиева А.Б., Ткачев С.С. Математическая модель спутника с гибкой солнечной панелью на управляемом шарнире // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша, 2015, № 61, 19 с.
52. Овчинников М.Ю., Ткачев С.С., Шестопёров А.И. Математическая модель спутника с произвольным числом нежестких элементов // Математическое моделирование, 2020, Т. 32, № 12, с. 14-28.
53. Ivanov D.S., Meus S.V., Ovchinnikov A.V., Ovchinnikov M.Yu., Shestakov S.A., Yakimov E.N. Methods for the Vibration Determination and Parameter Identification of the Spacecraft with Flexible Structures // Journal of Computer And Systems Sciences International. 2017, Vol. 56, № 2, P. 311–327.
54. Ivanov D., Meus S., Nuralieva A., Ovchinnikov A., Ovchinnikov M., Roldugin D., Tkachev S., Shestoperov A., Shestakov S., Yakimov E. Coupled Motion Determination and Stabilization of a Satellite Equipped with Large Flexible Elements Using ADCS Only. Proceedings of the Astrodynamics Symposium. Held at the 70th International Astronautical Congress (IAC), Washington, USA, 21-25 October 2019. V 2. P. 603-609. Curran Associates, Inc. Publ. 2020.
55. Барбашин Е.А. Функции Ляпунова. — М.: Наука. — 1970. 240 с.
56. Шестопёров А.И., Ткачев С.С. Использование линейно-квадратичного управления для разворотов космического аппарата на большие углы // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2019. № 142. 18 с.
57. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. — М.: Мир. — 1977. 651 с.
58. Çimen T. Survey of State-Dependent Riccati Equation in Nonlinear Optimal Feedback Control Synthesis // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2012. Vol. 35, № 4. P. 1025–1047.
59. Laub A. Matrix analysis for scientists and engineers. — SIAM: Society for Industrial and Applied Mathematics. — 2005. — 184 P.

60. Овчинников М.Ю., Ткачев С.С., Карпенко С.О. Исследование углового движения микроспутника Чибис-М с трехосным маховичным управлением // Космические исследования, 2012, Т. 50. №6. С. 462–471.
61. Mashtakov Y.V., Ovchinnikov M.Y., Tkachev S.S. Study of the disturbances effect on small satellite route tracking accuracy // Acta Astronautica, 2016. Vol. 129. P. 22–31.
62. Ткачев С.С., Шестопёров А.И. Построение опорной траектории третьего порядка гладкости углового движения космического аппарата // Математическое моделирование. 2021. Т. 33. № 10. с. 3-18.
63. Dam E.B., Koch M., Lillholm M. Quaternions, interpolation and animation // Technical Report DIKU-TR-98/5, 1998, 98 P.
64. Tanygin S. Parametric optimization of closed-loop slew control using interpolation polynomials // AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting, 2006, P. 1–21.
65. Curtis M. Matrix Groups. N.Y.: Springer-Verlag, 1979, 191 P.
66. Амелькин Н.И. Динамика твердого тела. Учебное пособие. М.: МФТИ. 2010, 80 с.
67. Сомов Е.И., Бутырин С.А. Аналитический синтез программного движения космических аппаратов наблюдения // Известия Самарского научного центра Российской академии наук, 2004, Т. 6, №1, с. 168–179.
68. Сарычев В.А. Вопросы ориентации искусственных спутников. Итоги науки и техники. Серия «Исследование космического пространства», Т. 11. М.: ВИНТИ, 1978. 223 с.
69. Fliegel H.F., Gallini T.E., Swift E.R. Global Positioning System Radiation Force Model for geodetic applications // J. Geophys. Res. 1992. Vol. 97, P. 559-568.

