

Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский
центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской
академии наук» (ИПМ им. М.В. Келдыша)

На правах рукописи

Батхин Александр Борисович

Семейства периодических и стационарных решений в гамильтоновой механике

01.02.01 – Теоретическая механика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание учёной степени

доктора физико-математических наук

Научный консультант

д. ф.-м. н., проф.

Брюно Александр Дмитриевич

Москва – 2022

Содержание

Введение	4
Часть I. Первый класс задач: семейства периодических решений	16
Глава 1. Задача Хилла и её предельные случаи	20
1.1. Уравнения задачи Хилла	20
1.2. Порождающие решения задачи Энона и их свойства	34
1.3. Алгоритм исследования семейства периодических орбит	66
Глава 2. Семейства симметричных периодических решений задачи Хил- ла	70
2.1. Ветвление семейств двояко симметричных периодических реше- ний	70
2.2. Обзор семейств симметричных периодических решений	95
Глава 3. Обобщённая задача Хилла и её порождающие решения	120
3.1. Обобщённая задача Хилла и её свойства	120
3.2. Структура порождающих решений задачи анти–Хилла	126
3.3. Результаты исследования семейств периодических орбит	138
3.4. Заключение	147
Часть II. Второй класс задач: устойчивость в многопараметрических системах	149
Глава 4. Исследование дискриминантного множества многочлена . . .	152
4.1. Субдискриминант многочлена, его вычисление и свойства	152
4.2. Параметризация дискриминантного множества $\mathcal{D}(f_n)$	165

4.3.	Асимптотическое решение алгебраического уравнения	180
Глава 5. Множество устойчивости линейной многопараметрической системы		
		196
5.1.	Общая схема исследования окрестности ПР многопараметрической системы Гамильтона	197
5.2.	Множество устойчивости одной гироскопической задачи	201
Глава 6. Вычисление множества устойчивости по Ляпунову нелинейной многопараметрической системы		
		226
6.1.	Множество устойчивости семейства гироскопических задач	226
6.2.	Исследование устойчивости по Ляпунову в нелинейной системе	240
Заключение		247
Литература		250

Введение

Актуальность темы исследования. Системы Гамильтона являются важным классом динамических систем и находят многочисленные применения в аналитической механике, теоретической физике, небесной механике, гидродинамике и других областях. Будучи в определённом смысле вырожденными системами, они, тем не менее, позволяют эффективно описывать самые разнообразные процессы и явления, а решения гамильтоновых систем часто демонстрируют сложное поведение. Исследование фазового потока, порождённого системой Гамильтона, обычно затруднительно, а то и невозможно проводить с использованием общих методов изучения динамических систем. Поэтому разработка и апробация методов, специфичных для систем Гамильтона, является актуальной и востребованной задачей.

Цели и задачи диссертационной работы: Цель работы состоит в разработке методов исследования двух наиболее распространённых классов задач гамильтоновой динамики. Во-первых, это поиск и продолжение периодических решений сингулярно возмущённых систем Гамильтона. Во-вторых, это исследование множества устойчивости положения равновесия многопараметрической системы Гамильтона. В диссертации первый класс методов использован для поиска новых семейств периодических решений плоской круговой задачи Хилла и её обобщений, а второй класс методов — к изучению устойчивости некоторых механизмов.

Научная новизна. Научная новизна диссертационной работы состоит в следующем:

- применена техника сингулярных возмущений интегрируемой задачи для вычисления порождающих семейств периодических решений плоской круговой задачи Хилла, что позволило найти и численно исследовать новые семейства симметричных периодических решений этой задачи,
- обобщена классическая задача Хилла, которая позволила объединить все

известные семейства периодических решений в единую сеть,

– применены современные алгоритмы компьютерной алгебры и теории исключений для анализа структуры фазового потока системы Гамильтона, допускающей дискретную группу автоморфизмов,

– разработана теория дискриминантных множеств, необходимая для реализации символьно-аналитических методов исследования устойчивости положения равновесия в многопараметрических системах Гамильтона.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация имеет теоретический характер. Разработанные в ней методы исследования могут быть использованы при численно-аналитическом исследовании следующих классов задач:

- 1) поиск порождающих решений семейств периодических орбит сингулярно возмущённых систем Гамильтона,
- 2) анализ бифуркаций семейств периодических решений систем Гамильтона с дискретной группой симметрий,
- 3) вычисление дискриминантного многообразия в пространстве параметров системы Гамильтона,
- 4) анализ устойчивости положения равновесия многопараметрической системы Гамильтона,
- 5) анализ нормальной формы системы Гамильтона в окрестности стационарной точки.

Разработанные методы могут быть применены для исследования устойчивости инвариантных многообразий больших размерностей, для поиска и продолжения семейств периодических решений систем Гамильтона с большим числом степеней свободы. Вычисленные в работе семейства периодических решений задачи Хилла могут быть продолжены до соответствующих семейств ограниченной или общей задач трёх тел. Периодические орбиты этих семейств могут быть использованы для проектирования космических миссий в окрестности малых тел Солнечной системы.

Результаты исследований могут применяться в Институте прикладной мате-

матики им. М.В. Келдыша РАН, Институте проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, в Московском физико-математическом институте и других научных центрах, занимающихся исследованиями гамильтоновых систем и их приложениями. Материалы диссертации могут составить содержание специальных курсов для студентов и аспирантов, обучающихся по специальности теоретическая механика.

Методология и методы исследования. Исследование неинтегрируемой автономной системы Гамильтона с n степенями свободы предполагает поиск в фазовом пространстве иерархической структуры инвариантных многообразий различных размерностей («скелета») и изучение свойств фазового потока вблизи них. Простейшим инвариантным многообразием размерности 0 является стационарное решение (положение равновесия). В его окрестности при определённых условиях могут существовать семейства периодических решений, а также семейства n -мерных инвариантных торов. Изучая устойчивость вдоль семейства периодических решений можно в окрестности критических решений находить другие семейства, продолжать их и постепенно формировать «скелет» в некоторой части фазового пространства. Такой подход основан на использовании гамильтоновой нормальной формы, вычисленной в окрестности стационарного или периодического решений или инвариантного тора. Однако далеко не каждая гамильтонова система имеет стационарные решения, а если система не зависит от внешних параметров, то имеющиеся положения равновесия могут не содержать в своей окрестности инвариантные многообразия больших размерностей. В таком случае поиск семейств периодических решений можно проводить с использованием метода сингулярных возмущений, когда с помощью многогранника Ньютона исходного гамильтониана системы вычисляются соответствующие гамильтоновы укорочения, среди решений которых следует искать участки сингулярных порождающих решений или их семейств.

Указанная методология исследования системы Гамильтона подробно описана в [19] и частично реализована в диссертационной работе. В её первой части

рассматриваются методы поиска семейств периодических решений системы Гамильтона без параметров. В качестве модельной задачи рассматривается задача Хилла, положения равновесия которой не могут дать информацию о структуре инвариантных многообразий. Её обобщение, так называемая задача анти-Хилла, вообще не имеет стационарных решений, но, тем не менее, для этих задач удаётся вычислить семейства периодических решений и объединить их в общую сеть. Вторая часть предлагает методы исследования устойчивости семейств стационарных решений в ситуации, когда число параметров велико. Здесь основная цель исследования — получить описание множества устойчивости положения равновесия в аналитически точной или приближённой формах. В качестве модельной задачи рассматривается система связанных гироскопов Лагранжа с шестью степенями свободы и пятью параметрами.

Основными методами исследования в диссертации являются: метод порождающих решений регулярно и сингулярно возмущённой интегрируемой системы Гамильтона, методы степенной геометрии (многогранник Ньютона, нормальные конусы, укороченные уравнения, степенные преобразования) для получения гамильтоновых укорочений и для вычисления асимптотических разложений алгебраических многообразий вблизи их особенностей, аналитические и символьные методы классической теории исключений (субрезультанты, наибольший общий делитель) и современной компьютерной алгебры (базисы Грёбнера, примарная декомпозиция, элиминационный идеал) для исследования дискриминантного множества многочленов, метод нормализации системы Гамильтона в окрестности положения равновесия и применение полученной нормальной формы к исследованию устойчивости по Ляпунову, численные методы интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений, основанные на алгоритмах автоматического дифференцирования, численные методы продолжения семейств периодических решений автономных систем Гамильтона.

Положения, выносимые на защиту:

- Для плоской круговой задачи Хилла изучены два её предельных интегри-

руемых случая: задача Энона и задача Кеплера. Дано описание сингулярных порождающих решений в терминах дуг-решений задачи Энона. Доказаны свойства полученных порождающих решений, которые позволяют вычислить асимптотику начальных условий, тип симметрии, глобальную кратности орбит соответствующего семейства. Построен аналог символической динамики на счётном множестве дуг-решений интегрируемой задачи Энона. Реализован численный алгоритм, позволяющий по порождающему решению находить соответствующее семейство симметричных периодических орбит. С помощью этого алгоритма вычислены новые ранее неизвестные семейства, 16 из которых содержат орбиты перелёта в окрестность ближайшей коллинеарной точки либрации L_1 или L_2 , а также орбиты перелёта между этими точками. Эти орбиты продолжаются до периодических орбит ограниченной задачи трёх тел и могут быть использованы в проектировании космических миссий в окрестность коллинеарных точек либрации.

- Для системы Гамильтона, допускающей две симметрии расширенного фазового пространства, изучена структура фазового потока в окрестности критических решений семейств двояко симметричных периодических орбит. Доказаны теоремы о ветвлении таких семейств в критических случаях, соответствующих значениям индекса устойчивости S критического решения, равного соответственно $+1$, -1 и $\cos(2\pi p/q)$, где $p, q \in \mathbb{N}$. Полученные результаты применены к плоской круговой задаче Хилла для анализа взаимного расположения семейств периодических решений с общими орбитами.
- Предложено новое обобщение классической задачи Хилла, в котором центральное тело может иметь как ньютоновский потенциал притяжения, так и кулоновский потенциал отталкивания. Описаны порождающие решения этой обобщённой задачи в терминах дуг-решений. С их помощью найдены и продолжены новые семейства периодических решений, многие из кото-

рых продолжаются либо до периодических решений классической задачи Хилла, либо взаимодействуют с другими семействами. Это обобщение позволяет рассматривать все известные семейства периодических орбит как единую сеть, в которой такие семейства связаны друг с другом либо посредством порождающих решений, либо через общие орбиты с целой локальной кратностью.

- Для исследования устойчивости семейства стационарных решений многопараметрической системы Гамильтона дано полное описание дискриминантного множества в пространстве коэффициентов многочлена, на котором этот многочлен имеет кратные корни. Приведено описание его иерархической структуры, доказана его линейчатая структура и разработан метод вычисления его полиномиальной параметризации.
- Для случая трёхмерного пространства параметров гамильтоновой системы разработан и реализован алгоритм асимптотического разложения нулей дискриминанта характеристического уравнения в окрестности особых точек в виде рядов трёх типов по степеням его параметров. Алгоритм используется для асимптотического представления множества устойчивости решений вблизи его особенностей.
- Методами компьютерной алгебры, степенной геометрии и с использованием гамильтоновой нормальной формы аналитически вычислено множество устойчивости по Ляпунову статически неуравновешенной системы связанных гироскопов Лагранжа с шестью степенями свободы и пятью параметрами.

Степень достоверности и апробация результатов. Основные результаты диссертации докладывались автором на международных и всероссийских конференциях, съездах, симпозиумах, ведущих научных семинарах. Список наиболее значимых из них приведен ниже.

IUTAM Symposium on Hamiltonian Dynamics, Vortex Structures, Turbulence, Moscow, 2006, Академические чтения по космонавтике: XXX (2006 г.), XXXII

(2008 г.), XXXIII (2009 г.), XXXIV (2010 г.), XXXV (2011 г.), XXXVI (2012 г.), XXXVIII (2014 г.), XL (2016 г.), XLII (2018 г.), Москва, Международная конференция им. Е.С. Пятницкого «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления»: XI (2010 г.), XII (2012 г.), XIII (2016 г.) и XIV (2018 г.), Москва, ИПУ РАН, Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: X (2011 г., Нижний Новгород), XI (2015 г., Казань), XII (2019 г., Уфа), Международная конференции Polynomial Computer Algebra (PCA, 2010, 2011, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020, 2021 гг.), Санкт-Петербург, Институт Эйлера, Международная конференция «Компьютерная алгебра в научных исследованиях (CASC)», (2012 г., Марибор, 2019 г., Москва), Международная конференция по небесной механике CELMECH V (2013 г.), Витербо, Италия, Международная конференция "Dynamics, Bifurcations and Strange Attractors (2013 г., 2016 г.) Нижний Новгород; Международная конференция «Компьютерная алгебра» (Москва, ФИЦ ИУ РАН, ВЦ им. А.А. Дородницына, РУДН 2016 г., 2019 г., 2021 г., РЭУ им. Г.В. Плеханова 2017 г.); Международная конференция “Geometry, Dynamics, Integrable Systems – GDIS 2018”, Долгопрудный, МФТИ; Международная конференция Dynamics Days Europe September 3–7, 2018, Loughborough University; Международная конференция Equadiff-2019, Лейден, Нидерланды.

На заседаниях научных семинаров им. В.А. Егорова по механике космического полёта (Москва, МГУ им. Ломоносова, 2010, 2011 гг.); отдела небесной механики и динамической астрономии ГАО РАН (Пулково, 2012 г.); баллистического центра ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (Москва, 2014 г.); по компьютерной алгебре (Москва, МГУ им. Ломоносова, 2012, 2014, 2019 и 2020 гг.); в Институте космических исследований (Технион, Израиль, 2014); им. В.В. Румянцева по аналитической механике и теории устойчивости (Москва, МГУ им. Ломоносова, 2013, 2014, 2017, 2018 гг.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 46 печатных работах, из них 19 статей [1–19] в рецензируемых журналах и изданиях рекомендованных ВАК РФ, среди которых 16 публикаций в изданиях, индекси-

руемых в международных базах данных Scopus и Web of Science, 18 препринтов, 9 докладов и тезисов докладов. Опубликовано монография [20].

Приведём список публикации автора в рецензируемых журналах.

1. Брюно А. Д., Батхин А. Б. Асимптотическое решение алгебраического уравнения // Докл. Акад. Наук. — 2011. — Т. 440, № 3. — С. 295—300.
2. Батхин А. Б., Брюно А. Д. Множества устойчивости многопараметрических гамильтоновых задач // Вестник ННГУ им. Н. И. Лобачевского. — 2011. — 4, часть 2. — С. 57—58.
3. Батхин А. Б., Брюно А. Д., Варин В. П. Множества устойчивости многопараметрических гамильтоновых систем // Прикл. мат. мех. — 2012. — Т. 76, № 1. — С. 80—133.
4. Брюно А. Д., Батхин А. Б. Разрешение алгебраической сингулярности алгоритмами степенной геометрии // Программирование. — 2012. — № 2. — С. 12—30.
5. Batkhin A. B. Application of the method of asymptotic solution to one multi-parameter problem : 14th International Workshop, CASC 2012, Maribor, Slovenia, September 3-6, 2012. Proceedings // Vol. 7442 / ed. by V. P. Gerdt [et al.]. — Berlin Heidelberg : Springer, 2012. — P. 22–33. — (Lecture Notes in Computer Science). — DOI: 10.1007/978-3-642-32973-9_3.
6. Батхин А. Б. Выделение областей устойчивости нелинейной системы Гамильтона // Автоматика и телемеханика. — 2013. — Т. 8. — С. 47—64.
7. Батхин А. Б. Симметричные периодические решения задачи Хилла. I // Космические исследования. — 2013. — Т. 51, № 4. — С. 308—322.
8. Батхин А. Б. Симметричные периодические решения задачи Хилла. II // Космические исследования. — 2013. — Т. 51, № 6. — С. 497—510.

9. *Батхин А. Б.* Сеть семейств периодических орбит обобщенной задачи Хилла // ДАН. — 2014. — Т. 458, № 2. — С. 131–137.
10. *Батхин А. Б.* Граница множества устойчивости одной многопараметрической системы Гамильтона // Вестник ВолГУ. Серия 1. Математика. Физика. — 2014. — 5 (24). — С. 6–23. — DOI: 10.15688/jvolsu1.2014.5.1.
11. *Батхин А. Б.* Структура дискриминантного множества вещественного многочлена // Чебышевский сборник (Тула). — 2015. — Т. 16, № 2. — С. 23–34.
12. *Батхин А. Б., Брюно А. Д.* Исследование одной вещественной алгебраической поверхности // Программирование. — 2015. — № 2. — С. 7–17.
13. *Батхин А. Б.* Параметризация дискриминантного множества вещественного многочлена // Программирование. — 2016. — Т. 42, № 2. — С. 8–21.
14. *Батхин А. Б.* Одно вещественное многообразие с краем и его глобальная параметризация // Программирование. — 2017. — № 2. — С. 17–27.
15. *Батхин А. Б.* Параметризация множества, определяемого обобщенным дискриминантом многочлена // Программирование. — 2018. — № 2. — С. 5–17.
16. *Батхин А. Б.* Вычисление резонансного множества многочлена при ограничениях на коэффициенты // Программирование. — 2019. — № 2. — С. 6–15. — DOI: 10.1134/S0132347419020043.
17. *Батхин А. Б.* Бифуркации периодических решений системы Гамильтона с дискретной группой симметрий // Программирование. — 2020. — Т. 46, № 2. — С. 14–29. — DOI: 10.31857/S0132347420020041.
18. *Брюно А. Д., Батхин А.* Алгоритмы и программы вычисления корней многочлена от одной или двух неизвестных // Программирование. — 2021. — № 5. — С. 22–43. — DOI: 10.31857/S0132347421050046.

19. *Bruno A. D., Batkhin A. B.* Survey of Eight Modern Methods of Hamiltonian Mechanics // Axioms. — 2021. — Vol. 10, no. 4. — DOI: 10.3390/axioms10040293. — URL: <https://www.mdpi.com/2075-1680/10/4/293>.

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. В совместных работах по исследованию устойчивости многопараметрической системы Гамильтона, в разработку алгоритма асимптотического разложения решений алгебраического уравнения вклад автора в получение и в интерпретацию полученных результатов был равен вкладу других соавторов, а само решение задач и соответствующие вычисления были выполнены диссертантом лично в процессе научной деятельности. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причём вклад диссертанта был определяющим. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 6-ти глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 266 страниц, из них 249 страница текста, включая 50 рисунков. Библиография включает 161 наименование на 17 страницах.

Рассмотрим здесь подробнее структуру глав диссертации. Результаты, полученные и доказанные автором, в тексте отмечены как теоремы, леммы и гипотезы. Аналогичные утверждения, доказанные другими авторами, отмечены как утверждения с указанием соответствующей ссылки.

В главе 1 рассматриваются уравнения задачи Хилла, их свойства и предельные варианты. Применяется метод сингулярных порождающих решений, с его помощью описывается множество порождающих решений задачи Хилла в форме *порождающих последовательностей*, составленных из дуг-решений. Затем исследуются свойства порождающих последовательностей и на их основе

конструируется **Алгоритм I** вычисления семейства симметричных периодических решений по её порождающей последовательности. Результаты опубликованы в [7; 8].

В главе 2 исследуется структура фазового потока системы Гамильтона, допускающей дискретную группу симметрий с двумя образующими (четверная группа Клейна). Рассматриваются сценарии появления периодических решений второго рода по Пуанкаре в окрестности критических двойко симметричных периодических решений. Далее приводится обзор новых семейств периодических орбит, полученных с использованием Алгоритма I главы 1. Рассмотренные семейства интересны тем, что содержат орбиты, которые могут быть использованы для моделирования квазиспутниковых траекторий и для проектирования одноимпульсных перелётов в окрестность коллинеарных точек либрации L_1 , L_2 , а также для перелётов между ними. Результаты опубликованы в [8; 17].

В главе 3 приводится некоторый вариант задачи Хилла, названный *обобщённой задачей Хилла*. Показано, что для этого обобщения известные семейства периодических решений продолжаются через свои порождающие последовательности до семейств задачи, в которой потенциал притяжения центрального тела заменён потенциалом отталкивания. Это позволяет рассматривать все известные семейства периодических орбит обобщённой задачи в виде единой сети. Оказалось, что семейства двойко симметричных орбит образуют в определённом смысле «скелет» такой сети периодических решений, поскольку многие другие семейства пересекаются с этими семействами, разделяя общие орбиты с различными целыми локальными кратностями. Результаты опубликованы в [9; 19].

Глава 4 носит вспомогательный характер, хотя содержит важные для дальнейшего исследования результаты. В ней обсуждаются методы исследования так называемого *дискриминантного множества* $\mathcal{D}(f_n)$ многочлена f_n . Это множество во многих случаях определяет границу области устойчивости системы Гамильтона, линеаризованной в окрестности ПР. Предлагается конструктивный

алгоритм вычисления полиномиальной параметризации всех компонент дискриминантного множества, в том числе гиперповерхности коразмерности 1, которая делит пространство коэффициентов многочлена на области с одинаковым числом его вещественных корней. В случае, когда нельзя построить явную параметризацию дискриминантного множества $\mathcal{D}(f_n)$ в силу сложной зависимости между коэффициентами многочлена и параметрами исходной задачи предлагается алгоритм асимптотического разложения дискриминантного множества в виде рядов трёх видов в пространстве $\mathbb{R}^3$. Результаты опубликованы в [1; 4; 5; 11–16; 18].

В главе 5 рассматривается алгоритмическая схема исследования устойчивости линейной многопараметрической системы Гамильтона в терминах дискриминантного множества характеристического многочлена матрицы системы. Подробнее рассматривается класс статически неустойчивых гироскопических систем с четырьмя степенями свободы, для которых доказывается, что границей множества устойчивости в пространстве параметров не может быть многообразие с нулевыми корнями характеристического многочлена. Далее рассматривается задача об устойчивости в линейном приближении некоторой модельной механической системы статически неустойчивых шарнирно связанных гироскопов Лагранжа. Дается полное аналитическое описание её множества устойчивости в пространстве параметров размерности три. Выполнен анализ устойчивости в случае кратных собственных чисел. Результаты опубликованы в [1–5; 10].

Глава 6 посвящена исследованию устойчивости по Ляпунову двупараметрического семейства гироскопических задач. Вначале показано, как получить описание множества устойчивости в линейном приближении таких задач в виде, вычисленном в главе 5. Затем обсуждается метод исследования множества устойчивости по Ляпунову ПР многопараметрической нелинейной системы Гамильтона. С помощью этого метода вычисляется множество устойчивости по Ляпунову указанного выше семейства задач. Результаты опубликованы в [6; 10].

Часть I

Первый класс задач: семейства периодических решений

Первая часть диссертации посвящена поиску и исследованию семейств периодических решений неинтегрируемой системы Гамильтона, имеющей не более одного параметра. Восходящий к Пуанкаре подход к исследованию фазового потока неинтегрируемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) состоит в поиске некоторого «скелета», состоящего из иерархической структуры инвариантных многообразий различных размерностей. Наиболее простыми компонентами этой структуры являются положения равновесия и семейства периодических решений.

Один из способов вычисления периодических решений использует метод регулярных возмущений (см. [21] для общих систем ОДУ и [22, гл. VII, VIII] для систем Гамильтона). Он состоит в том, что для интегрируемой подсистемы находится множество общих решений, с помощью которых с учётом возмущения вычисляются порождающие решения — предельные положения решений возмущённой задачи при стремлении возмущения к нулю.

Другой способ поиска периодических решений — метод сингулярных возмущений, когда порождающие решения возмущённой задачи уже не являются решениями предельной, а получаются в результате «склеивания» дуг-решений вблизи особой точки системы ОДУ (см. [23—25] для порождающих решений ограниченной задачи трёх тел или [26] для уравнения Белецкого). Этот метод не является универсальным ибо требует в каждом случае тщательного согласования дуг-решений.

Здесь для нахождения предельных задач используются методы степенной геометрии, адаптированные для гамильтоновых систем [27, Гл. IV]. С их помощью определяется не только предельная интегрируемая задача, но и соответствующее степенное преобразование, приводящее к появлению малого параметра.

В качестве модельного примера такой системы выбрана задача Хилла и её некоторые обобщения. Задача Хилла в её классической постановке имеет важное прикладное значение, поскольку описывает движение спутника (безмассового объекта) в окрестности меньшего из двух активных тел (Земли), движущихся

вокруг общего центра масс. На сегодняшний день эта задача имеет множество вариантов, учитывающих трёхмерность [28–32], эллиптичность траекторий активных масс [33; 34], несферичность гравитирующих масс [35; 36], наличие радиационного давления и другие эффекты [37; 38]. Однако все эти разновидности задачи используют информацию о семействах периодических решений классического варианта задача Хилла.

Задача Хилла имеет многочисленные применения для анализа эволюции орбит естественных спутников (см., например, [39–42]), для проектирования миссий космических аппаратов [43–45], а также в динамике звёздных кластеров [46].

Принципиальное отличие задачи Хилла от знаменитой ограниченной задачи трёх тел состоит в отсутствии малого параметра в уравнениях движения и наличие у них дополнительной дискретной симметрии. Это, с одной стороны, создаёт дополнительные трудности для поиска и анализа семейств периодических решений, но, с другой стороны, позволяет провести определённую классификацию этих семейств.

В главе 1 рассматриваются уравнения задачи Хилла, их свойства и предельные варианты. Применяется метод сингулярных порождающих решений, с его помощью описывается множество порождающих решений задачи Хилла в форме *порождающих последовательностей*, составленных из дуг-решений. Затем исследуются свойства порождающих последовательностей и на их основе конструируется **Алгоритм I** вычисления семейства симметричных периодических решений по её порождающей последовательности.

В главе 2 исследуется структура фазового потока системы Гамильтона, допускающей дискретную группу симметрий с двумя образующими (четверная группа Клейна). Рассматриваются сценарии появления периодических решений второго рода по Пуанкаре в окрестности критических двояко симметричных периодических решений. Далее приводится обзор новых семейств периодических орбит, полученных с использованием Алгоритма I главы 1. Рассмотренные се-

мейства интересны тем, что содержат орбиты, которые могут быть использованы для моделирования квазиспутниковых траекторий и для проектирования одноимпульсных перелётов в окрестность коллинеарных точек либрации L_1 , L_2 , а также для перелётов между ними.

В главе 3 приводится некоторый вариант задачи Хилла, названный *обобщённой задачей Хилла*. Показано, что для этого обобщения известные семейства периодических решений продолжаются через свои порождающие последовательности до семейств задачи, в которой потенциал притяжения центрального тела заменён потенциалом отталкивания. Это позволяет рассматривать все известные семейства периодических орбит обобщённой задачи в виде единой сети. Оказалось, что семейства двояко симметричных орбит образуют в определённом смысле «скелет» такой сети периодических решений, поскольку многие другие семейства пересекаются с этими семействами, разделяя общие орбиты с различными целыми локальными кратностями.

Глава 1

Задача Хилла и её предельные случаи

Задача Хилла представляет собой пример неинтегрируемой системы Гамильтона с двумя степенями свободы без параметров. В этой главе рассматривается вывод уравнений задачи, их основные свойства. Методами степенной геометрии находятся её предельные задачи. С их помощью вычисляются сингулярные порождающие решения в виде последовательностей дуг-решений, названных порождающими последовательностями. Доказываются свойства этих последовательностей, с помощью которых строится алгоритм вычисления семейства симметричных периодических решений по порождающей последовательности.

1.1. Уравнения задачи Хилла

Задача Хилла является некоторым предельным случаем *ограниченной задачи трех тел* (ОЗТТ) [47] и используется для исследования динамики тела «нулевой» массы (спутника) в окрестности меньшего из двух тяготеющих тел. Если два массивных тела равномерно вращаются по круговым орбитам относительно общего центра масс, то задача называется *круговой*, если движутся по эллипсам, то, соответственно, *эллиптической*. Если спутник движется в плоскости тяготеющих тел, то задача называется *плоской*.

Задача Хилла первоначально была предложена Джорджем Хиллом (George Hill) для построения теории движения Луны [48] в системе Солнце–Земля–Луна. Он получил приближенные периодические решения в виде тригонометрических рядов, которые использовал как промежуточные решения для своей теории движения Луны. Хилл существенно использовал идеи Леонарда Эйлера, изложенные в его трактате “THEORIA MOTUUM LUNAE NOVA METHODO PER” TRACTATA” объёмом 790 страниц, который был написан и издан в Санкт-

Петербурге в 1772 г., а переведен на русский язык академиком А.Н. Крыловым в 1934 г. [49]. Подробнее о роли задачи Хилла в построении теории движения Луны см. в [50].

Большой вклад в исследование периодических решений плоской задачи Хилла внес Мишель Энон (Michel Hénon)*. В работах [28; 39; 51] он обобщил результаты, полученные ранее численно, дал описание основных семейств периодических решений, а также исследовал их вертикальную устойчивость. В последних работах [52; 53] Энон применил метод порождающих решений, изложенный в монографии [24], в контексте плоской ОЗТТ к изучению периодических решений плоской задачи Хилла и описал новые семейства периодических решений, полученные методом «грубой силы».

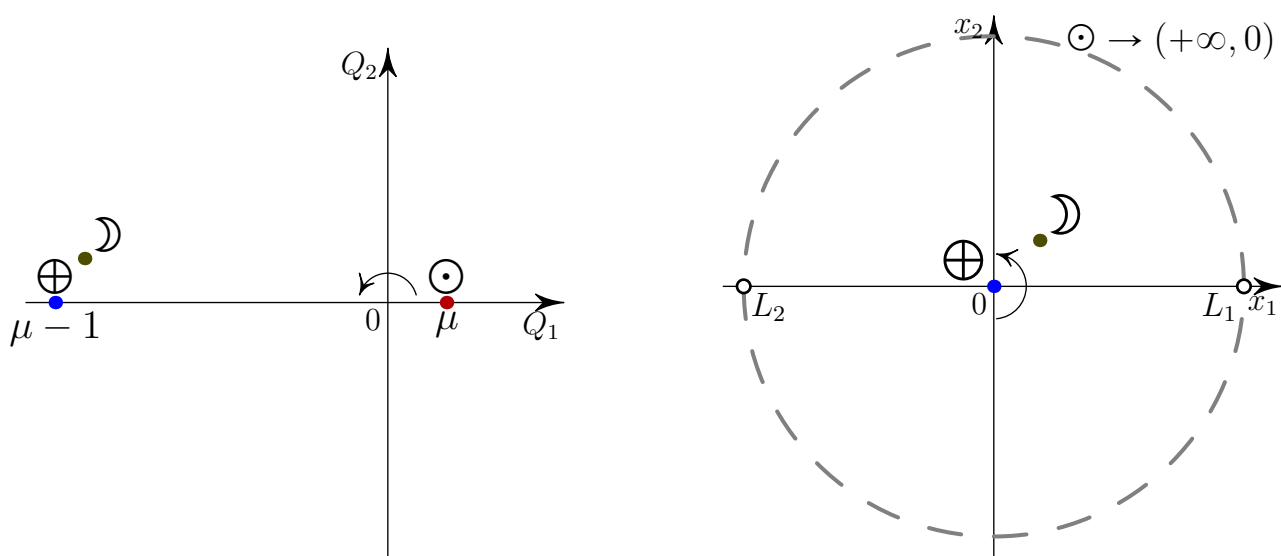
Укажем ещё некоторые работы, в которых проводилось исследование периодических решений плоской круговой задачи Хилла. Перко, используя технику согласования решений вблизи особой точки [54], доказал существование периодического решения первого вида [55], а также счётного числа семейств периодических решений второго вида [56] в задаче Хилла. К сожалению, предложенные в [55; 56] асимптотики начальных условий и периодов орбит оказались непригодными для продолжения семейств периодических решений. В работе [57] дано качественное описание глобальной динамики задачи Хилла, а также схематично описано большое число семейств периодических решений для случая $C > 0$. Для апробации метода поиска периодических орбит в работе [58] частично исследованы 31 семейство периодических решений, взаимодействующих с семейством f обратных однооборотных орбит. В монографии [59] численно исследовано на устойчивость более 50-ти семейств плоских периодических орбит.

Обычно уравнения движения задачи Хилла получают либо из уравнений общей задачи трёх тел, либо из уравнений ОЗТТ с помощью *преобразования Хилла* с последующим предельным переходом $\mu \rightarrow 0$, где μ — массовый параметр в ОЗТТ (см., [47, § 10.4], [60]). Более эффективно вывод уравнений дви-

* Иногда его фамилия транслитерируется как Хенон.

жения осуществляется с использованием гамильтонова формализма, когда преобразованиям подвергаются не исходные уравнения, а функция Гамильтона. В монографии [59, §3.2] гамильтониан пространственной задачи Хилла получен из гамильтониана ОЗТТ с помощью канонических преобразований. В [23] гамильтониан плоской, а в [61] гамильтониан пространственной задач Хилла получены из гамильтониана ОЗТТ как результат укорочения, соответствующего гиперграницы носителя функции Гамильтона ОЗТТ в пространстве показателей степеней фазовых переменных и массового параметра (см. [27, гл. IV, § 4]).

Рассмотрим вывод канонических уравнений движения плоской круговой задачи Хилла из уравнений движения ОЗТТ. Пусть два активных массивных тела (Солнце и Земля) массами $1 - \mu$ и μ , $\mu < 1/2$, равномерно вращаются вокруг общего центра масс с угловой скоростью 1. Единицы измерений выбраны так, что расстояние между телами равно единице, период обращения равен 2π , тогда гравитационная постоянная также равна 1.



а) ОЗТТ при значении $\mu = 0.15$.

б) Задача Хилла.

Рис. 1.1. Положение тел в ОЗТТ и задаче Хилла.

Перейдём в равномерно вращающуюся (синодическую) систему координат, начало которой совпадает с центром масс, а сами тела находятся в точках на оси

абсцисс с координатами μ и $\mu - 1$ соответственно (см. рис. 1.1).

В этой системе координат функция Лагранжа пассивного тела (Луны) имеет вид

$$L_{\text{РТВР}} = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{Q}}, \dot{\mathbf{Q}}) - V_{\text{РТВР}} (\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}).$$

Здесь $V_{\text{РТВР}} (\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}})$ — обобщённый потенциал, состоящий из четырёх частей: потенциала гироскопических (кориолисовых сил), потенциала центробежных сил инерции и двух ньютоновых потенциалов активных тел

$$V_{\text{РТВР}} (\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) = \dot{\mathbf{Q}}^\top K_0 \mathbf{Q} + \frac{1}{2} (\mathbf{Q}, \mathbf{Q}) - \frac{1 - \mu}{\rho_1} - \frac{\mu}{\rho_2},$$

где $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2)$ — вектор обобщённых координат, K_0 — кососимметричная матрица $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\rho_1^2 = (Q_1 - \mu)^2 + Q_2^2$, $\rho_2^2 = (Q_1 + 1 - \mu)^2 + Q_2^2$.

После преобразования Лежандра гамильтониан ОЗТТ в синодической системе отсчёта запишется в виде [47, гл. 7]

$$H_{\text{РТВР}}(\mathbf{Z}) = \frac{1}{2} (\mathbf{P}, \mathbf{P}) + \mathbf{P}^\top K_0 \mathbf{Q} - \frac{1 - \mu}{\rho_1} - \frac{\mu}{\rho_2},$$

где $\mathbf{P} = (P_1, P_2)$ — вектор обобщённых импульсов, $\mathbf{Z} = (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ — фазовый вектор. Применим преобразования Хилла, суть которого состоит в переносе начала координат в центр меньшего из двух массивных тел и такого масштабирования координат и скоростей (импульсов), при котором радиальное поле большего из тел становится плоско-параллельным.

Такое каноническое преобразование с валентностью $\mu^{2/3}$ задаётся производящей функцией

$$S(\mathbf{P}, \mathbf{x}) = (1 - \mu) \left(\mu^{-2/3} P_1 - \mu^{-1/3} x_2 \right) - \mu^{-1/3} (\mathbf{P}, \mathbf{x}).$$

Здесь $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ — новые векторы координат и импульсов.

Получаем следующую замену координат

$$\begin{aligned} Q_1 &= \mu^{1/3} x_1 + \mu - 1, & P_1 &= \mu^{1/3} y_1 \\ Q_2 &= \mu^{1/3} x_2, & P_2 &= \mu^{1/3} y_2 + \mu - 1. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Преобразование (1.1) переносит Солнце в точку $(\mu^{-1/3}, 0)$, Землю в начало координат, а фазовые переменные масштабируются с коэффициентом $\mu^{-1/3}$. Новая функция Гамильтона $\tilde{H}_{\text{RTBP}}$ может быть представлена в виде ряда по степеням малого параметра $\mu^{1/3}$ с точностью до постоянного слагаемого $\frac{(\mu-1)(3-\mu)}{2}$:

$$\mu^{2/3} \tilde{H}_{\text{RTBP}} = \mu^{2/3} H_{\text{Hill}}(\mathbf{z}) + \mu H_3(\mathbf{z}) + \mu^{4/3} H_4 + \mu^{5/3} H_5 + \mu^2 H_6 + o(\mu^2), \quad (1.2)$$

где

$$\begin{aligned} H_{\text{Hill}} &= \frac{1}{2} (y_1^2 + y_2^2) + x_2 y_1 - x_1 y_2 + \frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{r} - \frac{3}{2} x_1^2, \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \\ H_3 &= -x_1^3 + \frac{3}{2} x_1 x_2^2, \\ H_4 &= x_1^4 - 3x_1^2 x_2^2 + \frac{3}{8} x_2^4, \\ H_5 &= -\frac{15}{8} x_1 x_2^4 + 5x_1^3 x_2^2 - x_1^5, \\ H_6 &= -x_1^6 + \frac{15}{2} x_1^4 x_2^2 - \frac{45}{8} x_1^2 x_2^4 + \frac{5}{16} x_2^6. \end{aligned}$$

Сокращая обе части выражения (1.2) на $\mu^{2/3}$ и выполняя предельный переход $\mu \rightarrow 0$, получаем функцию Гамильтона плоской круговой задачи Хилла, обозначаемую далее $H(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Она может быть представлена в виде суммы двух функций — гамильтониана H_{Kepler} задачи Кеплера в синодической системе координат

$$H_{\text{Kepler}} = \frac{1}{2} (\mathbf{y}, \mathbf{y}) + \mathbf{y}^\top K_0 \mathbf{x} + \frac{1}{2} (\mathbf{x}, \mathbf{x}) - \frac{1}{r}$$

и квадратичной части потенциала поля Солнца $V_{\text{Sol}} = -\frac{3}{2} x_1^2$.

Итак, функция Гамильтона плоской круговой задачи Хилла есть

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} (y_1^2 + y_2^2) + x_2 y_1 - x_1 y_2 - x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2 - \frac{1}{r}. \quad (1.3)$$

где $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ — вектор координат, а $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ — вектор канонически сопряженных импульсов.

Канонические уравнения, определяемые гамильтонианом (1.3), имеют вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1 + x_2, & \dot{y}_1 = y_2 + 2x_1 - \frac{x_1}{r^3}, \\ \dot{x}_2 = y_2 - x_1, & \dot{y}_2 = -y_1 - x_2 - \frac{x_2}{r^3}. \end{cases} \quad (1.4)$$

Уравнения движения (1.4) обладают единственным первым интегралом, который традиционно записывается в форме *интеграла Якоби-Пенлеве* в переменных $(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$:

$$\mathcal{J} \stackrel{\text{def}}{=} 3x_1^2 + \frac{2}{r} - \dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2 = C, \quad (1.5)$$

где C — константа Якоби. Значение гамильтониана H связано со значением константы Якоби соотношением

$$H = -\frac{C}{2}. \quad (1.6)$$

Основные отличия уравнений движения задачи Хилла от уравнений движения ОЗТТ являются:

- 1) отсутствие зависимости от массового параметра μ ;
- 2) наличие более широкой группы линейных автоморфизмов, что приводит к появлению дополнительных симметрий решений.

Рассмотрим этот вопрос немного подробнее.

Уравнения задачи Хилла (1.4) инвариантны относительно конечной группы линейных преобразований фазовых переменных $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и времени t . Образующие этой группы обозначим Σ_1 и Σ_2 , их действие на расширенном фазовом пространстве определяется соотношениями

$$\Sigma_1 : (t, x_1, x_2, y_1, y_2) \rightarrow (-t, x_1, -x_2, -y_1, y_2),$$

$$\Sigma_2 : (t, x_1, x_2, y_1, y_2) \rightarrow (-t, -x_1, x_2, y_1, -y_2).$$

Композицию преобразований Σ_1 и Σ_2 обозначим $\Sigma_{12} \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma_1 \circ \Sigma_2 = \Sigma_2 \circ \Sigma_1$, т. е. Σ_{12} определяет центральную симметрию в фазовом пространстве без обращения времени:

$$\Sigma_{12} : (t, x_1, x_2, y_1, y_2) \rightarrow (t, -x_1, -x_2, -y_1, -y_2).$$

Понимание структуры семейств периодических решений задачи Хилла невозможно без учёта симметрий уравнений движения относительно преобразований Σ_1 , Σ_2 и Σ_{12} . Все периодические решения задачи Хилла могут быть разделены на 3 группы в зависимости от того, как они меняются под действием указанных преобразований:

несимметричные решения, которые под действием любого из указанных преобразований переходят в другие решение;

однократно симметричные решения, которые под действием одного из указанных преобразований переходят сами в себя, при этом два других преобразования позволяют получить еще одно новое решение;

двукратно симметричные решения, инвариантные относительно любого из указанных преобразований.

Периодические решения уравнений движения, определяемые автономным гамильтонианом, не являются изолированными, а образуют семейства, число параметров которых равны числу независимых первых интегралов системы канонических уравнений. В случае задачи Хилла все семейства периодических решений однопараметрические, а в качестве параметра может быть выбрана любая из характеристик периодического решения (период, одна из координат начального условия), но более адекватным параметром семейства периодических решений будет значение первого интеграла — интеграла Якоби-Пенлеве (1.5) (или значение функции Гамильтона H). Все семейства периодических решений могут быть условно разделены на несколько групп в зависимости от того, как они ведут себя при продолжении по параметру C .

Замкнутые семейства существуют только на некотором конечном интервале значений параметра C .

Полуоткрытые семейства, существующие на полубесконечном интервале значений параметра C , которые продолжаются либо до стягивания в точку, либо до окончания на другом семействе, либо до достижения экстремума по C .

Открытые семейства, существующие при всех значениях C .

Поскольку все такие семейства продолжаются по параметру C до своих естественных концов, то все они являются *натуральными* (см. [62, п. 1.3]).

Интерес к задаче Хилла вызван не в последнюю очередь тем, что ее периодические решения могут быть продолжены до периодических решений как ОЗТТ, так и общей задачи трех тел. В [63] доказано, что Σ_1 -симметричное се-

мейство периодических решений задачи Хилла может быть продолжено до однопараметрического симметричного семейства ОЗТТ. Там же приведены поправки первого порядка к начальным условиям периодического решения. В [64, § 11.2] доказаны утверждения о том, что любые периодические решения задачи Хилла с периодом, не кратным величине 2π , могут быть продолжены до относительных периодических решений общей задачи трёх тел.

1.1.1. Области допустимого движения и кривая нулевой скорости

Первый интеграл (1.5) задачи Хилла накладывает ограничение на возможные области движения в конфигурационном пространстве. При фиксированном значении константы C движение может осуществляться в области

$$3x_1^2 + 2/r - C \geq 0, \quad (1.7)$$

называемой *областью Хилла* [65, гл. 2, § 5]. Очевидно, что равенство нулю в (1.7) достигается только при условии равенства нулю скорости тела, поэтому при фиксированном значении C плоскую кривую, задаваемую неявным уравнением $3x_1^2 + 2/r - C = 0$, называют *кривой нулевой скорости*. Эта кривая при $C = C_{\text{lib}} = 3^{4/3} \approx 4.326748710$ имеет две особые точки, соответствующие коллинеарным точкам либрации $L_{1,2}$ с координатами $(\pm 3^{-1/3}, 0)$. График кривой нулевой скорости симметричен относительно координатных осей и при $C > 0$ имеет две вертикальные асимптоты $x = \pm \sqrt{C/3}$. При $C \geq C_{\text{lib}}$ график пересекает ось OX и делит конфигурационное пространство на три несвязные области: центральную, которая представляет собой область финитного движения спутника, и две области инфинитного движения. При $C \rightarrow +\infty$ центральная область финитного движения ограничена окружностью с радиусом $R_{\text{fin}} \approx 2/C$, т. е. при $C \gg C_{\text{lib}}$ периодические орбиты могут существовать лишь в малой окрестности начала координат. При $C \leq 0$ движение возможно во всем конфигурационном пространстве. Кривая Хилла и области Хилла показаны на рис. 1.2.

