ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

доктора физико-математических наук Абрамова Сергея Александровича на диссертационную работу Батхина Александра Борисовича на тему «Семейства периодических и стационарных решений в гамильтоновой механике», представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.02.01 - Теоретическая механика.

Актуальность темы диссертационного исследования. Многие задачи классической и небесной механики формализуются в виде гамильтоновых систем, большая часть которых обычно не является интегрируемыми. Методы исследования таких систем, в основном, базируются на различных вариантах теории возмущений, которые разрабатываются в течение многих лет. Другой подход в изучении локальных свойств фазового потока, восходящий к классическим работам Пуанкаре, основан на поиске инвариантных многообразий различных размерностей и дальнейшем исследовании динамики в их окрестности. Основной целью представленной диссертационной работы выступает развитие на современном уровне и применение методов поиска семейств стационарных и периодических решений гамильтоновых систем, а также исследование фазового потока в их окрестности. Рассмотренные в работе системы Гамильтона интересны в том числе и своими приложениями в небесной и теоретической механике. Тема диссертационного исследования представляется достаточно актуальной.

Тематическая направленность работы, ее содержание и основные полученные результаты вполне соответствуют паспорту специальности 01.02.01 «Теоретическая механика».

Содержание и структура работы. Диссертация А.Б. Батхина состоит из введения, 6 глав, разбитых на две части, заключения и библиографии, содержащей 161 наименование. Общий объем диссертации 266 страниц.

Введение традиционно посвящено обоснованию актуальности темы диссертации, изложению целей и задач исследования, научной новизны, теоретической и практической значимости полученных результатов и методов исследования, а также содержит информацию об апробации работы. Также во введении приведены основные положения, выносимые на защиту, представлен перечень публикаций автора и кратко изложена структура диссертации.

Первая часть работы, состоящая из трёх глав, содержит описание методов поиска и исследования семейств периодических решений систем Гамильтона без параметров. Во введении к этой части объясняется выбор плоской круговой задачи Хилла в качестве модельного примера, приводится информация о прикладной значимости этой задачи.

В **первой главе** автор даёт подробное описание задачи Хилла, обращая внимание на специфические особенности её уравнений движения. Методами степенной геометрии находятся две предельных задачи – задача Кеплера и задача Энона, которые оказываются интегрируемыми. Основное внимание здесь уделяется описанию дуг-решений интегрируемой задачи Энона. Для этих дуг решений находятся согласующие гиперболы, обеспечивающие их «склейку» вблизи особенности. На множестве дуг-решений определяются порождающие последовательности, описываются их свойства с точки зрения симметрии, асимптотики начальных условий семейства и глобальной кратности соответствующей порождённой орбиты. Глава заканчивается описанием Алгоритма I исследования семейства симметричных орбит по порождающему решению.

Вторая глава посвящена исследованию структуры фазового потока системы Гамильтона с двумя степенями свободы, уравнения которой допускают два дискретных преобразования симметрии. Автор активно использует методы компьютерной алгебры для анализа структуры матрицы монодромии периодического решения при продолжении семейства через критическую точку семейства, в которой модуль индекса устойчивости периодического решения равен 1. Доказываются теоремы о появлении в окрестности критического двояко симметричного решения семейств периодических решений с различной локальной кратностью и различными типами симметрий. Эти утверждения далее применяются для интерпретации полученных результатов исследования семейства f_3 двояко симметричных периодических орбит. В заключении главы автор предъявляет результаты применения Алгоритма I для исследования семейств симметричных периодических решений, задаваемых порождающими последовательностями, составленными из дуг-решений +1, -1, +2. Приводятся описания найденных семейств, которые содержат интересные с точки зрения приложений орбиты перехода в окрестность точки либрации, а также орбиты перехода между точками либрации задачи Хилла. Опираясь на полученные результаты вычислений, автор формулирует некоторые предположения о свойствах семейств, порождающие последовательности которых составлены из указанных выше дуг.