Приложения

А. Уравнения движения КА с жестко закрепленными НЭ относительно центра масс

При разработке законов управления ориентацией КА с N жестко закрепленными НЭ в главах 2 и 3 используются уравнения его движения относительно центра масс. В свою очередь полученные в главе 1 динамические уравнения включают в себя и орбитальное движение КА. Учитывая, что по определению $\ddot{\mathbf{x}}_S \triangleq (\ddot{\mathbf{R}}_S^T \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}_S^T)^T$ и $\mathbf{x}_{En} = \mathbf{q}_n$, $n = \overline{1, N}$ в случае жесткого закрепления НЭ, перепишем первое уравнение системы (1.38) в виде

$$\left(\begin{array}{cc|c} M\mathbf{E}_{3 \times 3} & \mathbf{S}_{00}^{R\omega} & \mathbf{S}_{0\Sigma}^R \\ \hline (\mathbf{S}_{00}^{R\omega})^T & \mathbf{S}_{00}^{\omega\omega} & \mathbf{S}_{0\Sigma}^\omega \end{array} \right) \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{R}}_S \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_S \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{N}_{\Sigma 0}^R \\ \mathbf{N}_{\Sigma 0}^\omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{\Sigma 0}^R \\ \boldsymbol{\Phi}_{\Sigma 0}^\omega \end{pmatrix},$$

из верхнего равенства выразим

$$\ddot{\mathbf{R}}_S = 1/M \left(\mathbf{N}_{\Sigma 0}^R + \boldsymbol{\Phi}_{\Sigma 0}^R - \mathbf{S}_{00}^{R\omega} \boldsymbol{\omega}_S - \mathbf{S}_{0\Sigma}^R \ddot{\mathbf{q}} \right).$$

и подставим получившееся выражение в оставшиеся уравнения системы (1.38). Тем самым орбитальное движение КА отделяется от его движения относительно центра масс и происходит по закону $M\ddot{\mathbf{R}}_C = \mathbf{F}_C$, где $M = M_S + \sum_n M_n$ – масса КА, \mathbf{R}_C – радиус-вектор центра масс КА, \mathbf{F}_C – равнодействующая всех активных сил, действующих на КА.

Определим следующие векторы:

$\boldsymbol{\rho}_{Sn}$ – радиус-вектор из центра масс корпуса в центр масс недеформированного n -го НЭ,

$$\mathbf{r}_{Cn} = \mathbf{r}_{Cn}(\mathbf{q}) = 1/M_n \sum_i m_{ni} \mathbf{u}_{ni}$$

– радиус-вектор из центра масс недеформированного n -го НЭ в центр масс деформированного n -го НЭ,

$$\mathbf{r}_{SC} = \mathbf{r}_{SC}(\mathbf{q}) = 1/M \sum_{n=1}^N M_n (\boldsymbol{\rho}_{Sn} + \mathbf{r}_{Cn})$$

– радиус-вектор из центра масс корпуса в центр масс деформированного КА

После выделения $\ddot{\mathbf{R}}_S$ из системы (1.38) и проведения соответствующих арифметических выкладок в рамках формул (1.39), (1.40), искомые уравнения движения КА с N жестко прикрепленными к корпусу НЭ относительно центра масс КА принимают окончательный вид:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{J}} & \tilde{\mathbf{S}}_{att}^{\omega\mathbf{q}} \\ (\tilde{\mathbf{S}}_{att}^{\omega\mathbf{q}})^T & \mathbf{S}_{att}^{\mathbf{q}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\omega}}_S \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{N}_{att}^{\omega} \\ \mathbf{N}_{att}^{\mathbf{q}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{att}^{\omega} \\ \boldsymbol{\Phi}_{att}^{\mathbf{q}} \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Здесь

$$\tilde{\mathbf{J}} = \mathbf{J}_S + \sum_{n=1}^N \left(\tilde{\mathbf{J}}_n + M_n \left(\mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}_{Sn}, \boldsymbol{\rho}_{Sn}) + \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}_{Sn}, \mathbf{r}_{Cn}) + \mathbf{K}(\mathbf{r}_{Cn}, \boldsymbol{\rho}_{Sn}) \right) \right) - M\mathbf{K}(\mathbf{r}_{SC}, \mathbf{r}_{SC}) \quad (4.2)$$