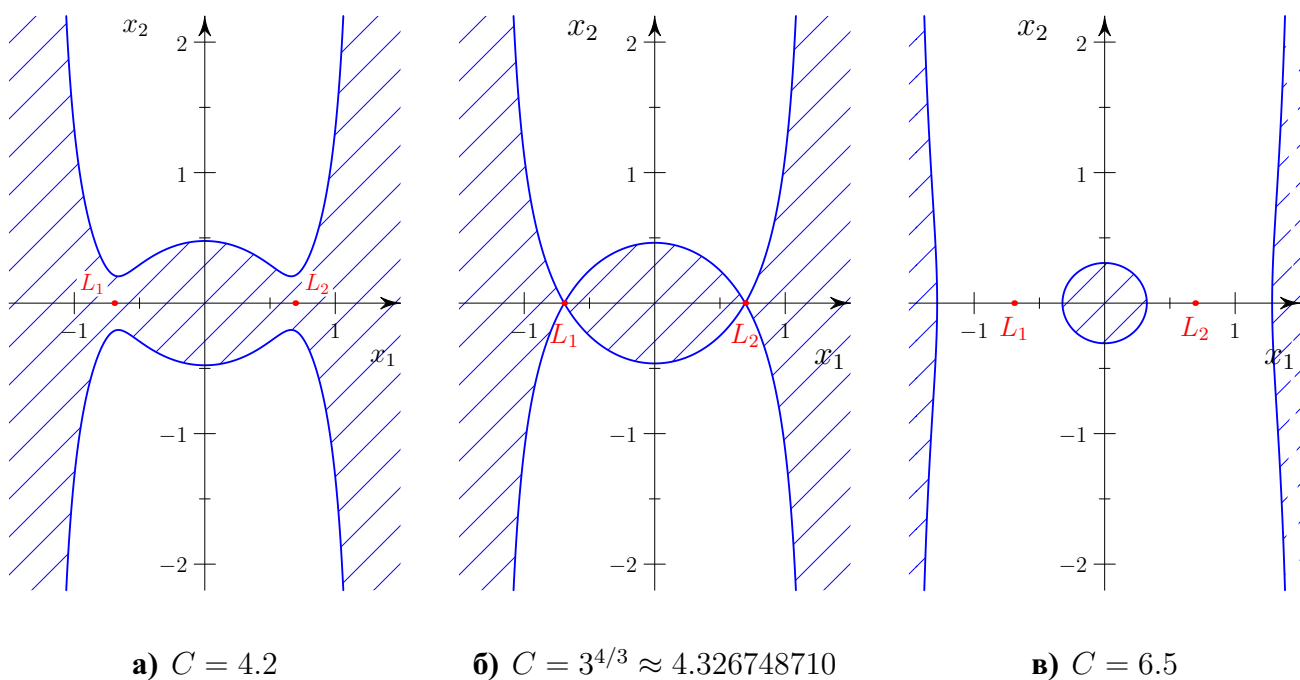


Рис. 1.2. Кривая нулевой скорости и области Хилла (показаны штриховкой) для различных значений C .

1.1.2. Предельные варианты задачи Хилла

Поскольку уравнения движения задачи Хилла неинтегрируемы (см. [66]) и не содержат малый параметр, то для исследования семейств периодических решений удобно использовать порождающие решения предельных задач, которые могут быть устроены существенно проще. В частности, как будет показано ниже, для задачи Хилла её предельные задачи являются интегрируемыми. Более того, выделение предельных задач позволяет естественным образом ввести малый параметр и применить методы теории возмущений для исследования решений исходной задачи.

Для получения канонических уравнений предельных задач используем гамильтоновы укорочения функции Гамильтона (1.3). Это было сделано в [61, раздел 2] для случая пространственной задачи Хилла, поэтому лишь кратко опишем методику получения гамильтоновых укорочений для плоской задачи Хилла. Отметим, что подробнее эта техника для функций Гамильтона описана в [27, гл. IV], а ее применение к ОЗТТ в плоском и пространственном вариантах дано

в работах [27; 61; 62].

Каждому моному $cx_1^{r_1}x_2^{r_2}y_1^{r_3}y_2^{r_4}$ в функции Гамильтона (1.3) поставим в соответствие его векторный показатель степени $(r_1, r_2, r_3, r_4) \in \mathbb{R}^4$. Тогда носитель S_1 гамильтониана (1.3) состоит из 6-ти точек

$$\mathbf{R} = \{(0, 0, 2, 0), (0, 0, 0, 2), (0, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (2, 0, 0, 0), (0, 2, 0, 0)\}$$

и отрезка $\mathbf{I}$, соединяющего точки $(-1, 0, 0, 0)$ и $(0, -1, 0, 0)$. Этот отрезок есть носитель члена $1/r$.

Выполним проекцию π точек носителя $S_1 = \mathbf{R} \cup \mathbf{I}$ из пространства $\mathbb{R}^4$ в пространство $\mathbb{R}^2$ в соответствии с формулой

$$\pi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (r_1, r_2, r_3, r_4) \mapsto (r_1 + r_2, r_3 + r_4).$$

Тогда множество

$$\pi\mathbf{R} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{R}'' = \{(0, 2), (1, 1), (2, 0)\},$$

а отрезок $\mathbf{I}'' = \pi\mathbf{I}$ переводится в точку $(-1, 0)$.

Замыкание выпуклой оболочки $S_1'' = \mathbf{R}'' \cup \mathbf{I}''$ есть многоугольник Ньютона $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ (см. рис. 1.3), граница которого состоит из одномерных обобщённых граней (рёбер) $\Gamma_j^{(1)}$, где j — номер грани.

Каждой грани $\Gamma_j^{(d)}$ ставится в соответствие укороченная функция $\hat{H}_j^{(d)}$, составленная из тех членов гамильтониана (1.3), точки которых принадлежат грани $\Gamma_j^{(d)}$. Согласно теореме 1.1 из [27, гл. IV, § 1], функция $\hat{H}_j^{(d)}$ есть функция Гамильтона, которая является первым приближением гамильтониана (1.3) для разных областей фазового пространства $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Эти области определяются по нормальным конусам $\mathbf{U}_j^{(d)}$ соответствующих граней, которые, в свою очередь, восстанавливаются по нормальным конусам $\mathbf{U}_j^{(d)}$ проекций $\Gamma_j^{(d)}$. Для последующего анализа нам потребуются только такие гамильтоновы укорочения $\hat{H}_j^{(d)}$, нормальные конусы которых попадают в один из двух подходящих конусов за-

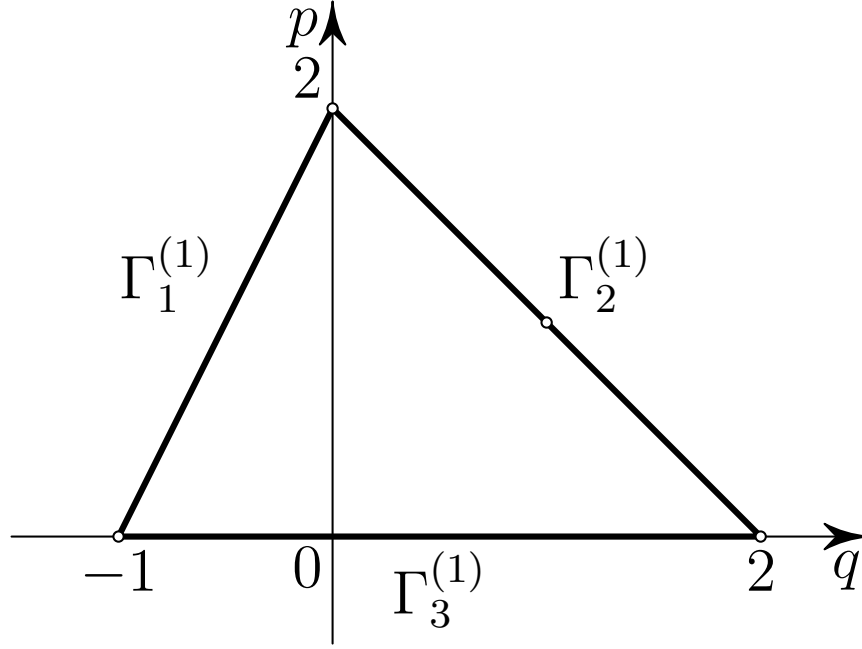


Рис. 1.3. Проекция многоугольника Ньютона гамильтониана задачи Хилла.

дачи (см. [27, гл. I, § 6]):

$$\mathbf{K}_1 = \{W \in \mathbb{R}_*^4 : w_1 < 0, w_2 < 0\} \text{ для случая } \mathbf{x} \rightarrow 0,$$

$$\mathbf{K}_2 = \{W \in \mathbb{R}_*^4 : w_1 > 0, w_2 > 0\} \text{ для случая } \mathbf{x} \rightarrow \infty.$$

Для задачи Хилла имеется два нетривиальных предельных случая. Первый даёт описание движения в малой окрестности начала координат, т. е. при $\mathbf{x} \rightarrow 0$, второй описывает движение вдали от начала координат, т. е. при $\mathbf{x} \rightarrow \infty$. В каждом из предельных случаев существует такая каноническая замена фазовых координат (и, возможно, времени), при которой гамильтониан предельной задачи становится невозмущенной частью исходной функции Гамильтона.

Рассмотрим ребро $\Gamma_1^{(1)}$ с нормалью $N_1 = (-2, 1)$, содержащее точки $(-1, 0)$ и $(0, 2)$. Ему соответствует гамильтоново укорочение $\hat{H}_1^{(1)} = (y_1^2 + y_2^2) / 2 - 1/r$, которое есть функция Гамильтона интегрируемой задачи Кеплера в неподвижной (сидерической) системе координат. Этот гамильтониан даёт описание движения при $\mathbf{x} \rightarrow 0$, т. е. вблизи начала координат. Применяя каноническое преоб-

разование с заменой независимой переменной

$$\mathbf{x} = \varepsilon_1 \mathcal{X}, \quad \mathbf{y} = \varepsilon_1^{-1/2} \mathcal{Y}, \quad t = \varepsilon_1^{3/2} s, \quad \varepsilon_1 \ll 1 \quad (1.8)$$

к функции Гамильтона (1.3), получим

$$H_1 = H_{\text{Kepler}} + \varepsilon_1^{3/2} (\mathcal{X}_2 \mathcal{Y}_1 - \mathcal{X}_1 \mathcal{Y}_2) + \varepsilon_1^3 (-\mathcal{X}_1^2 + \mathcal{X}_2^2/2), \quad (1.9)$$

где $H_{\text{Kepler}} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{H}_1^{(1)}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. Интеграл Якоби (1.5) перепишется в виде

$$\varepsilon_1^{-1} (2/\rho - (\mathcal{X}_1')^2 - (\mathcal{X}_2')^2) + 3\varepsilon_1^2 \mathcal{X}_1^2 = C,$$

где $\rho = \sqrt{\mathcal{X}_1^2 + \mathcal{X}_2^2}$. Здесь штрих ' обозначает дифференцирование по новой независимой переменной s . Полагая $\varepsilon_1 = |C|^{-1}$, получаем, что первая предельная задача соответствует случаю $C \rightarrow \infty$. Следовательно, задача Хилла представляется в виде регулярного по фазовым переменным возмущения интегрируемой задачи Кеплера, а порождающие решения следует искать среди периодических решений последней. Отметим, что задача Кеплера имеет периодические решения при условии, что ее интеграл энергии $h < 0$ ($C > 0$).

Рассмотрим отдельно случаи $C \rightarrow -\infty$ и $C \rightarrow +\infty$.

При $C \rightarrow -\infty$ значение h функции Гамильтона H_{Kepler} согласно (1.6) и (1.8) стремится к величине $1/2$, т.е. все решения невозмущенной задачи являются гиперболическими, а, значит, непериодическими. Поскольку большая полуось a гиперболы связана с интегралом энергии h соотношением $a|h| = 1/2$, то в пределе при $C \rightarrow -\infty$ имеем $a = 1$.

Плоское движение по гиперболе определяется четырьмя параметрами: большой полуосью a , эксцентриситетом e , аргументом перицентра ϖ и моментом прохождения перицентра s_p (см., например, [67, часть II, гл. 2]). Уравнения движения записываются с помощью эксцентрической аномалии H следующим образом:

$$\begin{aligned} \xi &= a(e - \operatorname{ch} H), & \eta &= a\sqrt{e^2 - 1} \operatorname{sh} H, \\ s - s_p &= \varepsilon' a^{3/2} (e \operatorname{sh} H - H), & \varepsilon' &= \pm 1, \\ \mathcal{X}_1 &= \xi \cos \varpi - \eta \sin \varpi, & \mathcal{X}_2 &= \xi \sin \varpi + \eta \cos \varpi. \end{aligned}$$

Тогда $\rho = a(e \operatorname{ch} H - 1)$, а компоненты $(\mathcal{X}'_1, \mathcal{X}'_2)$ вектора обобщённой скорости задаются формулами

$$\begin{aligned}\xi' &= -\frac{\varepsilon' a^{1/2} \operatorname{sh} H}{\rho}, & \eta' &= \frac{\varepsilon' \sqrt{a(e^2 - 1)} \operatorname{ch} H}{\rho}, \\ \mathcal{X}'_1 &= \xi' \cos \varpi - \eta' \sin \varpi, & \mathcal{X}'_2 &= \xi' \sin \varpi + \eta' \cos \varpi.\end{aligned}\quad (1.10)$$

При $C \rightarrow +\infty$ значение h функции Гамильтона H_{Kepler} стремится к величине $-1/2$, т. е. все решения невозмущенной задачи финитны (круговые или эллиптические) и, в силу свойств задачи Кеплера, являются периодическими. Это согласуется с описанием области Хилла в п. 1.1.1. Получаем, что первая предельная задача даёт описание периодического движения в центральной области финитного движения при $C \rightarrow +\infty$, и порождающие решения следует искать среди ее периодических орбит. Для однооборотных периодических решений это было сделано в [51, п. 6].

Рассмотрим ребро $\Gamma_2^{(1)}$ с нормалью $N_2 = (1, 1)$, содержащее точки $(0, 2)$, $(1, 1)$ и $(2, 0)$. Ему соответствует гамильтоново укорочение

$$\hat{H}_2^{(1)} = \frac{1}{2} (y_1^2 + y_2^2) + x_2 y_1 - x_1 y_2 - x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2. \quad (1.11)$$

Этот гамильтониан дает описание движения при $x \rightarrow \infty$, т. е. вдали от начала координат. Применяя каноническое преобразование с валентностью ε_2^{-2}

$$\mathbf{x} = \varepsilon_2 \mathbf{X}, \quad \mathbf{y} = \varepsilon_2 \mathbf{Y}, \quad (1.12)$$

к функции Гамильтона задачи Хилла, получим

$$H_2 = H_{\text{Henon}} + \varepsilon_2^{-3}/R, \quad R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}, \quad (1.13)$$

где $H_{\text{Henon}} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{H}_2^{(1)}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. Система канонических уравнений, определяемых гамильтонианом H_{Henon} , в переменных $(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})$ была представлена в [51] в виде

$$\ddot{X}_1 - 2\dot{X}_2 - 3X_1 = 0, \quad \ddot{X}_2 + 2\dot{X}_1 = 0. \quad (1.14)$$

А.Д. Брюно [27, Гл. IV, § 4], [68] назвал систему уравнений (1.14) *промежуточной задачей Энона*, которую здесь будем называть просто *задачей Энона*.

Отметим, что уравнения (1.14) использовались В.В. Белецким для описания носительного движения космонавта вблизи спутника, находящегося на круговой орбите [69, очерк 11, п. 3]. Заметим, что уравнения задачи Энона являются частным случаем уравнений Клохесси-Вилтшира [70], применяемых в работах по спутниковой навигации.

Интеграл Якоби (1.5) перепишется в виде

$$\varepsilon_2^2 \left(3X_1^2 - \dot{X}_1^2 - \dot{X}_2^2 \right) + \frac{2}{\varepsilon_2 R} = C. \quad (1.15)$$

Полагая $\varepsilon_2 = \sqrt{|C|}$, получаем, что вторая предельная задача с гамильтонианом (1.11) является предельным случаем задачи Хилла при $C \rightarrow \pm\infty$. Однако случай $C \rightarrow +\infty$ не подходит для исследования периодических решений в силу описанной выше области Хилла для $C \gg 1$ (см. рис. 1.2 в). Учитывая валентность преобразования (1.12) и соотношение (1.6), получаем, что $H_2 = -\text{sign } C/2$. Следовательно, при $C \rightarrow -\infty$ имеем $H_{\text{Henon}} = 1/2$, а, значит, все решения задачи Энона следует искать при фиксированном значении гамильтониана H_{Henon} , или, что равносильно, при значении интеграла Якоби $C = -1$.

Преобразование (1.12) при $\varepsilon_2 = \sqrt{|C|}$ было применено Перко [55; 56], а сама задача Энона с гамильтонианом (1.11) использовалась им для доказательства существования семейства f периодических решений первого вида и счётного числа семейств периодических решений второго вида в задаче Хилла.

Таким образом, задачу Хилла можно рассматривать как возмущение задачи Энона функцией с особенностью в начале координат. В этом случае порождающими решениями могут быть как регулярные решения задачи Энона, так и сингулярные, т. е. проходящие через особую точку возмущающей функции.

Укорочение, соответствующее ребру $\Gamma_3^{(1)}$ с нормалью $N_3 = (0, -1)$, несодержательно, поскольку не зависит от импульсов. В соответствии с [27, гл. IV, § 1] были исследованы все гамильтоновы укорочения функции (1.3), но только два из них, указанные выше, оказались пригодным для исследования периодических решений.

Далее здесь изучается задача Хилла как возмущение задачи Энона.

Результаты раздела 1.1 опубликованы в [7; 71].

1.2. Порождающие решения задачи Энона и их свойства

Пусть задана система канонических уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \partial \mathcal{H} / \partial \mathbf{y}, \quad \dot{\mathbf{y}} = -\partial \mathcal{H} / \partial \mathbf{x}, \quad (1.16)$$

которая определяется функцией Гамильтона $\mathcal{H}$ вида

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathcal{H}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon \mathcal{H}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (1.17)$$

где $\mathcal{H}_0$ — невозмущенная часть, определяющая интегрируемую систему канонических уравнений, а $\mathcal{H}_1$ — некоторое возмущение.

Определение 1.1. Пусть при значениях малого параметра $\varepsilon > 0$ имеется периодическое решение $(\mathbf{x}(t, \varepsilon), \mathbf{y}(t, \varepsilon))$ системы (1.16), которое непрерывно продолжается по ε . Тогда его предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ (если он существует) называется *порождающим периодическим решением*.

Отметим, что порождающее решение не обязано само быть периодическим решением уравнений предельной задачи, а может быть составлено из кусков решений, которые соединяются между собой в особых точках функции $H(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Порождающее решение называется *регулярным*, если не проходит через особые точки функции (1.17) и может быть найдено с помощью приведения гамильтониана задачи к нормальной форме вблизи него (см. [22, гл. II, VII]).

Итак, гамильтониан задачи Хилла может быть представлен в виде возмущения некоторой интегрируемой гамильтоновой системы — либо как возмущение задачи Кеплера (1.9), либо как возмущение задачи Энона (1.13).

Для ОЗТТ выделяют три вида порождающих периодических решений [24, п. 2.10], определения которых удобно дать в терминах расстояния от орбиты (т. е.

проекции решения на конфигурационное пространство гамильтоновой системы) до особой точки. Пусть ρ'_ε и ρ''_ε — наименьшее и наибольшее расстояния от особой точки до точек некоторой орбиты Ω_ε , соответственно, а ρ'_0 и ρ''_0 их пределы при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Определение 1.2. Предельная порождающая орбита Ω_0 называется орбитой первого вида, если $\rho'_0 > 0$.

Определение 1.3. Предельная порождающая орбита Ω_0 называется орбитой второго вида, если $\rho'_0 = 0$ и $\rho''_0 > 0$.

Определение 1.4. Предельная порождающая орбита Ω_0 называется орбитой третьего вида, если $\rho''_0 = 0$.

1.2.1. Общее решение задачи Энона

Промежуточная задача Энона интегрируема и была подробно исследована в [24; 51; 55; 56]. В [72] было построено каноническое преобразование $S_2(\mathbf{X}, \mathbf{P})$, приводящее гамильтониан (1.11) задачи Энона к нормальной форме

$$\tilde{H}_{\text{Henon}} = \frac{1}{2} (Q_1^2 + P_1^2) - \frac{3}{2} P_2^2, \quad (1.18)$$

где новые переменные $(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ связаны со старыми $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ соотношением

$$X_1 = Q_1 + 2P_2, \quad X_2 = Q_2 + 2P_1, \quad Y_1 = -P_1 - Q_2, \quad Y_2 = -P_2 - Q_1. \quad (1.19)$$

В гамильтониане (1.18) координата Q_2 циклическая, поэтому канонически сопряженный импульс P_2 является первым интегралом соответствующей системы канонических уравнений и в переменных $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ имеет вид

$$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} X_1 + Y_2 = \text{const}. \quad (1.20)$$

Поскольку новые переменные $\mathbf{Q}, \mathbf{P}$ «перемешивают» физические координаты и импульсы, то для интерпретации получаемых решений удобнее работать в исходных переменных.

Общее решение системы канонических уравнений, определяемой гамильтонианом (1.11), имеет вид

$$\begin{aligned} X_1 &= K_1 \cos t + K_2 \sin t + 2K_3, & X_2 &= -2K_1 \sin t + 2K_2 \cos t - 3K_3 t + K_4, \\ Y_1 &= K_1 \sin t - K_2 \cos t + 3K_3 t - K_4, & Y_2 &= -K_1 \cos t - K_2 \sin t - K_3, \end{aligned} \quad (1.21)$$

где $K_i, i = 1, \dots, 4$ — произвольные постоянные, а гамильтониан H_{Henon} (1.11) и первый интеграл $\mathcal{F}$ (1.20) будут равны соответственно

$$H_{\text{Henon}} = \frac{1}{2} (K_1^2 + K_2^2 - 3K_3^2) \text{ и } \mathcal{F} = K_3. \quad (1.22)$$

1.2.2. Порождающие решения первого вида

Порождающие решения первого вида — это периодические решения, не проходящие через особую точку — начало координат. Очевидно, что условие периодичности будет выполнено при $K_3 = 0$, а тогда орбита представляет собой эллипс с центром в точке $(0, K_4)$, с главными осями, параллельными осям координат и находящимися в отношении 1 : 2. Период движения T по орбите равен 2π . Начало отсчета времени можно выбрать так, что $K_2 = 0$, тогда первые интегралы (1.22) равны $H_{\text{Henon}} = K_1^2/2 = 1/2$, $\mathcal{F} = 0$, и, следовательно, $K_1 = 1$. Значит, семейство периодических решений первого вида запишется в виде

$$X_1 = \cos t, \quad X_2 = -2 \sin t + K_4, \quad Y_1 = \sin t - K_4, \quad Y_2 = -\cos t. \quad (1.23)$$

В [24, с. 5.3.1] показано, что из соображений симметрии порождающее решение должно быть Σ_1 -симметрично, что возможно лишь при $K_4 = 0$.

Докажем, что единственным порождающим решением первого вида является решение при $K_4 = 0$.

Для поиска порождающих решений первого вида применим классический метод в теории возмущений — метод приведения гамильтониана полной задачи к нормальной форме вблизи периодического решения невозмущённой задачи.

Схематично идея метода состоит в следующем.

- 1) Выбираются локальные координаты, т. е. такие координаты, в которых гамильтониан наиболее близок к квадратичной нормальной форме вблизи положения равновесия.
- 2) Выполняется процедура нормализации до определённого порядка.
- 3) На каждом шаге нормализации проверяются условия существования порождающего решения, и в случае их выполнения, вычисляются поправки первого порядка к начальным условиям и периоду.

Для формулировки условия существования порождающего решения воспользуемся результатами [22, гл. VII], где вычислялись порождающие решения ОЗТТ при малых значениях параметра μ . Следующий подпункт изложен в соответствии с § 1 главы VII указанной выше монографии.

Условие существования порождающего решения

Пусть система Гамильтона с двумя степенями свободы определяется функцией $H = H_0 + \varepsilon R$, где $H_0 = -y_1 + f(y_2)$, причём функции $f(y_2)$ и $R(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ аналитичны в некоторой области и R — двояко периодическая по координатам $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$.

При $\varepsilon = 0$ и $y_2 = 0$ система Гамильтона имеет аналитическое интегральное многообразие $\mathcal{M}$, расслоенное на инвариантные торы $\mathcal{T}(y_1^0)$, на которых движение имеет вид

$$y_1 = y_1^0, \quad y_2 = 0, \quad x_1 = x_1^0 - t, \quad x_2 = x_2^0 - Nt,$$

где $N = f'(0)$. Существует такая каноническая замена локальных координат [22, гл. II, VII]

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^* + \varepsilon \mathbf{J}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \varepsilon), \quad \mathbf{y} = \mathbf{y}^* + \varepsilon \mathbf{J}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \varepsilon) \quad (1.24)$$

многообразия $\mathcal{M}$, которая приводит исходную систему к гамильтоновой нормальной форме

$$\mathcal{H} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \mathcal{H}_k, \quad \mathcal{H}_k = \sum \mathcal{H}_{mn}(\mathbf{x}^*) e^{i(mx_1 + nx_2)},$$

причём H^* содержит только резонансные члены, для которых $-m + Nn = 0$.

Если $N = (p + q)/p$ — рациональное число, где $p > 0$ и q — взаимно простые целые числа, то торы $\mathcal{T}(y_1^0)$ расслаиваются на периодические решения, на которых нормализованный гамильтониан H^* зависит только от одной угловой переменной $\theta^* \stackrel{\text{def}}{=} x_1^* + N^{-1}x_2^*$. Нормализующее преобразование (1.24) в случае рационального N сходится на множестве $\mathcal{A}$, определяемом системой уравнений

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta^*} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y_1^*} = 0.$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ решения этой системы и есть порождающие решения, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta^*} = 0, \tag{1.25}$$

при этом поправки первого порядка к периоду T и к индексу устойчивости S порождающего решения определяются по формулам

$$T = T_0 + \varepsilon T_0 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y_1^*} + O(\varepsilon^2), \tag{1.26}$$

Выполним нормализацию гамильтониана (1.18) вблизи семейства (1.23) с помощью канонической замены переменных

$$Q_1 = \sqrt{2L} \cos \varphi, \quad P_1 = \sqrt{2L} \sin \varphi, \quad t = -\tau. \tag{1.27}$$

В результате, функция Гамильтона задачи Энона примет вид $\mathcal{H}_{\text{Henon}} = -L + 3P_2^2/2$, а семейство (1.23) задаётся уравнениями

$$\varphi = -\tau, \quad L = \frac{1}{2}, \quad Q_2 = A, \quad P_2 = 0. \tag{1.28}$$

На этом семействе возмущение $H_1 = -1/r$ гамильтониана H_{Henon} записывается в виде

$$\mathcal{H}_1(\tau, A, L, P_2)|_{L=1/2, P_2=0} = \frac{1}{\sqrt{3(\sin \tau - 2A/3)^2 + 1 - A^2/3}}.$$

Согласно формуле (1.25) порождающие решения задачи Энона должны удовлетворять условию

$$\frac{\partial [\mathcal{H}_1](A)}{\partial A} = 0, \text{ где } [\mathcal{H}_1](A) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{H}_1(A, \tau) d\tau. \quad (1.29)$$

Интеграл в формуле (1.29) был вычислен в [73; 74] и выражается через полный эллиптический интеграл первого рода $K(k)$:

$$[\mathcal{H}_1](A) = \begin{cases} \frac{2}{\pi\sqrt{4-A^2}} K(k), & k^2 = \frac{3-A^2}{4-A^2} \text{ при } A^2 \leq 3, \\ \frac{2}{\pi(1+\sqrt{A^2-3})} K(k), & k^2 = \frac{4\sqrt{A^2-3}}{(1+\sqrt{A^2-3})^2} \text{ при } A^2 > 3. \end{cases} \quad (1.30)$$

Функция $[\mathcal{H}_1](A)$ чётная и непрерывна всюду, кроме $A = \pm 2$, поскольку в этом случае $k = 1$ и $K(k) = \infty$. Её график показан на рис. 1.4.

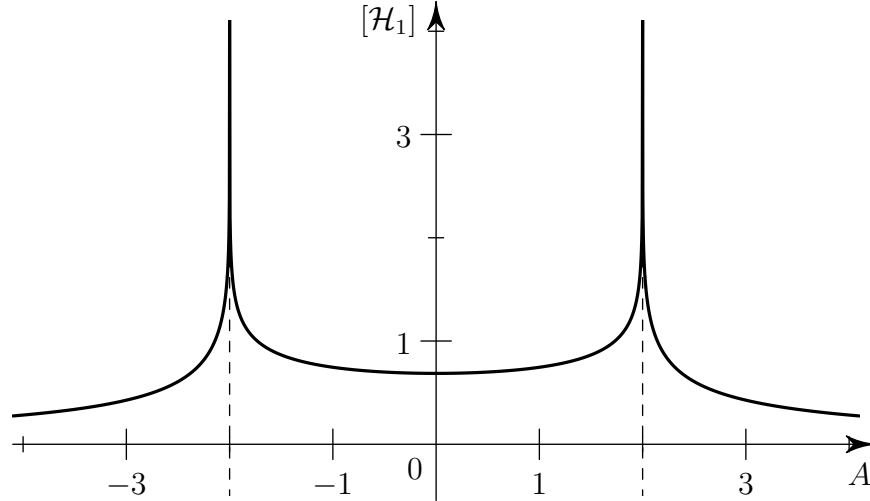


Рис. 1.4. График функции $[\mathcal{H}_1](A)$.

Непосредственные вычисления показывают, что функция (1.30) имеет минимум при $A = 0$, монотонно возрастает на интервале $0 \leq A < 2$ и монотонно убывает при $A > 2$. Следовательно, условие (1.29) выполняется лишь при значении $A = 0$, которому соответствует двояко симметричное периодическое движение по эллипсу с центром в начале координат.

Найдём поправки первого порядка к начальным условиям и периоду порождающего решения с помощью формул (1.25) и (1.26), которые в наших обозначениях запишутся в виде

$$L_1 = -\frac{1}{3} \left[\frac{\partial \mathcal{H}_1(\tau, L, A, P_2)}{\partial P_2} \right] \Big|_{\substack{A=0 \\ L=1/2 \\ P_2=0}} = 0,$$

$$T_1 = 2\pi \left[\frac{\partial \mathcal{H}_1(\tau, L, A, P_2)}{\partial L} \right] \Big|_{\substack{A=0 \\ L=1/2 \\ P_2=0}} = -2K \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right),$$

где скобки $[\cdot]$ как и в формуле (1.29) означают усреднение вдоль решения (1.28). Возвращаясь к исходным координатам с помощью формул (1.27), (1.19), (1.12), найдем поправку первого порядка к начальной координате x_1^0 . Поправку к начальному импульсу y_2^0 определим с помощью интеграла Якоби (1.15).

$$x_1^0 = \sqrt{|C|} + O(|C|^{-5/2}), \quad x_2^0 = y_1^0 = 0, \quad y_2^0 = -\sqrt{|C|} - \frac{1}{2}|C|^{-1} + O(|C|^{-5/2}).$$

При $C \rightarrow -\infty$ характеристика семейства f в координатах (x_1^0, y_2^0) асимптотически стремится к прямой $y_2^0 = -x_1^0$. В координатах (X_1, Y_2) порождающее решение семейства f задаётся точкой $(1, -1)$, а характеристика семейства приближённо описывается формулами $X_1 \approx 1$, $Y_2 \approx -1 - |C|^{-3/2}$.

Асимптотика периода задаётся формулой

$$T = 2\pi - 2K \left(\sqrt{3}/2 \right) |C|^{-3/2} + O(|C|^{-3}). \quad (1.31)$$

На рис. 1.5 дано сравнение результатов численного интегрирования (сплошная линия) с асимптотикой периода T , вычисленной по формуле (1.31). Асимптотика первого порядка демонстрирует хорошее согласие с численными результатами уже для значений $C < -5$.

1.2.3. Порождающие решения второго вида

Согласно определению 1.3, решения второго вида должны хотя бы один раз проходить через особую точку — начало координат. Этому условию удовлетворяет либо периодическое решение, проходящее через особую точку, либо

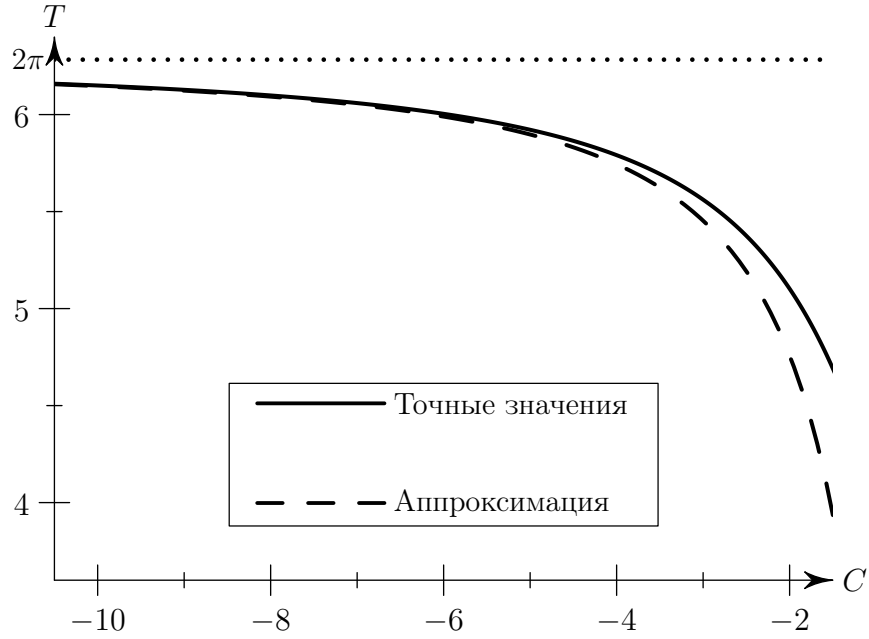


Рис. 1.5. Зависимость периода T семейства периодических решений f от C .

непериодическое, но проходящее через начало координат по крайней мере дважды за конечный промежуток времени. Энон предложил искать такие решения, которые для некоторого момента времени τ удовлетворяют условию

$$X_1(-\tau) = X_1(\tau) = X_2(-\tau) = X_2(\tau) = 0. \quad (1.32)$$

Условие (1.32) для общего решения (1.21) сводится к однородной системе линейных уравнений относительно произвольных постоянных K_i , $i = 1, \dots, 4$,

$$\begin{aligned} K_1 \cos \tau + 2K_3 &= 0, & K_2 \sin \tau &= 0, \\ 2K_2 \cos \tau + K_4 &= 0, & 2K_1 \sin \tau + 3K_3 \tau &= 0. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Эта система имеет нетривиальные решения при условии равенства нулю ее определителя $D = (3\tau \cos \tau - 4 \sin \tau) \sin \tau$. Таким образом, возможны два случая существования нетривиальных решений второго вида.

Случай $3\tau \cos \tau - 4 \sin \tau = 0$. Тогда τ есть решение трансцендентного уравнения

$$4 \operatorname{tg} \tau = 3\tau, \quad (1.34)$$

которое имеет счетное число корней $\tau_j \in (j\pi, (2j+1)\pi/2)$, $j \in \mathbb{Z}$. Значения первых десяти корней приведены в таблице 1.1.

Таблица 1.1. Значения величин τ_j , Q_i^j , $i = 1, 2, 4, 5$.

j	τ_j	Q_1^j	Q_2^j	Q_4^j	Q_5^j
1	4.41937142208	1.33116224470	0.01131401101	-1.18199886536	13.33311549158
2	7.68213064539	0.83823686389	0.00375844966	-0.92469340131	23.08970128831
3	10.87356180294	1.12799347411	0.00187774354	-1.06679759406	32.65131204882
4	14.04250089830	0.90852450294	0.00112629994	-0.95594601635	42.15122679684
5	17.20140121226	1.07970211474	0.00075075259	-1.04097465689	51.62357462989
6	20.35494153686	0.93613697979	0.00053620560	-0.96887150701	61.08119625918
7	23.50528078428	1.05790698459	0.00040213260	-1.02955596458	70.53002070943
8	26.65355462399	0.95092844010	0.00031275863	-0.97593291832	79.97316806945
9	29.80041792721	1.04548094921	0.00025020066	-1.02311549415	89.41243790479
10	32.94627500843	0.96015209697	0.00020470592	-0.98038291894	98.84894147959

Из системы (1.33) получаем, что постоянные интегрирования общего решения (1.21) в этом случае равны $K_2 = 0$, $K_3 = -(K_1/2) \cos \tau_j$, $K_4 = 0$, а первые интегралы суть

$$H_{\text{Henon}} = \frac{1}{2} K_1^2 \left(1 - \frac{3}{4} \cos^2 \tau_j \right) = \frac{1}{2}, \quad \mathcal{F} = -\frac{K_1}{2} \cos \tau_j. \quad (1.35)$$

Следовательно, каждый корень τ_j уравнения (1.34) задает значение постоянной интегрирования K_1^j , которое определим так:

$$K_1^j = \text{sign } j (-1)^{j+1} \left(1 - \frac{3}{4} \cos^2 \tau_j \right)^{-1/2} = \frac{2 \text{sign } j (-1)^{j+1}}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 \tau_j}}. \quad (1.36)$$

Уравнение фазовой траектории есть

$$\begin{aligned} X_1 &= K_1^j (\cos t - \cos \tau_j), & X_2 &= 2K_1^j \left(-\sin t + \frac{t}{\tau_j} \sin \tau_j \right), \\ Y_1 &= K_1^j \left(\sin t - \frac{3}{2} t \cos \tau_j \right), & Y_2 &= K_1^j \left(\frac{1}{2} \cos \tau_j - \cos t \right), \end{aligned} \quad -\tau_j \leq t \leq \tau_j. \quad (1.37)$$

Орбита представляет собой дугу эпициклоиды, проходящую через начало координат в моменты времени $-\tau_j$ и $+\tau_j$. Такие решения будем называть решениями *первого типа*.

Случай $\sin \tau = 0$. Тогда $\tau = j\pi$, $j \in \mathbb{Z}$, а из системы (1.33) получаем, что постоянные интегрирования в этом случае равны $K_1 = 0$, $K_3 = 0$, $K_4 = \pm 2K_2$. Первые интегралы движения есть

$$H_{\text{Henon}} = K_2^2/2 = 1/2, \quad \mathcal{F} = 0, \quad (1.38)$$

тогда $K_2 = \pm 1$. Фазовые траектории имеют вид

$$X_1 = \pm \sin t, \quad X_2 = \pm 2(\cos t + 1), \quad Y_1 = \pm(2 - \cos t), \quad Y_2 = \mp \sin t. \quad (1.39)$$

Эти решения входят в описанное выше семейство (1.23) и соответствуют значениям $K_4 = \pm 2$. Их будем называть решениями *второго типа*.

Поскольку задача Хилла является предельным случаем ОЗТТ, то описанные выше решения второго вида могут быть получены из решений–дуг, начинающихся и заканчивающихся на меньшем из двух массивных тел круговой ограниченной задачи. Это сделано в [24, гл. 5]. В [52] Энон предложил обозначать решения (1.37) символом $\pm j$, где j — номер корня уравнения (1.34), а решения (1.39) — символами i и e , соответственно. В данной работе будем придерживаться этих обозначений. Орбиты решений–дуг $\pm j$, $j = 1, 2, 3$, i и e показаны на рис. 1.6.

Непосредственная проверка показывает, что решения i и e являются Σ_2 -симметричными и переходят друг в друга при преобразовании Σ_1 . Решения $\pm j$ являются Σ_1 -симметричными, а под действием преобразования Σ_2 решение $+j$ переходит в решение $-j$ и наоборот. В таблице 1.2, заимствованной из [52], дана сводная информация о преобразовании решений второго вида. В последней строке показано, как меняется время при преобразовании симметрии.

Согласование решений

Итак, при $C \rightarrow -\infty$ имеются два предельных случая задачи Хилла: задача Кеплера с гиперболическим движением и задача Энона с решениями второго

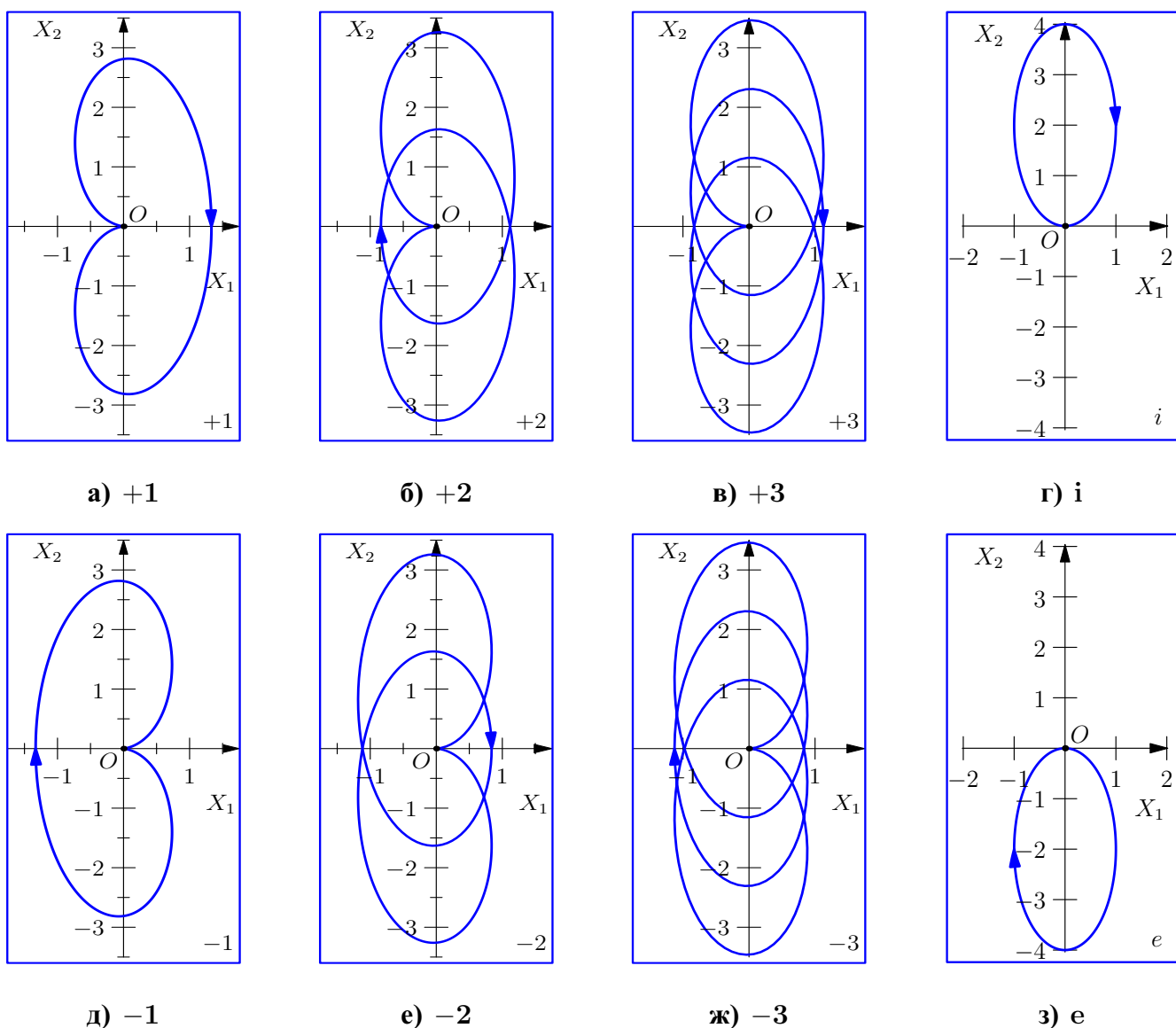


Рис. 1.6. Дуги предельных решений второго рода

вида. Необходимо выполнить согласование этих решений таким образом, чтобы получить предельные порождающие решения. В начальном приближении такое согласование можно обеспечить потребовав, чтобы скорость гиперболического движения на бесконечности была равна скорости движения решения второго вида в нуле. Такой подход был использован в работе [51] для «сшивания» дуги j гиперболической траекторией, а также в работе [23] для «сшивания» симметричных решений–дуг в ОЗТТ.