Третья глава предлагает описание семейств периодических решений так называемой обобщённой задачи Хилла. Это обобщение заключается в том, что Ньютонов потенциал притяжения центрального тела классического варианта задачи может быть либо нулевым, либо Кулоновым потенциалом отталкивания. Для единообразной записи уравнений движения вводятся масштабированные регулярные переменные, затем рассматривается структура и свойства порождающих решений обобщённой задачи. Основной результат главы заключается в том, что все семейства периодических решений обобщённой задачи Хилла оказываются связанными между собой.

Во **второй части** работы рассматриваются методы исследования устойчивости семейств положений равновесия систем Гамильтона, полиномиально зависящих от набора параметров.

Четвёртая глава, по мнению автора, носит вспомогательный характер, хотя полученные в ней результаты представляют самостоятельный интерес. В ней обсуждается структура так называемого дискриминантного множества приведённого многочлена в пространстве его коэффициентов. Здесь предлагается конструктивный алгоритм вычисления полиномиальной параметризации всех компонентов дискриминантного множества, приведено описание его реализации в системе компьютерной алгебры Maple. В заключении главы рассматривается задача получения асимптотического разложения всех решений алгебраического уравнения от трёх неизвестных в виде рядов трёх типов. Задача решается алгоритмически методами степенной геометрии, а затем приводится описание программной реализации алгоритма в системе Maple.

В **пятой главе** исследуется устойчивость в линейном приближении многопараметрической системы Гамильтона. Вначале обсуждается алгоритм выделения множества устойчивости в пространстве параметров системы, затем для класса гироскопических систем доказывается теорема, что границей множества устойчивости может служить только дискриминантное множество. В качестве модельной задаче рассматривается статически неуравновешенная система двух связанных гироскопов Лагранжа. Уравнения движения системы сводятся к гамильтоновой системе с тремя параметрами. Применение методов главы 4 позволяет дать полное аналитическое описание множества устойчивости модельной задачи. Также выполнен локальный анализ границы множества устойчивости вблизи её особенностей.

Шестая глава начинается с рассмотрения обобщения модельной задачи предыдущей главы на случай пяти параметров. Используя структуру особых точек дискриминантного множества, строится такое линейное преобразование пространства параметров, что характеристический многочлен пяти параметрической задачи приводится к характеристическому многочлену трёх параметрической. Это позволяет автору описать множество устойчивости положения равновесия семейства связанных гироскопов Лагранжа. Окончание главы завершает исследование множества устойчивости при учёте нелинейных добавок. Для этого применяется метод гамильтоновой нормальной формы, который позволяет в пространстве параметров выделить подобласть значений параметров, в которой устойчивость по линейному приближению сохраняется при наличии произвольных возмущений.

В **Заключении** сформулированы результаты работы, которые автор выносит на защиту.

Новизна полученных результатов состоит в применении техники сингулярных возмущений для поиска и численного исследования новых семейств периодических решений плоской круговой задачи Хилла, орбиты которых могут быть использованы для проектирования космических миссий, в обобщении задачи Хилла, позволяющем связать все найденные семейства в общую сеть, в последовательном применении алгоритмов компьютерной алгебры для исследования фазового потока системы Гамильтона с дискретной группой симметрий, в разработке теории дискриминантных множеств многочлена и её применении для анализа устойчивости положений равновесия многопараметрических систем Гамильтона.

Степень обоснованности научных положений, выводов и рекомендаций, достоверность полученных результатов. Обоснованность положений и выводов работы следует из использования строгих математических методов теории исключений, степенной геометрии, теории нормальных форм ОДУ. Для вывода и проверки корректности аналитических выражений используется апробированная система компьютерной алгебры Maple. Для проверки достоверности полученных результатов используются различные приемы. Поведение фазового потока в окрестности критической двояко симметричной орбиты численно проверяется с помощью соответствующих сечений Пуанкаре. Результаты, полученные при исследовании множества устойчивости модельной задачи пятой главы сравниваются с частными случаями других исследователей. Даётся механическая интерпретация результатов для физических значений параметров. Большинство сформулированных в работе теорем строго доказаны, а сформулированные автором гипотезы основаны на анализе полученных численных результатов.