– тензор инерции деформированного КА относительно его центра масс,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{S}}_{att}^{\omega\mathbf{q}}(\mathbf{q}) &= \left(\mathbf{S}_{att}^{\omega\mathbf{q}1}(\mathbf{q}) \quad \dots \quad \mathbf{S}_{att}^{\omega\mathbf{q}N}(\mathbf{q}) \right), \\ \tilde{\mathbf{S}}_{att}^{\omega\mathbf{q}n} &= M_n [\boldsymbol{\rho}_{Sn}]_{\times} \mathbf{A}_n + \sum_i m_{ni} [\mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni}]_{\times} \mathbf{A}_{ni} - M_n [\mathbf{r}_{SC}]_{\times} \mathbf{A}_n, \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{att}^{\mathbf{q}} &= \left\| \mathbf{S}_{att}^{qij} \right\|_{i,j=1}^N, \\ \mathbf{S}_{att}^{qij} &= \begin{cases} \mathbf{E}_{n \times n} - M_i^2 / M \mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_i, & i = j \\ -M_i M_j / M \mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_j, & i \neq j \end{cases} \end{aligned} \quad (4.4)$$

– элементы матрицы динамики, причем $\mathbf{S}_{att}^{\mathbf{q}}$ – постоянная матрица,

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_{att}^{\omega} &= -\boldsymbol{\omega}_S \times \tilde{\mathbf{J}} \boldsymbol{\omega}_S - 2 \sum_{n=1}^N M_n \boldsymbol{\rho}_{Sn} \times \boldsymbol{\omega}_S \times \dot{\mathbf{r}}_{Cn} \\
&\quad - \sum_{n=1}^N \sum_i m_{ni} (\mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni}) \times (2\boldsymbol{\omega}_S \times \dot{\mathbf{u}}_{ni}) + \mathbf{r}_{SC} \times 2\boldsymbol{\omega}_S \times \left(\sum_{n=1}^N M_n \dot{\mathbf{r}}_{Cn} \right) \\
\mathbf{N}_{att}^q &= \left((\mathbf{N}_{att}^{q1})^T \quad \dots \quad (\mathbf{N}_{att}^{qN})^T \right)^T \\
\mathbf{N}_{att}^{qn} &= - \sum_i m_{ni} \mathbf{A}_{ni}^T (\boldsymbol{\omega}_S \times \boldsymbol{\omega}_S \times (\mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni}) + 2\boldsymbol{\omega}_S \times \dot{\mathbf{u}}_{ni}) - \\
&\quad - M_n \mathbf{A}_n^T (\boldsymbol{\omega}_S \times \boldsymbol{\omega}_S \times (\boldsymbol{\rho}_{Sn} - \mathbf{r}_{SC})) + 2\boldsymbol{\omega}_S \times \frac{1}{M} \sum_{n=1}^N M_n \dot{\mathbf{r}}_{Cn}, \quad n = \overline{1, N}
\end{aligned}$$

– нелинейные слагаемые и

$$\begin{aligned}
\Phi_{att}^{\omega} &= \sum_i \mathbf{r}_{Si} \times \mathbf{F}_{Si} + \sum_{n=1}^N \left([\boldsymbol{\rho}_{Sn}]_{\times} \sum_i \mathbf{F}_{ni} + \sum_i (\mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni}) \times \mathbf{F}_{ni} \right) - \\
&\quad - [\mathbf{r}_{SC}]_{\times} \left(\sum_i \mathbf{F}_{Si} + \sum_{n=1}^2 \sum_i \mathbf{F}_{ni} \right), \\
\Phi_{att}^q &= \left((\Phi_{att}^{q1})^T \quad \dots \quad (\Phi_{att}^{qN})^T \right)^T, \\
\Phi_{att}^{qn} &= \sum_i \mathbf{A}_{ni}^T \mathbf{F}_{ni} - M_n / M \mathbf{A}_n^T \left(\sum_i \mathbf{F}_{Si} + \sum_{n=1}^N \sum_i \mathbf{F}_{ni} \right), \quad n = \overline{1, N}
\end{aligned}$$

– обобщенные силы.