Прежде, чем записать условия согласования решений, отметим, что с учётом канонических преобразований (1.8) и (1.12) вектор скорости в переменных задачи Хилла связан с векторами скорости в задаче Кеплера и в задаче Энона

Таблица 1.2. Преобразование решений второго вида

Решение	Σ_1	Σ_2	Σ_{12}
$+j$	$+j$	$-j$	$-j$
$-j$	$-j$	$+j$	$+j$
i	e	i	e
e	i	e	i
t	$-t$	$-t$	t

следующими соотношениями

$$\dot{\mathbf{x}} = \varepsilon_1 \mathcal{X}' \cdot \dot{s} = \varepsilon_1^{-1/2} \mathcal{X}' = |C|^{1/2} \mathcal{X}', \quad \dot{\mathbf{x}} = \varepsilon_2 \dot{\mathbf{X}} = |C|^{1/2} \dot{\mathbf{X}}.$$

Следовательно, величины $\mathcal{X}'$ и $\dot{\mathbf{X}}$ имеют одинаковый порядок по C .

Согласование решений первого типа. Скорость тела, движущегося по дуге $\pm j$, при переходе на гиперболическую траекторию (т. е. при $t = \tau_j$) есть

$$\dot{X}_1(\tau_j) = -K_1^j \sin \tau_j, \quad \dot{X}_2(\tau_j) = 2K_1^j \left(-\cos \tau_j + \frac{\sin \tau_j}{\tau_j} \right) = -\frac{1}{2} K_1^j \cos \tau_j,$$

а при уходе с гиперболической траектории на дугу $\pm j$ (т. е. при $t = -\tau_j$) есть

$$\dot{X}_1(-\tau_j) = K_1^j \sin \tau_j, \quad \dot{X}_2(-\tau_j) = -\frac{1}{2} K_1^j \cos \tau_j,$$

где коэффициент K_1^j определён формулой (1.36).

Для дуги $\pm j$ «сшивающая» гипербола имеет перицентр, лежащий на оси OX , т. е. порождающее решение будет Σ_1 -симметричным. При этом параметры гиперболы следующие:

$$e = \sqrt{1 + \frac{1}{4} \operatorname{ctg}^2 \tau_j} = \sqrt{1 + \frac{4}{9\tau_j^2}}, \quad \varepsilon' = 1, \quad \varpi = \begin{cases} 0, & \text{для } j > 0, \\ \pi, & \text{для } j < 0. \end{cases} \quad (1.40)$$

Расстояние до перицентра ρ_p и скорость в перицентре равны, соответственно

$$\rho_p = e - 1, \quad \mathcal{X}'_2(s_p) = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}.$$

Рассмотрим согласование входящей дуги j_1 и выходящей j_2 , $j_1 \neq j_2$. Согласно формулам (1.10) получаем, что

$$\mathcal{X}'_1(\mp\infty) = \pm \frac{\cos \varpi \mp \sqrt{e^2 - 1} \sin \varpi}{e}, \quad \mathcal{X}'_2(\mp\infty) = \pm \frac{\sin \varpi \mp \sqrt{e^2 - 1} \cos \varpi}{e}.$$

Условия согласования скоростей тела в конце входящей дуги j_1 и в начале «сшивающей» гиперболы, а также в начале выходящей дуги j_2 и в конце гиперболы приводят к системе уравнений относительно переменных e и ϖ , решая которую получим

$$\operatorname{tg} \varpi = 2 \frac{K_1^{j_2} \sin \tau_{j_2} - K_1^{j_1} \sin \tau_{j_1}}{K_1^{j_2} \cos \tau_{j_2} + K_1^{j_1} \cos \tau_{j_1}}, \quad e = \frac{2 \cos 2\varpi}{K_1^{j_2} \cos \tau_{j_2} \sin \varpi - 2K_1^{j_1} \sin \tau_{j_1} \cos \varpi}. \quad (1.41)$$

Если $j_1 = j_2 = j$, то с учетом формулы (1.36) получим «сшивающую» гиперболу с параметрами, задаваемыми формулой (1.40). Если $j_1 = -j_2 = j$, то получим, что $\operatorname{tg} \varpi = \pm\infty$, т. е. аргумент перицентра $\varpi = \pm\pi/2$, а значит перицентр орбиты лежит на оси OY . В этом случае, порождающая последовательность определяет двояко симметричное решение, а эксцентриситет согласующей гиперболы равен $e = \sqrt{1 + 4 \operatorname{tg}^2 \tau_j} = \sqrt{1 + 9\tau_j^2/4}$.

Поскольку корни τ_j уравнения (1.34) при $j \rightarrow \infty$ стремятся к величине $(2j + 1)\pi/2$ снизу, то из (1.41) следует, что $\operatorname{tg} \varpi \rightarrow 0$, если j_1 и j_2 одного знака (см. рис. 1.7а), и $\operatorname{tg} \varpi \rightarrow \pm\infty$, если разных (см. рис. 1.7б), при $|j_1|, |j_2| \rightarrow \infty$. Нетрудно видеть, что эксцентриситет согласующей гиперболы будет стремиться к 1, если j_1 и j_2 одного знака, и будет стремиться к бесконечности, если знаки дуг различны, а их номера неограниченно возрастают.

Согласование решений первого и второго типов проводится аналогично тому, как это сделано в предыдущем подпункте, только теперь используются уравнения (1.39), описывающие дуги i и e . Тогда параметры согласующей гиперболы следующие:

$$\operatorname{tg} \varpi = \frac{3}{2} \tau_j \mp \sqrt{1 + 4 \operatorname{tg}^2 \tau_j} = \frac{3}{2} \tau_j \mp \sqrt{1 + 9\tau_j^2/4}, \quad e = \frac{2 \cos \varpi}{1 \mp K_1^j \sin \tau_j}. \quad (1.42)$$

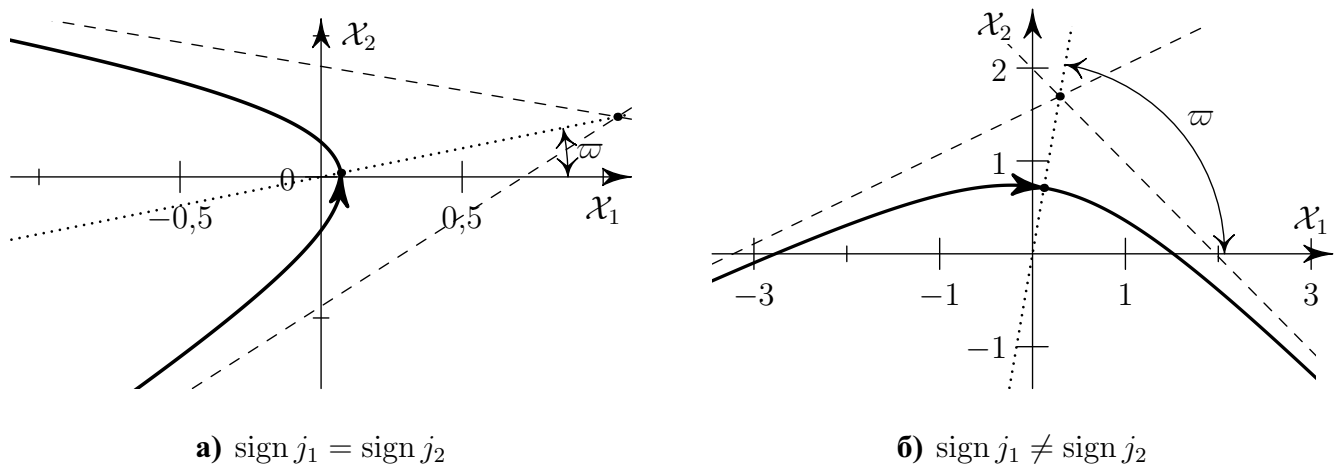


Рис. 1.7. Согласующие гиперболы для дуг первого типа j_1 и j_2 .

Знак в формулах (1.42) выбирается по правилу, которое сформулировано в работе Энона [52]. Если знаки ординат входящей и выходящей дуг различны, то выбирается знак « $-$ », если совпадают, то выбирается знак « $+$ ». Эти знаки приведены в таблице 1.3, заимствованной из [52].

Таблица 1.3. Знаки ординат входящей и выходящей дуг

Дуга	Начало	Конец
$+j$	$+$	$-$
$-j$	$-$	$+$
i	$+$	$+$
e	$-$	$-$

Если знаки на концах дуг согласованы, то $\text{tg } \varpi \sim 3\tau_j$, т. е. перицентр гиперболической орбиты стремится к $\pm\pi/2$, а эксцентриситет орбиты возрастает. Если знаки на концах дуг различны, то $\text{tg } \varpi \sim -1/(3\tau_j)$, т. е. перицентр стремится к значениям 0 или π , а эксцентриситет в этом случае стремится к 1 сверху. Следовательно, гипербола, согласующая решения первого и второго типов, не может ортогонально пересекать ни одну из осей симметрии.

Согласование решений второго типа уже нельзя выполнить с использованием только начального приближения дуг второго типа, поскольку в начале координат эти дуги имеют вертикальную скорость, равную 0. В пределе переход от дуги i к дуге e или наоборот описывается вырожденной гиперболой с эксцентриситетом $e = 1$. Аргумент перицентра $\varpi = 0$ при переходе от дуги e к дуге i и равен π при переходе от i к e , т. е. гипербола может ортогонально пересекать ось OX и последовательность дуг $\{i, e\}$ может входить в симметричные порождающие последовательности.

«Сшивание» дуг второго типа с учётом возмущений первого порядка было выполнено в работе [56, § 3], где получены асимптотики начальных условий семейства g . Если выбрать начальное условие орбиты семейства g на оси OY , то через четверть периода орбита ортогонально пересечёт ось OX в точке с абсциссой

$$x_1(T/4, C) = \pm \frac{B^2}{2C^4} + O\left(\frac{\ln|C|}{|C|^{11/2}}\right), \quad C \rightarrow -\infty,$$

где B — некоторая константа, определяемая значением несобственного интеграла:

$$B = \int_0^{\infty} \left[2 \frac{4 + 7 \cos t + 3 \cos^2 t}{(5 + 8 \cos t + 3 \cos^2 t)^{3/2}} - \frac{1}{\pi - t} \right] dt + 1 = \frac{7}{4} + \ln \frac{2}{\pi} \approx 1,29841729471.$$

С учётом преобразования (1.8) получаем, что расстояние до перицентра гиперболы, «сшивающей» дуги i и e , ведёт себя как величина порядка $|C|^{-3}$, следовательно, эксцентриситет этой гиперболы задаётся асимптотикой $e = 1 + O(|C|^{-3})$.

1.2.4. Порождающие последовательности

Поскольку все описанные выше решения второго вида проходят через особую точку возмущающей функции, то можно построить бесконечное число решений, составленных из дуг $\pm j, i, e$, как из букв алфавита. Здесь уместен следующий вопрос:

Каждое ли решение, составленное из решений–дуг второго вида является порождающим для семейства периодических решений задачи Хилла?

Как отмечено в [24, стр. 74] “... today there is no mathematical proof in general case that an ordinary orbit of the second species is generating.”[†]. Однако, если угол между траекторией входящей в особую точку и траекторией выходящей из особой точки (*угол отклонения*) не нулевой, то возможно применение процедуры, называемой “patched conic approximation” [75]. Она заключается в том, что точка столкновения заменяется участком гиперболической траектории, которая «сшивается» с входящим и исходящим участками траектории (см. п. 1.2.3). Начальные условия входящей и исходящей дуг подбираются таким образом, чтобы обеспечить вход и выход траектории из особой точки под правильным углом так, как это сделано в подразделе 1.2.3. Если же угол отклонения нулевой, то построить согласующую гиперболу не удаётся. Энон дал нестрогое обоснование утверждения, что порождающая последовательность не может содержать двух и более подряд одинаковых дуг второго типа, указав, что для его доказательства нужна техника, разработанная в [76] (см. предположение 4.7.1 в [24]). Схематически, доказательство основывается на том, что расстояние до перицентра должно быть величиной порядка $O(\varepsilon)$ [77], что при непрерывном продолжении по параметру периодического решения даст в пределе нулевое расстояние. Однако, в этом случае угол отклонения также стремится к нулю, а эксцентриситет, в свою очередь, стремится к бесконечности и, следовательно, расстояние до перицентра становится сколь угодно большим, что и приводит к противоречию.

Полученные эмпирические данные позволяют считать, что предположения 4.7.1 и 5.3.1 в [24] верны, тогда, имеет место

Гипотеза 1 (Энон [24; 52]). Последовательность, составленная из дуг $\pm j, i, e$, в

[†] «... на сегодняшний день не доказано математически, что в общем случае решение второго вида будет порождающим.» (англ.)

которой нет двух идущих подряд дуг i и нет двух идущих подряд дуг e , является порождающим решением семейства периодических орбит задачи Хилла.

Определение 1.5. Такую *последовательность* будем называть *порождающей*.

Численное исследование большого числа семейств периодических решений, продолжаемых по C до $-\infty$, позволяет сформулировать и обратное утверждение [7], а именно

Гипотеза 2. Любое семейство периодических решений задачи Хилла, которое при продолжении по $C \rightarrow -\infty$ стремится к решению второго вида, в пределе описывается порождающей последовательностью дуг $\pm j, i, e$, удовлетворяющей гипотезе 1.

Как следует из вышеизложенного, строгого математического доказательства этих гипотез нет. В работе [56] доказано, что решения, состоящие из единственной дуги $\pm j$, $j \in \mathbb{N}$, являются порождающими для Σ_1 -симметричных орбит, а решения $\{i, e\}$ и $\{-1, +1\}$ — порождающие для двойко симметричных орбит. Все известные на сегодня семейства периодических решений задачи Хилла (кроме семейства квазиспутниковых орбит f), продолжаемые по C до $-\infty$ стремятся к предельному решению в соответствии с гипотезой 2.

1.2.5. Символическая динамика

Переход от динамической системы с непрерывным временем к динамической системе с дискретным временем возможен по следующей схеме:

- 1) фазовое пространство динамической системы делится на конечное или счётное число областей;
- 2) каждой области присваивается некоторый символ («буква»);
- 3) определяется правило перехода из одной области в другую — оператор сдвига.

Тогда множество всех возможных последовательностей, порождённых динамической системой, называется *символической динамикой* (см., например, [78]).

Среди всех решений предельной задачи Энона нас интересуют только те, которые при определённом выборе начального момента времени начинаются и заканчиваются в начале координат — особой точке возмущающей функции. В п. 2.4 показано, что такими решениями являются только дуги первого или второго типа, которым Энон присвоил символические обозначения $\pm j$, $j \in \mathbb{N}$, i и e — «буквы». Каждая из дуг лежит на пересечении двух инвариантных многообразий в фазовом пространстве, определяемых значениями первых интегралов $H_{\text{Henon}} = -1/2$ и $\mathcal{F}$. Дуги $\pm j$, $j \in \mathbb{N}$ первого типа однозначно определяются отличным от нуля значением интеграла $\mathcal{F}$ согласно (1.35), а дуги i, e второго типа — значением $\mathcal{F} = 0$ согласно (1.38).

На множестве символических последовательностей, составленных из «букв», рассматриваются только те, которые являются порождающими последовательностями периодических решений задачи Хилла. Оператор сдвига задаёт переход от одной дуги к другой в начале координат. Условие периодичности требует, чтобы последовательность была инвариантна относительно сдвига на конечное число k «букв», а значит, она должна состоять из повторяющегося конечного набора «букв» — «слова» длины k . Среди таких «слов» свойством порождающей последовательности обладают те и только те «слова», которые удовлетворяют гипотезе 1. Таким образом, мы имеем дело с символической динамикой на множестве последовательностей, составленных из «букв», на которые действует оператор сдвига, осуществляющий переход от одной дуги к другой.

1.2.6. Свойства порождающих последовательностей

Из гипотезы 1 легко получить следующие свойства порождающих последовательностей.

Свойство 1. Порождающая последовательность определяется с точностью до

циклической перестановки дуг.

Например, последовательности $\{+1, e, -1\}$, $\{e, -1, +1\}$ и $\{-1, +1, e\}$ определяют одно и то же порождающее решение.

Свойство 2. Порождающая последовательность не может состоять только из одной дуги второго типа.

Отметим, что порождающая последовательность представляет только один период порождённого решения, а последовательность, повторённая n раз, определяет порождённое решение за n периодов. Следовательно, если бы последовательность, состоящая из одиночной дуги i или e была бы порождающим решением, то таким же свойством обладала бы и последовательность $\{i, i\}$ или $\{e, e\}$. Однако, в силу гипотезы 1 и определения 1.5 такие последовательности не являются порождающими. Итак, дуги i и e могут входить в состав других порождающих последовательностей, но сами по отдельности не являются порождающими, в отличие от дуг первого типа.

Свойство 3. Используя лишь дуги второго типа i и e можно построить единственную порождающую последовательность $\{i, e\}$.

В силу гипотезы 1 в порождающей последовательности дуги второго типа должны чередоваться, следовательно, все последовательности, составленные из дуг i или e , являются кратным повторением порождающей последовательности $\{i, e\}$. Эта последовательность порождает двукратно симметричное семейство g прямых однооборотных спутниковых орбит, подробно исследованных в [51]. Именно орбиты этого семейства исследовал Хилл в своём труде [48], посвящённом одноимённой задаче.

Поскольку уравнения движения задачи Хилла инвариантны относительно преобразований симметрии, то рассмотрим, как ведут себя порождающие последовательности под действием этих преобразований.

Свойство 4. Порождающая последовательность под действием одного из преобразований Σ_1 или Σ_2 переходит в последовательность, в которой дуги исходной последовательности заменены согласно таблице 1.2 и записаны в обратном порядке. Преобразование Σ_{12} меняет дуги в последовательности согласно таблице 1.2, но не меняет их порядка.

Если под действием одного из преобразований последовательность переходит сама в себя (с точностью до циклической перестановки), то она будет порождающей для семейства симметричных периодических решений, поскольку симметрия периодического решения гамильтоновой системы есть инвариант всего семейства, которому принадлежит симметричное решение.

Все порождающие последовательности можно отнести к одной из групп в зависимости от наличия (или отсутствия) симметрии.

- Несимметричные: $\{i, +1\}$, $\{-1, +1, +2\}$.
- Σ_1 -симметричные: $\{+1, +2\}$, $\{+1, i, e\}$.
- Σ_2 -симметричные: $\{+1, i, -1\}$.
- Двойко симметричные: $\{i, e\}$, $\{+1, -1\}$.
- Центральнo-симметричные: $\{+1, +2, -1, -2\}$.

Отметим, что на сегодняшний день неизвестно ни одного семейства центрально-симметричных периодических решений задачи Хилла.

Если порождающая последовательность Σ_1 (Σ_2) симметрична, то семейство, которое им задаётся, состоит из орбит, ортогонально пересекающих соответствующую ось симметрии через половину периода [47]. Такая орбита однозначно восстанавливается по своей половине, заключённой между двумя точками ортогонального пересечения оси симметрии. Если порождающая последовательность двукратно симметрична, то порождённое ей семейство состоит из орбит, которые последовательно ортогонально пересекают каждую из осей симметрии через четверть периода. Аналогично, двукратно симметричная орбита однозначно восстанавливается по своей четверти, заключённой между двумя

последовательными точками ортогонального пересечения осей симметрии.

Порождающая последовательность является предельным положением периодического решения при $C \rightarrow -\infty$, но, тем не менее, позволяет определить некоторые свойства порождённого семейства периодических решений:

- тип симметрии,
- расположение точек ортогонального пересечения орбиты с осью (осями) симметрии,
- глобальную кратность решения,
- асимптотику начальных условий и индекса устойчивости при $C \rightarrow -\infty$.

Симметрии порождающих последовательностей

В [71, п. 4] приведены условия, при которых порождающие последовательности, составленные из дуг первого типа, являются симметричными. Здесь сформулированы более общие утверждения, которые позволяют определять тип симметрии порождающей последовательности, составленной из дуг любого типа.

Если порождающая последовательность Σ_1 - или Σ_2 -симметричная, то её всегда можно разбить на две взаимно симметричных относительно оси симметрии части. Эти части соединяются друг с другом в точках ортогонального пересечения орбитой этой оси симметрии. Например, Σ_1 -симметричная порождающая последовательность $\{+1, +2\}$ может быть представлена в виде двух взаимно симметричных относительно оси OX траекторий, состоящих из половины дуги $+1$, начинающейся на оси OX , и половины дуги $+2$, заканчивающейся на оси OX . Следовательно, точки ортогонального пересечения орбиты, порождённой последовательностью $\{+1, +2\}$, с осью OX будут точки «внешнего» пересечения дуг $+1$ и $+2$.

Если порождающая последовательность двояко симметричная, то её всегда можно разбить на четыре подпоследовательности, которые начинаются на одной

оси симметрии и заканчиваются на другой. Каждая из подпоследовательностей переводится в другую преобразованием Σ_1 или Σ_2 . Например, двойко симметричная порождающая последовательность $\{+1, i, -1, e\}$ может быть получена из траектории, состоящей из половины дуги $+1$, начинающейся на оси OX , и половины дуги i , заканчивающейся на оси OY .

Поскольку порождающие дуги $\pm j, i, e$ сами являются симметричными (см. рис. 1.6), то самой короткой несимметричной порождающей последовательностью будет последовательность вида $\{\pm j, i\}$ или $\{\pm j, e\}$, $j \in \mathbb{N}$. Отметим, что наличие в порождающей последовательности дуг только одного типа не гарантирует, что такая последовательность будет симметричной. Например, последовательность $\{-1, +1, +2\}$ перейдёт в последовательность $\{+1, -1, +2\}$ при отображении Σ_1 или в последовательность $\{-1, +1, -2\}$ при отображении Σ_2 , т. е. является несимметричной. Однако, если порождающая последовательность состоит только из двух разных дуг первого типа, то она будет Σ_1 -симметричной.

Определение 1.6. Порождающая последовательность называется Σ_1 -(Σ_2 -)палиндромной, если она инвариантна относительно преобразования Σ_1 (Σ_2), т. е. при записи ее дуг в обратном порядке с соответствующей заменой их согласно таблице 1.2 она не меняется. С учётом свойства 1 также будем называть Σ_1 -(Σ_2 -)палиндромной и такую порождающую последовательность, которую можно сделать с помощью циклической перестановки палиндромной.

Лемма 1.1. Если порождающая последовательность Σ_1 -(Σ_2 -)палиндромная, то она Σ_1 -(Σ_2 -)симметрична.

Доказательство следует непосредственно из свойства 4.

Более сильное условие Σ_1 -(Σ_2 -)симметричности порождающей последовательности имеет следующий вид.

Лемма 1.2. Если порождающую последовательность можно разбить на две Σ_1 -(Σ_2 -)палиндромные подпоследовательности, то такая порождающая последовательность Σ_1 -(Σ_2 -)симметрична.

Доказательство. Проведём его для случая Σ_1 -симметрии. Пусть согласно условию леммы порождающая последовательность $\omega = \alpha_1\alpha_2$, где α_1 и α_2 — Σ_1 -палиндромные подпоследовательности. Тогда при преобразовании Σ_1 получим, что $\Sigma_1(\omega) = \alpha_2\alpha_1$. Используя свойство 1, поменяем местами подпоследовательности α_2 и α_1 , что и доказывает лемму. $\square$

Несмотря на то что дуги первого типа являются Σ_1 -симметричными, из них можно составить такие порождающие последовательности, которые являются только Σ_2 -симметричными. Достаточно потребовать, чтобы они удовлетворяли условию следующей леммы.

Лемма 1.3. *Если порождающую последовательность, состоящую только из дуг первого типа, можно разбить на две такие подпоследовательности, что они являются взаимно Σ_2 -симметричными, то такая последовательность также Σ_2 -симметрична.*

Доказательство. Пусть согласно условию леммы порождающая последовательность $\omega = \alpha_1\alpha_2$, где $\Sigma_2(\alpha_1) = \alpha_2$. Тогда

$$\Sigma_2(\omega) = \Sigma_2(\alpha_1\alpha_2) = \Sigma_2(\alpha_2)\Sigma_2(\alpha_1) = \alpha_1\alpha_2,$$

т. е. она Σ_2 -симметрична. $\square$

Две предыдущих леммы позволяют сформулировать лемму для выделения двояко симметричных порождающих последовательностей.

Лемма 1.4. *Если порождающую последовательность можно разбить на две Σ_1 -(Σ_2 -)палиндромные подпоследовательности так, что они будут взаимно Σ_2 -(Σ_1 -) симметричны, то исходная порождающая последовательность является двояко симметричной.*

Доказательство. Опять проведём его только для случая Σ_1 -симметрии. Если согласно условию леммы 1.4 порождающая последовательность $\omega = \alpha_1\alpha_2$, где

$\Sigma_2(\alpha_1) = \alpha_2$, а α_1 и α_2 — Σ_1 -палиндромные подпоследовательности. Тогда, в силу леммы 1.2, последовательность ω является Σ_1 -симметричной, но, в силу леммы 1.3, последовательность ω одновременно Σ_2 -симметрична. $\square$

Наконец, укажем условие, выделяющее класс таких порождающих последовательностей, что они обладают лишь одной центральной симметрией.

Лемма 1.5. *Если порождающую последовательность можно разбить на две такие подпоследовательности, что они являются взаимно Σ_{12} -симметричными, то такая последовательность также Σ_{12} -симметрична.*

Примеры.

1. Последовательность $\{+1, +2, +1\}$ является Σ_1 -симметричной, но не Σ_2 -симметричной, поскольку $\Sigma_2(\{+1, +2, +1\}) = \{-1, -2, -1\}$. Последовательность $\{+1, +i, -1\}$ является Σ_2 -симметричной, но не Σ_1 -симметричной, поскольку $\Sigma_1(\{+1, i, -1\}) = \{+1, e, -1\}$.

2. Последовательность $\{+1, -1, +2, -1\}$ является Σ_1 -симметричной, поскольку состоит из двух Σ_1 -палиндромных подпоследовательностей $\{-1, +2, -1\}$ и $\{+1\}$. Тогда $\Sigma_1(\{+1, -1, +2, -1\}) = \{-1, +2, -1, +1\} \equiv \{+1, -1, +2, -1\}$.

3. Последовательность $\{+1, +2, -2, -1\}$ является Σ_2 -симметричной, поскольку $\Sigma_2(\{+1, +2\}) = \{-2, -1\}$, но не Σ_1 -симметричной, поскольку

$$\Sigma_1(\{+1, +2, -2, -1\}) = \{-1, -2, +2, +1\} \equiv \{+2, +1, -1, -2\}.$$

4. Последовательность $\{+1, +1, -1, -1\}$ является двояко симметричной, что следует из приведённой ниже коммутативной диаграммы.

$$\begin{array}{ccc} \{+1, +1, -1, -1\} & \xleftarrow{\Sigma_1} & \{-1, -1, +1, +1\} \\ \Sigma_2 \updownarrow & \swarrow \Sigma_{1^2} \quad \searrow & \updownarrow \Sigma_2 \\ \{+1, +1, -1, -1\} & \xleftarrow{\Sigma_1} & \{-1, -1, +1, +1\} \end{array}$$

5. Последовательность $\{+1, +2, -1, -2\}$ является центрально симметричной, поскольку $\Sigma_{12}(\{+1, +2\}) = \{-1, -2\}$, но она не Σ_1 - и не Σ_2 -симметрична, ибо

$$\Sigma_1(\{+1, +2, -1, -2\}) = \{+2, +1, -2, -1\} = \Sigma_2(\{+1, +2, -1, -2\}).$$

Расположение точек ортогонального пересечения орбиты, порождённой палиндромной последовательностью, с осью (осями) симметрии можно выяснить с помощью следующего леммы.

Лемма 1.6. *1. Если порождающая последовательность Σ_1 - или Σ_2 -палиндромная, а число дуг, входящих в ее состав,*

а) чётно, то точки ортогонального пересечения с осью симметрии есть перицентры согласующих гипербол, т. е. являются «внутренними»;

б) нечётно, то одна точка ортогонального пересечения с осью симметрии есть перицентр согласующей гиперболы, т. е. является «внутренней», а другая точка ортогонального пересечения с осью симметрии для случая Σ_1 -палиндромной последовательности лежит на дуге $\pm j$, а для случая Σ_2 -палиндромной последовательности лежит на дуге i (e), т. е. является «внешней».

2. Если порождающая последовательность удовлетворяет условию леммы 1.2, а число дуг, входящих в состав ее палиндромных подпоследовательностей, нечётно, то точки ортогонального пересечения с осью симметрии лежат на дугах, каждая из которых центральная в своей подпоследовательности, т. е. точки пересечения являются «внешними».

3. Если порождающая последовательность удовлетворяет условию леммы 1.3, то точки ортогонального пересечения с осью симметрии OY есть перицентры согласующих гипербол, т. е. являются «внутренними».

4. Если порождающая последовательность удовлетворяет условию леммы 1.4 и если число дуг последовательности

а) кратно 4, то пары точек ортогонального пересечения с осями симметрии OX и OY есть перицентры согласующих гипербол, т. е. являются «внут-

ренними»;

б) не кратно 4, то пара точек ортогонального пересечения с осью симметрии OY есть перицентры согласующих гипербол, т. е. являются «внутренними», а другая пара точек ортогонального пересечения с осью симметрии OX лежит на дугах $\pm j$, т. е. являются «внешними».

Доказательство. Символом j_k обозначим дугу с номером k в порождающей последовательности. Дуга j_k может быть как первого, так и второго типа.

1. а) Пусть порождающая Σ -палиндромная последовательность состоит из чётного числа дуг, т. е. имеет вид $\omega_1 = \{j_1, \dots, j_k, j_k, \dots, j_1\}$, тогда, в силу приведенных на стр. 54 рассуждений, она однозначно определяется одной из своих подпоследовательностей, каждая из которых состоит из целого числа дуг, а начинается или заканчивается дугами j_1 и j_k . Следовательно, подпоследовательность $\{j_1, \dots, j_k\}$ соединяется с подпоследовательностью $\{j_k, \dots, j_1\}$ согласующими гиперболами, перицентры которых лежат либо на оси OX , если последовательность ω_1 есть Σ_1 -симметричная, либо на оси OY , если Σ_2 -симметричная. Эти перицентры и есть точки ортогонального пересечения орбиты с осью симметрии.

б) Если порождающая Σ -палиндромная последовательность состоит из нечётного числа дуг, т. е. имеет вид $\omega_2 = \{j_1, \dots, j_k, \dots, j_1\}$, где j_k — центральная дуга палиндромной последовательности, тогда ω_2 однозначно определяется подпоследовательностью, которая начинается целой дугой j_1 , а заканчивается половиной дуги j_k . Симметричная ей подпоследовательность начинается половиной дуги j_k , а заканчивается целой дугой j_1 . Следовательно, одна точка ортогонального пересечения есть перицентр согласующей гиперболы, соединяющей две дуги j_1 , т. е. является «внутренней», а другая — точкой ортогонального пересечения дуги j_k с осью OX , для Σ_1 -симметричной последовательности ω_2 , или с осью OY для Σ_2 -симметричной последовательности ω_2 , т. е. является «внешней».

2. Если порождающая последовательность может быть представлена в виде двух палиндромных подпоследовательностей с нечетным числом дуг, т. е. $\omega_3 = \{j_1, \dots, j_k, \dots, j_1, j_2, \dots, j_l, \dots, j_2\}$, то ее Σ -симметричная половина начинается половиной дуги j_k и заканчивается половиной дуги j_l . Следовательно, точки ортогонального пересечения орбиты, порождённой такой последовательностью, являются «внешними».

3. Если порождающая последовательность Σ_2 -симметрична, то она состоит из четного числа дуг и однозначно определяется подпоследовательностью, состоящей из целого числа дуг первого типа. Эта подпоследовательность соединяется с Σ_2 -симметричной ей подпоследовательностью, а согласующие гиперболы имеют перицентры, лежащие на оси OY . Следовательно, точки ортогонального пересечения с осью симметрии являются «внутренними».

4. Наконец, пусть порождающая последовательность двояко симметрична, тогда она однозначно определяется своей четвёртой частью. Если число дуг, входящих в порождающую последовательность, кратно 4, то эта четвёртая часть состоит из целого числа дуг, а подпоследовательности, получающиеся из этой четверти преобразованиями симметрии Σ_1 и Σ_2 , соединяются согласующими гиперболами с перицентрами, расположенными на осях симметрии OX и OY . Если же число дуг, входящих в порождающую последовательность, не кратно 4 (но оно по-прежнему четно!), то четвёртая часть состоит из полуцелого числа дуг, начинающихся на оси симметрии OX и заканчивающихся на оси симметрии OY . Следовательно, в первом случае обе пары точек ортогонального пересечения осей симметрии будут «внутренними», а во втором случае пара «внешних» точек пересечения лежит на оси OX , а пара «внутренних» — на оси OY .

□

Глобальная кратность порождённого периодического решения

Определение 1.7. Глобальной кратностью M периодического решения называется число оборотов его орбиты вокруг начала координат, взятое со знаком «+», если движение происходит по часовой стрелке, и со знаком «−», если против.

Глобальная кратность решения, задаваемого порождающей последовательностью, определяется в два этапа: вначале вычисляется число точек пересечения орбиты с осью OX , а затем выясняется распределение этих точек на оси абсцисс.

Если знаки ординат входящей и выходящей дуг различны, то аргумент перицентра ϖ согласующей гиперболы близок к 0 или к π и, следовательно, гипербола пересекает ось абсцисс однократно, ось ординат двукратно и обходит начало координат против часовой стрелки (см. рис. 1.7а). Если знаки ординат входящей и выходящей дуг одинаковы, то согласующая гипербола имеет аргумент перицентра ϖ , близкий к $\pm\pi/2$, и, следовательно, пересекает ось абсцисс дважды, ось ординат однократно и обходит начало координат по часовой стрелке (см. рис. 1.7б). Каждая из дуг первого типа $\pm j$ имеет $2j - 1$ «внешних» пересечений с осью OX , $2j$ «внешних» пересечений с осью OY и обходит начало координат по часовой стрелке, а дуги второго типа пересечений с осью OX не имеют вовсе, а с осью OY имеют одно «внешнее» пересечение. Если орбита однооборотная, то она пересекает ось симметрии дважды, причём точки пересечения лежат по разные стороны от точки O . Если же орбита нулькратная, то точки ее пересечения с осью симметрии лежат по одну сторону от начала координат.

Таким образом, можно сформулировать следующее правило.

Правило 1. Для вычисления глобальной кратности M орбиты, задаваемой порождающей последовательностью $\{j_1, \dots, j_k, j_{k+1}, \dots, j_m\}$, надо найти сумму

1) числа «внешних» пересечений, равную $2j_k - 1$ для каждой дуги первого типа j_k , взятых со знаком +, и равную нулю для каждой дуги второго типа;

2) числа «внутренних» пересечений согласующих гипербол, равную $+2$ для каждой последовательной пары дуг j_k и j_{k+1} , если знаки ординат дуг одинаковы, и равную -1 , если знаки ординат дуг различны (см. таблицу 1.3);

3) разделить полученную сумму пополам.

Если $M > 0$, то орбита совершает движение вокруг начала координат по часовой стрелке (обратное движение), если $M < 0$, то против часовой стрелки (прямое движение), и, наконец, если $M = 0$, то орбита нулькратная.

Как будет показано ниже, для уточнения начальных условий периодического решения, задаваемого порождающей последовательностью ω , необходимо знать число точек пересечения орбиты с осью симметрии. Это число определяется аналогично вычислению глобальной кратности решения, только теперь число «внутренних» и «внешних» пересечений берётся по абсолютной величине.

Правило 2 ([52]). Для определения числа N_1 пересечений орбиты, задаваемой порождающей последовательностью $\{j_1, \dots, j_k, j_{k+1}, \dots, j_m\}$, с осью OX надо найти сумму

1) числа «внешних» пересечений, равную $2j_k - 1$ для каждой дуги первого типа j_k и равную нулю для каждой дуги второго типа;

2) числа «внутренних» пересечений согласующих гипербол, равную 2 для каждой последовательной пары дуг j_k и j_{k+1} , если знаки ординат дуг одинаковы, и равную 1 , если знаки ординат дуг различны (см. таблицу 1.3);

Правило 3. Для определения числа N_2 пересечений орбиты, задаваемой порождающей последовательностью $\{j_1, \dots, j_k, j_{k+1}, \dots, j_m\}$, с осью OY надо найти сумму

1) числа «внешних» пересечений, равную $2j_k$ для каждой дуги первого типа j_k и равную 1 для каждой дуги второго типа;

2) числа «внутренних» пересечений согласующих гипербол, равную 1 для каждой последовательной пары дуг j_k и j_{k+1} , если знаки ординат дуг одинаковы, и равную 2 , если знаки ординат дуг различны (см. таблицу 1.3);

Например, порождающая последовательность $\{+1, -2, e\}$ состоит из трёх дуг, соединённых тремя согласующими гиперболами. Пара дуг $(+1, -2)$ имеет, согласно таблице 1.3, одинаковые знаки ординат, а две другие пары $(-2, e)$ и $(e, +1)$ — разные. Следовательно, число «внутренних» пересечений равно $+2 - 1 - 1 = 0$, а число «внешних» пересечений равно $1 + 3 + 0 = 4$, значит глобальная кратность порождающей орбиты равна $M = (0 + 4)/2 = 2$. При этом число пересечений N_1 орбиты с осью OX за один оборот равно $4 + 4 = 8$, а с осью OY $N_2 = 5 + 7 = 12$.

Правило 1 позволяет сделать следующие выводы:

- 1) глобальная кратность M Σ_1 -симметричного периодического решения, порождённого дугой первого типа $\{\pm j\}$, равна $j - 1 \geq 0$, т. е. орбита обратная для дуг первого типа с номером больше 1 и нулькратная для дуг с номером 1;
- 2) глобальная кратность M двояко симметричного периодического решения, порождённого последовательностью $\{i, e\}$, равна -1 , т. е. орбита прямая;
- 3) если порождающая последовательность состоит только из дуг первого типа, то ею порождённая орбита может быть либо нулькратной, либо обратной.

Глобальная кратность M орбиты семейства не является его инвариантом и может меняться, если при продолжении семейства по параметру, встречаются орбиты соударения. Можно показать, что при переходе семейства через орбиту соударения глобальная кратность орбит меняется на величину $2k$, где k — число соударений за один период. Тем не менее, глобальная кратность орбиты является удобным для классификации периодических решений параметром и может использоваться для анализа семейств периодических решений, разделяющих общие орбиты.

Асимптотики начальных условий и индекса устойчивости

Асимптотика координаты x точек ортогонального пересечения орбиты, порожденной последовательностью $\{\pm j\}$, с осью OX получена Эноном в [51].

Там же было проведено сравнение этой асимптотики с результатами численного интегрирования. Перко в [56] получил следующий член асимптотики «внешней» точки ортогонального пересечения орбиты, порождённой последовательностью $\{\pm j\}$, с осью симметрии, а также асимптотики начальных условий двояко симметричных орбит, порождённых последовательностями $\{+1, -1\}$ и $\{i, e\}$. К сожалению, в [56] отсутствуют даже попытки провести анализ качества полученных разложений (за исключением ссылки на личное сообщение от Энона о качестве асимптотики начальных условий для порождающей последовательности $\{i, e\}$), хотя на момент написания статьи (1981 год) результаты численного интегрирования рассматриваемых периодических решений задачи Хилла уже были получены и опубликованы (см. [39; 51]). Автор попытался выполнить такую работу, но не смог получить удовлетворительного согласия с результатами численного интегрирования. В результате автор разработал собственный алгоритм исследования семейства симметричных периодических решений по его порождающей последовательности (см. раздел 1.3) и изучил более 20-ти новых семейств.

Асимптотика «внешней» точки ортогонального пересечения орбиты, порождённой последовательностью $\{\pm j\}$, с осью OX имеет вид

$$x_1^j(0)/\sqrt{|C|} = K_1^j(1 - \cos \tau_j) \stackrel{\text{def}}{=} Q_1^j, \quad y_2^j(0)/\sqrt{|C|} = K_1^j(\cos \tau_j - 2)/2 \stackrel{\text{def}}{=} Q_4^j. \quad (1.43)$$

Следовательно, характеристика семейства, порождённого дугой $\{+j\}$, стремится при $C \rightarrow -\infty$ к прямой $y_2 = Q_4^j/Q_1^j x_1$ (на рис. 2.1а эти прямые показаны длинным штрихом). В координатах (X_1, Y_2) (см. 1.1.2) характеристика семейства стремится к предельной точке с координатами (Q_1^j, Q_4^j) .

«Внутренняя» точка ортогонального пересечения есть перицентр согласующей гиперболы и его координаты имеют вид

$$x_1^j(T/2) = \text{sign } j(-1)^{(j+1)} Q_2^j/|C|, \quad y_2^j(T/2) = \text{sign } j(-1)^{(j+1)} \sqrt{|C|} Q_5^j, \quad (1.44)$$

где $Q_2^j = e^j - 1$, $Q_5^j = \sqrt{\frac{e^j + 1}{e^j - 1}}$, $e^j = \sqrt{1 + 4/(9\tau_j^2)}$. Координаты перицентра ор-

биты, порождённой последовательностью $\{+j, -j\}$, задаются формулой (1.44), в которой x_1 и y_2 нужно заменить на x_2 и y_1 соответственно, а эксцентриситет положить равным $e = \sqrt{1 + 9\tau_j^2/4}$. Следовательно, характеристика семейства при $C \rightarrow -\infty$ стремится к кривой $x_1 y_2^2 = e^j + 1$, а в координатах $(\mathcal{X}_1, \mathcal{Y}_2)$ (см. 1.1.2) стремится к предельной точке (Q_2^j, Q_5^j) .

Асимптотика индекса устойчивости S периодического решения, которое при $C \rightarrow -\infty$ стремится к порождающей дуге вида $\pm j$, получена в [51] и описывается формулой

$$S = Q_3^j(-C)^{3/2}, \text{ где } Q_3^j = \frac{8 \sin^3 \tau_j (12\tau_j \sin \tau_j - 9 \cos \tau_j \sin^2 \tau_j + \cos \tau_j)}{(3 \sin^2 \tau_j + 1)^2}. \quad (1.45)$$

Численное исследование семейств периодических решений, стремящихся в пределе к последовательности дуг $\{\pm j_1, \pm j_2, \dots, \pm j_k\}$, где j_k — дуги первого типа, показывает, что зависимость индекса устойчивости S от C хорошо аппроксимируется функцией вида $S(C) \sim A_k(-C)^{3k/2}$, где величина $A_k > 0$ и существенно зависит от чередования знаков дуг $\pm j_i$.

Для порождающих дуг i или e формулы, соответствующей (1.45), получено быть не может, поскольку в силу свойства 2 эти дуги не являются порождающими, но численное исследование семейств периодических решений, которые в пределе при $C \rightarrow -\infty$ стремятся к последовательности, включающей такие дуги, позволяет сделать вывод, что $S_{i(e)}(C) \sim A_{i(e)}(-C)^{3/2}$, где $A_{i(e)} < 0$. Таким образом, можно утверждать, что асимптотика индекса устойчивости периодического решения второго вида, состоящего в пределе из k дуг первого типа и l дуг второго типа, имеет вид $S_{kl}(C) \sim (-1)^l A(-C)^{3(k+l)/2}$. Следовательно, чем больше дуг входит в состав порождающей орбиты, тем более неустойчивым будет периодическое решение при одном и том же значении C . При этом $S_{kl} \rightarrow +\infty$, если l чётно, и $S_{kl} \rightarrow -\infty$ в противном случае, когда $C \rightarrow -\infty$.