Материалы диссертации опубликованы в 19-ти статьях в рецензируемых журналах из перечня рекомендованных ВАК, среди которых 16 публикаций в источниках, индексируемых международными базами Scopus и Web of Science. Её основные результаты обсуждались на многочисленных международных и всероссийских конференциях.

Теоретическая и практическая значимость работы состоит в том, что полученные в диссертации результаты могут быть использованы:

- для численного исследования семейств периодических орбит различных обобщений задачи Хилла, а также для получения новых семейств периодических орбит ограниченной задачи трёх тел;
- для проектирования космических миссий в окрестность точек либрации;
- для исследования множества устойчивости многопараметрических систем Гамильтона

Результаты диссертации могут быть использованы в Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, в Институте проблем механики им. А.Ю. Ишлинского, Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова, Санкт-Петербургском государственном университете, Московском физико-техническом институте.

Замечания.

1. Описанный в Главе I Алгоритм вычисления семейств симметричных периодических решений по их порождающим последовательностям существенно использует численные методы интегрирования систем ОДУ. При этом автор ограничивается ссылками на достаточно старую англоязычную книгу и свою монографию. Здесь следовало бы дать более

пространное описание используемых численных методов, тем более что от точности и эффективности численного интегрирования зависит качество работы алгоритма.

2. В Главе II на рис. 2.11 приведены примеры орбит семейств Hb и Hf в переменных X и Y. Эти переменные были использованы ранее в Главе I для описания предельной задачи Энона. Здесь эти обозначения вводят читателя в заблуждение.
3. В Главе IV описаны программные реализации в виде библиотек системы компьютерной алгебры Maple двух алгоритмов: вычисления параметризации дискриминантного множества и асимптотического решения алгебраического уравнения от трёх переменных. Если они находятся в открытом доступе, то следует указать, где эта библиотека размещена и как ею пользоваться.
4. В главах II, IV, V и VI автор активно использует методы компьютерной алгебры, в частности, процедуры вычисления базисов Грёбнера полиномиальных идеалов. Поскольку на результатах применения этих процедур базируется большая часть выводов, то в соответствующих частях текста следовало бы дать более детальное описание процедур вычисления, а также привести ссылки на источники описания используемых в работе алгоритмов.
5. В Главе IV в описании алгоритма вычисления асимптотических разложений алгебраического уравнения от трёх переменных указано, что в его реализации используется пакет Qhull, но не приведена ссылка на него.
6. В тексте присутствует некоторое количество опечаток и смысловых неточностей. Так, на стр. 6 присутствует название Московский физико-математический институт, хотя, наверное, это физико-технический.

Указанные выше недостатки не снижают общего положительного впечатления от представленной работы и высокой оценки её результатов.

Заключение. Название диссертации согласуется с её содержанием, а результаты работы полностью представлены в публикациях автора. Автореферат диссертации соответствует содержанию диссертационной работы, отражая все основные положения.

Диссертационная работа Батхина А.Б. на тему «Семейства периодических и стационарных решений в гамильтоновой механике» представляет собой законченную научно-квалификационную работу, удовлетворяет требованиям Положения ВАК, предъявляемым на соискание учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.02.01 – Теоретическая механика, а её автор Александр Борисович Батхин заслуживает присвоения искомой степени.

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Отдела систем математического обеспечения Федерального государственного учреждения «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук»,

Сергей Александрович Абрамов

«24» мая 2022 г.

г. Москва, ул. Вавилова, д. 44

Тел: +7 (499) 135-1620 e-mail: sergeyabramov@mail.ru

Подпись С.А. Абрамова заверяю
Ученый секретарь ФИЦ ИУ РАН
В.Н. Захаров
24 05 2022 г.

Подпись С. А. Абрамова заверяю.