Отметим, что Φ_{att}^{ω} есть ни что иное, как момент внешних сил относительно центра масс КА с НЭ. Для внутренних сил \mathbf{F}_{ni}^{int} , вызванных упругими деформациями, $\Phi_{att}^{\omega} = 0$ и $\Phi_{att}^{qn} = \sum_i \mathbf{A}_{ni}^T \mathbf{F}_{ni}^{int}$. Тогда с учетом выражения

(1.15) для сил \mathbf{F}_{ni}^{int} и условия нормировки мод колебаний верно $\Phi_{att}^{qn} = -\boldsymbol{\Omega}_n \mathbf{q}_n$, $n = \overline{1, N}$. В итоге, линеаризованные в окрестности нулевого положения равновесия уравнения (4.1) в отсутствие внешних сил принимают вид

$$\begin{pmatrix} \mathbf{J} & \mathbf{S}_{att}^{\omega\mathbf{q}} \\ (\mathbf{S}_{att}^{\omega\mathbf{q}})^T & \mathbf{S}_{att}^{\mathbf{q}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\omega}}_S \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{\Omega}\mathbf{q} \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

где

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_S + \sum_{n=1}^N (\mathbf{J}_n + M_n \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}_{Sn}, \boldsymbol{\rho}_{Sn})) - M\mathbf{K} \left(\frac{1}{M} \sum_{n=1}^N M_n \boldsymbol{\rho}_{Sn}, \frac{1}{M} \sum_{n=1}^N M_n \boldsymbol{\rho}_{Sn} \right) \quad (4.6)$$

– тензор инерции недеформированного КА относительно его центра масс и

$$\mathbf{S}_{\omega\mathbf{q}_n} = M_n [\boldsymbol{\rho}_{Sn}]_{\times} \mathbf{A}_n + \sum_i m_{ni} [\mathbf{r}_{ni}]_{\times} \mathbf{A}_{ni} - M_n \left(\frac{1}{M} \sum_{j=1}^N M_j [\boldsymbol{\rho}_{Sj}]_{\times} \right) \mathbf{A}_n, \quad n = \overline{1, N}.$$

Б. Внешние обобщенные силы, действующие на элементы КА

В диссертационной работе корпус КА полагается твердым телом. Следовательно, столбец обобщенных сил (1.16), действующих на него, можно записать в виде

$$\boldsymbol{\Phi}_S = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_S^{ext} \\ \mathbf{M}_S^{ext} \end{pmatrix},$$

где \mathbf{F}_S^{ext} и \mathbf{M}_S^{ext} – равнодействующая и момент относительно центра масс корпуса КА внешних сил, соответственно.

В свою очередь на НЭ действуют обобщенные силы $\boldsymbol{\Phi}_n$ (см. формулу (1.14)), которые задаются выражением

$$\boldsymbol{\Phi}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_n \\ \sum_i (\mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni}) \times \mathbf{F}_{ni} \\ \sum_i \mathbf{A}_{ni}^T \mathbf{F}_{ni} \end{pmatrix}$$

В диссертационной работе в качестве внешних сил рассматривались силы гравитации и силы светового давления. Отметим, что маховиками создается внешний управляющий момент.

Силы гравитации. В работе полагается, что гравитационное поле является центральным и ньютоновым. В этом случае гравитационные сила и момент, действующие на корпус КА, имеют вид [68]:

$$\Phi_S = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_S^{grav} \\ \mathbf{M}_S^{grav} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu M_S \frac{\mathbf{R}_S}{R_S^3} \\ \frac{3\mu}{R_S^5} \mathbf{R}_S \times \mathbf{J}_S \mathbf{R}_S \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

где μ – гравитационный параметр Земли.