Величины Q_1 , Q_2 и Q_3 были введены в [51]. Значения величин τ_j , Q_i^j , $i = 1, 2, 4, 5$ для $j = 1, \dots, 10$ даны в таблице 1.1. Значения Q_3 приведены в таблице 7 в [51].

Содержание раздела 1.2 опубликовано в [7; 8; 79].

1.3. Алгоритм исследования семейства периодических решений по порождающему решению

Предлагается следующий алгоритм исследования семейства симметричных периодических решений второго вида.

1) Составляется симметричная порождающая последовательность ω в соответствии с гипотезой Энона (см. стр. 49).

2) Определяется тип её симметрии (см. подраздел 1.2.6). В соответствии с леммой 1.6 определяется расположение точек ортогонального пересечения орбиты с осью (осями) симметрии.

3) Фиксируется некоторое значение параметра $C < 0$. (Для порождающих последовательностей, составленных из дуг $\pm 1, \pm 2, i, e$, подходящим значением оказалось $C = -50$.)

4) По формулам (1.43) и/или (1.44) определяется приближённо начальное условие $x_1(0)$ для Σ_1 -симметричной или $x_2(0)$ для Σ_2 -симметричной последовательностей. Оценку величины половины периода можно получить по формуле $T/2 \approx \sum \tau_{j_k} + \pi m$, где суммирование ведётся по всем дугам первого типа из ω , m — число дуг второго типа, входящих в ω , а величины τ_j берутся из второй колонки таблицы 1.1.

5) В окрестности приближенного начального условия строится сетка значений $x_1^{(k)}(0)$ ($x_2^{(k)}(0)$), и для каждого из этих значений определяются начальные значения для координаты $y_2^{(k)}(0)$ ($y_1^{(k)}(0)$) из соответствующих квадратных урав-

нений:

$$\frac{1}{2} \left[y_2^{(k)}(0) \right]^2 - x_1^{(k)}(0) y_2^{(k)}(0) - \left[x_1^{(k)}(0) \right]^2 - \frac{1}{\left| x_1^{(k)}(0) \right|} = -\frac{C}{2} \text{ для симметрии } \Sigma_1,$$

$$\frac{1}{2} \left[y_1^{(k)}(0) \right]^2 + x_2^{(k)}(0) y_1^{(k)}(0) + \frac{\left[x_2^{(k)}(0) \right]^2}{2} - \frac{1}{\left| x_2^{(k)}(0) \right|} = -\frac{C}{2} \text{ для симметрии } \Sigma_2,$$

где k — номер узла сетки. Нужный корень из указанных выше уравнений выбирается таким образом, чтобы движение по орбите было в правильном направлении.

6) Для каждого узла сетки путём численного решения задачи Коши для системы канонических уравнений задачи Хилла строится отображение Пуанкаре (см., например, [80, гл. II] или [20, гл. 1]), где в качестве секущей плоскости выбирается гиперплоскость $x_2 = 0$ ($x_1 = 0$). Для периодичности симметричной орбиты достаточно, чтобы она начиналась в точке ортогонального пересечения оси симметрии и после $N_1/2$ ($N_2/2$) последующих пересечений вновь ортогонально ее пересекала. Числа N_1 и N_2 вычисляются согласно правилам 2 и 3 для Σ_1 - и Σ_2 -симметричных орбит соответственно. Таким образом, периодическая орбита, задаваемая порождающей последовательностью ω , будет определена с некоторой точностью, если в момент $N_1/2$ -го ($N_2/2$ -го) пересечения оси симметрии OX (OY) компонента $\dot{x}_1$ ($\dot{x}_2$) фазового вектора скорости будет приближённо равна нулю.

7) Имея орбиту семейства и используя алгоритмы продолжения по параметру (см., например, [80, гл. V] или [20, гл. 1]), можно получить всё семейство периодических решений, задаваемое порождающей последовательностью ω .

Замечание 1.1. Периодические решения при $C \ll 0$ сильно неустойчивы, поэтому интегрирование уравнений следует проводить не в физических переменных, а в регулярных (см. [47, п. 10.4.4] и раздел 3.1.2 главы 3), что существенно повышает точность вычислений и скорость расчётов.

Укажем основные отличия данной работы от других исследований, посвящённых периодическим орбитам плоской задачи Хилла.

В [52; 53] Энон применил метод порождающих решений, изложенный в монографии [24], в контексте плоской ОЗТТ к изучению периодических решений плоской задачи Хилла и описал новые семейства периодических решений. Во многом данная работа является продолжением и развитием идей и методов, описанных в [24; 52], а также в монографии А. Д. Брюно [22], поиска периодических решений по их порождающим. Однако в указанных выше работах Энон ограничился исследованием семейств только тех периодических решений, которые содержат орбиты с глобальной кратностью три и менее. Более того, большая часть описанных в [52] семейств была получена им методом «грубой силы», когда на части плоскости $(x_1, \dot{x}_1)$ строилась сетка начальных условий и из них отбирались те, которые определяли орбиту, ортогонально пересекающую ось симметрии через заданное число оборотов. Этот метод оказался непригодным для поиска семейств несимметричных решений, поэтому все описанные в [53] семейства были найдены в результате бифуркации потери симметрии ранее изученных семейств симметричных периодических решений.

Перко, используя технику согласования решений вблизи особой точки [54], доказал существование периодического решения первого вида [55], а также счётного числа семейств периодических решений второго вида [56] в задаче Хилла (см. их определения в [20; 24; 71]). К сожалению, как было указано выше, предложенные в [55; 56] асимптотики начальных условий и периодов орбит оказались непригодными для продолжения семейств периодических решений, да и сами работы содержали много ошибок.

В [57] дано качественное описание глобальной динамики задачи Хилла, а также схематично описано большое число семейств периодических решений для случая $C > 0$. Для апробации метода поиска периодических орбит в [58] частично исследовано 31 семейство периодических решений, взаимодействующих с семейством f обратных однооборотных орбит. Ни одно из этих семейств не

было продолжено до своего предельного порождающего решения. В монографии [20] численно исследовано на устойчивость более 50-ти семейств плоских периодических орбит. Все они были продолжены до своих порождающих решений, но найдены были в результате бифуркаций основных семейств симметричных орбит g , f , g' и f_3 , описанных в [51]. Этот подход не позволил исследовать те семейства, которые не взаимодействуют с основными.

Содержание раздела 1.3 опубликовано в [8; 79].

Глава 2

Семейства симметричных периодических решений задачи Хилла

В этой главе исследуется структура фазового потока системы Гамильтона, допускающей дискретную группу симметрий с двумя образующими (четверная группа Клейна). Методами компьютерной алгебры изучаются сценарии появления периодических решений второго рода по Пуанкаре в окрестности критических двойко симметричных периодических решений в случае общего положения. Далее приводится обзор новых семейств периодических орбит, полученных с использованием Алгоритма I главы 1. Рассмотренные семейства интересны тем, что содержат орбиты, которые могут быть использованы для моделирования квазиспутниковых траекторий и для проектирования одноимпульсных перелётов в окрестность коллинеарных точек либрации L_1 , L_2 , а также для перелётов между ними.

2.1. Ветвление семейств двойко симметричных периодических решений

Хорошо известно, что интегрируемость системы ОДУ связана с наличием достаточного числа первых интегралов этой системы, что, в силу теоремы Эмми Нётер, означает наличие некоторого количества непрерывных групп симметрий исходных уравнений. В общем случае возмущение интегрируемой системы разрушает часть этих групп инвариантов, превращая полную систему в неинтегрируемую. Однако зачастую в силу специфики возмущения от непрерывной группы симметрий может остаться та или иная дискретная группа. Как следствие, должны существовать решения возмущённой системы уравнений, инвариантные относительно такой группы. Например, рассматривая ограниченную

задачу трёх тел (ОЗТТ) при значении массового параметра μ близкого к нулю как возмущение интегрируемой задачи Кеплера в равномерно вращающейся системе координат, имеем ситуацию, при которой возмущение «разрушает» интеграл площадей, индуцированный группой $SO(1)$ поворотов конфигурационного пространства задачи, но, тем не менее, сохраняет дискретную группу порядка 2 линейных канонических преобразований расширенного фазового пространства. В следствие этого ОЗТТ обладает периодическими решениями, орбиты которых симметричны относительно оси OX . Другие примеры систем Гамильтона с различными дискретными группами симметрий см., например, в [81].

Наличие даже дискретной симметрии уравнений ОДУ часто позволяет существенно упростить процедуру поиска периодических решений. В данной работе рассматривается ситуация, когда некоторая автономная система Гамильтона с двумя степенями свободы, обладающая единственным первым интегралом, — интегралом энергии — имеет дополнительно дискретную группу линейных канонических автоморфизмов расширенного фазового пространства системы. Эта группа изоморфна четверной группе Клейна K_4 , две образующие которой суть обратимые преобразования. Исследуется структура матрицы монодромии невырожденного двояко симметричного периодического решения. В критических решениях семейства рассматриваются различные сценарии ветвления семейства.

Определение 2.1. Периодическое решение называется *критическим*, если у его матрицы монодромии M или её q -й степени M^q , $q \in \mathbb{N}$, появляются дополнительные элементарные делители, соответствующие мультипликатору 1.

2.1.1. Дискретная группа симметрий системы Гамильтона

Рассмотрим автономную систему Гамильтона с двумя степенями свободы с гамильтонианом $H(z)$ в случае общего положения, где $z = (x, y)$ — вектор

фазового пространства $\mathbb{M} \equiv \mathbb{R}^4$, т. е. система канонических уравнений

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{J} \operatorname{grad} H(\mathbf{z}), \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E}^2 \\ -\mathbf{E}^2 & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

имеет единственный первый интеграл

$$H(\mathbf{z}) = h. \quad (2.2)$$

Положим, что система (2.1) инвариантна относительно конечной группы линейных канонических автоморфизмов (симметрий) расширенного фазового пространства $\tilde{\mathbb{M}} \equiv \mathbb{R} \times \mathbb{M}$, изоморфной четверной группе Клейна V_4 .

Четверная группа Клейна V_4 (или диэдральная группа $D_2 \cong \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2$) — это группа порядка 4, являющаяся наименьшей нециклической абелевой группой, а также 2-примарной абелевой группой. Она задаётся либо соотношениями

$$\langle g_1^2 = g_2^2 = (g_1 \circ g_2)^2 = id \rangle, \quad (2.3)$$

где $g_{1,2}$ — два генератора группы, либо соотношениями

$$\langle r^2 = s^2 = id, \quad s^{-1} \circ r \circ s = r^{-1} \rangle,$$

где r — поворот, а s — симметрия. Известно, что любую группу диэдра D_n можно представить как группу линейных преобразований плоскости, состоящей из n операторов поворота r_k , $k = 0, \dots, n-1$, на угол $2\pi k/n$, и n операторов симметрии s_k , $k = 0, \dots, n-1$, относительно прямой, составляющей угол $\pi k/n$ с осью абсцисс. Для D_2 выберем два генератора $g_1 \cong s_0$ и $g_2 \cong s_1$, тогда $g_3 = g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1 = r_1$. Для конфигурационного пространства $\mathbb{R}^2$ симметрии g_1 и g_2 задаются соответственно матрицами $\mathbf{S}_0 = \operatorname{diag}\{1, -1\}$ и $\mathbf{S}_1 = \operatorname{diag}\{-1, 1\}$. Следовательно, с учётом того, что симметрии $g_{1,2}$ обращают время, в расширенном фазовом пространстве $\mathbb{M}$ они имеют вид

$$\begin{aligned} g_1 : (t, \mathbf{z}) &\rightarrow (-t, \mathbf{G}_1 \mathbf{z}), \quad \mathbf{G}_1 = \operatorname{diag}\{+1, -1, -1, +1\}, \\ g_2 : (t, \mathbf{z}) &\rightarrow (-t, \mathbf{G}_2 \mathbf{z}), \quad \mathbf{G}_2 = \operatorname{diag}\{-1, +1, +1, -1\}. \end{aligned}$$

Симметрия g_3 в этом случае является центральной симметрией фазового пространства $\mathbb{M}$:

$$g_3 : (t, \mathbf{z}) \rightarrow (t, \mathbf{G}_3 \mathbf{z}), \quad \mathbf{G}_3 = \text{diag}\{-1, -1, -1, -1\}.$$

Итак, каждая из симметрий g_i , $i = 1, 2, 3$ в силу соотношений (2.3), является *инволюцией*, но при этом преобразования g_1 и g_2 , в свою очередь, будут *обратимыми*, поскольку

$$\frac{d}{dt}g_i(\mathbf{z}) = -\mathbf{J} \text{grad } H(g_i(\mathbf{z})), \quad i = 1, 2.$$

Инвариантные множества $\Sigma_{1,2} \equiv \{\mathbf{z} | g_{1,2}(\mathbf{z}) = \mathbf{z}\}$ преобразований $g_{1,2}$ являются двумерными координатными плоскостями — плоскостями симметрии преобразований

$$\Sigma_1 : \{x_2 = y_1 = 0\}, \quad \Sigma_2 : \{x_1 = y_2 = 0\}. \quad (2.4)$$

Инвариантное множество преобразования g_3 состоит из одной точки — начала координат.

Определение 2.2 ([82]). Пусть $\mathbf{o}(\mathbf{z}_0)$ — орбита системы (2.1):

$$\mathbf{o}(\mathbf{z}_0) = \{\mathbf{z}(t, \mathbf{z}_0) | t \in \mathbb{R}\}.$$

Тогда орбита $\mathbf{o}(\mathbf{z}_0)$ называется g -симметричной, если она является инвариантным множеством преобразования g : $g(\mathbf{o}(\mathbf{z}_0)) = \mathbf{o}(\mathbf{z}_0)$.

Утверждение 2.1 ([82]). Пусть $\mathbf{o}(\mathbf{z}_0)$ — орбита системы (2.1) с обратимой симметрией g . Тогда

- (1) орбита $\mathbf{o}(\mathbf{z}_0)$ является g -симметричной тогда и только тогда, когда она пересекает соответствующее инвариантное множество

$$\Sigma(g) = \{\mathbf{z} | g(\mathbf{z}) = \mathbf{z}\}.$$

При этом орбита пересекает $\Sigma(g)$ не более чем в двух точках и целиком содержится в $\Sigma(g^2)$.

(2) орбита $o(z_0)$ пересекает $\Sigma(g)$ в точности в двух точках тогда и только тогда, когда она — орбита периодического решения (но не положения равновесия) и симметрична относительно автоморфизма g .

Каждое решение $z(t, z_0)$ системы (2.1) с начальным условием $z(0) = z_0$ принадлежит к одному из следующих классов в зависимости от типа симметрии.

- **Несимметричные** решения, фазовые траектории которых неинвариантны относительно любого из преобразований g_i , $i = 1, 2, 3$.
- **Однократно симметричные** решения, фазовые траектории которых инвариантны лишь относительно какого-либо одного преобразования g_i , $i = 1, 2, 3$.
- **Двояко симметричные** решения, фазовые траектории которых инвариантны относительно любого из преобразований g_i , $i = 1, 2, 3$.

Заметим, что если решение $z(t, z_0)$ симметрично относительно двух обратимых симметрий g_1 и g_2 , то оно симметрично относительно преобразования центральной симметрии g_3 . Обратное, вообще говоря, неверно, т. е. среди однократно симметричных решений следует выделять обратимо симметричные и центрально симметричные.

Пусть $z(t, z_0)$ — периодическое решение с периодом $T > 0$, т. е. решение удовлетворяющее условию периодичности для любого t :

$$z(t + T, z_0) = z(t, z_0).$$

Периодические решения автономной системы Гамильтона не являются изолированными, а образуют семейства (см. [83, Lemma 6.4.1]). Размерности этих семейств равны числу независимых первых интегралов системы Гамильтона. Для автономной неинтегрируемой системы Гамильтона семейства периодических решений являются обычно однопараметрическими, где параметром может служить значение, например, величина h интеграла (2.2). Итак, каждое семейство периодических решений описывается парой функций $z_0(\lambda)$ и $T(\lambda)$, где λ — параметр семейства. Здесь, следуя [24, п. 2.5], под $T(\lambda^*)$ понимается не минимальный

период конкретного решения, соответствующего значению параметра λ^* на семействе, а предел минимальных периодов решений семейства при стремлении $\lambda \rightarrow \lambda^*$. Это позволяет рассматривать функцию $T(\lambda)$ как непрерывную функцию параметра λ даже для ситуаций, когда одно семейство пересекает другое с решениями кратных периодов.

Как известно (см., например, [84]), семейства периодических решений могут быть либо замкнутыми, либо натурально ограниченными, когда одна или более количественных характеристик решения — наибольшее расстояние от орбиты до начала координат, значение интеграла h или периода T — неограниченно возрастают. При продолжении семейства по параметру λ эти и другие характеристики (например, индекс устойчивости S) периодического решения меняются гладко вдоль семейства, в то время как симметрия решения является глобальным инвариантом семейства. Семейство решений может пересекаться с другим семейством, но оно всегда может быть единственным образом продолжено через точку пересечения.

2.1.2. Фазовый поток системы Гамильтона вблизи периодического решения

Свойства фазового потока

Динамика фазового потока $\Phi(t)$ в окрестности решения $\mathbf{z}(t)$ описывается матрицей $\mathbf{Z}(t, \mathbf{z})$, которая есть решение задачи Коши уравнения в вариациях Пуанкаре

$$\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{J} \text{Hess } H(\mathbf{z}) \mathbf{Z}, \quad \mathbf{Z}(0) = \mathbf{Z}_0, \quad \text{rang } \mathbf{Z}_0 = 4, \quad (2.5)$$

где $\text{Hess } H(\mathbf{z})$ — гессиан функции $H(\mathbf{z})$, вычисляемый вдоль решения $\mathbf{z}(t, \mathbf{z}_0)$. Решение $\mathbf{Z}(t, \mathbf{Z}_0)$ называется *матрицантом* и, если матрица $\mathbf{Z}_0$ *симплектическая*, т. е. удовлетворяет матричному тождеству

$$\mathbf{Z}_0^\top \mathbf{J} \mathbf{Z}_0 = \mathbf{J}, \quad (2.6)$$

то такой же будет и матрицант $\mathbf{Z}(t)$ для любого t [85, Гл. II, п. 3.4].

Здесь и далее значок $^\top$ означает операцию транспонирования матрицы или вектора.

Определение 2.3. Матрицей монодромии периодического решения (z_0, T) называется матрица $M = Z_0^{-1} \cdot Z(T, Z_0)$, а её собственные числа ρ_i , $i = 1, \dots, 4$, называются мультипликаторами.

В дальнейшем, если не оговорено противное, будем считать, что $Z_0 \equiv E^4$, т. е. матрица $Z(t, Z_0)$ есть нормированная фундаментальная матрица системы в вариациях (2.5).

Приведём здесь основные свойства матрицы монодромии M , которые будут использоваться в дальнейшем.

1) Пусть $Z(t)$ — фундаментальная матрица системы (2.5), тогда

$$Z(t + T) = Z(t)M. \quad (2.7)$$

2) В силу симплектичности матрицы M её характеристический многочлен $P_\lambda(M)$ возвратный [86]. Для симплектической матрицы M обратная к ней вычисляется по формуле

$$M^{-1} = J^\top M^\top J = -JM^\top J. \quad (2.8)$$

3) В силу вещественности системы (2.5) и симплектичности M её мультипликаторы попарно взаимно комплексно-сопряжённые и взаимно обратные.

4) Вектор-столбец фазовой скорости $v_0 \equiv J \operatorname{grad} H(z_0)$ является правым собственным вектором матрицы M с соответствующим мультипликатором $\rho_1 = +1$ [83, Lemma 6.4.1]. Это следует непосредственно из дифференцирования по t тождества, задающего групповую структуру $z(\tau, z(t, z_0)) = z(\tau + t, z_0)$, при подстановке в него значений $\tau = T$ и $t = 0$:

$$M \cdot \dot{z}(T) = M \cdot v_0 = v_0.$$

5) Мультипликатор $\rho_1 = \rho_2 = +1$ имеет алгебраическую кратность 2.

6) Поскольку система (2.1) автономна и обладает первым интегралом (2.2), то, дифференцируя по $\mathbf{z}_0$ тождество $H(\mathbf{z}(T, \mathbf{z}_0)) = H(\mathbf{z}_0)$, получим, что вектор-строка $\tilde{\mathbf{v}}_1 \equiv \text{grad } H(\mathbf{z}_0)$ является левым собственным вектором матрицы монодромии $\mathbf{M}$ [83, Lemma 6.5.1]:

$$\text{grad } H(\mathbf{z}_0)\mathbf{M} = \text{grad } H(\mathbf{z}_0).$$

7) Характеристический многочлен $P_\lambda(\mathbf{M})$ матрицы монодромии $\mathbf{M}$ раскладывается на множители

$$P_\lambda(\mathbf{M}) = (\lambda - 1)^2 (\lambda^2 - 2S\lambda + 1),$$

где

$$S = \text{Tr } \mathbf{M}/2 - 1 \quad (2.9)$$

— индекс устойчивости периодического решения $(\mathbf{z}_0, T)$.

Величина S позволяет определить характер устойчивости периодического решения в линейном приближении. А именно,

- если $|S| > 1$, то $\rho_{3,4} \in \mathbb{R}$, $\rho_3 = 1/\rho_4$ и решение $\mathbf{z}(t, \mathbf{z}_0)$ неустойчиво;
- если $|S| < 1$, то $\rho_3 = \bar{\rho}_4$, $|\rho_3| = |\rho_4| = 1$ и решение $\mathbf{z}(t, \mathbf{z}_0)$ орбитально устойчиво;
- критический случай $|S| = 1$ требует дополнительного исследования.

Особо интересен случай, когда индекс устойчивости $S = \cos(2\pi p/q)$, где $p, q \in \mathbb{N}$. Его впервые рассмотрел А. Пуанкаре в своём знаменитом трактате *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* [87, Гл. XXX]. Этот случай соответствует появлению в окрестности исходного периодического решения так называемых *периодических решений второго рода* по Пуанкаре с периодом $T' = qT$.

Вычисление матрицы монодромии

В общем случае вычисление матрицы монодромии $\mathbf{M}$ требует одновременного интегрирования двух систем уравнений: исходной системы (2.1), дающей

интегральную кривую $\mathbf{z}(t, \mathbf{z}_0)$, и системы уравнений в вариациях (2.5) для четырёх начальных условий. Как отмечено в [88], подставляя в (2.7) значение $t = -T/2$, получим $\mathbf{Z}(T/2) = \mathbf{Z}(-T/2) \mathbf{M}$, откуда

$$\mathbf{M} = \mathbf{Z}^{-1}(-T/2) \mathbf{Z}(T/2) = -\mathbf{J} \mathbf{Z}^\top(-T/2) \mathbf{J} \mathbf{Z}(T/2).$$

При этом матрицы $\mathbf{Z}(-T/2)$ и $\mathbf{Z}(T/2)$ можно вычислять параллельно. Численное интегрирование систем (2.1) и (2.5) на половине периода даёт более точные результаты, чем интегрирование на всём периоде, особенно для сильно неустойчивых решений.

Рассмотрим вычисление матрицы монодромии симметричного периодического решения. Если периодическое решение симметрично относительно обратимого преобразования g_i , $i = 1, 2$, то, согласно теореме 2.1, начальное условие $\mathbf{z}_0$ можно выбрать на инвариантном множестве $\Sigma(g_i)$, и тогда через полпериода $\mathbf{z}(T/2, \mathbf{z}_0) \in \Sigma(g_i)$. Инвариантность системы (2.1) относительно g_i означает инвариантность гамильтониана $H(\mathbf{z})$ и равносильна матричному тождеству

$$\text{Hess } H(\mathbf{z}(-t)) = \mathbf{J} \mathbf{G}_i \mathbf{J} \text{Hess } H(\mathbf{z}(t)) \mathbf{G}_i^{-1}, \quad i = 1, 2.$$

Это означает, что для системы (2.1) выполнено условие t -инвариантности [85], а матрицы $\mathbf{Z}(-t)$ и $\mathbf{Z}(t)$ для таких систем связаны соотношением $\mathbf{Z}(-t) = \mathbf{G}_i^{-1} \mathbf{Z}(t) \mathbf{G}_i$, в частности, $\mathbf{Z}(-T/2) = \mathbf{G}_i^{-1} \mathbf{Z}(T/2) \mathbf{G}_i$.

Так как матрица $\mathbf{Z}(-T/2)$ симплектическая, то с учетом формулы (2.8) получаем матрицу монодромии $\mathbf{M}_1$, вычисленную от точки $\mathbf{z}_0$,

$$\mathbf{M}_1 = \tilde{\mathbf{G}}_i \mathbf{Z}^\top(T/2) \tilde{\mathbf{G}}_i \mathbf{Z}(T/2), \quad (2.10)$$

где $\tilde{\mathbf{G}}_i = \mathbf{G}_i \mathbf{J}$, $\tilde{\mathbf{G}}_i^{-1} = \tilde{\mathbf{G}}_i^\top = \tilde{\mathbf{G}}_i$. Нетрудно получить матрицу монодромии $\mathbf{M}_2$, вычисленную от точки $\mathbf{z}(T/2)$

$$\mathbf{M}_2 = \mathbf{Z}(T/2) \tilde{\mathbf{G}}_i \mathbf{Z}^\top(T/2) \tilde{\mathbf{G}}_i. \quad (2.11)$$

Вычисление матриц монодромии $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$ по формулам (2.10) и (2.11) соответственно предпочтительнее по следующим соображениям. Во-первых, инте-

грирование системы (2.5) на половине периода требует меньших вычислительных затрат и даёт более точные результаты. Во-вторых, в случае бифуркации потери симметрии (см. подраздел 2.1.4) требуется информация о структуре матрицы монодромии как в точке $\mathbf{z}(0)$, так и в точке $\mathbf{z}(T/2)$.

Воспользуемся этими соображениями для выявления свойств матрицы монодромии двойко симметричного периодического решения. Тогда для её вычисления достаточно знать решение системы (2.5) на четверти периода $\mathbf{Z}(T/4)$. Действительно, пусть начальная точка $\mathbf{z}_0$ дважды симметричной орбиты расположена на множестве Σ_1 , тогда через четверть периода $\mathbf{Z}(T/4) \in \Sigma_2$. Обозначим через $\mathbf{Z}_1(T/4)$ решение системы (2.5), соответствующее начальной точке $\mathbf{z}(0)$, а через $\mathbf{Z}_2(T/4)$ — решение, соответствующее начальной точке $\mathbf{z}(T/4)$. Согласно групповому свойству решений имеем $\mathbf{Z}_1(T/2) = \mathbf{Z}_2(T/4)\mathbf{Z}_1(T/4)$. С другой стороны, в силу свойства t -инвариантности уравнения в вариациях относительно преобразования g_2 , имеем

$$\mathbf{Z}_2(-T/4) = \mathbf{G}_2^{-1}\mathbf{Z}_2(T/4)\mathbf{G}_2 \Rightarrow \mathbf{Z}_2(T/4) = \mathbf{G}_2\mathbf{Z}_2(-T/4)\mathbf{G}_2^{-1}.$$

Используя тот факт, что $\mathbf{Z}_2(-T/4) = \mathbf{Z}_1^{-1}(T/4) = -\mathbf{J}\mathbf{Z}_1^\top(T/4)\mathbf{J}$, получаем для $\mathbf{Z}_1(T/2)$ выражение

$$\mathbf{Z}_1(T/2) = \tilde{\mathbf{G}}_1\mathbf{Z}_1^\top(T/4)\tilde{\mathbf{G}}_2\mathbf{Z}_1(T/4).$$

Применяя t -инвариантность системы (2.5) относительно преобразования g_1 , в итоге получим формулы для матриц монодромии $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$

$$\mathbf{M}_1 = \left[\tilde{\mathbf{G}}_1\mathbf{Z}_1^\top(T/4)\tilde{\mathbf{G}}_2\mathbf{Z}_1(T/4) \right]^2, \quad \mathbf{M}_2 = \left[\mathbf{Z}_1(T/4)\tilde{\mathbf{G}}_1\mathbf{Z}_1^\top(T/4)\tilde{\mathbf{G}}_2 \right]^2. \quad (2.12)$$

Непосредственными вычислениями убеждаемся в том, что для двойко симметричного периодического решения матрицы монодромии, вычисленные в точках $\mathbf{z}(0)$ и $\mathbf{z}(T/2)$, а также в точках $\mathbf{z}(T/4)$ и $\mathbf{z}(3T/4)$, попарно равны.

Наконец, рассмотрим случай g_3 -инвариантных периодических решений. Пусть $\mathbf{z}_0$ — начальная точка такого решения, тогда нетрудно видеть, что $\mathbf{z}_1 \equiv$

$\mathbf{z}(T/2, \mathbf{z}_0) = -\mathbf{z}_0$. В силу симметрии векторы фазовой скорости, вычисленные в точках $\mathbf{z}_0$ и $\mathbf{z}_1$, будут равны по абсолютной величине и противоположны по направлению. Следовательно, вектор $\mathbf{v}_0$ является собственным вектором матрицы $\mathbf{Z}(T/2, \mathbf{z}_0)$ и ему соответствует собственное число -1 . Матрица монодромии в этом случае есть

$$\mathbf{M} = \mathbf{Z}^2(T/2, \mathbf{z}_0). \quad (2.13)$$

Этот факт будет использован в дальнейшем при исследовании удвоения периода двояко симметричных периодических решений.

Особая структура матрицы монодромии обратимо-симметричного периодического решения приводит к наличию некоторой внутренней симметрии матрицы M :

$$\begin{aligned} m_{33} &= m_{11}, & m_{44} &= m_{22}, & m_{43} &= -m_{12}, \\ m_{23} &= -m_{14}, & m_{34} &= -m_{21}, & m_{41} &= -m_{32}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Заметим, что наличие двух симметрий у периодического решения не добавляет дополнительных соотношений к равенствам (2.14).

Приведенные выше рассуждения позволяют сформулировать

Теорема 2.1. *Матрица монодромии $\mathbf{M}$ двояко симметричного периодического решения является полным квадратом и, как следствие, её индекс устойчивости не может быть меньше -1 .*

Доказательство теоремы следует непосредственно из формул (2.12) или (2.13) и того факта, что след $\text{Tr } \mathbf{M}$ матрицы $\mathbf{M}$ такого решения равен сумме квадратов собственных чисел вещественной матрицы $\mathbf{Z}(T/2, \mathbf{z}_0)$, т. е., является неотрицательной величиной, а значение индекса устойчивости S вычисляется по формуле (2.9).

2.1.3. Продолжение семейства периодических решений

Процедура вычисления семейства периодического решения обычно строится по предикторно-корректорной схеме. Вначале предиктор находит малые поправки $\delta \mathbf{z}$ и δT к начальным условиям и периоду, а затем корректор уточняет поправки и в случае успеха получает новое периодическое решение семейства.

Пусть известно некоторое невырожденное периодическое решение $\mathbf{z}(t, \mathbf{z}_0)$ семейства с начальным условием и периодом $(\mathbf{z}_0, T)$, тогда вблизи него должно быть периодическое решение $\mathbf{z}(t) + \delta \mathbf{z}(t)$ с периодом $T + \delta T$. Раскладывая левую часть условия периодичности $\mathbf{z}(T + \delta T, \mathbf{z}_0 + \delta \mathbf{z}) = \mathbf{z}_0 + \delta \mathbf{z}$ в ряд Тейлора, оставляя в разложении члены не выше первого порядка малости по $\delta \mathbf{z}$ и δT , получаем, что малые добавки $\delta \mathbf{z}$ и δT должны удовлетворять линейной однородной системе

$$(\mathbf{M} - \mathbf{E})\delta \mathbf{z}(T) + \mathbf{v}_1 \delta T = 0, \quad (2.15)$$

где $\mathbf{v}_1 = \mathbf{J} \text{grad } H(\mathbf{z}(T, \mathbf{z}_0))$. Множество решений этой системы определяется структурой матрицы монодромии $\mathbf{M}$.

Для обратимых симметричных периодических решений (которые рассматриваются в данной работе) вместо системы (2.15) удобнее продолжать однопараметрическое семейство по другой схеме — схеме продолжения по длине дуги [89, Гл. 5]. Выбирая начальное приближение симметричного решения на инвариантном множестве Σ_b , $b = 1, 2$, в силу теоремы 2.1 условие периодичности эквивалентно условию равенства нулю отображения

$$\mathbf{g} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \boldsymbol{\xi} \mapsto \mathbf{g}(\boldsymbol{\xi}),$$

где $\boldsymbol{\xi} = (z_0^j, z_0^k, \tau)$, $\mathbf{g}(\boldsymbol{\xi}) = \left(z_l \left(\tau, z_0^j, z_0^k \right), z_m \left(\tau, z_0^j, z_0^k \right) \right)^\top$. Величина τ равна $T/2$ для однократно и $T/4$ для двояко симметричного решения, а индексы j, k, l, m выбираются так, чтобы пара j, k соответствовала ненулевым компонентам вектора начального условия $\mathbf{z}_0 \in \Sigma_b$, а пара l, m — нулевым компонентам вектора $\mathbf{g} \in \Sigma_e$, $e = 1, 2$, согласно формулам (2.4). Тогда решая однородную систему

$D \mathbf{g}(\boldsymbol{\xi}) \delta \boldsymbol{\xi} = 0$ по формулам

$$\frac{\delta \xi_1}{D_1} = \frac{\delta \xi_2}{D_2} = \frac{\delta \xi_3}{D_3},$$

где D_i — определитель матрицы Якоби $D \mathbf{g}(\boldsymbol{\xi})$ с удалённым i -м столбцом, взятый со знаком $(-1)^i$, находим поправки $\delta \boldsymbol{\xi}$ в виде

$$\delta \xi_i = \tilde{D}_i \Delta s, \quad \tilde{D}_i = D_i / \sqrt{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2}.$$

Шаг смещения Δs вдоль семейства выбирается таким образом, чтобы обеспечить сходимость корректора.

Когда найдены поправки $\delta \boldsymbol{\xi}$ первого порядка применяется корректор, который обычно реализуется в виде итерационной процедуры по модифицированной схеме Ньютона. Пусть $\boldsymbol{\xi}^{(0)}$ — вычисленное на шаге предиктора приближенное начальное условие периодического решения, тогда итерационная схема имеет вид

$$\boldsymbol{\xi}^{(k+1)} = \boldsymbol{\xi}^{(k)} - \left[D \mathbf{g}(\boldsymbol{\xi}^{(k)}) \right]^+ \mathbf{g}(\boldsymbol{\xi}^{(k)}),$$

где знаком $^+$ обозначена псевдообратная матрица [90, Гл. I, § 5] матрицы Якоби $D \mathbf{g}(\boldsymbol{\xi})$ размера 2×3 , состоящей из соответствующих компонентов матрицанта $\mathbf{Z}(\tau)$ и компонентов вектора фазовой скорости $\mathbf{v}(\tau)$. Псевдообратная матрица $\mathbf{B}^+$ матрицы $\mathbf{B}$ размера $m \times n$, $m > n$, может быть вычислена по формуле

$$\mathbf{B}^+ = \mathbf{B}^\top (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^\top)^{-1}$$

при условии, что $\text{rang } \mathbf{B} = n$.

Описанная схема продолжения семейства по длине дуги обладает тем преимуществом, что позволяет проходить «складки», т. е. когда одна из величин ξ_i , $i = 1, 2, 3$, достигает экстремального значения.

Покажем, что собственному числу $+1$ матрица монодромии $\mathbf{M}$ невырожденного периодического решения $(\mathbf{z}_0, T)$ автономной неинтегрируемой системы Гамильтона соответствует жорданова клетка второго порядка.

Определение 2.4. Периодическое решение (z_0, T) автономной неинтегрируемой системы Гамильтона (2.1) называется *невыврожденным* или *простым*, если её матрица монодромии M имеет единственный элементарный делитель $(\lambda - 1)^2$, соответствующий мультипликатору $\rho_{1,2} = 1$, а все остальные элементарные делители просты.

Действительно, в случае общего положения, т. е. когда периодическое решение невырождено, согласно [83, Ch. 6, Theorem 6.5.1], оно (решение) лежит на гладкой двумерной цилиндрической поверхности периодических решений, образующая которой параметризуется значением интеграла $H(z)$. Из этой теоремы следует, что размерность пространства решений системы (2.15) равна двум и, следовательно, ранг матрицы $\begin{pmatrix} M - E & : & v_0 \end{pmatrix}$ системы (2.15) должен быть равен трём. Очевидно, что если у некоторой матрицы M размера $n \times n$ собственное число λ полупростое и имеет кратность k , то $\text{rang}(M - \lambda E) = n - k$. Следовательно, собственное число $+1$ кратности 2 не является полупростым и ему соответствует жорданова клетка размера 2×2 . Эти же рассуждения верны и для произвольной автономной системы Гамильтона с n степенями свободы.

Лемма 2.1. Матрица монодромии M невырожденного периодического решения автономной неинтегрируемой системы Гамильтона в случае общего положения, т. е. когда имеется единственный первый интеграл $H(z) = h$, всегда имеет жорданову клетку второго порядка, соответствующую собственному числу $+1$ кратности 2.

Анализ решений системы (2.15) удобнее проводить в том базисе, в котором матрица M имеет наиболее простую форму, т. е. нормальную форму. Классификация всех нормальных форм постоянных канонических матриц была дана ещё Вильямсоном в 1937 году (см. [22; 91, Гл. II]), однако здесь воспользуемся несколько иным подходом. Этот подход основан на идее перехода к некоторому сопутствующему ортонормированному базису, в котором один орт — это касательный вектор к фазовой траектории, а другой — нормаль к изоэнергетической

поверхности $H(\mathbf{z}) = h$.

Преобразования матрицы монодромии $\mathbf{M}$

Выполним линейное преобразование матрицы $\mathbf{M}$, упрощающее её структуру и облегчающее её анализ: $\mathbf{N} = \mathbf{A}^\top \mathbf{M} \mathbf{A}$. Потребуем, чтобы матрица $\mathbf{A}$ этого преобразования принадлежала группе $Sp(4, \mathbb{R}) \cap SO(4, \mathbb{R})$, т. е. была одновременно и симплектической и ортогональной. Дополнительным условием должно быть сохранение внутренней симметрии (2.14) для обратимых симметричных периодических решений.

Как указано в [92], задача построения такой матрицы $\mathbf{A}$ эквивалентна проблеме построения невырожденного непрерывного касательного векторного поля на сфере S^3 . Как известно [93, Гл. 5, § 34], для S^3 это возможно, следовательно, такое преобразование всегда существует.

Условие симплектичности матрицы $\mathbf{A}$ выполнено, если её столбцы $\mathbf{a}_i$ удовлетворяют условиям $\mathbf{a}_{i+2} = -\mathbf{J}\mathbf{a}_i$, $i = 1, 2$ и $|\mathbf{a}_j| = 1$, $j = 1, \dots, 4$. Условие ортогональности матрицы $\mathbf{A}$ записывается в виде $(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \dots, 4$, δ_{ij} — символ Кронекера. Столбцы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_3$, как указано выше, определены как нормированные векторы фазовой скорости и градиента первого интеграла соответственно. Остаётся найти компоненты столбца $\mathbf{a}_2$ или $\mathbf{a}_4$. Из указанных выше условий составляется полиномиальный идеал. Его размерность оказалась равна 1, т. е. имеется однопараметрическое семейство матриц преобразования $\mathbf{A}$. Условие сохранения внутренней симметрии (2.14) матрицы монодромии $\mathbf{M}$ в итоге выделяет из этого семейства только две матрицы, отличающиеся порядком столбцов $\mathbf{a}_2$ и $\mathbf{a}_4$.

Одна из таких матриц $\mathbf{A}$ была предложена Б.Б. Крейсманом при исследовании периодических решений ограниченной задачи трёх тел (см., например, [88]). Пусть $\mathbf{a}_3 = (H_1, H_2, H_3, H_4)$ — нормированный вектор $\text{grad } H(\mathbf{z}_0)$. Тогда матрица

$\mathbf{A}$ имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} H_3 & -H_4 & H_1 & H_2 \\ H_4 & H_3 & H_2 & -H_1 \\ -H_1 & -H_2 & H_3 & -H_4 \\ -H_2 & H_1 & H_4 & H_3 \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Утверждение 2.2 ([88]). Пусть симплектическая матрица $\mathbf{M}$ имеет собственное значение $+1$, которому соответствует собственный вектор $\mathbf{v}_0 = \mathbf{a}_1$. Тогда матрица $\mathbf{N} = \mathbf{A}^\top \mathbf{M} \mathbf{A}$ имеет вид

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 & n_{12} & n_{13} & n_{14} \\ 0 & n_{22} & n_{23} & n_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & n_{42} & n_{43} & n_{44} \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Это утверждение приведена в [88] без доказательства. В данной работе её истинность проверена с использованием системы компьютерной алгебры Maple, хотя такие же преобразования могут быть выполнены в любой системе компьютерной алгебры, позволяющей вычислять базис Грёбнера полиномиального идеала и с его помощью находить каноническое представление произвольного многочлена по модулю идеала. Общая схема проверки такова.

1) Для произвольной 4×4 матрицы $\mathbf{M}$ с помощью условия симплектичности (2.6) составляется полиномиальный идеал $\mathcal{J}_1$. Для него вычисляется базис Грёбнера $\mathcal{GB} \mathcal{J}_1$ для чистого лексикографического порядка от элементов m_{ij} , $i, j = 1, \dots, 4$ матрицы $\mathbf{M}$.

2) Согласно свойству 4) на стр. 76 матрица $\mathbf{M}$ имеет собственное число, равное $+1$. Поэтому вычисляется характеристический многочлен $P_\lambda(\mathbf{M})$, его коэффициенты упрощаются по модулю идеала $\mathcal{GB} \mathcal{J}_1$, и к этому идеалу добавляется полином, равный сумме коэффициентов многочлена $P_\lambda(\mathbf{M})$. Для нового идеала вычисляется его базис Грёбнера $\mathcal{GB} \mathcal{J}_2$ с тем же лексикографическим порядком.

3) Записывается в символьной форме собственный вектор v_0 матрицы M как решение однородной системы линейных алгебраических уравнений с матрицей $M - E$ в виде

$$\frac{v_0^1}{M_1} = -\frac{v_0^2}{M_2} = \frac{v_0^3}{M_3} = -\frac{v_0^4}{M_4},$$

где M_i — миноры элементов первой строки матрицы $M - E$. Компоненты вектора v_0 упрощаются по модулю идеала $\mathcal{GBJ}_2$.

4) В идеал $\mathcal{GBJ}_2$ добавляется многочлен $v_0^2 - 1$, обеспечивающий условие нормировки вектора v_0 , и вычисляется новый базис Грёбнера $\mathcal{GBJ}_3$. Из компонентов вектора v_0 составляется матрица A по формуле (2.16) и с её помощью выполняется переход к матрице N .

5) После этого каждый элемент матрицы N упрощается по модулю базиса $\mathcal{GBJ}_3$. Матрица N принимает форму (2.17).

В силу громоздкости получаемых в процессе вычисления выражений они здесь не приводятся, но легко могут быть восстановлены по данному выше описанию с помощью какой-либо системы компьютерной алгебры.

Общее решение уравнения продолжения для невырожденного периодического решения

Преобразование матрицы монодромии M с помощью матрицы A позволяет, с одной стороны, прояснить структуру решений уравнения продолжения (2.15) для несимметричного периодического решения [88], а с другой стороны, упростить её анализ в критических случаях (см. далее п. 2.1.4).

Отметим, что случай двояко симметричного периодического решения ничем не отличается от случая однократно симметричного, рассмотренного в [88].