Пусть на i -ю точку n -го НЭ действуют, силы гравитации $\mathbf{F}_{ni}^{grav} = -\mu m_{ni} \mathbf{R}_{ni} / R_{ni}^3$. Учитывая, что $\mathbf{u}_{ni} \ll \mathbf{r}_{ni} \ll \mathbf{R}_{ni}$, для получения обобщенных сил, создаваемых гравитационным полем Земли, воспользуемся приближением

$$\frac{\mathbf{R}_{ni}}{R_{ni}^3} = \frac{\mathbf{R}_n + (\mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni})}{(R_n^2 + 2\mathbf{R}_n \mathbf{r}_{ni} + r_{ni}^2)^{3/2}} \approx \frac{1}{R_n^3} (\mathbf{R}_n + (\mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni})) \left(1 - 3 \frac{(\mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni})^T \mathbf{R}_n}{R_n^2} \right).$$

Тогда

$$\mathbf{F}_n^{grav} = -\sum_i \mu m_{ni} \frac{\mathbf{R}_{ni}}{R_{ni}^3} \approx -\frac{\mu}{R_n^3} \sum_i m_{ni} (\mathbf{R}_n + \mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni}) \left(1 - 3 \frac{(\mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni})^T \mathbf{R}_n}{R_n^2} \right),$$

$$\begin{aligned}
\sum_i (\mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni}) \times \mathbf{F}_{ni}^{grav} &= -\mu \sum_i (\mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni}) \times m_i \frac{\mathbf{R}_n + (\mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni})}{(\mathbf{R}_n + (\mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni}))^3} = \\
&= -\mu \sum_i \frac{m_i (\mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni}) \times \mathbf{R}_n}{(\mathbf{R}_n + (\mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni}))^3} \approx -\frac{\mu}{R_n^3} \sum_i m_i (\mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni}) \times \mathbf{R}_n \left(1 - 3 \frac{(\mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni})^T \mathbf{R}_n}{R_n^2} \right) = \\
&= -\frac{\mu}{R_n^3} M_n \mathbf{r}_{Cn} \times \mathbf{R}_n + \frac{3\mu}{R_n^5} \sum_i m_i ((\mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni}) \times \mathbf{R}_n) (\mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni})^T \mathbf{R}_n = \\
&= -\frac{\mu}{R_n^3} M_n \mathbf{r}_{Cn} \times \mathbf{R}_n + \frac{3\mu}{R_n^5} \mathbf{R}_n \times \tilde{\mathbf{J}}_n \mathbf{R}_n, \\
\sum_i \mathbf{A}_{ni}^T \mathbf{F}_{ni}^{grav} &= -\mu \sum_i \mathbf{A}_{ni}^T m_i \frac{\mathbf{R}_{ni}}{R_{ni}^3} \approx -\frac{\mu}{R_n^3} \sum_i \mathbf{A}_{ni}^T m_i (\mathbf{R}_n + \mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni}) \left(1 - 3 \frac{(\mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni})^T \mathbf{R}_n}{R_n^2} \right) = \\
&= -\frac{\mu}{R_n^3} \sum_i \mathbf{A}_{ni}^T m_i (\mathbf{R}_n + \mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni}) + 3 \frac{\mu}{R_n^3} \sum_i \mathbf{A}_{ni}^T m_i \mathbf{R}_n \frac{(\mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni})^T \mathbf{R}_n}{R_n^2} + \\
&+ 3 \frac{\mu}{R_n^3} \sum_i \mathbf{A}_{ni}^T m_i (\mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni}) \frac{(\mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni})^T \mathbf{R}_n}{R_n^2}.
\end{aligned}$$

Окончательно при условии $\mathbf{u}_{ni} \ll \mathbf{r}_{ni} \ll \mathbf{R}_{ni}$ получаем выражение вектора обобщенных сил гравитации, действующих на n -ый НЭ,

$$\Phi_n^{grav} = \begin{pmatrix} -\frac{\mu}{R_n^3} M_n \mathbf{R}_n \\ -\frac{\mu}{R_n^3} M_n \mathbf{r}_{Cn} \times \mathbf{R}_n + \frac{3\mu}{R_n^5} \mathbf{R}_n \times \tilde{\mathbf{J}}_n \mathbf{R}_n \\ -\frac{\mu}{R_n^3} M_n \mathbf{A}_n^T \mathbf{R}_n \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

используемое в диссертационной работе.

Силы светового давления. Помимо сил гравитации в уравнениях движения геостационарного КА, учитываются действующие на солнечные панели силы светового давления и моделируемые в рамках следующего упрощенного подхода. А именно, панели полагаются недеформируемыми

пластинами площадью S , центр масс которых совпадает с их геометрическим центром. В качестве модели сил светового давления берется модель [69]:

$$\mathbf{F}_n^{grav} = -S \frac{\Phi_0}{c} (\mathbf{n}_n^{sun}, \mathbf{n}_n^{pan}) \times \left((1-\alpha) \mathbf{n}_n^{sun} + 2\alpha\beta (\mathbf{n}_n^{sun}, \mathbf{n}_n^{pan}) \mathbf{n}_n^{pan} + \alpha(1-\beta) \left(\mathbf{n}_n^{sun} + \frac{2}{3} \mathbf{n}_n^{pan} \right) \right), \quad (4.9)$$

где Φ_0 – солнечная постоянная, равная 1367 Вт/м^2 , c – скорость света, \mathbf{n}_n^{sun} – орт направления из центра масс КА на Солнце, \mathbf{n}_n^{pan} – нормаль к площади поверхности панели, α, β – коэффициенты отражения и зеркальности, соответственно.

Так как центры масс панелей совпадают с их геометрическими центрами, моменты сил светового давления относительно них равны нулю. При этом момент сил светового давления относительно центра масс всего КА нулю не равен.

В. Явные выражения производных опорной траектории

При построении вспомогательных кватернионов использовались вторая и третья производные опорной траектории. Выпишем слагаемые, составляющие суммы, входящие в выражения (3.50) и (3.51).

- Слагаемые, входящие во вторую производную:

$$\begin{aligned} \frac{d^{\dot{\beta}_{k+1}, \dot{\beta}_{j+1}}}{d\tau} (\Pi_Q(\tau)) &= (\boldsymbol{\mu}_0^{-1} \circ \boldsymbol{\mu}_1)^{\beta_1(\tau)} \circ \dots \circ (\boldsymbol{\mu}_k^{-1} \circ \boldsymbol{\mu}_{k+1})^{\beta_{k+1}(\tau)} \circ \\ &\circ \ln(\boldsymbol{\mu}_k^{-1} \circ \boldsymbol{\mu}_{k+1}) \dot{\beta}_{k+1}(\tau) \circ \dots \circ (\boldsymbol{\mu}_j^{-1} \circ \boldsymbol{\mu}_{j+1})^{\beta_{j+1}(\tau)} \circ \\ &\circ \ln(\boldsymbol{\mu}_j^{-1} \circ \boldsymbol{\mu}_{j+1}) \dot{\beta}_{j+1}(\tau) \circ \dots \circ (\boldsymbol{\mu}_n^{-1} \circ \boldsymbol{\mu}_{n+1})^{\beta_{n+1}(\tau)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^{\dot{\beta}_{j+1}^2}}{d\tau} (\Pi_Q(\tau)) &= (\boldsymbol{\mu}_0^{-1} \circ \boldsymbol{\mu}_1)^{\beta_1(\tau)} \circ \dots \circ (\boldsymbol{\mu}_j^{-1} \circ \boldsymbol{\mu}_{j+1})^{\beta_{j+1}(\tau)} \circ \\ &\circ \ln(\boldsymbol{\mu}_j^{-1} \circ \boldsymbol{\mu}_{j+1}) \dot{\beta}_{j+1}(\tau) \circ \ln(\boldsymbol{\mu}_j^{-1} \circ \boldsymbol{\mu}_{j+1}) \dot{\beta}_{j+1}(\tau) \circ \dots \circ (\boldsymbol{\mu}_n^{-1} \circ \boldsymbol{\mu}_{n+1})^{\beta_{n+1}(\tau)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\ddot{\beta}_{j+1}}{d\tau}(\Pi_Q(\tau)) &= (\mu_0^{-1} \circ \mu_1)^{\beta_1(\tau)} \circ \dots \circ (\mu_j^{-1} \circ \mu_{j+1})^{\beta_{j+1}(\tau)} \circ \\ &\circ \ln(\mu_j^{-1} \circ \mu_{j+1}) \ddot{\beta}_{j+1}(\tau) \circ \dots \circ (\mu_n^{-1} \circ \mu_{n+1})^{\beta_{n+1}(\tau)}, \end{aligned}$$