Для обратимого симметричного периодического решения $z(t, z_0)$ с началь-

ным условием $\mathbf{z}_0 \in \Sigma_i$ матрица $\mathbf{A}_i$ имеет вид

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -H_4 & H_1 & 0 \\ H_4 & 0 & 0 & -H_1 \\ -H_1 & 0 & 0 & -H_4 \\ 0 & H_1 & H_4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} H_3 & 0 & 0 & H_2 \\ 0 & H_3 & H_2 & 0 \\ 0 & -H_2 & H_3 & 0 \\ -H_2 & 0 & 0 & H_3 \end{pmatrix}.$$

Внутренняя симметрия (2.14) матрицы $\mathbf{M}$ приводит к следующим соотношениям для преобразованной матрицы $\mathbf{N}$:

$$n_{22} = n_{44}, \quad n_{23} = -n_{14}, \quad n_{43} = -n_{12},$$

а индекс устойчивости в этом случае $S = n_{22}$.

Вектор $\mathbf{b}$ продолжения семейства имеет вид

$$\mathbf{b} = (0, 2n_{23}, 2(1 - n_{22}), 0, -(n_{12}m_2 + n_{13}m_3)/v). \quad (2.18)$$

Его проекция $\tilde{\mathbf{b}}$ на фазовое пространство $\mathbb{M}$ определяется только вторым и третьим столбцами матрицы $\mathbf{A}$, что, очевидно, подтверждает приведённые выше рассуждения о продолжении обратимого симметричного решения.

Утверждение 2.3 ([88; 94]). *Продолжение невырожденного симметричного периодического решения вдоль семейства сохраняет его симметрию.*

Данное утверждение, по-видимому, было известно давно, но его доказательство автор нашёл только в указанных выше работах. В статье [88], основанной на более раннем препринте [95], доказательство использует структуру матрицы монодромии периодического решения, а в статье [94], основанной на более раннем препринте [96], доказательство использует структуру НФ гамильтониана.

2.1.4. Критические решения семейства двояко симметричного решения

В предыдущем пункте рассматривалась ситуация, когда периодическое решение невырожденное. Здесь выясним, как симметрия периодического решения

влияет на поведение его семейства в критических решениях, т. е. для тех решений, для которых либо у матрицы монодромии M , либо у её q -й степени M^q соответствующего критического решения появляются дополнительные элементарные делители. Это решение семейства будем называть *бифуркационным решением*.

Отметим, что соответствующий бифуркационный анализ однократно симметричных периодических решений был проведен ранее. Так, в Главе VIII книги [22] это было сделано с использованием метода нормальной формы. В статье [88] анализ симметричного решения проводился с использованием последовательных симплектических преобразований матрицы M . Фактически эта работа является продолжением методики последней работы на случай двойко симметричных решений.

Мы рассмотрим три типичных критических случая, которые обычно относятся к одному из видов бифуркации периодического решения [83, Ch. 11]:

- бифуркация рождения-гибели (седло-узел);
- бифуркация потери симметрии (типа «вилки»);
- бифуркация кратного увеличения периода.

Первые два случая соответствуют значению индекса устойчивости $S = 1$, последний случай соответствует значению $S = \cos(2\pi p/q)$, $p, q \in \mathbb{N}$, p и q взаимно просты. Отдельно рассмотрим важный случай бифуркации удвоения периода при $S = -1$.

Случай $S = 1$

В этом случае $n_{22} = n_{44} = 1$, матрица N принимает вид

$$N = \begin{pmatrix} 1 & n_{12} & n_{13} & n_{14} \\ 0 & 1 & -n_{14} & n_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & n_{42} & -n_{12} & 1 \end{pmatrix},$$

а два компонента m_3, m_4 вектора $\mathbf{b}$ согласно (2.18) равны 0. Условие симплектичности матрицы $\mathbf{N}$ приводит к условиям

$$2n_{14} = n_{24}n_{12}, \quad n_{24}n_{42} = 0, \quad n_{14}n_{42} = 0.$$

Здесь возможны два случая в зависимости от значения единственного нетривиального компонента m_2 .

Случай $m_2 \neq 0$. Тогда из (2.18) следует, что $n_{42} = 0$, и матрица $\mathbf{N}$ принимает вид

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 & n_{12} & n_{13} & \frac{1}{2}n_{12}n_{24} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}n_{12}n_{24} & n_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -n_{12} & 1 \end{pmatrix} \sim \exp(\mathbf{J}\mathbf{C}),$$

где матрица $\mathbf{C}$ согласно [22, Гл. II, § 1] подобна матрице

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и, следовательно, имеет элементарный делитель $(\lambda - 1)^4$. В этом случае вектор продолжения семейства $\mathbf{b} = (0, -n_{12}, 0, 0, -n_{12}m_2/v)^\top$, а его проекция $\tilde{\mathbf{b}}$ ортогональна вектору $\text{grad } H(\mathbf{z}_0)$. Следовательно, первый интеграл $H(\mathbf{z})$ достигает экстремума на семействе периодических решений, на характеристике семейства в координатах (h, S) имеется складка, а само критическое решение называется *бифуркацией рождения-гибели*. При прохождении через это решение меняется устойчивость семейства.

Случай $m_2 = 0$. Тогда из (2.18) следует, что $n_{24} = 0$, $n_{42} \neq 0$, и матрица $\mathbf{N}$

принимает вид

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 & n_{12} & n_{13} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & n_{42} & -n_{12} & 1 \end{pmatrix}.$$

Выполним дополнительное симплектическое преобразование с помощью матрицы $\tilde{\mathbf{A}}$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & n_{12}/n_{42} \\ 0 & 1 & n_{12}/n_{42} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица $\tilde{\mathbf{N}} = \tilde{\mathbf{A}}^\top \mathbf{N} \tilde{\mathbf{A}}$ примет вид

$$\tilde{\mathbf{N}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n_{13} + n_{12}^2/n_{42} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & n_{42} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что матрица $\tilde{\mathbf{N}}$ имеет два элементарных делителя $(\lambda - 1)^2$ и $(\lambda - 1)^2$. Корневой вектор, соответствующий первому элементарному делителю, задаёт направление главного семейства $\mathbf{b}_1 = (0, 0, 1, 0, -\tilde{n}_{13}/v)^\top$. Собственный вектор $\mathbf{b}_2 = (0, 0, 0, 1, 0)$, соответствующий второму элементарному делителю, задаёт направление нового семейства периодических решений с периодом, равным периоду решения главного семейства. В этом случае новое решение будет обладать только одной из двух симметрий. Поскольку для двойки симметричных периодических решений матрицы монодромии $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$, вычисленные от взаимно симметричных точек, отстоящих через полпериода, равны, то в результате получаем два порождённых семейства однократно симметричных решений. Периодические решения этих двух порождённых семейств взаимно симметричны относительно другого автоморфизма g_i . Другими словами, если порождённые

семейства состоят из g_1 -симметричных орбит, то эти орбиты взаимно g_2 -симметричны.

Полученные результаты аналогичны ситуации с семействами однократно симметричных периодических решений, описанными в [94], но полученными методом нормальной формы.

Утверждение 2.4 ([94]). *Матрица монодромии M двояко симметричного периодического решения при $S = 1$ в случае общего положения имеет*

- *либо один элементарный делитель $(\lambda - 1)^4$, которому соответствует главное двояко симметричное семейство, при этом первый интеграл $H(\mathbf{z})$ достигает экстремума в бифуркационном решении, т. е. имеет место бифуркация рождения-гибели;*
- *либо два элементарных делителя $(\lambda - 1)^2$ и $(\lambda - 1)^2$, первому соответствует главное двояко симметричное семейство, второму — новое семейство, обладающее только одной из двух симметрий, например, g_1 -симметричное, т. е. имеет место бифуркация потери симметрии.*

Случай $S = -1$

Рассмотрим подробнее критический случай, соответствующий бифуркации удвоения периода. В общем случае компонента $m_3 \neq 0$ и можно выполнить дополнительное симплектическое преобразование с помощью матрицы $\tilde{A}$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & m_2/m_3 \\ 0 & 1 & m_2/m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

после которого получим

$$\tilde{\mathbf{N}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \tilde{n}_{13} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & n_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & n_{42} & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

с дополнительным условием $n_{24}n_{42} = 0$. Здесь $\tilde{n}_{13} = n_{12}m_2/m_3 + n_{13}$.

Для однократно симметричного периодического решения имеем либо $n_{24} = 0$, $n_{42} \neq 0$, либо $n_{42} = 0$, $n_{24} \neq 0$. Тогда матрица $\tilde{\mathbf{N}}$ имеет два элементарных делителя $(\lambda - 1)^2$ и $(\lambda + 1)^2$. Корневой вектор $\mathbf{r}_1$, соответствующий первому элементарному делителю, задаёт направление главного семейства $\mathbf{b}_1 = \mathbf{r}_1$. Для второго элементарного делителя возможны два варианта с собственным вектором $\mathbf{b}_2^1 = (0, 1, 0, 0)$ в первом случае и $\mathbf{b}_2^2 = (0, 0, 0, 1)$ во втором. Этот вектор задаёт направление нового семейства периодических решений с периодом, равным периоду решения главного семейства. Анализ, проведённый в [88], показывает, что на порождённом семействе всегда имеет место экстремум $H(\mathbf{z})$ и оно (семейство) сохраняет тип симметрии порождающего решения.

Рассмотрим случай двояко симметричного решения. В этом случае матрица монодромии $\mathbf{M}$, согласно (2.13), является квадратом матрицы решения $\mathbf{Z}(T/2, \mathbf{z}_0)$ уравнения в вариациях (2.5) на половине периода. Но тогда, в силу вещественности, у неё не может быть элементарного делителя $(\lambda + 1)^2$, поскольку вещественного квадратного корня из жордановой клетки второго порядка, соответствующей этому делителю, нет [83, Ch. 3].

Теорема 2.2. *Матрица монодромии $\mathbf{M}$ двояко симметричного периодического решения при $S = -1$ в случае общего положения имеет три элементарных делителя: $(\lambda - 1)^2$, $(\lambda + 1)$ и $(\lambda + 1)$. Двум последним соответствуют однократно симметричные решения с разными типами симметрии и периодом $T' = 2T$. На каждом из семейств однократно симметричных решений первый интеграл $H(\mathbf{z})$ достигает экстремума в бифуркационном решении.*

Имеется два сценария бифуркации удвоения периода:

- 1) на обоих новых порождённых семействах интеграл $H(\mathbf{z})$ имеет один и тот же тип экстремума (максимум или минимум) в критическом решении,
- 2) на новых порождённых семействах интеграл $H(\mathbf{z})$ имеет разные типы экстремума (у одной пары минимум, у другой — максимум).

При первом сценарии в результате бифуркации появляется четыре пары периодических решений с удвоенным периодом — две пары с одним типом симметрии, две с другим. В этом случае одна пара семейств двояко периодических решений имеет устойчивые орбиты, а другая неустойчивые.

При втором сценарии в окрестности бифуркационного решения имеется по одной паре периодических решений с удвоенным периодом. Поскольку согласно теореме 2.1 индекс устойчивости S порождающего семейства всегда больше или равен -1 , то порождённые семейства двояко периодических решений всегда имеют только неустойчивые орбиты.

Случай кратного увеличения периода

Случай бифуркации удвоения периода является частным случаем бифуркации кратного увеличения периода когда $S = \cos \varphi$, $\varphi = 2\pi p/q$. Количественный анализ аналогичный тому, что был проведён в [88], показывает, что при $S \neq \pm 1$ компонента m_3 вектора $\mathbf{b}$ не равна нулю. Тогда произведение матриц $\tilde{\mathbf{A}}$ из (2.19) и $\mathbf{C} = \text{diag}\{1, c_{22}, 1, c_{44}\}$, где $c_{44} = \sqrt{n_{42}/\sin \varphi}$, $c_{22} = 1/c_{44}$, даёт матрицу симплектического преобразования $\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{C}$, приводящего матрицу монодромии $\tilde{\mathbf{N}}$ к виду

$$\tilde{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \tilde{n}_{13} & 0 \\ 0 & \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

При этом угол φ определяется из условий

$$\cos \varphi = S, \quad n_{42} \sin \varphi \geq 0.$$

Из (2.20) следует, что для нечётных и взаимно простых чисел p, q матрица $\widetilde{\mathbf{M}}^q$ имеет структуру элементарных делителей $(\lambda - 1)^2$, $(\lambda - 1)$ и $(\lambda - 1)$. Если же одно из чисел p, q , чётно, то у матрицы $\mathbf{Z}(qT/2, \mathbf{z}_0)$ структура элементарных делителей $(\lambda - 1)^2$, $(\lambda + 1)$ и $(\lambda + 1)$, т. е. такая же как в теореме 2.2. Как и в предыдущих случаях, корневой вектор жордановой клетки второго порядка с собственным числом $+1$ даёт направление продолжения главного семейства. Собственные векторы, соответствующие простым элементарным делителям, дают направление либо одному двояко симметричному порождённому семейству для нечётных p, q , либо двум парам семейств однократно симметричных периодических решений, когда одно из p, q чётно. Качественное объяснение этого эффекта состоит в следующем.

Рассмотрим двояко симметричное периодическое решение, орбита которого последовательно ортогонально пересекает плоскости симметрии $\Sigma_{1,2}$ через четверть периода. Пусть это решение с периодом T является порождающим решением для периодического решения второго рода с периодом qT . Для того чтобы орбита порождённого решения также имела две симметрии, необходимо выполнение указанного выше условия ортогональности. Пусть начальная точка порожденной орбиты лежит на плоскости Σ_1 , тогда через четверть периода следующая ортогональная точка будет лежать на плоскости Σ_2 , при этом точка орбиты должна совершить $(2k - 1)/4$ оборота вокруг начала координат, где $k \in \mathbb{N}$. Поэтому за весь период qT точка орбиты совершит $2k - 1$ оборотов, то есть число q всегда нечётное. С другой стороны, орбита, соответствующая резонансу p/q , может быть представлена в фазовом пространстве как замкнутая винтовая линия, лежащая на некотором торе [97], которая делает за один период q оборотов по одной образующей тора и p оборотов по другой образующей. Поэтому для двояко симметричной орбиты число p тоже должно быть нечётным.

Теорема 2.3. Пусть двояко симметричное периодическое решение с периодом T имеет значение индекса устойчивости S , равное $\cos(2\pi p/q)$, где $p, q \in \mathbb{N}$ и

взаимно просты. Тогда в случае общего положения

- если оба числа p, q нечётные, то в окрестности исходного решения имеется одно семейство двояко симметричных решений с периодом $T' = qT$.
- если одно из чисел p или q чётно, то в окрестности исходного решения имеется две пары семейств однократно симметричных решений с различными типами симметрий для каждой пары и с периодами $T' = qT$.

Отметим, что для всех случаев, кроме случая $p/q = 1/3$, интеграл H достигает экстремума на порождённых семействах (подробнее см. [22, Гл. VIII]).

Результаты раздела 2.1 опубликованы в [17; 98].

2.2. Обзор семейств симметричных периодических решений

2.2.1. Краткий обзор семейств периодических решений, найденных ранее

Приведём краткий обзор семейств симметричных периодических решений плоской круговой задачи Хилла с точки зрения их порождающих решений. Больше внимания уделим новым семействам, которые были найдены и исследованы с помощью описанного выше алгоритма.

Энон в [39; 51] описал шесть основных семейств симметричных периодических решений задачи Хилла, орбиты которых совершают один оборот вокруг начала координат: a, c, f, g, g' и f_3 (в [51] это семейство названо g_3). Он использовал ту же систему обозначений периодических решений, что и Стрёмгрен в Копенгагенской задаче (см. [47, п. 9.4]). И хотя указанные выше семейства были продолжены по C до своих предельных порождающих решений, но на тот момент их теория ещё не была построена.

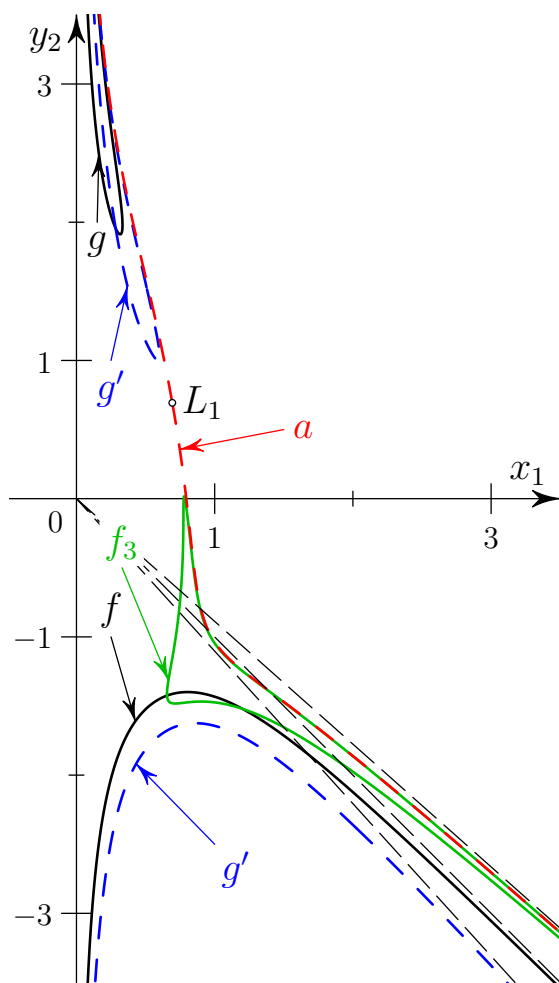
В [52] были описаны 7 новых семейств симметричных решений, орбиты которых совершают не более трёх оборотов. Для каждого из описанных семейств были найдены предельные порождающие орбиты и указаны многие их свойства. Кратко информация об этих семействах приведена в таблице 2.1.

Таблица 2.1. Сводная таблица основных семейств периодических решений

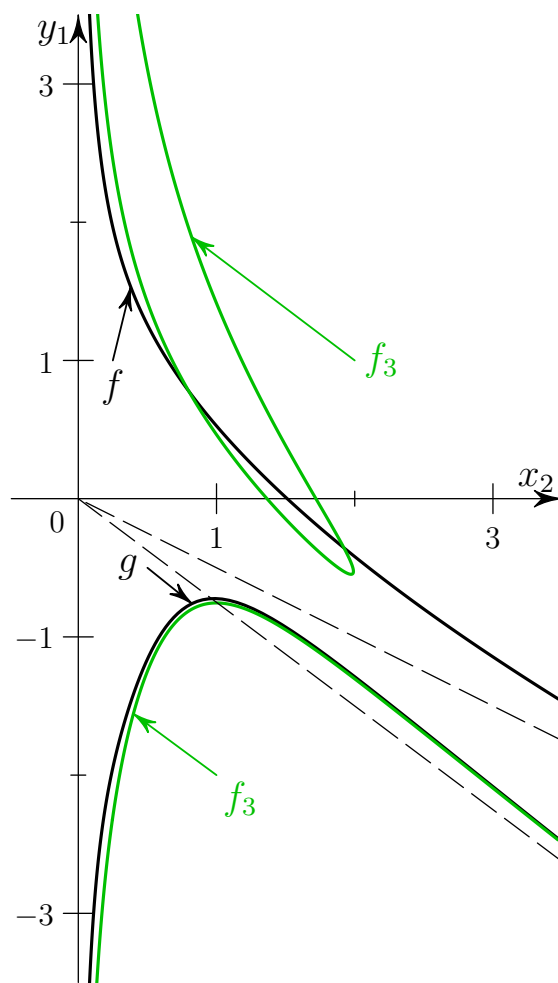
Назв.	Порожд. послед.	Симм.	M	$C_{\max}$
f	—	Σ_1, Σ_2	1	$+\infty$
a	$\{+1\}$	Σ_1	0	$3^{4/3}$
c	$\{-1\}$			
g	$\{i, e\}$	Σ_1, Σ_2	-1	$+\infty$
g'	$\{+2\}, \{-2\}$	Σ_1	1	4.49998
f_3	$\{-1, +1\}$	Σ_1, Σ_2	3	3.80620
	$\{+1, i, -1, e\}$		-1	
Ha'	$\{+2, i, e\}$	Σ_1	0	4.27143
Hb'	$\{+1, +2\}, \{+1, i, e\}$	Σ_1	± 1	4.24613
Hc	$\{(+2)^2, i, e\}, \{+2, (i, e)^2\}$	Σ_1	± 1	4.28267
Hd	$\{+1, +2, +2\}$	Σ_1	2	4.26247
	$\{+1, i, e, i, e\}$		-2	
He	$\{+3\}, \{+1, e, i\}$	Σ_1	2	-8.61520
Hf	$\{(+1)^2, +2\}, \{(+1)^2, i, e\}$	Σ_1	± 1	4.24611
Hg	$\{+2, i, -1, e\}$	Σ_1	0	3.83620

На рис. 2.1 приведены характеристики основных семейств периодических решений в координатах (x_1, y_2) для Σ_1 -симметричных (g' , a — показаны штриховой линией) и двояко симметричных (f , g , f_3 — показаны сплошной линией) семейств (рис. 2.1а) и в координатах (x_2, y_1) для двояко симметричных семейств (рис. 2.1б).

Длинным штрихом показаны асимптотические направления, соответствующие порождающим решениям семейств a , f_3 , f и g' на рис. 2.1а, и порождающим решениям семейств f и g на рис. 2.1б. В силу симметрии показана лишь половина характеристик для $x_i \geq 0$, $i = 1, 2$. Отметим, что рис. 2.1а есть исправленная



а) Характеристики на плоскости $x_1 O y_2$



б) Характеристики на плоскости $x_2 O y_1$

Рис. 2.1. Характеристики семейств двояко симметричных (f , g , f_3 — сплошная линия) и однократно симметричных (a , g' — штриховая линия) периодических решений в координатах (x_1, y_2) (слева) и (x_2, y_1) (справа).

версия рис. 1 в [68] и фиг. 2 в [62].

Ниже дана сводка результатов исследования новых семейств симметричных периодических решений.

В разделе 2.2.2 описаны новые семейства, вычисленные в окрестности критических решений семейства двояко симметричных орбит f_3 . Эти семейства были найдены с использованием методики раздела 2.1.4.

С помощью алгоритма, описанного в п. 1.3, было найдено и исследовано более 20-ти новых семейств симметричных периодических решений задачи

Хилла.

Для упрощения записи n -кратное повторение одной или группы дуг в порождающей последовательности обозначено степенью, например, $\{(+1)^3\} \equiv \{+1, +1, +1\}$.

Семейства, задаваемые дугами $\{\pm j\}$, $j \in \mathbb{N}$ описаны ниже в разделе 2.2.3. Они могут быть использованы при проектировании квазиспутниковых траекторий.

Ниже в разделе 2.2.4 дан обзор трёх классов семейств.

Семейства, задаваемые последовательностями $\{(+1)^n, (+2)^m\}$, $n, m \in \mathbb{N}$ при продолжении по C дают орбиты, состоящие из n витков вокруг точки либрации L_1 и m витков низкоперигейных орбит с апогеем в окрестности L_1 . Такие семейства суть обобщение семейств Hb , Hd и Hf (см. таблицу 2.1) и могут быть использованы для проектирования перелетов в окрестность ближайших к Земле коллинеарных точек либрации L_1 и L_2 .

Семейства, задаваемые последовательностями $\{(-1)^n, (+1)^m\}$, $n, m \in \mathbb{N}$, дают орбиты, совершающие n оборотов вокруг точки L_2 , затем перелёт и m оборотов вокруг L_1 . Эти семейства суть обобщение семейства f_3 (см. таблицу 2.1) и могут быть использованы для проектирования перелётов между точками либрации L_1 и L_2 .

Семейства, задаваемые последовательностями $\{(-1)^n, (+2)^m\}$, $n > m$, дают орбиты, совершающие n оборотов вокруг L_1 и m витков низкоперигейной орбиты с апогеем в окрестности L_2 .

2.2.2. Исследование семейств двояко симметричных решений задачи Хилла

Для плоской круговой задачи Хилла было найдено большое количество семейств периодических решений (см., например, [20] и библиографию в ней, а также [8]). Среди этих семейств можно выделить основные, которые прямо или опосредованно связаны другими семействами через порождающие и/или

критические решения [9]. Такими семействами можно считать семейства двояко симметричных прямых и обратных спутниковых орбит g и f соответственно (см. [20; 51]).

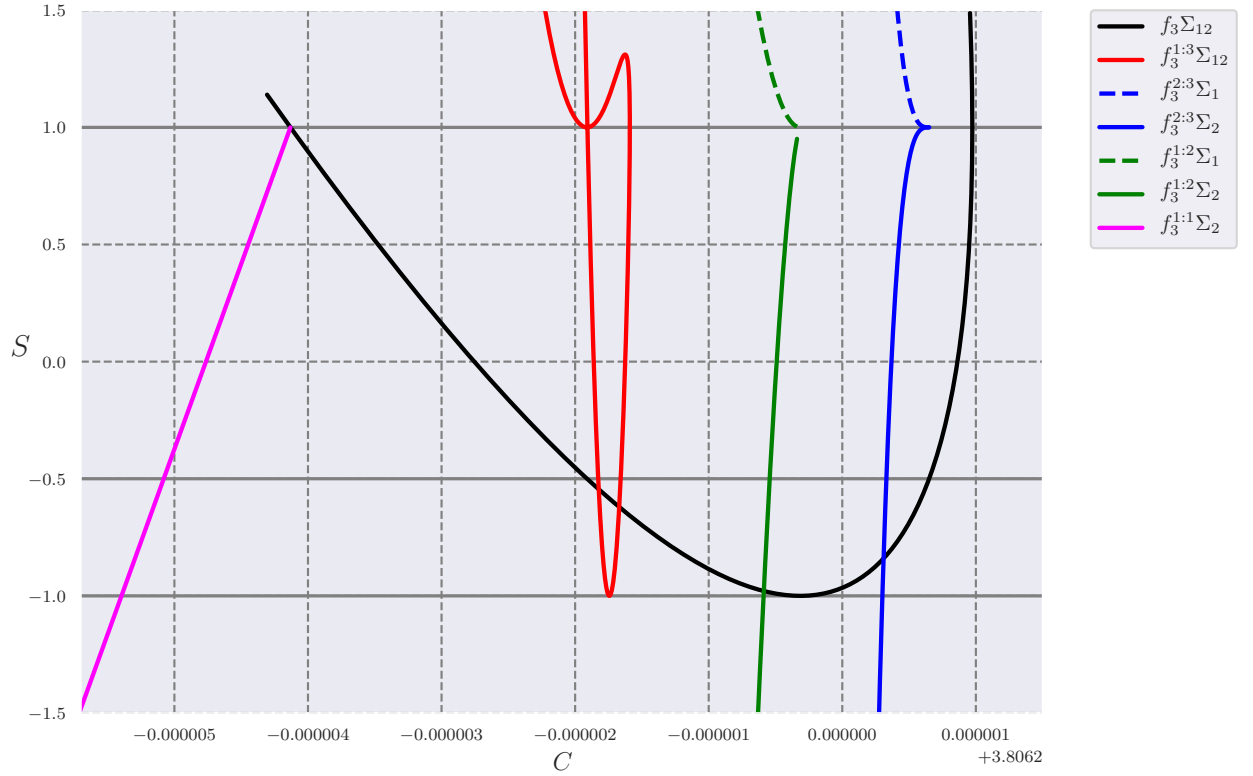


Рис. 2.2. Характеристики семейства f_3 и связанных с ним семейств на плоскости (C, S) .

Семейства g и f не имеют участков, где индекс устойчивости менялся бы на всём интервале устойчивости, поэтому здесь в качестве примера рассмотрим семейство двояко симметричных трёхоборотных периодических решений f_3 . Это семейство найдено Эноном в [39] (где названо g_3), подробно исследовано в [20; 52], где приведены примеры его орбит. В таб. 2.2 приведены начальные условия на плоскостях симметрии, период, значения константы C и индекса устойчивости S для критических орбит семейства f_3 .

Участок характеристики этого семейства в координатах (C, S) , а также других семейств, пересекающихся с ним в критических решениях, показан на рис. 2.2, а пример орбиты семейства — на рис. 2.3. Здесь и далее на рис. 2.4

Таблица 2.2. Параметры критических периодических решений семейства f_3 .

№	$x_1(0)$	$y_2(0)$	T	S	$x_2(T/4)$	$y_1(T/4)$
1	0.7790205	0.0162955	6.6496347	1.0	0.2725126	-2.1521173
2	0.7790055	0.0162955	6.6477869	-0.5	0.2723290	-2.1532489
3	0.7789904	0.0162951	6.6459314	-1.0	0.2721447	-2.1543862
4	0.7789752	0.0162942	6.6440671	-0.5	0.2719594	-2.1555297
5	0.7789601	0.0162930	6.6421949	1.0	0.2717735	-2.1566791

и 2.5 показано положение точек либрации L_1 , L_2 , а также орбита Луны (пунктир). Точками обозначено положение спутника на орбите с временным интервалом в один месяц.

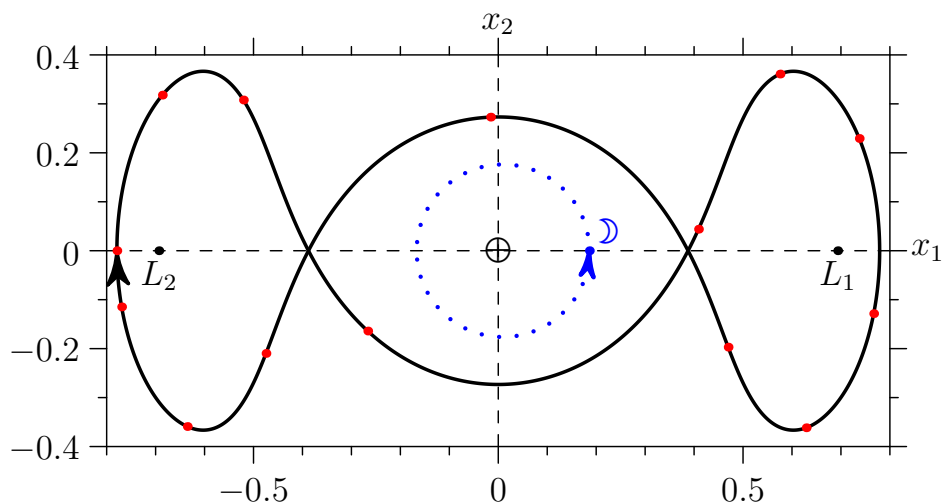


Рис. 2.3. Орбита семейства f_3 .

Индекс устойчивости S семейства f_3 пересекает значение $+1$ в двух точках (см. рис. 2.2). В самой правой точке (строка 5 таб. 2.2) константа C на семействе достигает экстремума и, следовательно, имеет место бифуркация рождения-гибели. В самой левой точке (строка 1 таб. 2.2) семейство пересекает значение $+1$ монотонно, здесь происходит появление двух семейств Σ_2 -периодических решений $f_3\Sigma_2$. Эти семейства были найдены в [53], где обозначены H_k . Более подробно они описаны в [20, п. 4.3.5]. Пример орбиты семейства показан на

рис. 2.4.

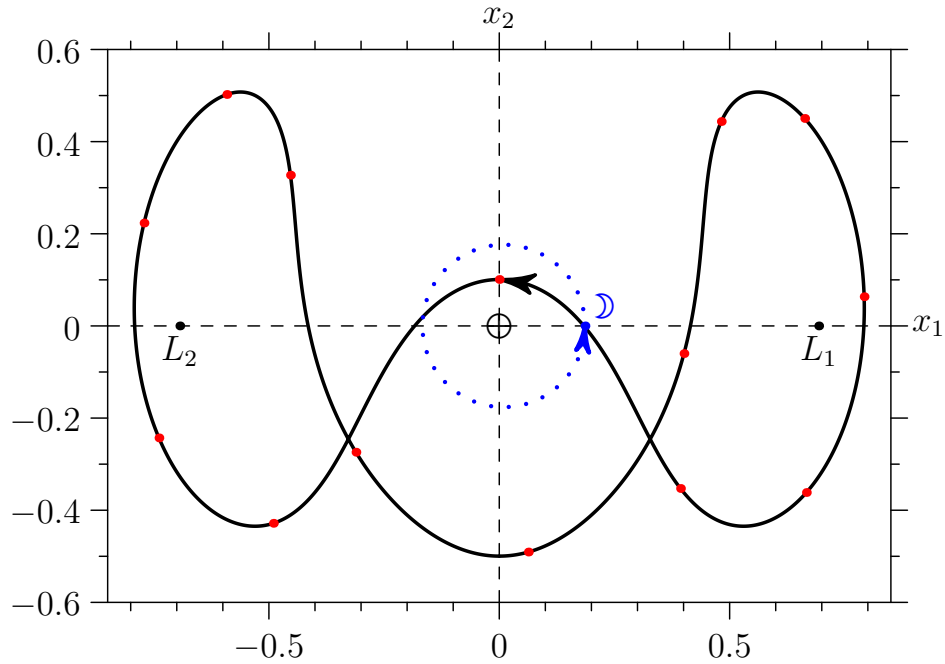


Рис. 2.4. Орбита Σ_2 -симметричного семейства $f_3\Sigma_2$.

Рассмотрим появление двух семейств двояко периодических однократно симметричных решений, когда индекс устойчивости S главного семейства f_3 проходит значение -1 (строка 3 таб. 2.2). Для этого начального условия вычисляются матрицы $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ — каждая для точки на соответствующей плоскости симметрии. Вторые столбцы этих матриц дают векторы $\mathbf{b}_2^1$ и $\mathbf{b}_2^2$, в направлении которых ответвляются двукратные периодические решения симметричные относительно преобразований Σ_1 и Σ_2 соответственно. Эти векторы равны

$$\tilde{\mathbf{b}}_2^1 = (-0.9953708, 0.0, 0.0, -0.0961093)^\top, \quad \tilde{\mathbf{b}}_2^2 = (0.0, 0.1599010, 0.9871331, 0.0)^\top.$$

В соответствии с теоремой 2.2 в этом случае наблюдается появление двух семейств согласно сценарию 1) на стр. 93, поскольку оба семейства имеют максимум по C . Два семейства $f_3^{1:2}\Sigma_1$ g_1 -симметричных орбит содержат только неустойчивые решения. Некоторые начальные условия этого семейства даны в таб. 2.3. Пример орбиты приведен на рис. 2.5а). Ей соответствует последняя

строка таблицы.

Таблица 2.3. Начальные условия периодических решений семейства $f_3^{1:2}\Sigma_1$.

№	$x_1(0)$	$y_2(0)$	T	S	$x_1(T/2)$	$y_2(T/2)$
1	0.7789945	0.0162954	13.2918621	1.0029942	0.7789862	0.0162946
2	0.7790215	0.0162972	13.2918633	10.189443	0.7789594	0.0162912
3	0.8146104	-0.2266505	13.7419253	$3.0 \cdot 10^{11}$	0.7734352	-0.2359037

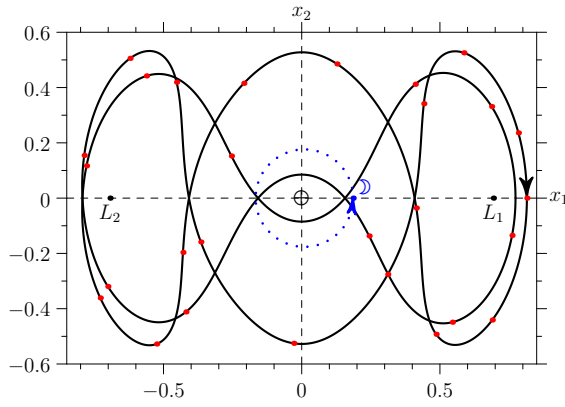
Два семейства $f_3^{1:2}\Sigma_2$ Σ_2 -симметричных орбит имеют небольшой участок с устойчивыми решениями. Некоторые начальные условия этого семейства даны в таб. 2.4. Пример орбиты приведен на рис. 2.5б). Ей соответствует последняя строка таблицы.

Таблица 2.4. Начальные условия периодических решений семейства $f_3^{1:2}\Sigma_2$.

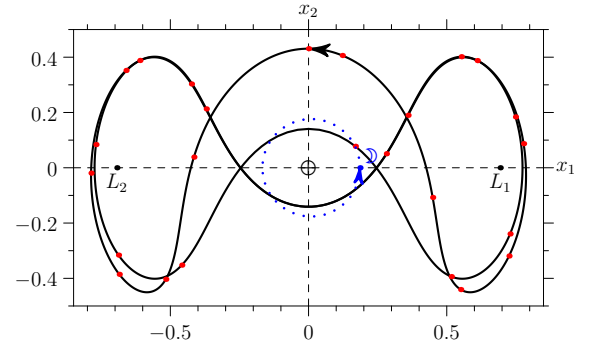
№	$x_2(0)$	$y_1(0)$	T	S	$x_2(T/2)$	$y_1(T/2)$
1	0.2722264	-2.1538817	13.2917712	0.9998048	0.2720628	-2.1548915
2	0.2725404	-2.1519454	13.2901165	-1.0088341	0.2717481	-2.1568361
3	0.4308632	-1.4454805	12.1324885	$-4.57 \cdot 10^9$	0.1405653	-3.3987653

Наконец, рассмотрим появление трёхкратно периодических порождённых решений. Оно происходит, когда $S = -1/2$, что возможно в двух ситуациях.

При $p/q = 1/3$. В этой ситуации согласно теореме 2.3 появляется одно семейство двояко симметричных решений, которое вблизи порождающего семейства имеет только неустойчивые решения. Однако здесь на семействе при продолжении достигается максимум константы C , что видно по его характеристике на рис. 2.2. Следовательно, при одном и том же значении интеграла C на сечении Пуанкаре должны наблюдаться два набора неподвижных точек: один набор



а) g_1 -симметричная орбита семейства $f_3^{1:2}\Sigma_1$



б) g_2 -симметричная орбита семейства $f_3^{1:2}\Sigma_2$

Рис. 2.5. Орбиты семейств двойко периодических решений.

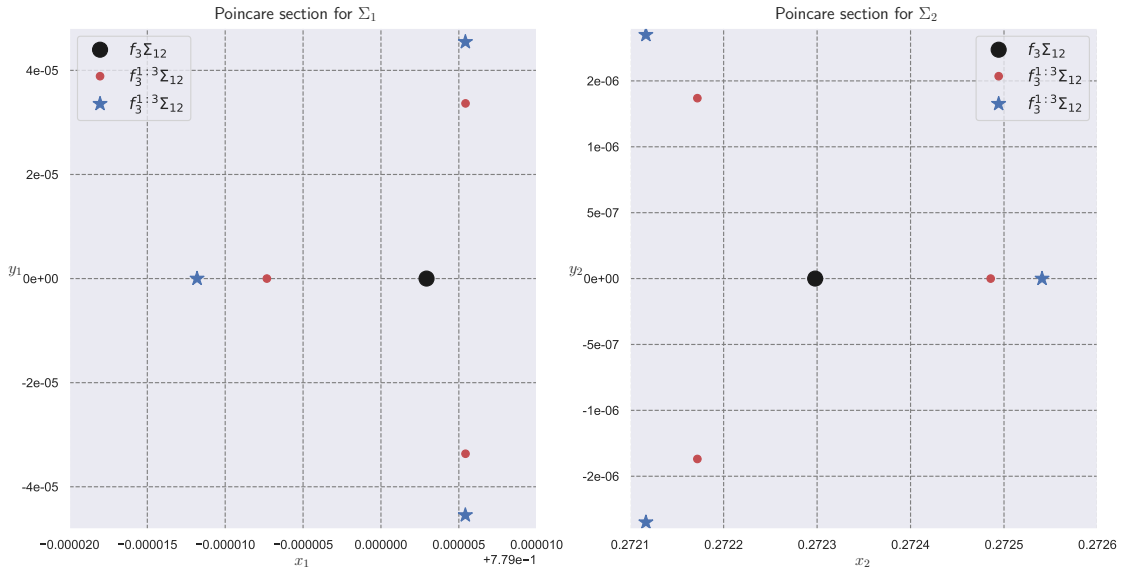


Рис. 2.6. Сечение Пуанкаре плоскостями Σ_1 (слева) и Σ_2 (справа) двойко симметричных периодических решений вблизи семейства f_3 для случая $p/q = 1/3$.

устойчивых, другой — неустойчивых. Это можно наблюдать на рис. 2.6.

При $p/q = 2/3$. Согласно теореме 2.3 появляется четыре семейства однократно симметричных решений — одна пара семейств g_1 -симметричных неустойчивых решений, другая пара семейств g_2 -симметричных устойчивых решений. Таким образом, на сечении Пуанкаре при определённых условиях можно наблюдать 12 неподвижных точек: по три точки на периодическое решение каждого из семейств, что видно на рис 2.7.

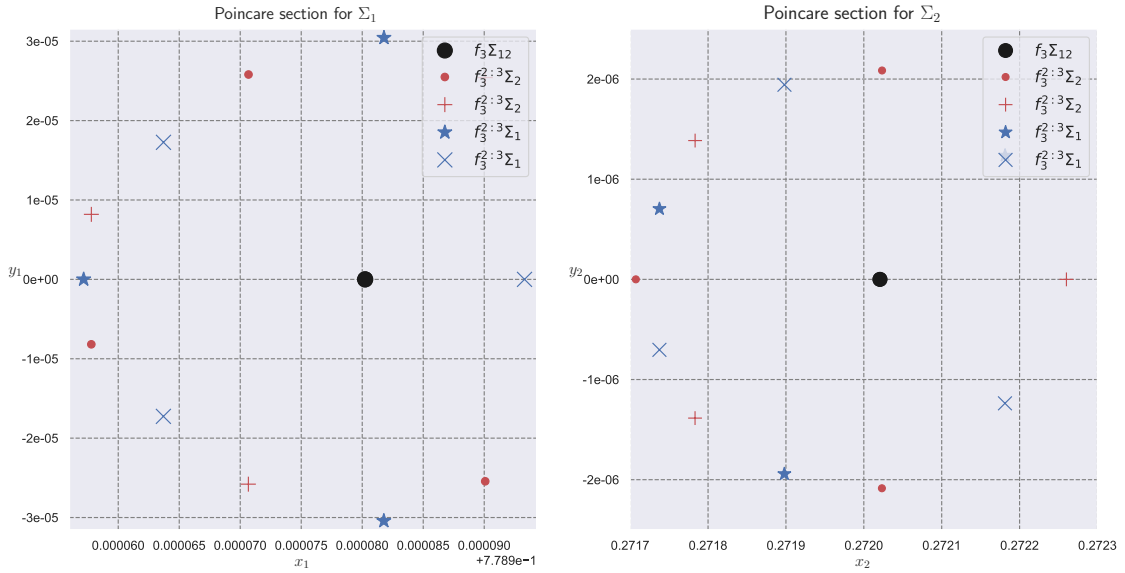


Рис. 2.7. Сечение Пуанкаре плоскостями Σ_1 (слева) и Σ_2 (справа) двойко симметричных периодических решений вблизи семейства f_3 для случая $p/q = 2/3$.

2.2.3. Семейства, задаваемые дугами $\{\pm j\}$, $j \in \mathbb{N}$

Для полноты изложения вначале приведём описание семейств, порождённых дугами $\{+1\}$, $\{+2\}$ и $\{+3\}$ [20; 51; 52], дополнив его новыми фактами, а затем опишем новые семейства. В силу Σ_1 -симметричности порождающих последовательностей ограничимся только дугами вида $+j$, $j \in \mathbb{N}$.

Дуга $\{+1\}$ задаёт семейство a нулькратных либрационных (Ляпуновских) орбит, которые при $C_{\text{lib}} = 3^{4/3} \approx 4.32675$ стягиваются в точку либрации L_1 . Это семейство не имеет устойчивых орбит и при отображении Σ_2 переходит в семейство c , которое, в свою очередь, порождается дугой $\{-1\}$ и состоит из орбит вокруг точки либрации L_2 . Примеры орбит семейств a и c приведены в [20; 51].

Дуга $\{+2\}$ задаёт семейство g' однооборотных спутниковых орбит. Это семейство при продолжении по параметру достигает максимума при $C \approx 4.4999858$ и пересекается с семейством g двойко симметричных орбит. При дальнейшем продолжении по C в пределе орбиты семейства стремятся к дуге $\{-2\}$. Таким образом, семейство g' является двойко симметричным семейством, хотя состоит из орбит с одной симметрией, т.е. характеристика семейства g' в простран-

стве начальных условий $x_1(0), y_2(0), T$ инвариантна относительно преобразований Σ_1 и Σ_2 . При $C \approx 3.68448$ имеется орбита соударения, и на интервале $(3.68448; 4.49999)$ семейство g' состоит из прямых орбит, а при $C < 3.68448$ — из обратных орбит. Семейство g' имеет два интервала устойчивости: первый при $C \in (-4.704765; -4.692170)$, второй при $C \in (4.271428; 4.499986)$, т. е. на одном интервале все устойчивые орбиты семейства обратные, на другом — прямые. На каждом из интервалов индекс устойчивости S пробегает весь диапазон значений $[-1; +1]$, и, следовательно, семейство g' пересекается с другими семействами периодических решений, локальная кратность которых $q \geq 1, q \in \mathbb{N}$. При этом семейство симметричных решений пересекается с семейством несимметричных только при $S = 1$ и при условии, что функция $S(C)$ в этой точке меняется монотонно (см. [94]). Все другие семейства с локальной кратностью $q \geq 2$ и взаимодействующие с g' суть семейства симметричных орбит. Дадим описание только тех семейств, локальная кратность которых $q \leq 2$.

На первом интервале устойчивости семейство g' пересекается при $C \approx -4.704765$ с семейством Hh (см. [53]) несимметричных периодических решений, которое задаётся порождающими последовательностями $\{+1, i\}$ и $\{+1, e\}$. При $C \approx -4.692170$ семейство g' пересекается с семейством двухоборотных решений, задаваемым в пределе последовательностью $\{i, +1, +1, e\}$. На втором интервале устойчивости при $C \approx 4.271428$ семейство g' пересекается с семейством Ha' [52] двухоборотных решений, которое задаётся последовательностью $\{+2, i, e\}$ (см. таблицу 2.1), а также, как уже было отмечено выше, с семейством g , задаваемым последовательностью $\{i, e\}$. Примечательно, что предельные последовательности семейств с локальной кратностью 2 получаются в результате соединения предельных последовательностей с локальной кратностью 1:

$$\{i, +1, +1, e\} = \{i, +1\} + \{+1, e\}, \quad \{+2, i, e\} = \{+2\} + \{i, e\}.$$

Дуга $\{+3\}$ задаёт семейство He двухоборотных орбит. Это семейство при продолжении по параметру достигает максимума при $C \approx -8.615196$, и при

дальнейшем продолжении по C в пределе орбиты семейства стремятся к порождающей последовательности $\{+1, e, i\}$. В отличие от семейства g' оно не имеет орбит соударения. В остальном семейство He похоже на семейство g' : имеет два интервала устойчивости, пересекается с семейством несимметричных орбит Hi [53], задаваемым в пределе порождающими последовательностями $\{+2, i\}$ и $\{+2, e\}$, а также пересекается с двумя семействами Σ_1 -симметричных орбит с локальной кратностью 2, которые в пределе задаются последовательностями $\{i, +2, +2, e\}$ и $\{i, +1, e, +3\}$ соответственно. Здесь опять порождающие последовательности последних двух семейств оказываются «составленными» из порождающих последовательностей тех семейств, с которыми они взаимодействуют.

Дуги $\{+j\}$, $j = 4, \dots, 7$ задают новые семейства периодических решений [99], которые при продолжении по параметру C ведут себя так же, как и семейство He , задаваемое дугой $\{+3\}$, а именно:

- 1) не содержат орбит столкновения;
- 2) достигают максимума при $C = C_{\max}^{(j)} < 0$ и при дальнейшем продолжении по C дают в пределе порождающую последовательность вида $\{+(j-2), e, i\}$;
- 3) имеют два небольших интервала устойчивости;
- 4) при $C = C_{SL}^{(j)} < C_{\max}^{(j)}$ пересекают семейство несимметричных орбит, задаваемое в пределе последовательностями вида $\{+(j-1), i\}$ и $\{+(j-1), e\}$;
- 5) пересекаются с двумя семействами Σ_1 -симметричных орбит локальной кратности 2, которые в пределе по C дают порождающие последовательности $\{i, +(j-1), +(j-1), e\}$ и $\{i, +(j-2), e, +j\}$ соответственно.

Значения $C_{SL}^{(j)}$ и $C_{\max}^{(j)}$ для $j = 2, \dots, 7$ приведены в таблице 2.5.

Орбиты семейства, задаваемого дугой $\{+4\}$, даны на рис. 2.8, причём орбита на рис. 2.8 близка к предельной дуге $\{+4\}$, а на рис. 2.8в — к последовательности $\{+2, e, i\}$.

На рис. 2.9 приведены орбиты семейств, задаваемых дугами $\{+5\}$, $\{+6\}$

Таблица 2.5

**Критические значения параметра C для семейств,
задаваемых дугами $\{+j\}$, $i = 2, \dots, 7$**

j	2	3	4	5	6	7
$C_{\max}^{(j)}$	4.49999	-8.615	-16.244	-25.253	-35.561	-48.90
$C_{\text{SL}}^{(j)}$	-4.70477	-10.659	-18.170	-27.131	-37.418	-47.067

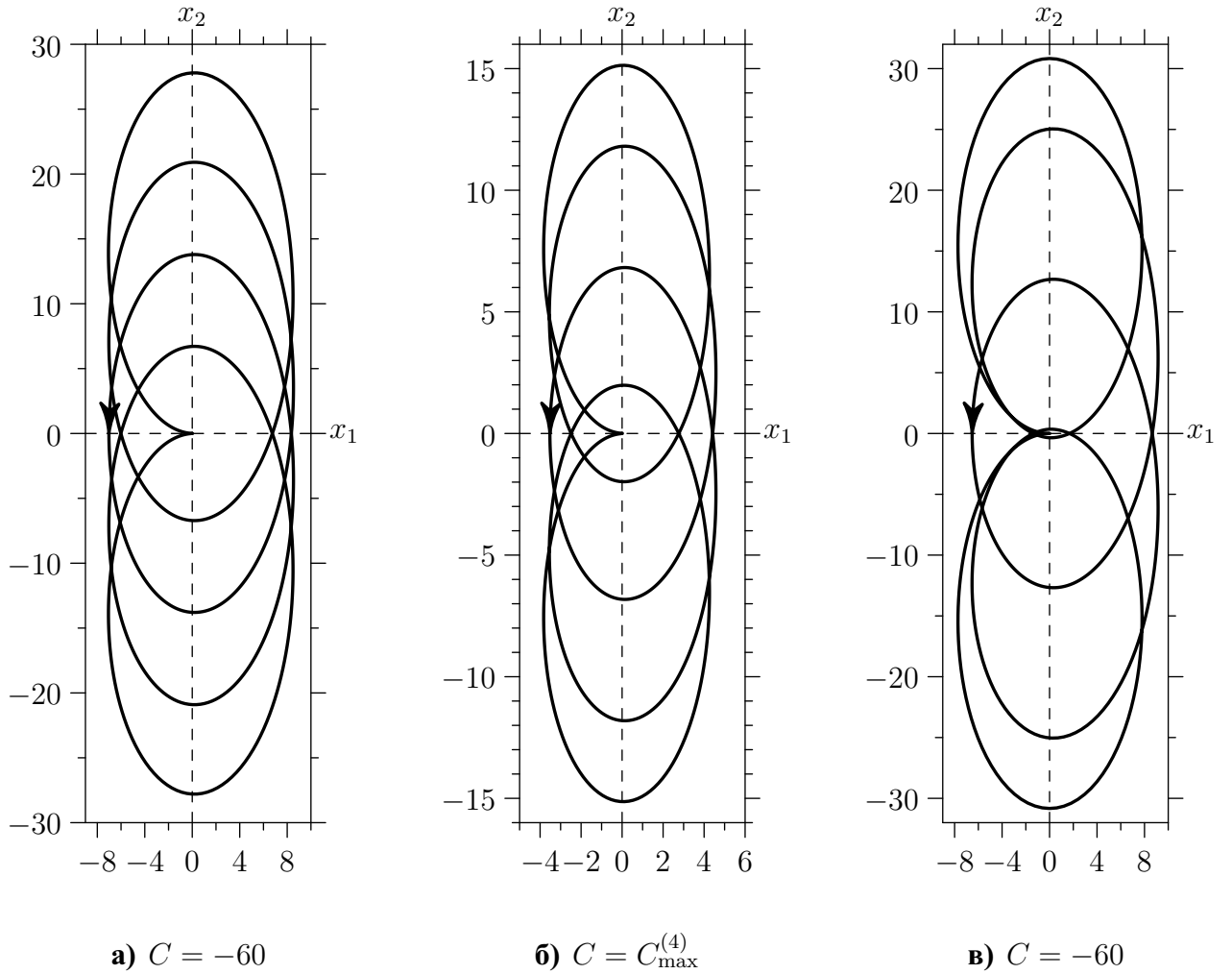


Рис. 2.8. Орбиты семейства, порожденного дугой $\{+4\}$, при разных значениях параметра C

и $\{+7\}$ для одного и того же значения $C = -60$. На рис. 2.10 в координатах

(X_1, Y_2) (см. 1.2.1) показаны участки характеристик семейств a, f, g' , полные характеристики семейств, порождённых дугами $\{+j\}$, $j = 3, \dots, 7$, а также предельные положения соответствующих порождающих решений.

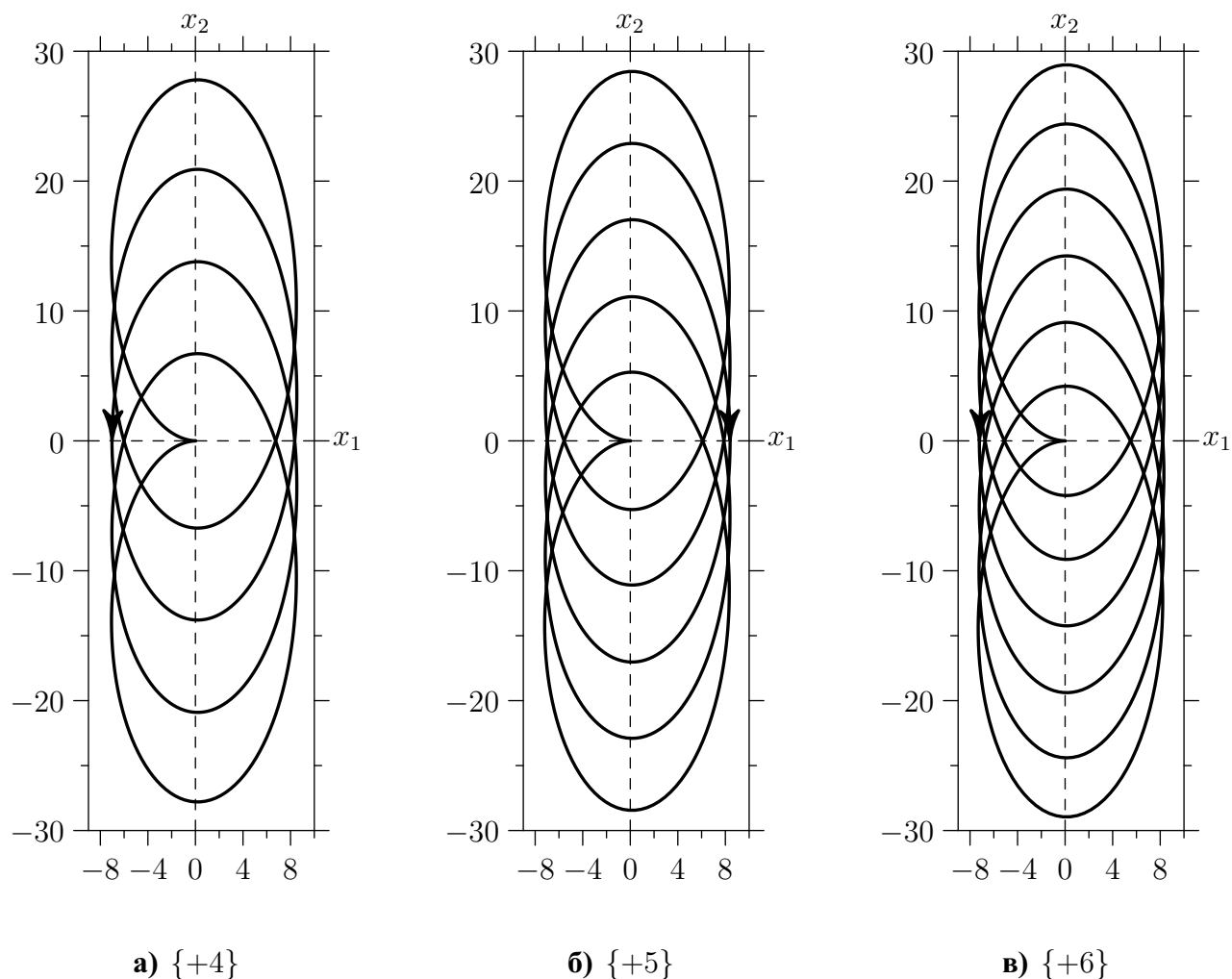


Рис. 2.9. Орбиты семейств периодических решений, порождённых дугами $\{+j\}$, $j = 4, 5, 6$

Из рисунков 2.8 и 2.9 видно, что один виток эпициклоиды представляет собой эллипс с отношением полуосей $1 : 2$. Центр этого эллипса «дрейфует» вдоль оси OY с такой скоростью, что, совершая последний виток, орбита попадает в окрестность особой точки и по гиперболе с эксцентриситетом, близким к единице, возвращается к начальному витку. Такое движение легко понять, рассматривая его в переменных (Q, P) 1.2.2. В этих переменных координата Q_2 задаёт положение центра эллипса на оси OY , а ее скорость $\dot{Q}_2 = -3P_2$ есть

скорость дрейфа. Значение импульса P_2 равно интегралу промежуточной задачи Энона $\mathcal{F} = Q_1^j + Q_4^j$, где значения Q_1^j и Q_4^j берутся из таблицы 1.1. Поскольку с ростом j величина τ_j стремится к $(2j + 1)\pi/2$, то P_2 стремится к нулю. Следовательно, чем больше номер j , тем медленнее дрейф и тем больше витков совершает эпициклоида до момента сближения с началом координат. Отметим, что асимптотика по C скорости дрейфа была вычислена в [73; 100] в несколько других терминах.

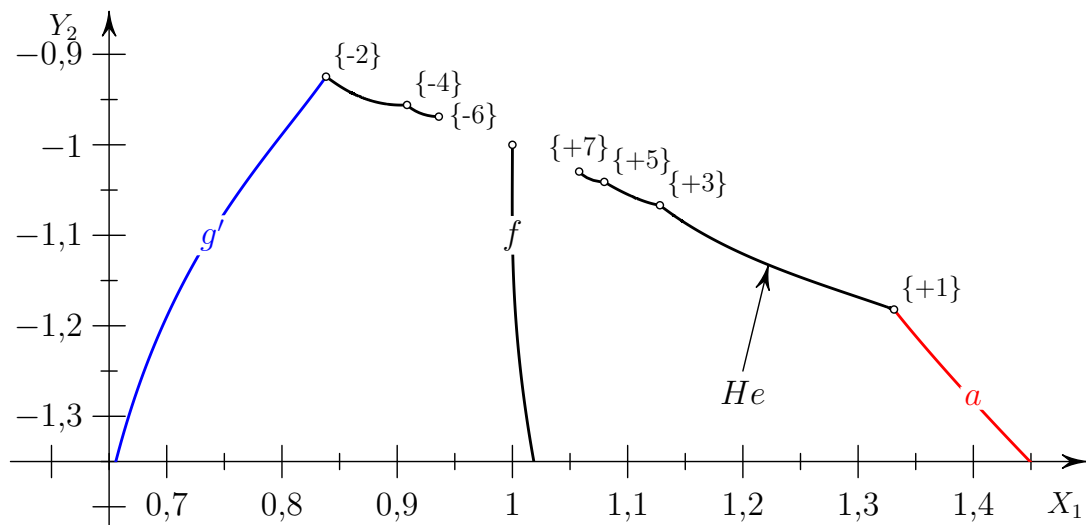


Рис. 2.10. Характеристики семейств, порождённых дугами $\{+j\}$, $j = 1, \dots, 7$, а также семейства f в координатах (X_1, Y_2) . Точками показаны предельные положения порождающих последовательностей

2.2.4. Одноимпульсные переходы в окрестность точек либрации

Многие космические проекты предполагают выведение аппаратов в окрестность точек либрации. Для астрофизических исследований наибольший интерес представляют две ближайшие к Земле коллинеарные точки L_1 и L_2 , расположенные в системе Солнце–Земля на расстоянии 1.497 и 1.508 миллионов километров от Земли соответственно.

Ниже приведены некоторые космические проекты, использующие коллинеарные точки либрации в окрестности Земли.

- **Аппарат «Genesis»**, собиравший информацию о солнечном ветре, находился в окрестности L_1 около 850 суток.

- **Телескопы «Гершель» и «Планк»** были выведены в мае 2009 года в окрестность L_2 .

- **Аппарат SOHO** для наблюдения за Солнцем был выведен в окрестность L_1 в декабре 1995 года.

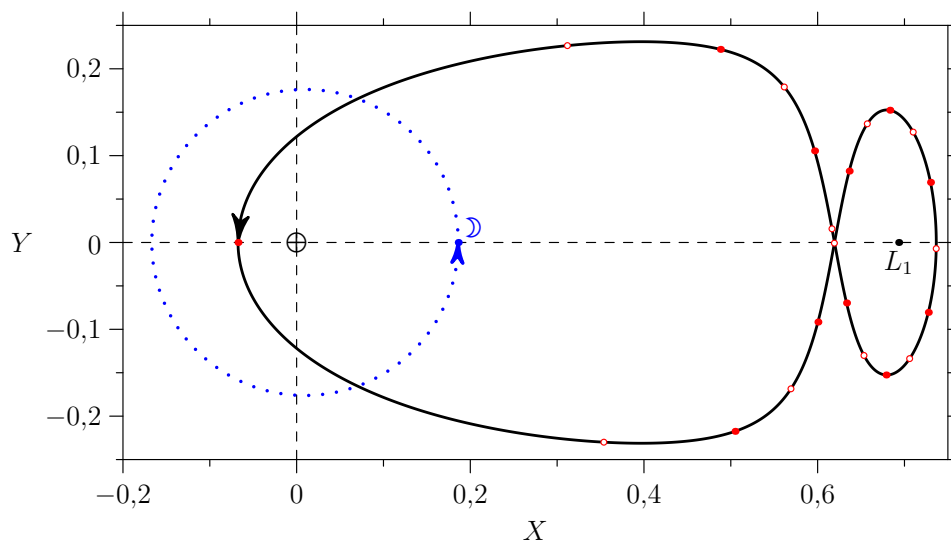
- **Аппарат WMAP** для изучения реликтового излучения был выведен в 2001 году в окрестность L_2 .

Для таких полётов проектировались как многоимпульсные траектории, так и орбиты с гравитационным манёвром вблизи Луны. Энергетически обычно более выгодны одноимпульсные перелёты с орбит искусственных спутников Земли в окрестность точки либрации. В работах [101; 102] разрабатывались довольно трудоёмкие методы проектирования таких орбит. В [103] был предложен метод построения траекторий с заданными свойствами, основанный на использовании семейств симметричных периодических решений ОЗТТ. С его помощью были вычислены семейства периодических решений, которые содержат орбиты с одним или двумя оборотами вокруг точки либрации. Здесь приведём описание семейств, орбиты которых состоят из участка выведения в окрестность точки либрации, а затем совершают заданное число оборотов вокруг неё. Все эти семейства построены с помощью метода, описанного в подразделе 1.3. В последующих подпунктах дано описание новых семейств, орбиты которых совершают заданное движение вокруг точек либрации.

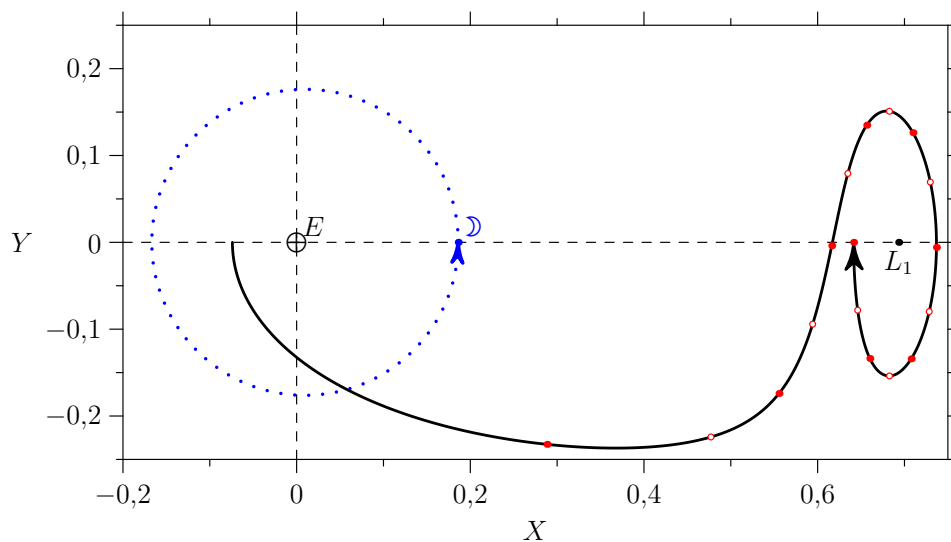
Семейства, задаваемые последовательностями $\{(+1)^n, (+2)^m\}$

В [52] были приведены примеры орбит новых семейств симметричных периодических решений, названных Эноном Hb' , Hd и Hf , а также их порождающие последовательности (см. таблицу 2.1). Автор обратил внимание на то, что все указанные выше семейства содержат орбиты, совершающие облёт точки

либрации. При этом каждой дуге $+1$ (-1) в порождающей последовательности семейства соответствует один виток вокруг точки L_1 (L_2), а каждой дуге $+2$ (-2) — один участок, соединяющий окрестность точки либрации и окрестность Земли.



а) Орбита семейства Hb



б) Орбита семейства Hf на половине периода

Рис. 2.11. Примеры орбит семейств, задаваемых последовательностями $\{(+1)^n, +2\}$, $n = 1, 2$.

Автор выдвинул гипотезу, что указанные выше свойства верны для се-

мейств, заданных порождающими последовательностями вида $\{(+1)^n, (+2)^m\}$, где $n, m \in \mathbb{N}$. Эта гипотеза была численно проверена для $n + m \leq 5$. Свойства полученных в результате проверки семейств периодических решений оказались следующими.

1) Каждое семейство, задаваемое порождающей последовательностью вида $\{(+1)^n, (+2)^m\}$, $n, m \in \mathbb{N}$, Σ_1 -симметрична и продолжается по параметру C , достигая своего максимального значения $4.246 \leq C_{\max} \leq C_{\text{lib}}$.

2) При $C \approx 3.68$ семейство содержит орбиту соударения, и при больших значениях параметра C орбиты семейства являются прямыми.

3) При дальнейшем продолжении по параметру семейство стремится к предельной последовательности вида $\{(+1)^n, (i, e)^m\}$.

4) Каждое из семейств имеет две небольшие области устойчивости и пересекается с двумя семействами симметричных орбит с локальной кратностью 2 и с семейством несимметричных орбит с локальной кратностью 1.

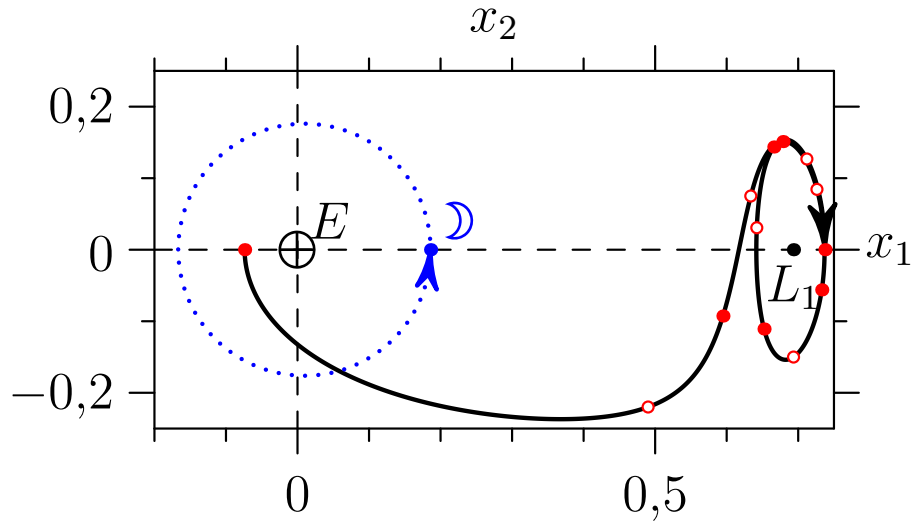
5) Каждое из семейств продолжается до семейства симметричных периодических решений ОЗТТ, орбиты которых сохраняют свойства орбит соответствующих семейств задачи Хилла.

Примеры орбит семейств Hb' , Hd и Hf приведены в [52]. На рис. 2.12 показаны орбиты семейств на половине периода, порожденных последовательностями $\{(+1)^n, +2\}$, $n = 3, 4$ при $C \approx 4.24611$.

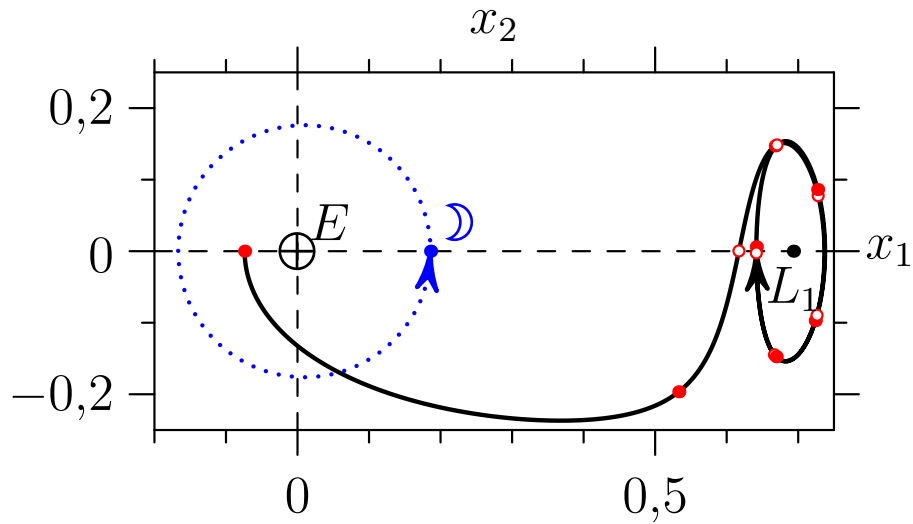
В таблице 2.6 для некоторых характерных орбит описанных выше семейств приведены значения периода T и времени пребывания T_{lib} тела на орбите в окрестности точки либрации в земных годах.

При значениях $C \approx 4.2$ для орбит семейств, задаваемых порождающей последовательностью $\{(+1)^n, (+2)^m\}$, $n + m \leq 5$, характерно следующее

Свойство 2.1. Каждой дуге $+1$ соответствует один виток вокруг точки либрации L_1 , а каждой дуге $+2$ соответствует один виток вокруг начала координат с



а) $\{(+1)^3, +2\}$



б) $\{(+1)^4, +2\}$

Рис. 2.12. Примеры орбит семейств, задаваемых последовательностями $\{(+1)^n, +2\}$, $n = 3, 4$. Показаны орбиты, соответствующие половине периода.

низким перицентром и апоцентром в окрестности L_1 .

Возможно, это свойство сохраняется для сколь угодно больших значений n и m . Все описанное выше верно и для семейств, задаваемых последовательностями вида $\{(-1)^n, (-2)^m\}$, с соответствующей заменой точки L_1 на L_2 . Семейства, задаваемые последовательностями $\{(+1)^n, +2\}$, $n = 3, 4$ анонсированы

**Период и время пребывания (в годах) в окрестности точки либрации
для типичных орбит семейств $\{(+1)^n, (+2)^m\}$, $n + m \leq 5$**

Название	Порожд. послед.	T	T_{lib}	T_{lib}/T
H'_b	$\{+2, +1\}$	0.85222	0.46744	0.5485
H_d	$\{(+2)^2, +1\}$	1.14837	0.45927	0.4000
H_f	$\{+2, (+1)^2\}$	1.33556	0.95079	0.7119
–	$\{+2, (+1)^3\}$	1.82050	1.43541	0.7885
–	$\{+2, (+1)^4\}$	2.30385	1.92194	0.8342

в [104].

Семейства, задаваемые последовательностями $\{(+1)^n, (-1)^m\}$

Такие семейства, как было указано выше, являются некоторым обобщением семейства f_3 . Были исследованы все семейства, количество дуг в порождающих последовательностях которых не превышает 5. Все эти семейства продемонстрировали типичное поведение при продолжении по параметру C .

1) Главным свойством таких семейств является то, что они содержат орбиты, которые совершают n витков вокруг точки L_1 , затем совершают переход в окрестность точки L_2 , где совершают m оборотов вокруг неё и возвращаются обратно.

2) Все семейства при $C \approx 2.21$ имеют орбиту с двойным соударением, после прохождения которой орбиты становятся из обратных прямыми.

3) При дальнейшем продолжении по параметру семейства достигают максимального значения $C \approx 3.805$ и в пределе при $C \rightarrow -\infty$ стремятся к порождающим последовательностям вида $\{(+1)^n, i, (-1)^m, e\}$.

Отметим, что при $n + m \leq 5$, $n \neq m$ семейства состоят из Σ_1 -симметрич-

ных орбит (см. рис. 2.13б) и 2.13в), при $n = m$ — из двойки симметричных (см. рис. 2.13а) и 2.13г). При $n + m \geq 6$ можно составить порождающую последовательность, которая задаёт семейство с Σ_2 -симметричными орбитами. Например, последовательность $\{+1, +1, -1, +1, -1, -1\}$ является Σ_2 -симметричной в силу леммы 1.1, но она не является Σ_1 -симметричной, поскольку не удовлетворяет условию леммы 1.2.

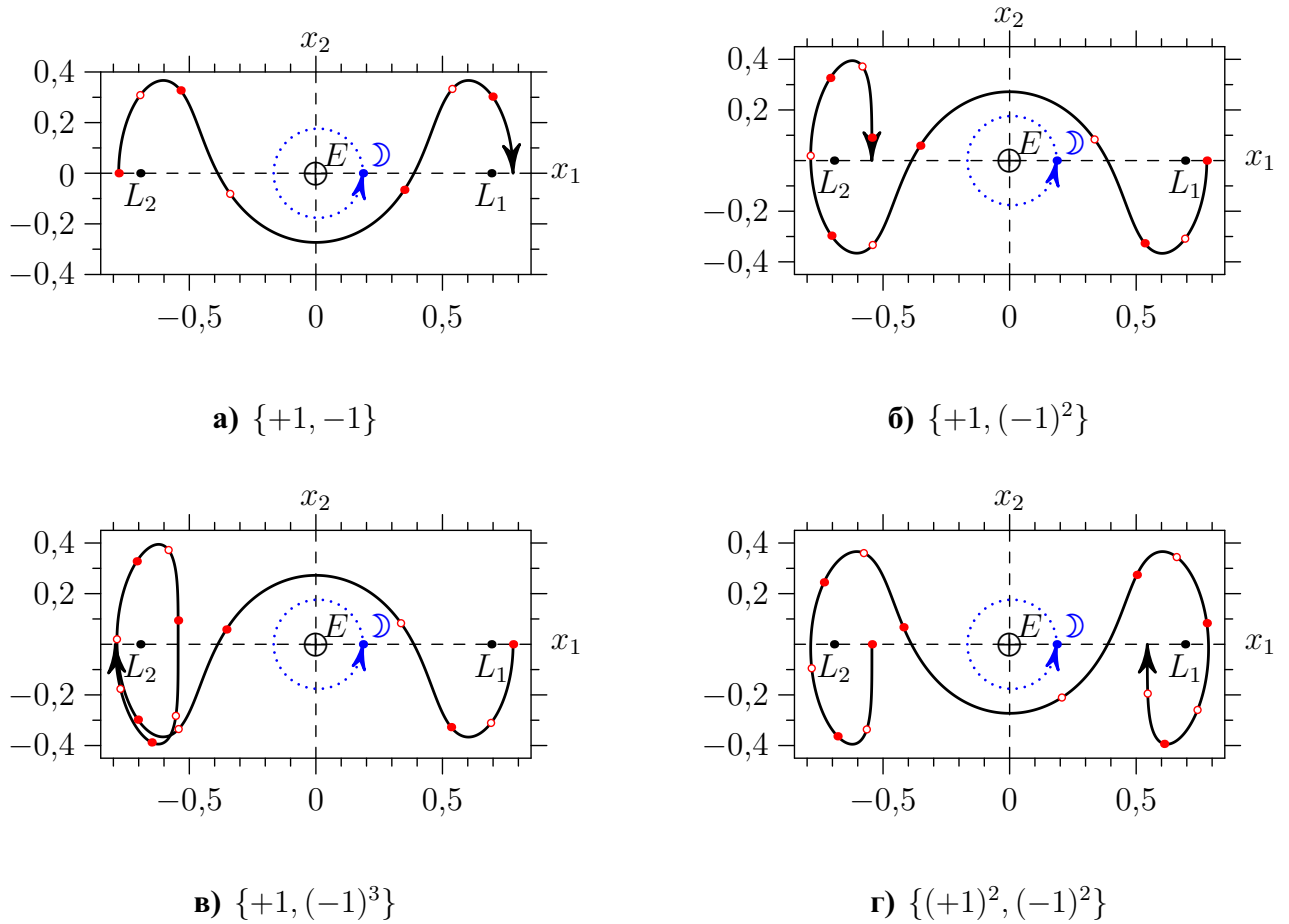


Рис. 2.13. Примеры орбит семейств, задаваемых последовательностями вида $\{(+1)^n, (-1)^m\}$, $n + m \leq 4$. Показаны орбиты, соответствующие половине периода

При $C \approx 3.8$ для орбит семейств, задаваемых порождающей последовательностью $\{(+1)^n, (-1)^m\}$, $n + m \leq 5$, характерно следующее

Свойство 2.2. Каждой дуге $+1$ соответствует один виток вокруг точки либрации L_1 , а каждой дуге -1 — один виток вокруг точки либрации L_2 . Переходу от дуги

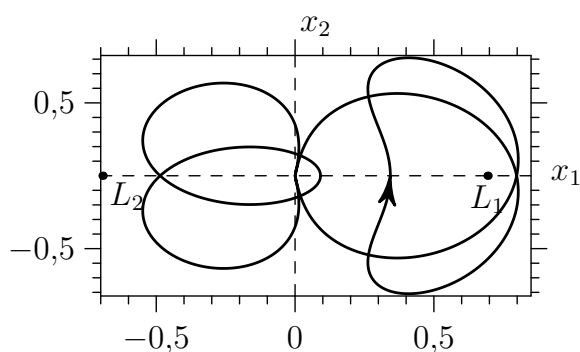
$+1$ к дуге -1 соответствует участок перелёта от L_1 к L_2 , и, наоборот, от дуги -1 к дуге $+1$ — участок перелёта от L_2 к L_1 .

Возможно, это свойство сохраняется для сколь угодно больших значений n и m .

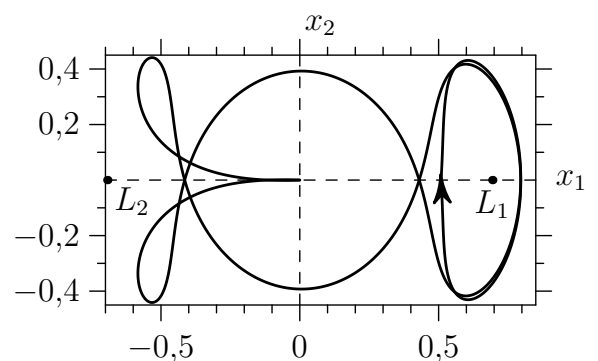
Новые семейства, орбиты которых совершают перелёт в окрестность точки либрации

Можно сконструировать из дуг ± 1 и ± 2 порождающие последовательности, которые задают семейства периодических решений с заранее определёнными свойствами. Здесь рассмотрим некоторые семейства симметричных периодических решений, орбиты которых содержат как участок выведения, так и участки облёта одной или двух точек либрации.

Рассмотрим порождающие последовательности вида $\{-2, (+1)^n\}$, $n \geq 2$. Как следует из леммы 1.1, задаваемые семейства состоят из Σ_1 -симметричных орбит. Эти семейства продолжаются до $C \approx 3.8355$ и содержат три орбиты соударения: с двойным соударением (рис. 2.14а) при $C \approx 2.378$, как у орбит семейств подраздела 2.2.4, с одинарным соударением при $C \approx 3.717$ и $C \approx 3.787$ (рис. 2.14б), как у орбит подраздела 2.2.4.



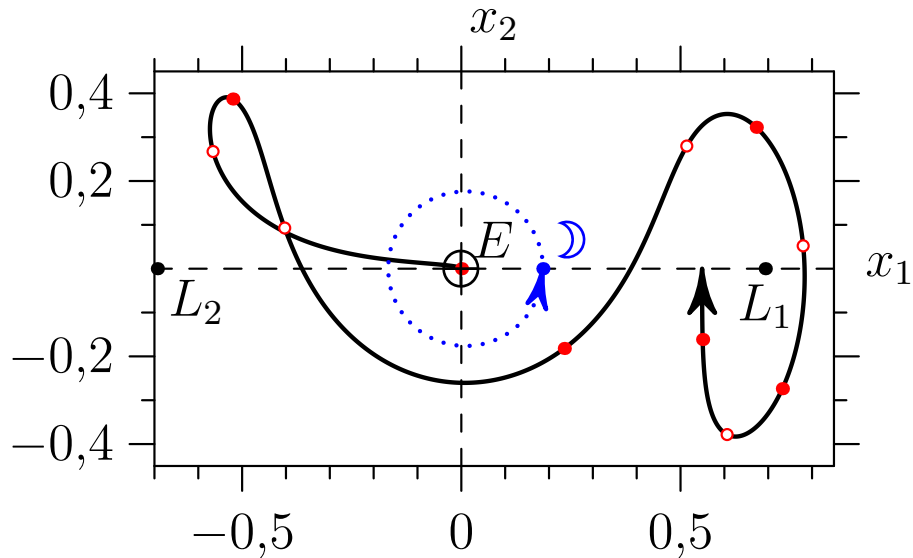
а) Орбита с двойным соударением



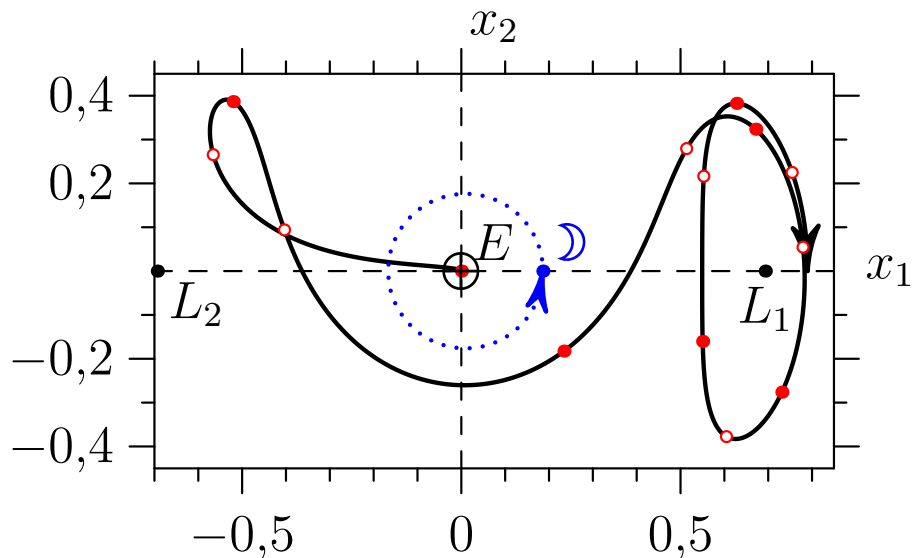
б) Орбита с одинарным соударением

Рис. 2.14. Примеры орбит семейства, задаваемого последовательностью $\{-2, (+1)^2\}$

При значениях параметра C , близких к максимальным, орбита состоит из участка выведения в окрестность точки L_2 , участка перелёта в окрестность точки L_1 , где она совершает вокруг неё n оборотов, и участка возвращения. Примеры орбит показаны на рис. 2.15.



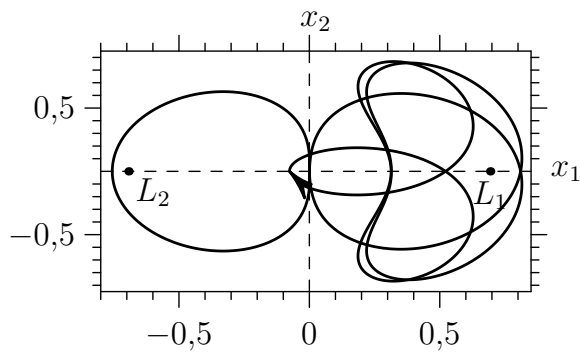
а) Орбита семейства $\{-2, (+1)^2\}$



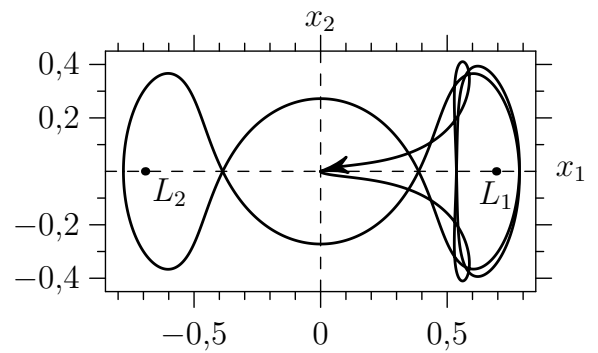
б) Орбита семейства $\{-2, (+1)^3\}$

Рис. 2.15. Примеры орбит семейств, задаваемых последовательностями $\{-2, (+1)^n\}$, $n = 2, 3$. Показаны орбиты, соответствующие половине периода.

Отметим, что порождающая последовательность $\{-2, +1\}$ задаёт семейство периодических решений, названное в [20, п. 4.3.6] $f_{I\Sigma_1}^{1/4}$, которое достигает экстремума по параметру C при $C = -2.567$, где пересекается с семейством обратных однооборотных орбит f . При этом локальная кратность семейства $f_{I\Sigma_1}^{1/4}$ по отношению к семейству f равна 4. Само семейство не содержит орбит соударения, а его орбиты являются вариантом квазиспутниковых орбит [73]. Аналогичное поведение демонстрирует и семейство, задаваемое последовательностью $\{(-2)^2, (+1)^2\}$, за исключением того, что оно не пересекается с семейством f .



а) Орбита с двойным соударением



б) Орбита при $C = 3.8056$

Рис. 2.16. Примеры орбит семейства, задаваемого последовательностью $\{+2, +1, -1, +1\}$

Рассмотрим семейство с порождающей последовательностью $\{+2, +1, -1, +1\}$. Оно обладает фактически теми же свойствами, что и описанные выше семейства с последовательностями $\{-2, (+1)^n\}$, $n \geq 2$, но его орбиты при $C \approx 3.8056$ состоят из участка выведения в окрестность точки L_1 , а затем совершают облеты вокруг точек либрации, переходя последовательно от L_1 к L_2 и затем вновь к L_1 . Две орбиты этого семейства показаны на рис. 2.16.

Приведённый в разделе 1.3 алгоритм исследования семейств симметричных периодических решений позволил найти новые семейства, орбиты которых обладают полезными свойствами с точки зрения проектирования космических миссий в окрестность ближайших к Земле коллинеарных точек либрации. Все

описанные выше периодические решения могут быть использованы в качестве начального приближения для проектирования условно-периодических орбит.