- Слагаемые, входящие в третью производную:

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{\beta}_{k+1} \cdot \dot{\beta}_{j+1}}{d\tau}(\Pi_Q(\tau)) &= (\mu_0^{-1} \circ \mu_1)^{\beta_1(\tau)} \circ \dots \circ (\mu_k^{-1} \circ \mu_{k+1})^{\beta_{k+1}(\tau)} \circ \ln(\mu_k^{-1} \circ \mu_{k+1}) \dot{\beta}_{k+1}(\tau) \circ \\ &\circ \dots \circ (\mu_j^{-1} \circ \mu_{j+1})^{\beta_{j+1}(\tau)} \circ \ln(\mu_j^{-1} \circ \mu_{j+1}) \dot{\beta}_{j+1}(\tau) \circ \dots \circ (\mu_n^{-1} \circ \mu_{n+1})^{\beta_{n+1}(\tau)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{\beta}_{k+1} \cdot \ddot{\beta}_{j+1}}{d\tau}(\Pi_Q(\tau)) &= (\mu_0^{-1} \circ \mu_1)^{\beta_1(\tau)} \circ \dots \circ (\mu_k^{-1} \circ \mu_{k+1})^{\beta_{k+1}(\tau)} \circ \ln(\mu_k^{-1} \circ \mu_{k+1}) \dot{\beta}_{k+1}(\tau) \circ \\ &\circ \dots \circ (\mu_j^{-1} \circ \mu_{j+1})^{\beta_{j+1}(\tau)} \circ \ln(\mu_j^{-1} \circ \mu_{j+1}) \ddot{\beta}_{j+1}(\tau) \circ \dots \circ (\mu_n^{-1} \circ \mu_{n+1})^{\beta_{n+1}(\tau)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{\beta}_{k+1}^2 \cdot \dot{\beta}_{j+1}}{d\tau}(\Pi_Q(\tau)) &= (\mu_0^{-1} \circ \mu_1)^{\beta_1(\tau)} \circ \dots \circ \\ &\circ (\mu_k^{-1} \circ \mu_{k+1})^{\beta_{k+1}(\tau)} \circ \ln(\mu_k^{-1} \circ \mu_{k+1}) \dot{\beta}_{k+1}(\tau) \circ \ln(\mu_k^{-1} \circ \mu_{k+1}) \dot{\beta}_{k+1}(\tau) \circ \\ &\circ \dots \circ (\mu_j^{-1} \circ \mu_{j+1})^{\beta_{j+1}(\tau)} \circ \ln(\mu_j^{-1} \circ \mu_{j+1}) \dot{\beta}_{j+1}(\tau) \circ \dots \circ (\mu_n^{-1} \circ \mu_{n+1})^{\beta_{n+1}(\tau)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{\beta}_{k+1} \cdot \dot{\beta}_{j+1}^2}{d\tau}(\Pi_Q(\tau)) &= (\mu_0^{-1} \circ \mu_1)^{\beta_1(\tau)} \circ \dots \circ (\mu_k^{-1} \circ \mu_{k+1})^{\beta_{k+1}(\tau)} \circ \\ &\circ \ln(\mu_k^{-1} \circ \mu_{k+1}) \dot{\beta}_{k+1}(\tau) \circ \dots \circ (\mu_j^{-1} \circ \mu_{j+1})^{\beta_{j+1}(\tau)} \circ \\ &\circ \ln(\mu_j^{-1} \circ \mu_{j+1}) \dot{\beta}_{j+1}(\tau) \circ \ln(\mu_j^{-1} \circ \mu_{j+1}) \dot{\beta}_{j+1}(\tau) \circ \dots \circ (\mu_n^{-1} \circ \mu_{n+1})^{\beta_{n+1}(\tau)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{\beta}_{m+1} \cdot \dot{\beta}_{k+1} \cdot \dot{\beta}_{j+1}}{d\tau}(\Pi_Q(\tau)) &= (\mu_0^{-1} \circ \mu_1)^{\beta_1(\tau)} \circ \dots \circ (\mu_m^{-1} \circ \mu_{m+1})^{\beta_{m+1}(\tau)} \circ \\ &\circ \ln(\mu_m^{-1} \circ \mu_{m+1}) \dot{\beta}_{m+1}(\tau) \circ \dots \circ (\mu_k^{-1} \circ \mu_{k+1})^{\beta_{k+1}(\tau)} \circ \ln(\mu_k^{-1} \circ \mu_{k+1}) \dot{\beta}_{k+1}(\tau) \circ \dots \circ \\ &\circ (\mu_j^{-1} \circ \mu_{j+1})^{\beta_{j+1}(\tau)} \circ \ln(\mu_j^{-1} \circ \mu_{j+1}) \dot{\beta}_{j+1}(\tau) \circ \dots \circ (\mu_n^{-1} \circ \mu_{n+1})^{\beta_{n+1}(\tau)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d_{\dot{\beta}_{j+1}, \ddot{\beta}_{j+1}}(\Pi_{\mathbf{Q}}(\tau))}{d\tau} &= (\boldsymbol{\mu}_0^{-1} \circ \boldsymbol{\mu}_1)^{\beta_1(\tau)} \circ \dots \circ (\boldsymbol{\mu}_j^{-1} \circ \boldsymbol{\mu}_{j+1})^{\beta_{j+1}(\tau)} \circ \\ &\circ \ln(\boldsymbol{\mu}_j^{-1} \circ \boldsymbol{\mu}_{j+1}) \dot{\beta}_{j+1}(\tau) \circ \ln(\boldsymbol{\mu}_j^{-1} \circ \boldsymbol{\mu}_{j+1}) \ddot{\beta}_{j+1}(\tau) \circ \dots \circ (\boldsymbol{\mu}_n^{-1} \circ \boldsymbol{\mu}_{n+1})^{\beta_{n+1}(\tau)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d_{\dot{\beta}_{j+1}^3}(\Pi_{\mathbf{Q}}(\tau))}{d\tau} &= (\boldsymbol{\mu}_0^{-1} \circ \boldsymbol{\mu}_1)^{\beta_1(\tau)} \circ \dots \circ (\boldsymbol{\mu}_j^{-1} \circ \boldsymbol{\mu}_{j+1})^{\beta_{j+1}(\tau)} \circ \\ &\circ \dot{\beta}_{j+1}^3(\tau) \ln(\boldsymbol{\mu}_j^{-1} \circ \boldsymbol{\mu}_{j+1}) \circ \ln(\boldsymbol{\mu}_j^{-1} \circ \boldsymbol{\mu}_{j+1}) \circ \ln(\boldsymbol{\mu}_j^{-1} \circ \boldsymbol{\mu}_{j+1}) \circ \dots \circ (\boldsymbol{\mu}_n^{-1} \circ \boldsymbol{\mu}_{n+1})^{\beta_{n+1}(\tau)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d_{\ddot{\beta}_{j+1}}(\Pi_{\mathbf{Q}}(\tau))}{d\tau} &= (\boldsymbol{\mu}_0^{-1} \circ \boldsymbol{\mu}_1)^{\beta_1(\tau)} \circ \dots \circ (\boldsymbol{\mu}_j^{-1} \circ \boldsymbol{\mu}_{j+1})^{\beta_{j+1}(\tau)} \circ \\ &\circ \ddot{\beta}_{j+1}(\tau) \ln(\boldsymbol{\mu}_j^{-1} \circ \boldsymbol{\mu}_{j+1}) \circ \dots \circ (\boldsymbol{\mu}_n^{-1} \circ \boldsymbol{\mu}_{n+1})^{\beta_{n+1}(\tau)}. \end{aligned}$$