Содержание раздела 2.2 опубликовано в [8; 79] кроме п. 2.2.2, который опубликован в [17; 98].

Глава 3

Обобщённая задача Хилла и её порождающие решения

Здесь рассматривается некоторый вариант задачи Хилла, названный *обобщённой задачей Хилла*. Он отличается от классического варианта задачи тем, что знак потенциальной функции центрального тела может меняться на противоположный, т. е. Ньютонов потенциал притяжения может быть заменён Кулоновым потенциалом отталкивания. Показано, что для этого обобщения известные семейства периодических решений классической задачи продолжаются через свои порождающие последовательности до семейств задачи с потенциалом отталкивания. Это позволяет рассматривать все известные семейства периодических орбит обобщённой задачи в виде единой сети. Оказалось, что семейства двояко симметричных орбит образуют в определённом смысле «скелет» такой сети периодических решений, поскольку многие другие семейства пересекаются с этими семействами, разделяя общие орбиты с различными целыми локальными кратностями.

3.1. Обобщённая задача Хилла и её свойства

На сегодняшний день разными исследователями найдено более сотни семейств периодических орбит (см., например, [8; 20; 51; 52; 58]), что позволяет провести, насколько это возможно для неинтегрируемой системы Гамильтона, каковой является задача Хилла, их классификацию. По мнению автора, понимание структуры основных семейств периодических орбит задачи Хилла не представляется возможным без изучения семейств периодических решений некоторой более общей задачи, для которой задача Хилла является частным случаем. Это обобщение предполагает, что потенциал центрального тела может быть не

только ньютоновым потенциалом притяжения, как в классическом варианте задачи, но также ньютоновым потенциалом отталкивания или же вовсе отсутствовать.

Рассмотрим функцию Гамильтона [105]

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \varepsilon) = \frac{1}{2} (y_1^2 + y_2^2) + x_2 y_1 - x_1 y_2 + \frac{\sigma}{|\mathbf{x}|} + \varepsilon \left(-x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2 \right), \quad (3.1)$$

где $\mathbf{x}$ — вектор координат, $\mathbf{y}$ — вектор импульсов, $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и два параметра $\sigma \in \{-1, 0, +1\}$, $\varepsilon \in [0; 1]$.

Функция (3.1) связывает гамильтонианы двух интегрируемых задач:

1) *синодической задачи Кеплера* при $\sigma = -1$ и $\varepsilon = 0$, которая описывает движение вблизи начала координат,

2) *задачи Энона* при $\sigma = 0$ и $\varepsilon = 1$, которая описывает движение вдали от начала координат,

с гамильтонианом задачи Хилла при $\varepsilon = 1$, $\sigma = -1$.

Автором в работах [105—107] для синодической задачи Кеплера и квадратичного возмущения $\varepsilon (-x_1^2 + x_2^2/2)$ была применена каноническая теория возмущений [22, Гл. VII, § 1], вычислена нормальная форма в переменных Делоне, описаны бифуркации основных семейств периодических орбит, найдены регулярные порождающие решения. Часть этих порождающих решений была продолжена по параметру ε до соответствующих семейств периодических орбит задачи Хилла, однако такой подход не привёл к новым семействам, которые не могли бы быть получены методами главы 1. Поэтому в диссертации эти результаты не рассматриваются и мы ограничиваемся только случаем $\varepsilon = 1$ при трёх различных значениях параметра σ :

- при $\sigma = -1$ получаем гамильтониан классической задачи Хилла,
- при $\sigma = 0$ получаем функцию Гамильтона задачи Энона,
- при $\sigma = +1$ получаем гамильтониан задачи, которую назовём *задачей анти-Хилла*, поскольку теперь потенциал притяжения центрального тела заменён потенциалом отталкивания.

В недавней работе [108] была доказана теорема о том, что задача с функцией Гамильтона (3.1) интегрируема в смысле Лиувилля в классе рациональных функций от $\mathbf{z}$ и $|\mathbf{x}|$ только при условии $\sigma\varepsilon = 0$, т. е. в случаях синодической задачи Кеплера и задачи Энона. Следовательно, в общем случае её уравнения движения обладают единственным первым интегралом — обобщённым интегралом энергии, который здесь принимает вид

$$J = 3x_1^2 - \frac{2\sigma}{|\mathbf{x}|} - \dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2 = C, \quad C = -2H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -2h, \quad (3.2)$$

где C — постоянная Якоби, а h — значение функции Гамильтона (3.1).

3.1.1. Задача анти-Хилла

Поскольку интерес к периодическим решениям задачи анти-Хилла вызван исключительно потребностью более полно понять структуру периодических решений исходной задачи Хилла, то опишем здесь только те свойства задачи анти-Хилла, которые облегчат это понимание.

В отличие от исходной задачи Хилла, канонические уравнения задачи анти-Хилла не имеют стационарных решений, а все полученные численно периодические решения представляют собой орбиты вокруг начала координат. Область возможных движений оказывается изолированной от начала координат при всех значениях константы Якоби C . При значениях $C \ll 0$ граница этой области представляет собой в первом приближении окружность радиуса $2/|C|$. При стремлении C к нулю слева область запрещённого движения вокруг начала координат увеличивается и при $C = 0$ делит плоскость (x_1, x_2) на две части. Описанные изменения области допустимых движений для значений $C = -5, -1, 0$ показаны на рис. 3.1

Таким образом, указанные выше свойства позволяют сделать следующие выводы о поведении периодических решений задачи анти-Хилла.

- 1) Отсутствуют орбиты столкновения, поскольку начало координат не при-

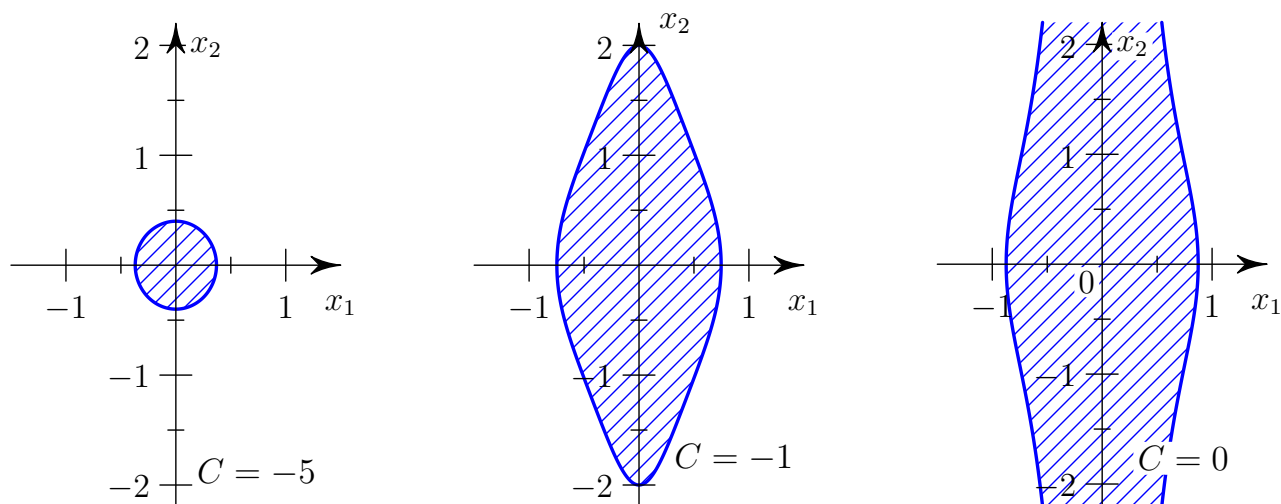


Рис. 3.1. Область допустимого движения для значений постоянной Якоби $C = -5$, $C = -1$ и $C = 0$ (слева направо). Запрещённая для движения область показана штриховкой.

надлежит области допустимых движений. Следовательно, глобальная кратность орбит вдоль семейства периодических решений является инвариантом.

2) Периодические решения вокруг начала координат возможны лишь при значениях константы Якоби $C < 0$.

3) Ввиду отсутствия точек либрации на каждом семействе периодических орбит при продолжении величина C достигает своего наибольшего значения $C_* < 0$, а затем либо заканчивается на семействе периодических орбит первого рода по Пуанкаре (см. стр. 137), либо продолжается по C до значения $-\infty$, стремясь в пределе к порождающему решению.

3.1.2. Регуляризация обобщенной задачи

Гамильтониан обобщённой задачи Хилла имеет единственную особенность в начале координат, которая устраняется с помощью процедуры регуляризации. Регуляризация функции Гамильтона обычно проводится в два этапа, но в силу некоторых особенностей здесь применяется дополнительный этап. Опишем эти этапы подробнее.

Этап 1. Вводятся переменные Леви-Чивита

$$\mathbf{x} = \Lambda(\mathbf{q})\mathbf{q}, \quad \mathbf{y} = \frac{2}{|\mathbf{q}|^2}\Lambda(\mathbf{q})\mathbf{p}, \quad (3.3)$$

где $\Lambda(\mathbf{q})$ – матрица Леви-Чивита

$$\Lambda(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} q_1 & -q_2 \\ q_2 & q_1 \end{pmatrix}.$$

Это преобразование есть каноническое преобразование с валентностью 4. Отметим, что в работе М. Л. Лидова [30] было предложено унивалентное преобразование с производящей функцией $S(\mathbf{y}, \mathbf{q}) = \mathbf{y}^T \Lambda(\mathbf{q})\mathbf{q}$, но в дальнейшем оказалось, что вариант преобразования (3.3) приводит в итоге к выражению с целыми коэффициентами, в отличие от варианта преобразования Лидова.

Этап 2. Вводится новая независимая переменная ν с помощью уравнения

$$\frac{dt}{d\nu} = \frac{|\mathbf{x}|}{4} = \frac{|\mathbf{q}|^2}{4} \quad (3.4)$$

и осуществляется переход к новому гамильтониану

$$\tilde{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{|\mathbf{q}|^2}{4} \left(H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \tilde{h} \right),$$

где константа $\tilde{h}$ выбирается так, чтобы выражение $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \tilde{h} = 0$, т. е. $\tilde{h} = -H(\mathbf{z}) = -h$. В силу соотношения между h и C в формуле (3.2) имеем, что константы $\tilde{h}$ и C суть одного знака.

После этого этапа функция Гамильтона обобщенной задачи Хилла принимает вид

$$\begin{aligned} \tilde{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \tilde{h}) = & \frac{\tilde{h}}{4} (q_1^2 + q_2^2) + \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2} (q_1^2 + q_2^2) (q_2 p_1 - q_1 p_2) - \\ & - \frac{1}{4} (q_1^2 + q_2^2) (q_1^4 - 4q_1^2 q_2^2 + q_2^4) + \frac{\sigma}{4} \equiv 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Функция (3.5) есть многочлен от фазовых переменных и параметра $\tilde{h}$, что позволяет выполнить следующий шаг упрощения с применением алгоритмов степенной геометрии (см. [27, Гл. 4]). Если построить носитель S функции $\tilde{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \tilde{h})$

в пространстве $\mathbb{R}^5$ показателей степеней переменных, а затем выполнить проектирование на трёхмерное пространство по правилу

$$\Pi : (r_1, r_2, r_3, r_4, r_5) \rightarrow (r_1 + r_2, r_3 + r_4, r_5),$$

то получим проекцию S'' носителя S , состоящую из четырёх точек

$$S'' = \{(2, 0, 1), (0, 2, 0), (3, 1, 0), (6, 0, 0)\},$$

которые соответствуют своим слагаемым в выражении функции $\tilde{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \tilde{h})$ (3.5). Эти точки лежат на плоскости с нормалью $\mathbf{N} = (1, 3, 4)$. Значит, гамильтониан (3.5) является квазиоднородным многочленом, и, следовательно, с помощью степенного преобразования можно уменьшить число его переменных на единицу.

Этап 3. Вектор нормали $\mathbf{N}$ определяет следующее степенное каноническое преобразование

$$\mathbf{q} = 2^{3/4} |\tilde{h}|^{1/4} \mathbf{Q}, \quad \mathbf{p} = 2^{1/4} |\tilde{h}|^{3/4} \mathbf{P}, \quad \nu = \sqrt{2/|\tilde{h}|} \tau, \quad (3.6)$$

которое после применения к функции (3.5) приводит к гамильтониану

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = & \frac{\delta}{2} (Q_1^2 + Q_2^2) + \frac{1}{2} (P_1^2 + P_2^2) + 2 (Q_1^2 + Q_2^2) (Q_2 P_1 - Q_1 P_2) - \\ & - 4 (Q_1^2 + Q_2^2) (Q_1^4 - 4 Q_1^2 Q_2^2 + Q_2^4) + 2^{-5/2} |\tilde{h}|^{-3/2} \sigma \equiv 0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где $\delta = \pm 1$. При этом $\delta = +1$ выбирается при $\tilde{h} > 0$, т.е. при $C > 0$, а $\delta = -1$ выбирается при $\tilde{h} < 0$, т.е. при $C < 0$. При $\tilde{h} = 0$ преобразование (3.6) имеет особенность и неприменимо. Преобразование (3.6) было предложено в [57].

Таким образом, в переменных $(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ гамильтонианы задач Хилла и анти-Хилла отличаются лишь значением постоянного члена

$$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} 2^{-5/2} |\tilde{h}|^{-3/2} \sigma \equiv \sigma |C|^{-3/2} / 2.$$

Случай $\Delta = 0$ соответствует гамильтониану задачи Энона, поскольку последнее слагаемое в выражении (3.7) соответствует слагаемому $\sigma/|\mathbf{x}|$ в (3.1).

В регулярных переменных начало координат O становится положением равновесия, при $C > 0$ устойчивым, а при $C < 0$ — неустойчивым. При $C = -\infty$ этой точке соответствует нулевое значение функции (3.7), следовательно, фазовая скорость при движении по любой траектории, проходящей через нее, становится в ней равной нулю.

Преобразование Леви-Чивита (3.3) представляет собой двулистное накрытие координатного пространства (x_1, x_2) . Любой объект в исходных координатах будет представлен на плоскости (Q_1, Q_2) дважды. Оси Ox_1 соответствуют две координатные оси OQ_1 и OQ_2 , а оси Ox_2 — биссектрисы квадрантов.

3.2. Структура порождающих решений задачи анти-Хилла

3.2.1. Порождающие решения задачи Хилла

Задача Энона, являясь предельным случаем задачи Хилла при $C \rightarrow -\infty$, позволяет явно описать те ее решения, которые могут быть порождающими. Аналитически это сделано в [51] в исходных переменных (x, y) .

В разделе 1.2.2 показано, что в задаче Хилла единственным регулярным порождающим решением является однооборотное обратное двояко симметричное решение с периодом $T = 2\pi$, представляющее собой эллипс с центром в начале координат и отношением полуосей $1 : 2$. Обозначим это порождающее решение символом F , поскольку оно задаёт семейство обратных спутниковых орбит f и является продолжением семейства E_{11}^+ симметричных орбит ограниченной задачи [24; 52]. Орбита порождающего решения в регулярных координатах показана на рис. 3.2. В силу двулистного накрытия преобразования Леви-Чивита один оборот орбиты в регулярных координатах соответствует двум оборотам в физических.

В [52] было сформулировано утверждение о структуре порождающих решений семейств периодических орбит второго вида. Это утверждение использо-

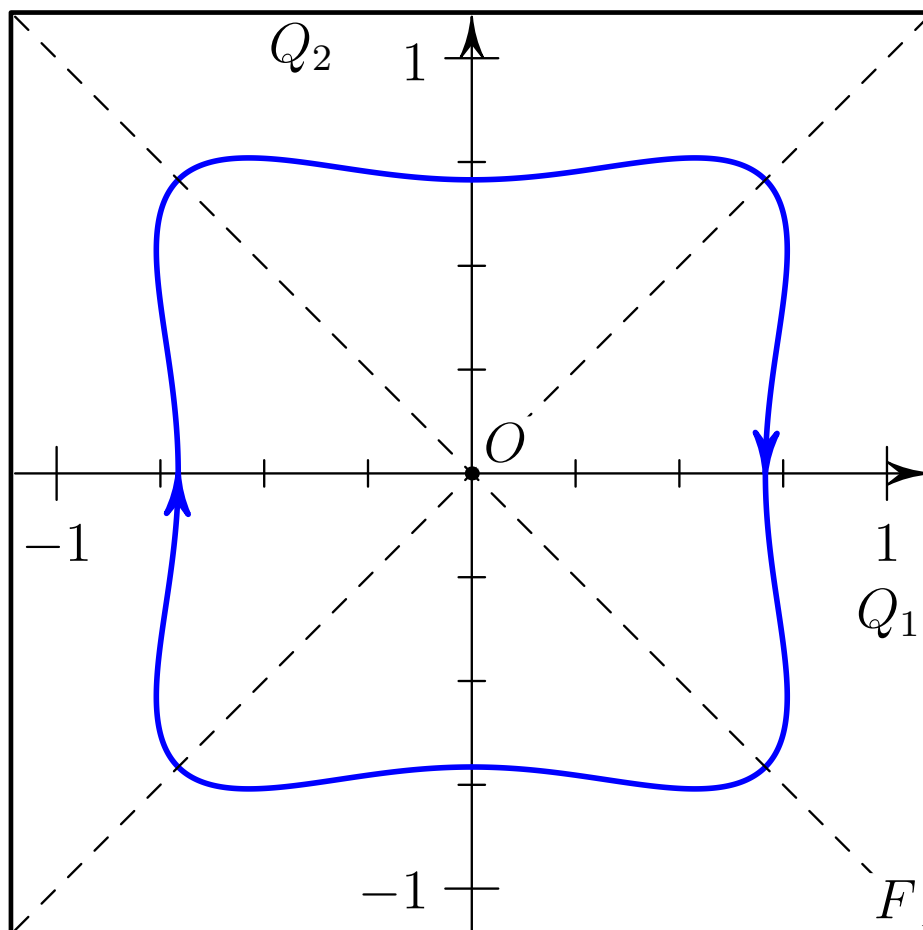


Рис. 3.2. Орбита регулярного порождающего решения F в координатах (Q_1, Q_2) .

вало результаты о структуре порождающих решений ограниченной задачи трёх тел, изложенные в книге [24].

В разделе 1.2 было показано, что все порождающие решения периодических орбит второго вида задачи Хилла представляют собой последовательности, составленные из дуг двух типов, каждая из которых проходит по крайней мере дважды через начало координат.

I. Дуги первого типа — это эпициклоиды, симметричные относительно оси абсцисс, обозначаемые символами $\pm j$, $j \in \mathbb{N}$. Эпициклоида с номером j дважды проходит через начало координат через интервал времени $2\tau_j$, где τ_j — j -й положительный корень трансцендентного уравнения

$$4 \sin t = 3t \cos t. \quad (3.8)$$

II. Дуги второго типа — это два эллипса, симметричные относительно оси

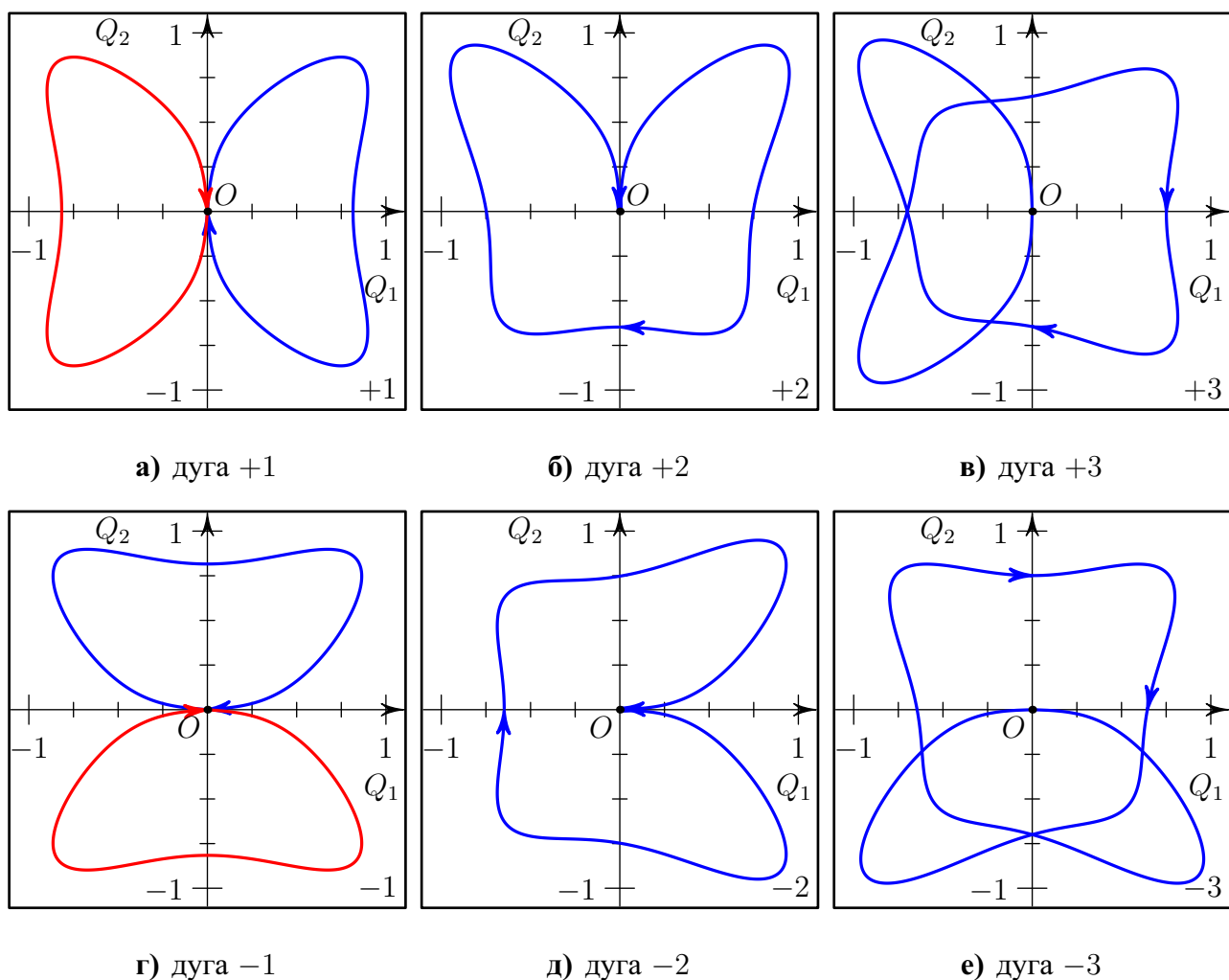
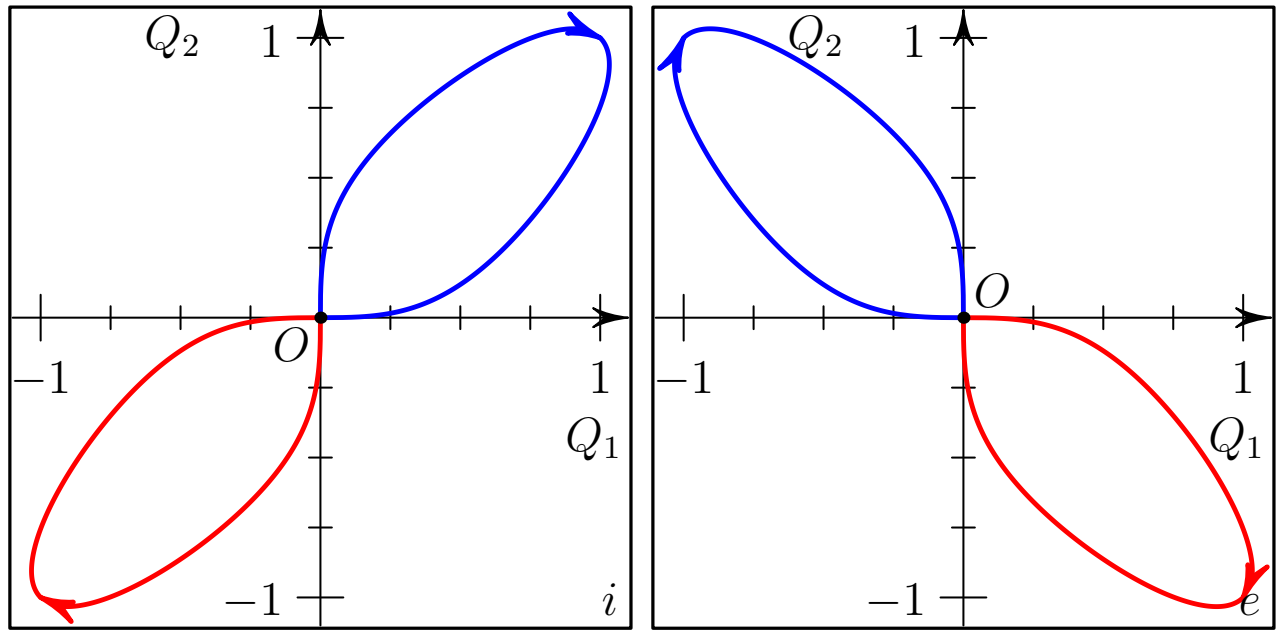


Рис. 3.3. Дуги первого типа в координатах (Q_1, Q_2) .

ординат, обозначаемые символами i и e . Период движения по эллипсу равен 2π .

Здесь даны их изображения в регулярных координатах. На рисунках 3.3 а), г) и 3.4 показана сама дуга (синим) и ее «двойник» (красным).

Эти дуги вблизи начала координат соединяются друг с другом согласующими гиперболическими траекториями двух видов, каждая из которых есть решение задачи Кеплера. Для различных пар дуг двух типов были предложены оценки параметров согласующих гипербол: эксцентриситет e и аргумент перицентра ϖ .



а) дуга i

б) дуга e

Рис. 3.4. Дуги второго типа в координатах (Q_1, Q_2) .

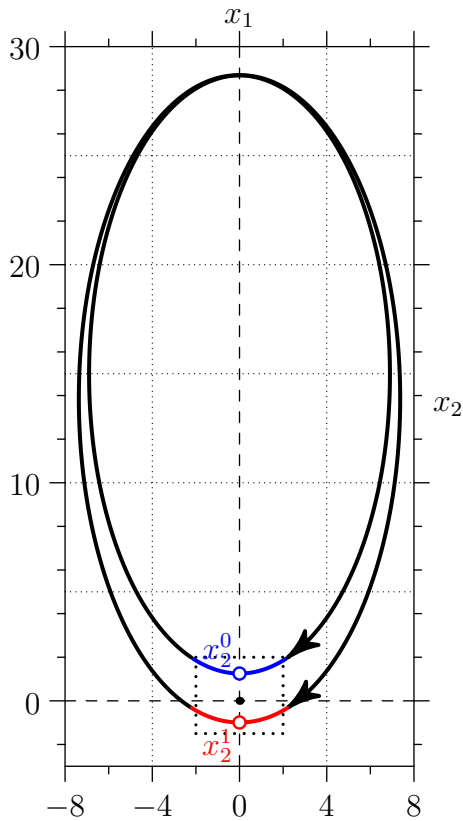
3.2.2. Порождающие решения задачи анти-Хилла

Для выяснения структуры порождающих решений задачи анти-Хилла автором был проделан вычислительный эксперимент, который показал, что ограничений гипотезы 1 на отсутствие в порождающей последовательности двух дуг ii или ee в этом случае нет.

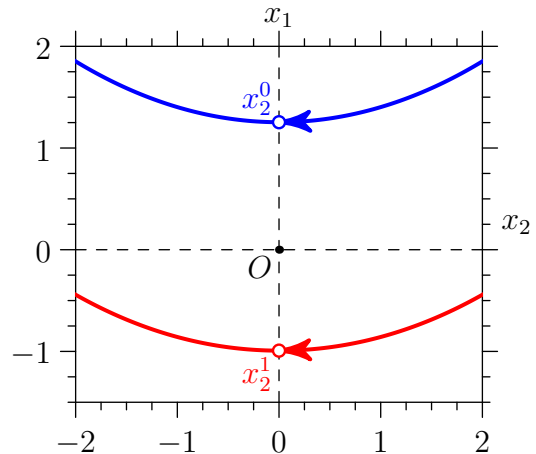
В задаче анти-Хилла для пары дуг первого типа, либо первого и второго типов, либо двух разных дуг второго типа можно построить в первом приближении согласующие гиперболы так, как это было сделано для задачи Хилла в разделе 1.2.3. Оценки эксцентриситетов e и аргументов перицентра ϖ согласующих гипербол получаются такими же, как и для задачи Хилла. Так, для Σ_1 -симметричной гиперболы, «сшивающей» дугу $\pm j$, $j \in \mathbb{N}$, эксцентриситет $e_j = \sqrt{1 + \frac{4}{9\tau_j^2}}$, аргумент перицентра $\varpi = \pi$ или 0 . Для Σ_2 -симметричной гиперболы, «сшивающей» две дуги $\pm j$ и $\mp j$, $j \in \mathbb{N}$, эксцентриситет $e_j = \sqrt{1 + \frac{9\tau_j^2}{4}}$, аргумент перицентра $\varpi = \pm \frac{\pi}{2}$. При этом расстояние до начала координат $r_{per} = (e_j + 1)/|C| > 2/|C|$. Здесь τ_j — j -й положительный корень

уравнения (3.8).

Однако, принципиальное отличие задачи анти-Хилла состоит в том, что для пары дуг ii (или ee , соответственно) можно построить две разных согласующих траектории.



а) Дуга участка i^+i показана синим, дуга участка i^-i - красным цветом.



б) Увеличенная часть орбиты вблизи начала координат.

Рис. 3.5. Орбита семейства задачи анти-Хилла, задаваемого последовательностью $\{ii\}$, при значении $C \approx -50$.

В качестве примера рассмотрим орбиты семейства задачи анти-Хилла, которое в пределе стремится к последовательности $\{i, i\}$. Орбиты этого семейства симметричны относительно оси Ox_2 и, следовательно, дважды ортогонально пересекают ее через половину периода. На рисунке 3.5а) видно, что орбита состоит из двух эллипсов с полуосями находящимися в отношении 1 : 2. Верхний эллипс вблизи начала координат ортогонально пересекает ось Ox_2 в точке x_2^0 с

положительной координатой (показана синим цветом), нижний эллипс — в точке x_2^1 с отрицательной ординатой (показана красным цветом). При продолжении семейства по $C \rightarrow -\infty$ точки ортогонального пересечения стремятся к началу координат, период стремится к значению 4π , следовательно, в пределе получается орбита, состоящая из двух дуг i .

Поскольку пара дуг ii (или ee) может быть согласована двумя разными дугами, то порождающая последовательность, содержащая такую пару, задаёт два семейства периодических орбит задачи анти-Хилла. Будем обозначать пару дуг ii , соединяющихся в точке с ординатой $x_2 > 0$, через i^+i (или e^+e для пары дуг ee), а пару дуг ii , соединяющихся в точке с ординатой $x_2 < 0$, через i^-i (или e^-e соответственно) (см. рис. 3.5б).

По аналогии с гипотезой 1 сформулируем аналогичную гипотезу для порождающих последовательностей задачи анти-Хилла.

Гипотеза 3. Последовательность, составленная из дуг $\pm j, i, e$ следующих в произвольном порядке за исключением последовательностей $\{i\}$ и $\{e\}$, является порождающим решением для семейства периодических орбит задачи анти-Хилла.

Из гипотезы 3 следует, что множество порождающих последовательностей задачи Хилла есть собственное подмножество множества порождающих последовательностей задачи Хилла, т.е. любое семейство периодических орбит второго вида задачи Хилла может быть продолжено до семейства периодических орбит задачи анти-Хилла. Порождающая последовательность задачи Хилла задаёт два семейства: одно для задачи Хилла, другое для задачи анти-Хилла. Если порождающая последовательность задачи анти-Хилла содержит N пар дуг ii или ee , то она задаёт 2^N семейств задачи анти-Хилла. Порождающие последовательности, задающие более двух различных семейств, следуя Энону (см. [24, Гл. 6]), называются *бифуркационными*. Например, последовательность $\{i, i, e, e\}$ задаёт четыре семейства периодических орбит: два семейства из них являются двояко симметричными, а два — однократно симметричными.

3.2.3. Симметрии порождающих последовательностей

В разделе 1.2.6 доказаны леммы, позволяющие по порождающей последовательности задачи Хилла определять тип симметрии и глобальную кратность M орбит соответствующего семейства. Аналогичные леммы могут быть сформулированы для порождающих последовательностей задачи анти-Хилла.

Основные свойства порождающих последовательностей задачи Хилла по отношению к группе преобразований $\mathcal{G}$ были указаны в разделе 1.2.6, однако для обобщённой задачи сохраняются лишь два следующих.

Свойство 3.1. Порождающая последовательность определяется с точностью до циклической перестановки входящих в неё дуг.

Свойство 3.2. Порождающая последовательность под действием одного из преобразований Σ_1 или Σ_2 переходит в последовательность, в которой дуги исходной последовательности заменены согласно таблице 3.1 и записаны в обратном порядке. Преобразование $\Sigma_{12} \equiv \Sigma_1 \circ \Sigma_2$ меняет дуги в последовательности согласно таблице 3.1, но не меняет их порядка.

Для определения симметрии порождающей последовательности расширим таблицу 1.2 из раздела 1.2.6, добавив в неё преобразование пар дуг ii и ee .

Определение 3.1. Порождающая последовательность называется Σ_i -палиндромной, если она инвариантна относительно преобразования Σ_i , $i = 1, 2$, т.е. при записи ее элементов в обратном порядке с соответствующей заменой их согласно таблице 3.1 она не меняется. Также будем называть Σ_i -палиндромной и такую порождающую последовательность, которую можно сделать с помощью циклической перестановки палиндромной.

Лемма 3.1. Перечисленные ниже условия выделяют порождающие последовательности с соответствующим типом симметрии.

Таблица 3.1. Преобразование дуг

Дуга	Σ_1	Σ_2	Σ_{12}
$+j$	$+j$	$-j$	$-j$
$-j$	$-j$	$+j$	$+j$
i	e	i	e
e	i	e	i
i^+i	e^-e	i^+i	e^-e
i^-i	e^+e	i^-i	e^+e
t	$-t$	$-t$	t

- Порождающая последовательность Σ_1 - (Σ_2 -)симметричная, если она либо Σ_1 -(Σ_2 -) палиндромная, либо может быть разбита на две Σ_1 -(Σ_2 -) палиндромных подпоследовательности.
- Порождающая последовательность двояко симметричная, если она может быть разбита на две таких Σ_1 -(Σ_2 -)палиндромных подпоследовательности, которые будут взаимно Σ_2 -(Σ_1 -)симметричны.
- Порождающая последовательность центрально симметрична, если она может быть разбита на две взаимно Σ_{12} -симметричных подпоследовательности.

Пример 3.2.1. Рассмотрим порождающую последовательность $\{i, i, e, e\}$. В силу леммы 3 она есть порождающее решения для семейств периодических орбит задачи анти-Хилла, и, поскольку эта последовательность содержит две пары ii и ee , следовательно, она задаёт четыре семейства периодических орбит. Два семейства будут состоять из двояко симметричных орбит. Соответствующие им ветви описываются последовательностями $\{i^+i, e^-e\}$ и $\{i^-i, e^+e\}$. Действительно, например, под действием преобразования Σ_1 первая последовательность со-

гласно свойству 3.2 и таблице 3.1 перейдёт в последовательность $\{e^-e, i^+i\}$, которая по свойству 3.1 совпадает с исходной последовательностью. Два семейства будут состоять из Σ_2 -симметричных орбит. Соответствующие им ветви описываются последовательностями $\{i^+i, e^+e\}$ и $\{i^-i, e^-e\}$. Эти последовательности согласно леммы 3.1 являются Σ_2 , но не Σ_1 -симметричными.

3.2.4. Глобальные кратности порождающих последовательностей

Глобальная кратность периодической орбиты играет значительную роль в понимании связей между различными семействами периодических решений.

Определение 3.2. Число оборотов M периодической орбиты вокруг начала координат называется глобальной кратностью орбиты. Величина M берётся со знаком «+» при движении по часовой стрелке, «−» — при движении против часовой.

Глобальная кратность M не является инвариантом семейства периодических орбит, поскольку может меняться при наличии у семейства орбиты столкновения, но является полезной характеристикой для классификации семейств.

Правило вычисления глобальной кратности M орбит той части семейства, которая непосредственно задаётся порождающей последовательностью для случая задачи Хилла сформулировано и обосновано в разделе 1.2.6. При этом использовалась методика, предложенная М. Эноном в [52], основанная на его монографии [24].

Правило 4. Для вычисления глобальной кратности M орбит семейства, задаваемого порождающей последовательностью $\{j_1, \dots, j_k, j_{k+1}, \dots, j_n\}$ задачи Хилла, следует найти сумму

- числа «внешних» пересечений с осью Ox_1 , равную $2j_k - 1$ для каждой дуги j_k первого типа и равную нулю для каждой дуги второго типа;
- числа «внутренних» пересечений с осью Ox_1 согласующих гипербол, равную $+2$ для каждой пары дуг (j_k, j_{k+1}) , если знаки ординат конечной точ-

ки дуги j_k и начальной точки дуги j_{k+1} равны, и равную -1 , если эти знаки различны;

- и разделить полученную сумму на 2.

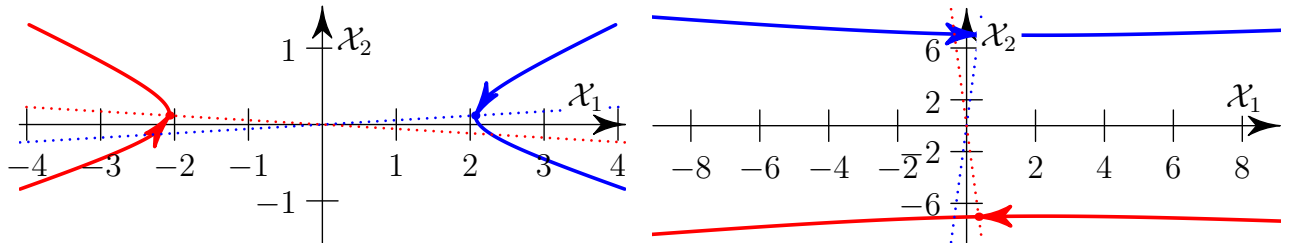
Для задачи анти-Хилла это правило пришлось переработать в связи с тем, что теперь порождающая последовательность может быть бифуркационной и, тем самым, задает несколько семейств периодических орбит.

Правило 5. Для вычисления глобальной кратности M орбит семейства, задаваемого порождающей последовательностью $\{j_1, \dots, j_k, j_{k+1}, \dots, j_n\}$ задачи анти-Хилла, следует найти сумму

- числа «внешних» пересечений с осью Ox_1 , равную $2j_k - 1$ для каждой дуги j_k первого типа и равную нулю для каждой дуги второго типа;
- числа «внутренних» пересечений с осью Ox_1 согласующих гипербол, равную 0 для каждой пары дуг (j_k, j_{k+1}) , если знаки ординат конечной точки дуги j_k и начальной точки дуги j_{k+1} равны, и равную $+1$, если эти знаки различны;
- если в порождающую последовательность входит подпоследовательность ii (или ee), то следует рассмотреть два случая:
 - для пары i^+i (e^-e соответственно) число «внутренних» пересечений с осью Ox_1 равно 0,
 - для пары i^-i (e^+e соответственно) «внутренних» пересечений с осью Ox_1 равно $+2$;
- и разделить полученную сумму на 2.

Обоснование правила 5 получается таким же способом, как это было сделано для правила 4, если учесть, что для любой пары дуг в порождающей последовательности, отличной от ii или ee , согласующая гипербола есть решение задачи движения точки в поле центральной силы с потенциалом отталкивания. Получаем два варианта гипербол. В первом случае это гиперболы с эксцентриситетом, близким к единице, и аргументом перицентра, близким к значению 0

или π , которые обходят начало координат по часовой стрелке и пересекают ось абсцисс однократно. Они показаны на рис. 3.6а). Во втором случае это гиперболы с эксцентриситетом $e \gg 1$ и аргументом перицентра $\varpi = \pm\pi/2$, которые огибают начало координат против часовой стрелки, но при этом не пересекают оси абсцисс. Они показаны на рис. 3.6б). Так же ведут себя и дуги для пар i^+i и e^-e . Дуга пары i^+i показана на рис. 3.5б) синим цветом, дуга пары e^-e симметрична ей относительно оси абсцисс. А вот дуги для пар i^-i и e^+e устроены так, как гиперболы с перицентром $\varpi = \pm\pi/2$ задачи Хилла. Дуга пары i^-i показана на рис. 3.5б) красным цветом, дуга пары e^+e симметрична ей относительно оси абсцисс.



а) Гиперболы с параметрами $e = 1.07$, $\varpi \approx 0$ (синим), $\varpi \approx \pi$ (красным).

б) Гиперболы с параметрами $e = 6$, $\varpi \approx \pi/2$ (синим), $\varpi \approx -\pi/2$ (красным).

Рис. 3.6. Согласующие гиперболы задачи анти-Хилла. Случай малых эксцентриситетов показан слева, больших — справа.

Правила 4 и 5 позволяют сформулировать следующие утверждения.

1) Порождающие последовательности семейств с прямыми орбитами в задаче Хилла должны включать в себя дуги второго типа, поскольку только они позволят в итоге получить значение $M < 0$.

2) Семейства задачи анти-Хилла, задаваемые порождающими последовательностями, состоят только из обратных орбит.

3) Глобальная кратность M является инвариантом семейства периодических орбит задачи анти-Хилла, поскольку в этой задаче нет орбит столкновения и величина M не может измениться вдоль семейства.

Пример 3.2.2. Для всех ветвей порождающей последовательности $\{i, i, e, e\}$ (см. пример 3.2.1) вычислим глобальную кратность периодических орбит. Поскольку последовательность состоит только из дуг второго типа, то число «внешних» пересечений равно нулю. Для ветви, что задаётся последовательностью $\{i^+i, e^-e\}$ пары дуг i^+i и e^-e , дают число «внутренних» пересечений, равное нулю, а пары i, e и e, i — равное $+1$. Следовательно, для этой ветви $M = +1$. Аналогично, для последовательности $\{i^-i, e^+e\}$ получаем $M = +3$. Взаимно Σ_1 -симметричные последовательности $\{i^+i, e^+e\}$ и $\{i^-i, e^-e\}$ задают семейства Σ_2 -симметричных орбит с глобальной кратностью $M = +2$.

Помимо глобальной кратности M периодического решения иногда удобно рассматривать его локальную кратность по отношению к другому периодическому решению. Рассмотрим два семейства периодических орбит и обозначим через λ_1 и λ_2 параметры этих семейств. Тогда такие параметры периодического решения, как вектор начальных условий z^0 , период T и индекс устойчивости S , суть гладкие функции от параметра семейства λ . Пусть два семейства имеют общее решение. Тогда, в соответствии с теорией Пуанкаре о периодических решениях первого и второго рода (см. [87, Гл. XXXIII]), должна существовать пара значений параметров λ_1^* и λ_2^* , таких, что

$$z_2^0(\lambda_2^*) = z_1^0(\lambda_1^*), \quad T_2(\lambda_2^*) = qT_1(\lambda_1^*), \quad S_2(\lambda_2^*) = \cos \frac{2\pi p}{q}, \quad S_1(\lambda_1^*) = 1,$$

где $p, q \in \mathbb{N}$. Дробь p/q будем называть *локальной кратностью* периодического решения второго семейства по отношению к первому. Первое периодическое решение с периодом T называется решением *первого рода*, а второе — с периодом qT — решением *второго рода*. Отметим, что знаменатель $q = M_2/M_1$, где M_i — глобальная кратность i -го семейства.

3.3. Результаты исследования семейств периодических орбит

Определение 3.3. Будем называть два семейства периодических орбит — одно семейство задачи Хилла, другое семейство задачи анти-Хилла — *связанными*, если они имеют одну и ту же порождающую последовательность.

Если рассматривать связанные семейства в рамках регуляризованной задачи, то они представляют собой участки (ветви) одного семейства периодических орбит.

Для обозначения семейств задачи анти-Хилла, связанных с соответствующими семействами задачи Хилла, используем имена последних со значком $\sim$. Многие семейства задачи Хилла второго вида имеют в пределе две разных порождающих последовательности. В этом случае соответствующие ветви различаем, указывая верхний индекс A или B . Например, семейство f_3 имеет две ветви, обозначаемые нами f_3^A и f_3^B соответственно. Первая ветвь задаётся порождающей последовательностью $\{+1, i, -1, e\}$, а вторая ветвь — порождающей последовательностью $\{+1, -1\}$. Тогда семейство задачи анти-Хилла, задаваемое первой порождающей последовательностью, обозначается $\tilde{f}_3^A$, а семейство, задаваемое второй последовательностью, — $\tilde{f}_3^B$.

Рассмотрим в этом разделе связь между семействами обобщенной задачи, ограничившись при этом списком следующих семейств задачи Хилла:

- «классические» семейства g, f, a, c, g', f_3 из статей Энона [39; 51];
- некоторые семейства из статьи Энона [52];
- некоторые новые семейства из статьи автора [8].

3.3.1. Семейства g и f

Эти семейства начинаются при $C \rightarrow +\infty$ прямыми и, соответственно, обратными круговыми орбитами вокруг начала координат. При стремлении $C \rightarrow -\infty$ семейство g стремится к своей порождающей последовательности $\{i, e\}$. Эта последовательность для задачи анти-Хилла задаёт семейство обратных ор-

бит с кратностью $M = +1$. Семейство f в пределе при $C \rightarrow -\infty$ стремится к порождающему решению первого вида F . В задаче анти-Хилла связанные с g и f семейства являются двумя ветвями одного семейства $\widetilde{gf}$ обратных двояко симметричных однооборотных орбит. Таким образом, семейства g и f задачи Хилла оказываются связанными друг с другом семейством $\widetilde{gf}$ задачи анти-Хилла. Схематически расположение указанных семейств показано на рис. 3.7.

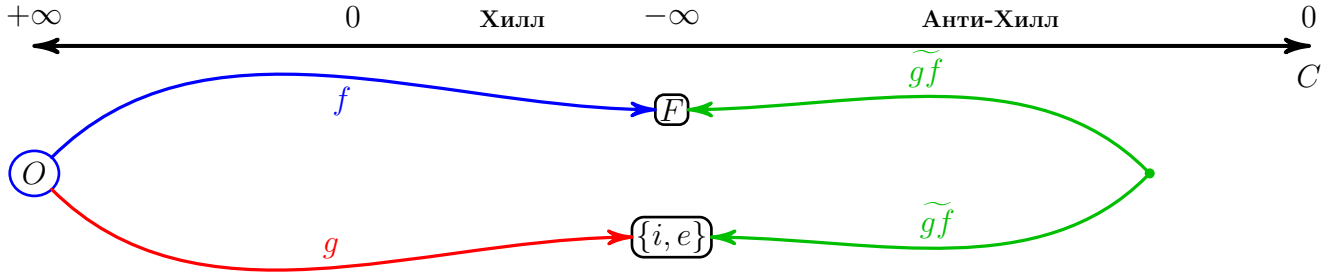


Рис. 3.7. Диаграмма связи между семействами g , f задачи Хилла и семейства $\widetilde{gf}$ задачи анти-Хилла.

3.3.2. Семейство f_3 двояко симметричных орбит

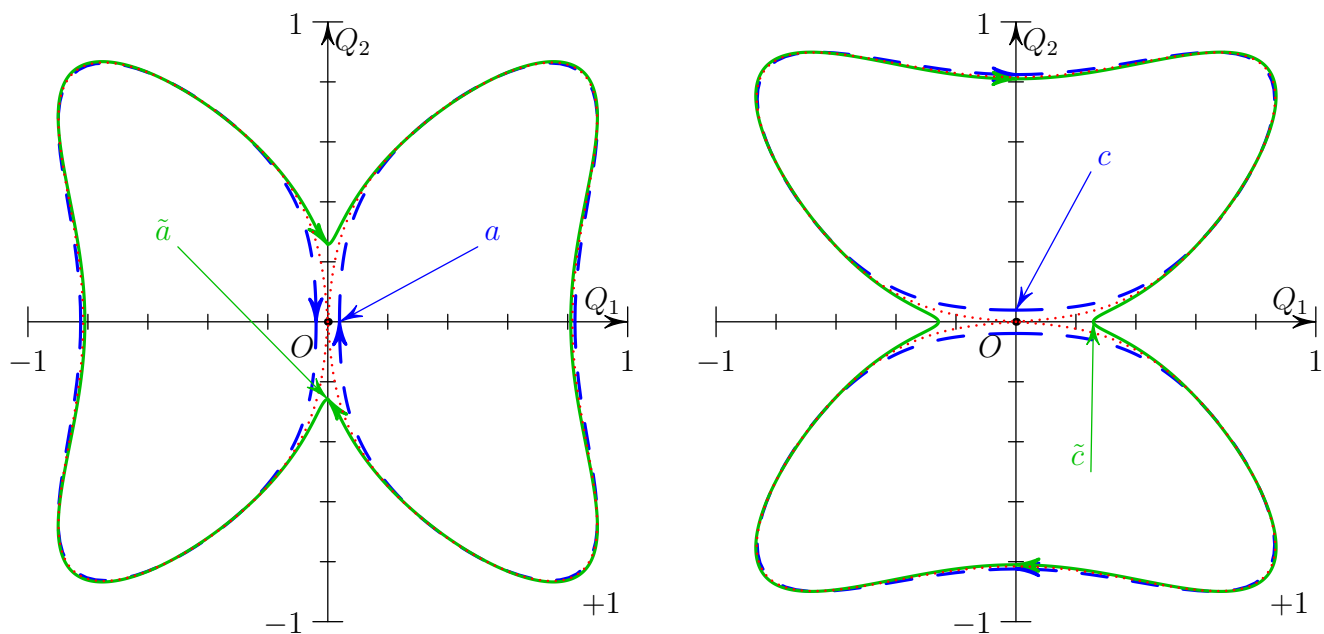
Это семейство было впервые анонсировано в [39] под именем g_3 , затем более полно описано в [20; 52]. Семейство имеет две ветви, обозначаемые здесь f_3^A и f_3^B , которые начинаются при $C \approx 3.806201$. Ветвь f_3^A состоит из прямых орбит с кратностью $M = -1$ и стремится в пределе к последовательности $\{+1, i, -1, e\}$, которая в задаче анти-Хилла задает семейство $\tilde{f}_3^A$ орбит с кратностью $M = +3$. Семейство $\tilde{f}_3^A$ имеет общую орбиту с локальной кратностью 3 с семейством $\widetilde{gf}$ и стремится в пределе к последовательности $\{i^-i, e^+e\}$. Ветвь f_3^B содержит орбиту столкновения, после прохождения которой глобальная кратность M становится равной $+3$. Затем она (ветвь) дважды пересекается с семейством f и в пределе стремится к последовательности $\{+1, -1\}$, которая в задаче анти-Хилла задаёт семейство $\tilde{f}_3^B$ орбит с кратностью $M = +1$. Семейство $\tilde{f}_3^B$ при продолжении достигает экстремума по C , и его вторая ветвь в пределе стремится к последовательности i^+i, e^-e . Таким образом, две ветви f_3^A и f_3^B се-

мейства f_3 задачи Хилла переходят одна в другую через соответствующие ветви семейств задачи анти-Хилла.

Оказалось, что в некотором смысле описанные выше двойко симметричные семейства образуют в определенном смысле каркас сети периодических решений, поскольку многие другие семейства пересекаются с этими семействами, разделяя общие орбиты с различными целыми локальными кратностями.

3.3.3. Семейства ляпуновских либрационных орбит a и c

Семейства a и c начинаются при $C = 3^{4/3}$ бесконечно малыми периодическими орбитами вокруг точек либрации L_1 и L_2 , соответственно. Семейства продолжаются и стремятся в пределе к порождающим последовательностям $\{+1\}$ и $\{-1\}$. Эти последовательности в задаче анти-Хилла дают две ветви $\tilde{a}$ и $\tilde{c}$, которые пересекаются с семейством $\widetilde{gf}$ по критической орбите, соответствующей бифуркации потери симметрии семейства двойко симметричных периодических орбит. Если рассмотреть орбиты пар семейств a , $\tilde{a}$ и c , $\tilde{c}$, а также предельные дуги $+1$, -1 в регулярных координатах, то получим такую картину. Предельная дуга $+1$ представляет собой по форме возмущённую восьмёрку с точкой самопересечения в начале координат и осью симметрии OQ_1 . Движение по ней происходит с бесконечно большим периодом в силу преобразования времени (3.4). На рис. 3.8а) показана орбита семейства a (синим цветом), которая располагается практически внутри петель этой восьмёрки (показана красным цветом точечной линией), а орбита семейства $\tilde{a}$ — снаружи восьмёрки (зелёным цветом). Можно рассматривать процесс продолжения семейства a задачи Хилла через предельную последовательность $\{+1\}$ к семейству $\tilde{a}$ как переход периодического движения через сепаратрису. При продолжении семейства c через порождающее решение $\{-1\}$ в семейство $\tilde{c}$ имеет такую же картину с точностью до симметрии относительно биссектрисы I и III квадрантов (см. рис. 3.8б).



а) Орбиты семейств a и $\tilde{a}$ при $C \approx -5$.

б) Орбиты семейств c и $\tilde{c}$ при $C \approx -5$.

Рис. 3.8. Орбиты семейств a (синий пунктир), $\tilde{a}$ (зеленым) и c (синий пунктир), $\tilde{c}$ (зеленым) в регулярных координатах. Красными точками показано положение предельной дуги $+1$ (слева) и -1 (справа).

3.3.4. Семейство Σ_1 -симметричных орбит g'

Семейство начинается с прямой однооборотной критической орбиты семейства g двумя ветвями, которые были обозначены М. Эноном символами g'_+ и g'_- в [51]. Каждая из этих ветвей стремится к своей порождающей последовательности $\{+2\}$ и $\{-2\}$, соответственно, проходя при $C \approx -4.6$ орбиту столкновения и меняя глобальную кратность M на значение $+1$. В задаче анти-Хилла эти последовательности задают семейства $\tilde{g}'_+$ и $\tilde{g}'_-$, соответственно, периодических орбит с кратностью $+2$. Каждое из них достигает общей с семействами $\tilde{a}$ и $\tilde{c}$, соответственно, критической орбиты с локальной кратностью 2.

Схематически описанные в пп. 3.3.1–3.3.4 результаты представлены на рис. 3.9. Центральный столбец содержит порождающие последовательности, точки O , L_1 и L_2 обозначают начало координат и точки либрации. Связанные семейства задач Хилла и анти-Хилла показаны одним цветом. Общие орбиты для двух различных семейств показаны кружком, а орбиты, на которых семейство дости-

гает экстремума по константе Якоби C — точкой соответствующего цвета.

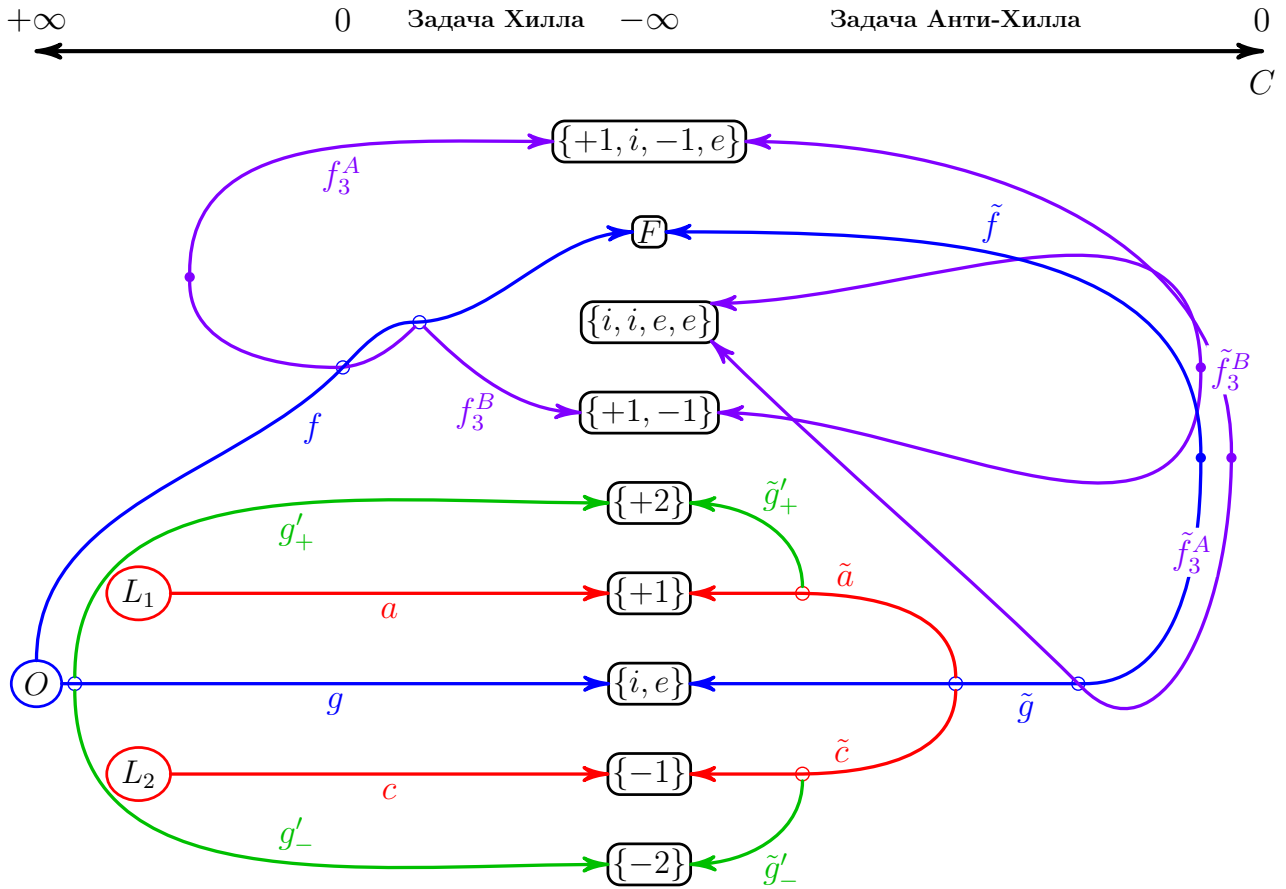


Рис. 3.9. Диаграмма связей между «классическими» семействами задачи Хилла и их антихилловскими продолжениями.

3.3.5. Семейства Σ_1 -симметричных орбит Hb и He

Эти семейства были найдены М. Эноном и описаны в [52]. Поскольку, и Hb , и He суть семейства Σ_1 -периодических орбит, то существуют семейства Hb' и He' , которые совпадают в результате преобразования Σ_2 с соответствующими исходными семействами. Все эти семейства не имеют общих орбит ни с одним из семейств задачи Хилла, но оказываются связанными с почти всеми описанными выше семействами задачи анти-Хилла, за исключением семейства $\tilde{g}'$. Начнём описание с семейства, названного М. Эноном Hb' . Оно имеет две ветви: Hb'^A и Hb'^B . Ветвь Hb'^A продолжается до своей порождающей последовательности

$\{+1, i, e\}$, затем при переходе через $C = -\infty$ меняет кратность с $M = -1$ на $M = +2$ и пересекается с семейством $\widetilde{gf}$ в критической орбите с $S = -1$. Таким образом, семейство $\widetilde{Hb}'^A$ является семейством периодических решений второго рода по отношению к решениям семейства $\widetilde{gf}$. Поскольку семейство $\widetilde{gf}$ двояко симметричное, то, как следует из теоремы 2.3, с ним должно пересекаться еще одно семейство Σ_1 -симметричных орбит, а также пара семейств Σ_2 -симметричных орбит.

Другая ветвь Hb'_B содержит орбиту столкновения, и при продолжении через неё глобальная кратность меняется со значения $M = -1$ на значение $M = +1$, а затем стремится к предельной последовательности $\{+1, +2\}$. Эта последовательность в задаче анти-Хилла задаёт семейство $\widetilde{Hb}'_B$, которое имеет общую орбиту локальной кратности 3 с семейством $\tilde{a}$. Достигая экстремума по C семейство $\widetilde{Hb}'_B$ стремится к порождающей последовательности $\{+3\}$, которая в задаче Хилла является порождающей для семейства He . Это семейство достигает экстремума при $C \approx 8.9$, а затем стремится к своей второй предельной последовательности $\{+1, e, i\}$. Эта последовательность в задаче анти-Хилла задаёт семейство $\widetilde{He}^A$, которое пересекается с семейством $\tilde{f}_3^B$ в критической орбите при $S = +1$. Согласно теореме 2.2 должно быть ещё одно семейство Σ_1 -симметричных решений, которое обозначим $\widetilde{He}'_A$. Двигаясь вдоль него, мы пройдем последовательно вдоль соответствующих ветвей семейств $\widetilde{Hb}$, $\widetilde{He}'$ задачи анти-Хилла и ветвей семейств Hb , He' задачи Хилла в обратном порядке, пересечем семейство $\tilde{c}$ и вновь придём к семейству $\widetilde{gf}$.

Для лучшего понимания связей между указанными семействами предлагается рис. 3.10, на котором отмечены только те из семейств: которые упоминались выше.

орбитам с локальной кратностью j . В точке пересечения эти семейства достигают экстремума по C и при дальнейшем продолжении стремятся к порождающей последовательности вида $\{+1, +(j-1)\}$. Были исследованы два семейства задачи Хилла, задаваемые последовательностями $\{+1, +3\}$ и $\{+1, +4\}$. Они продемонстрировали сходное поведение, а именно:

- 1) не содержали орбит столкновения;
- 2) достигали экстремума при $C < 0$;
- 3) вторая ветвь семейства стремилась к порождающей последовательности вида $\{+1, i, +(j-2), e\}$.

Результаты численного исследования позволяют сформулировать следующее предположение о структуре таких семейств периодических орбит.

Гипотеза 4. Все семейства периодических орбит, задаваемые порождающей последовательностью вида $\{+j\}$, при $j \geq 3$ устроены следующим образом.

- Семейства задачи Хилла состоят из орбит с глобальной кратностью $M = +(j-1)$, достигают экстремума при $C_j < 0$ и стремятся ко второй порождающей последовательности вида $\{+(j-2), e, i\}$.
- Семейства задачи анти-Хилла состоят из орбит с глобальной кратностью $M = +j$, достигают экстремума при пересечении с семейством $\tilde{a}$ и стремятся ко второй порождающей последовательности вида $\{+1, +(j-1)\}$.

Ранее было отмечено, что семейства двояко симметричных периодических орбит в задаче Хилла играют особую роль, формируя, в некотором смысле, «скелет» сети периодических решений. Поэтому были исследованы семейства, задаваемые простейшими двояко симметричными последовательностями вида $\{+j, -j\}$, $j = 2, \dots, 4$. Семейства задачи Хилла с такими порождающими последовательностями описаны в [20, п. 4.3.6], где высказана гипотеза, что все они суть семейства периодических решений второго рода для орбит семейства f с локальной кратностью $2j+1$. Там же рассмотрены семейства с порождающими последовательностями вида $\{+j, -(j-1)\}$, $\{-j, +(j-1)\}$, $j \geq 2$, которые оказа-

лись семействами периодических решений второго рода для орбит семейства f с локальной кратностью $2j$. Исследование семейств, задаваемых такими порождающими последовательностями в задаче анти-Хилла, позволяет сформулировать следующие предположения.

- Каждое из семейств задачи анти-Хилла с порождающей последовательностью вида $\{+j, -j\}$, $j \geq 2$ задает семейство двояко симметричных орбит с глобальной кратностью $M = 2j - 1$. При продолжении по C оно стремится к порождающей последовательности вида $\{(+1)^j, (-1)^j\}$.

- Каждое из семейств задачи анти-Хилла с порождающей последовательностью вида $\{+j, -(j-1)\}$ или $\{-j, +(j-1)\}$, $j \geq 2$ задаёт семейство Σ_1 -симметричных орбит с глобальной кратностью $M = 2j - 2$. При продолжении по C оно стремится к порождающей последовательности вида $\{(+1)^j, (-1)^{(j-1)}\}$ или $\{(-1)^j, (+1)^{(j-1)}\}$.

Двояко симметричные семейства, задаваемые порождающими последовательностями вида $\{+j, -j\}$, $j \geq 2$ имеют вторую ветвь, которая в пределе стремится к последовательности вида $\{+(j-1), e, -(j-1), i\}$. Были исследованы соответствующие семейства задачи анти-Хилла, однако оказалось, что при их продолжении по C они стремятся к последовательностям, которые содержат две подряд идущих дуги i и/или e . В силу гипотезы 1 такие последовательности не могут быть порождающими для семейств периодических орбит задачи Хилла.

В разделе 2.2.4 описаны семейства симметричных периодических орбит, задаваемых порождающими последовательностями вида $\{(+1)^n, (+2)^m\}$ или $\{(-1)^n, (-2)^m\}$, где $n, m \in \mathbb{N}$. Все найденные семейства демонстрировали ряд общих свойств, главным из которых было то, что вторая ветвь этих семейств, которая в пределе стремилась к последовательности $\{(+1)^n, (i, e)^m\}$ ($\{(-1)^n, (e, i)^m\}$ соответственно), содержала орбиты, совершающие облёт точки либрации L_1 или L_2 . При этом каждой дуге $+1$ (-1) в порождающей последовательности семейства соответствует один виток вокруг точки L_1 (L_2), а каждой дуге $+2$ (-2) — один участок, соединяющий окрестность точки либрации и

окрестность начала координат. В указанный выше класс семейств входят семейства ранее найденные М. Эноном в [52] (описанное выше семейство Hb , семейство Hd с порождающими последовательностями $\{+1, (+2)^2\}$ и $\{+1, (i, e)^2\}$, семейство Hf с порождающими последовательностями $\{(+1)^2, +2\}$ и $\{(+1)^2, i, e\}$) и автором в [79; 104] (два семейства с порождающими последовательностями вида $\{(+1)^k, +2\}$ и $\{(+1)^k, i, e\}$ для $k = 3, 4$). Все эти семейства в задаче Хилла являются изолированными.

Автор провёл анализ антихилловских продолжений некоторых семейств с порождающими последовательностями вида $\{(+1)^n, (+2)^m\}$ или $\{(+1)^n, (i, e)^m\}$. В частности, порождающая последовательность $\{+1, (i, e)^2\}$ в задаче анти-Хилла задаёт семейство однократно симметричных орбит с глобальной кратностью $M = +3$, которое пересекается с семейством $\widetilde{gf}$ по орбите с локальной кратностью $2/3$. Другая последовательность $\{+1, (+2)^2\}$ задаёт семейство с кратностью $M = +5$, которое пересекается с семейством $\tilde{a}$ по орбите с локальной кратностью $2/5$. Порождающая последовательность $\{(+1)^2, +2\}$ задаёт семейство орбит с кратностью $M = +4$, которое пересекается с семейством $\tilde{g}'$ по критической орбите с локальной кратностью $1/2$. По-видимому, и другие семейства, задаваемые последовательностями вида $\{(+1)^n, (+2)^m\}$ или $\{(+1)^n, (i, e)^m\}$, пересекаются либо с семейством $\widetilde{gf}$, либо с одним из семейств, связанным с ним орбитами второго рода.

3.4. Заключение

Задача Хилла, как и любая другая неинтегрируемая задача с инвариантной относительно фазового потока ограниченной областью фазового пространства, обладает бесконечным множеством периодических решений, сгруппированных в соответствующие семейства. Многие из этих семейств могут быть описаны в терминах порождающих последовательностей, однако являются изолированными в том смысле, что формируют свой набор семейств периодических решений

второго рода по Пуанкаре, который не пересекается ни с каким другим семейством периодических решений задачи. Если рассматривать предложенное обобщение задачи Хилла, то проведённый численный анализ подавляющего большинства известных на сегодняшний день семейств, позволяет сформулировать следующую гипотезу.

Гипотеза 5. Все семейства симметричных периодических орбит обобщённой задачи Хилла связаны друг с другом, формируя общую сеть семейств. Эта связь реализуется либо через общие порождающие последовательности, соединяющие семейства задач Хилла и анти-Хилла, либо через общие орбиты с целой локальной кратностью.

Следовательно, начиная с произвольной орбиты некоторого семейства можно путём продолжения вдоль него перейти к любой другой периодической орбите. Более того, некоторые свойства обобщённой задачи позволяют предсказать характеристики периодических орбит связанных друг с другом семейств.

Содержание главы 3 опубликовано в [9; 19; 105; 109; 110].

Часть II

Второй класс задач: устойчивость в многопараметрических системах

Наиболее простой частью «скелета» фазового пространства гамильтоновой системы являются положения равновесия (ПР). Особую значимость имеет информация о характере фазового потока в их окрестности, которую можно получить из анализа устойчивости. В отличие от первой части работы здесь рассматривается ситуация, когда функция Гамильтона задачи полиномиально зависит от некоторого набора параметров P из пространства Π .

Для теоретико-механических задач обычно используют три типа устойчивости: математическая устойчивость (устойчивость по Ляпунову), формальная устойчивость (устойчивость по Мозеру) и практическая устойчивость (см., например, [111]). Устойчивость по Ляпунову [112] является наиболее строгой и гарантирует равномерную ограниченность решений на бесконечном интервале времени относительно множества возмущений по начальным условиям и параметрам. Устойчивость по Мозеру [86; 113; 114] слабее, но обеспечивает скорость разбегания траекторий медленнее, чем степенной рост с произвольным положительным показателем. Наконец, практическая устойчивость [115] означает лишь ограниченность решений на конечном интервале по отношению к множеству возмущающих факторов. Во второй части изучается только устойчивость по Ляпунову многопараметрических систем Гамильтона, хотя некоторые методы главы 4 могут быть использованы и для исследования формальной устойчивости

Рассматривается схема исследования устойчивости по Ляпунову ПР, которая существенно использует следующие методы:

- а) вычисление дискриминантного множества многочлена,
- б) вычисление множества устойчивости линейной многопараметрической системы Гамильтона,
- в) вычисление гамильтоновой нормальной формы (НФ) в окрестности ПР.

Эта часть состоит из трёх глав. Глава 4 носит, в основном, вспомогательный характер, хотя содержит важные для дальнейшего исследования результаты. В ней обсуждаются методы исследования так называемого дискриминантного множества $\mathcal{D}(f_n)$ многочлена f_n . Это множество во многих случаях определяет

границу области устойчивости системы Гамильтона, линеаризованной в окрестности ПР. Предлагается конструктивный алгоритм вычисления полиномиальной параметризации всех компонент дискриминантного множества, в том числе гиперповерхности коразмерности 1, которая делит пространство коэффициентов многочлена на области с одинаковым числом его вещественных корней. В случае, когда нельзя построить явную параметризацию дискриминантного множества $\mathcal{D}(f_n)$ в силу сложной зависимости между коэффициентами многочлена и параметрами исходной задачи предлагается алгоритм асимптотического разложения дискриминантного множества в виде рядов трёх видов в пространстве $\mathbb{R}^3$.

В главе 5 рассматривается алгоритмическая схема исследования устойчивости линейной многопараметрической системы Гамильтона в терминах дискриминантного множества характеристического многочлена матрицы системы. Подробнее рассматривается класс статически неустойчивых гироскопических систем с четырьмя степенями свободы, для которых доказывается, что границей множества устойчивости в пространстве параметров не может быть многообразие с нулевыми корнями характеристического многочлена. Далее рассматривается задача об устойчивости в линейном приближении некоторой модельной механической системы статически неустойчивых шарнирно связанных гироскопов Лагранжа. Дается полное аналитическое описание её множества устойчивости в пространстве параметров размерности три. Выполнен анализ устойчивости в случае кратных собственных чисел.

Глава 6 посвящена исследованию устойчивости по Ляпунову двупараметрического семейства гироскопических задач. Вначале показано, как получить описание множества устойчивости в линейном приближении таких задач в виде, вычисленном в главе 5. Затем обсуждается метод исследования множества устойчивости по Ляпунову ПР многопараметрической нелинейной системы Гамильтона. С помощью этого метода вычисляется множество устойчивости по Ляпунову указанного выше семейства задач.

Глава 4

Исследование дискриминантного множества многочлена

В главе 4 обсуждаются методы исследования так называемого дискриминантного множества $\mathcal{D}(f_n)$ многочлена f_n . Это множество во многих случаях определяет границу области устойчивости системы Гамильтона, линеаризованной в окрестности ПР. Предлагается конструктивный алгоритм вычисления полиномиальной параметризации всех компонент дискриминантного множества, в том числе гиперповерхности коразмерности 1, которая делит пространство коэффициентов многочлена на области с одинаковым числом его вещественных корней. В случае, когда нельзя построить явную параметризацию дискриминантного множества $\mathcal{D}(f_n)$ в силу сложной зависимости между коэффициентами многочлена и параметрами исходной задачи предлагается алгоритм асимптотического разложения дискриминантного множества в виде рядов трёх видов в пространстве $\mathbb{R}^3$.

4.1. Субдискриминант многочлена, его вычисление и свойства

Рассмотрим приведённый многочлен от одной вещественной переменной x

$$f_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n \quad (4.1)$$

n -й степени с вещественными коэффициентами. n -мерное вещественное пространство $\mathbf{K} \equiv \mathbb{R}^n$ его коэффициентов $a_1, a_2, \dots, a_n$ назовём *пространством коэффициентов* многочлена (4.1).

Для многих прикладных задач важную информацию даёт описание в пространстве $\mathbf{K}$ множества $\mathcal{D}(f_n)$, на котором многочлен (4.1) имеет кратные корни. Потребность в знании структуры множества $\mathcal{D}(f_n)$ возникает, например, при ре-

шении проблемы устойчивости положения равновесия многопараметрических механических систем [3; 116], для вычисления резонансных нормальных форм систем Гамильтона вблизи стационарной точки [86].

Определение 4.1. *Дискриминантным множеством $\mathcal{D}(f_n)$ многочлена $f_n(x)$ назовём множество всех точек пространства коэффициентов $\mathbf{K}$, в которых $f_n(x)$ имеет кратные корни.*

Замечание 4.1. Использование термина «дискриминантное множество» объясняется тем, что существование кратных корней многочлена (4.1) эффективно определяется нулями его дискриминанта $D(f_n)$.

Множество $\mathcal{D}(f_n)$ имеет сложную структуру и состоит из алгебраических многообразий $\mathcal{V}_k$ различных размерностей k . На каждом из этих многообразий многочлен (4.1) имеет определённую структуру кратных корней. Обычно, наибольший интерес представляет собой многообразие коразмерности 1. Оно делит пространство коэффициентов $\mathbf{K}$ на области, в каждой из которых многочлен $f_n(x)$ имеет фиксированное число вещественных корней.

Утверждение 4.1 ([117, Теорема 2]). *Пространство коэффициентов $\mathbf{K}$ вещественного многочлена $f_n(x)$ делится многообразием $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{D}(f_n)$ на $1 + [n/2]$ связных частей с одинаковым числом вещественных корней.*

В этом разделе приведено описание конструктивного алгоритма вычисления параметрического представления всех компонент дискриминантного множества $\mathcal{D}(f_n)$ приведённого вещественного многочлена $f_n(x)$.

Условие кратности корней многочлена $f_n(x)$ равносильно тому, что сам многочлен и его первая производная $f'_n(x)$ имеют нетривиальный общий делитель, т. е. $\deg \gcd(f_n, f'_n) > 0$, где $\deg f(x)$ — степень многочлена $f(x)$, а $\gcd(f, g)$ — наибольший общий делитель пары многочленов $f(x)$ и $g(x)$.

Индикатором наличия кратного корня многочлена служит его дискриминант $D(f_n)$, который с точностью до знака является результатом самого многочлена и его первой производной.

Имеет место следующий критерий.

Утверждение 4.2 ([118, § 141]). *Необходимым и достаточным условием существования кратных корней у многочлена $f_n(x)$ является равенство нулю его дискриминанта $D(f_n)$.*

В пространстве T корней многочлена $f_n(x)$ дискриминант задаётся следующим образом.

Определение 4.2. Пусть $t_i, i = 1, \dots, n$, корни многочлена $f_n(x)$, тогда его дискриминант $D(f_n)$ задаётся формулой

$$D(f_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (t_i - t_j)^2. \quad (4.2)$$

Замечание 4.2. Если многочлен $f_n(x)$ имеет коэффициент при старшем мономе отличный от единицы, т. е. $\text{lc } f_n(x) \equiv a_0 \neq 1$, то его дискриминант вычисляется по формуле (4.2), умноженной на a_0^{2n-2} .

Для многочлена степени не выше трёх знак его дискриминанта однозначно определяет число его вещественных корней, однако, для многочленов больших степеней одного дискриминанта уже недостаточно.

Утверждение 4.3 ([119, Теорема 3.5]). *При $D(f_n) > 0$ число пар комплексно-сопряженных корней многочлена (4.1) чётно, при $D(f_n) < 0$ — нечётно.*

Условие $D(f_n) = 0$ является слишком «грубым» для того, чтобы прояснить структуру кратных корней. Описать их организацию можно с привлечением различных средств.

Один из возможных подходов опирается на исследование корней многочлена

$$\tilde{f}_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \gcd(f_n, f'_n).$$

Пусть $d \equiv \deg \tilde{f}_n > 0$, тогда корни многочлена $\tilde{f}_n(x)$ дают информацию о кратных корнях исходного многочлена (4.1): простым корням $\tilde{f}_n(x)$ соответствуют корни двойной кратности, а кратным корням $\tilde{f}_n(x)$ — корни большей

кратности многочлена $f_n(x)$. Для того, чтобы получить полную информацию о структуре корней многочлена $f_n(x)$, следует для каждого возможного значения $d = 1, \dots, n - 1$ вычислить соответствующий многочлен $\tilde{f}_n(x)$ и повторить для него описанную выше процедуру. Такой способ выглядит довольно трудоёмким.

Указанные выше вычисления можно существенно сократить, если воспользоваться набором величин, называемых *субдискриминантами k -го порядка*.

Определение 4.3. Пусть $t_i, i = 1, \dots, n$, корни многочлена $f_n(x)$. Тогда его субдискриминант $D^{(k)}(f_n)$ порядка $k = 0, \dots, n - 2$ есть

$$D^{(k)}(f_n) = \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, n\} \\ \#(I) = n-k}} \prod_{\substack{(j,l) \in I \\ l > j}} (t_j - t_l)^2,$$

где $\#(I)$ — число элементов множества I . Для $k = n - 1$ положим $D^{(n-1)}(f_n) = n$, а для $k = n$ положим $D^{(n)}(f_n) = 1$.

Очевидно, что $D^{(0)}(f_n) = D(f_n)$.

Последовательность субдискриминантов $D^{(j)}(f_n), j = 0, \dots, n - 2$, позволяет определить степень многочлена $\tilde{f}_n(x)$, а также количество вещественных корней многочлена $f_n(x)$.

Утверждение 4.4 ([120, Proposition 4.29]). Пусть в последовательности субдискриминантов $D^{(j)}(f_n), j = 0, \dots, n - 2$, первый отличный от нуля есть d -й субдискриминант, $0 \leq d \leq n - 1$. Тогда $\deg \tilde{f}_n(x) = d$, т. е. исходный многочлен имеет ровно $n - d$ различных корней.

4.1.1. Вычисление субдискриминантов

Вычисление субдискриминантов многочлена (4.1) является частным случаем задачи вычисления субрезультантов двух вещественных многочленов $f(x)$ и $g(x)$. Ниже рассмотрим основные способы вычисления субрезультантов, придерживаясь при этом некоторой хронологической последовательности. Следует отметить, что под термином «субрезультант» разные авторы понимают различные

алгебраические объекты, более того, сам субрезультант часто называют другими терминами: биградиент, младший результат и др. (см, например, [121; 122]). В данной работе мы ограничимся рассмотрением так называемого *скалярного субрезультанта*, хотя некоторые алгоритмы вычисления последнего основаны на вычислении *полиномиального субрезультанта*.

Определение 4.4. Пусть

$$f(x) = \prod_{i=1}^n (x - t_i), \quad g(x) = \prod_{i=1}^m (x - u_i)$$

два приведённых многочлена степени n и m соответственно. Тогда результат $R(f, g)$ вычисляется по формуле

$$R(f, g) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (t_i - u_j).$$

Для вычисления результата по коэффициентам исходных многочленов были разработаны разные методы. Все эти методы можно условно разделить на две группы.

Матричные методы основаны на составлении некоторой вспомогательной матрицы, элементы которой вычисляются по коэффициентам многочленов $f(x)$ и $g(x)$. Миноры этой матрицы, взятые в определённом порядке, представляют собой субрезультанты соответствующих порядков. К таким методам относятся описанные ниже алгоритмы вычисления субрезультантов с помощью матриц Безу различных модификаций, матрицы Сильвестра и ганкелевой матрицы. Для малых степеней исходных многочленов эти методы вполне эффективны, но при увеличении степени хотя бы одного из многочленов их трудоёмкость возрастает.

Методы, основанные на алгоритме Евклида, являются итерационными. Они позволяют существенно сократить объем вычислений и на каждом шаге дают субрезультант соответствующего порядка. В большинстве систем компьютерной алгебры именно эти методы и лежат в основе встроенных процедур вычисления субрезультантов.

Рассмотрим основные из них.

Метод Безу. Исторически первым способом вычисления результата двух многочленов является метод, предложенный в 1764 году Е. Безу (É. Bézout), с помощью *матрицы Безу*. Элементы этой матрицы являются коэффициентами некоторой билинейной функции коэффициентов многочленов $f(x)$ и $g(x)$.

Определение 4.5. Симметричной матрицей Безу (*безутиантой*) $\text{Bez}(f, g)$ многочленов $f(x)$ и $g(x)$, для которых $n = \deg f(x) \geq m = \deg g(x)$, называется матрица

$$\text{Bez}(f, g) = [\mathbf{b}]_{i,j=0}^{n-1},$$

где элементы $\mathbf{b}_{ij}$ определяются по формуле Кэли [123] (см. также [124, Ch. 12])

$$\frac{f(x)g(y) - f(y)g(x)}{x - y} = \sum_{i,j=0}^{n-1} \mathbf{b}_{ij} x^{n-1-i} y^{n-1-j}.$$

В некоторых работах матрица Безу определяется иначе и иногда называется *гибридной матрицей Безу* [125; 126]. В системе компьютерной алгебры Maple в пакете LinearAlgebra по умолчанию вычисляется матрица Безу именно в гибридной форме.

Определение 4.6 ([126]). Для заданных многочленов $f(x)$ и $g(x)$, таких, что $n = \deg f(x) \geq m = \deg g(x)$, назовём гибридной матрицей Безу $\text{HBez}(f, g)$ матрицу $n \times n$, элементы которой определяются следующим образом:

- для $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, элемент матрицы с индексом (i, j) есть коэффициент при мономе x^{n-j} многочлена

$$K_{m-i+1}(x) = (f_0 x^{m-i} + \dots + f_{m-i}) \times (g_{m-i+1} x^{n-m+i-1} + \dots + g_m x^{n-m}) - \\ - (f_{m-i+1} x^{n-m+i-1} + \dots + f_n) \times (g_0 x^{m-i} + \dots + g_{m-i}),$$

где $f_i, i = 0, \dots, n$ и $g_j, j = 0, \dots, m$ — коэффициенты многочленов $f(x)$ и $g(x)$ соответственно;

- для $m+1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, элемент матрицы с индексом (i, j) есть коэффициент при x^{n-j} многочлена $x^{n-i} g(x)$.

Для безутианты $\text{Bez}(f, g)$ и гибридной матрицы Безу $\text{HBez}(f, g)$ справедливы следующие утверждения.

1. $\deg \gcd(f, g) = n - \text{rang } \text{Bez}(f, g) = n - \text{rang } \text{HBez}(f, g)$.
2. Главный минор Bez_{n-k} порядка $n - k$ безутианты $\text{Bez}(f, g)$ равен k -му субрезультанту многочленов $f(x)$ и $g(x)$ [127, Теорема 5.4].
3. Минор HBez_{n-k} порядка $n - k$, вычисляемый начиная с левого нижнего угла гибридной матрицы Безу $\text{HBez}(f, g)$, равен k -му субрезультанту многочленов $f(x)$ и $g(x)$.

Теперь сформулируем правило вычисления субдискриминантов многочлена (4.1).

Утверждение 4.5 ([127]). k -й субдискриминант многочлена $f_n(x)$ вычисляется по формуле

$$D^{(k)}(f_n, f'_n) = (-1)^{n-k} \text{Bez}_{n-k}(f_n, f'_n),$$

где $n = \deg f_n(x)$, Bez_j — главный минор j -го порядка матрицы $\text{Bez}(f_n, f'_n)$.

Метод Сильвестра. Хронологически следующим способом вычисления результата был метод, использующий матрицу Сильвестра, один из вариантов которой был предложена Дж. Дж. Сильвестром (J. J. Sylvester) в 1840 году [128]. Эта матрица, обозначаемая далее $\text{Sylv}(f, g)$, размера $n \times m$ устроена проще безутианты $\text{Bez}(f, g)$, поскольку состоит из коэффициентов исходных многочленов.

Определение 4.7. Матрицей Сильвестра $\text{Sylv}(f, g)$ двух многочленов $f(x)$ и $g(x)$, для которых $n = \deg f(x)$ и $m = \deg g(x)$, называется квадратная матрица размера $(n + m) \times (n + m)$, строки которой есть векторы, составленные из коэффициентов многочленов

$$x^{m-1}f(x), x^{m-2}f(x), \dots, f(x), g(x), \dots, x^{n-2}g(x), x^{n-1}g(x)$$

в базисе $x^{n+m-1}, \dots, x, 1$.

Изначально, в оригинальной работе Сильвестра [128] и во многих последующих книгах и статьях матрица $\text{Sylv}(f, g)$ определяется иначе, когда последние

n ее строк записываются в обратном порядке. Однако, например, уже в книге Бохера [129, § 68], вышедшей в 1909 году, матрица Сильвестра задаётся как в определении 4.7. Иногда такую матрицу называют матрицей Сильвестра-Хабихта (см., например, монографию [120, Notation 4.21] или статью [130]), хотя в таком виде она записывалась ещё, видимо, в работах XIX века.

Например, матрица Сильвестра для многочленов $f_n(x)$ и $f'_n(x)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \text{Sylv}(f_n, f'_n) = & \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n & (n-1)a_1 & (n-2)a_2 & \cdots & 2a_{n-2} & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & n & \dots\dots\dots & 2a_{n-2} & a_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ n & (n-1)a_1 & \dots\dots\dots & 2a_{n-2} & a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & (4.3) \end{aligned}$$

Определение субрезультанта удобно дать с помощью иннора [122] матрицы $\text{Sylv}(f, g)$.

Определение 4.8. Пусть M_n — квадратная матрица размера $n \times n$. Тогда матрица M_{n-k} , $k < [n/2]$, полученная вычёркиванием k крайних строк и столбцов исходной матрицы M_n , называется ее k -м иннором.

Определение 4.9. k -м субдискриминантом $D^{(k)}(f_n)$ многочлена $f(x_n)$ называется определитель k -го иннора матрицы Сильвестра $\text{Sylv}(f_n)$.

В терминах инноров матрицы Сильвестра $\text{Sylv}(f_n)$ можно получить выражение для наибольшего общего делителя многочленов $f_n(x)$ и $f'_n(x)$. Пусть первый отличный от нуля субдискриминант имеет номер d , $0 < d < n - 1$. Обозначим через $M_d^{(i)}$, $i = 1, \dots, d$, d -й иннор модифицированной матрицы Сильве-

стра $\text{Sylv}(f_n)$, в которой столбец с номером $2n - 1 - d$ заменён ее столбцом с номером $2n - 1 - d + i$, а через $M_d^{(i)}$ — определитель этого иннора. Тогда имеет место следующее

Утверждение 4.6 ([127, Теорема 3.3]). *Если в последовательности субдискриминантов $D^{(i)}(f_n)$, $i = 0, \dots, n - 1$, первым отличным от нуля является субдискриминант с номером d , то*

$$\gcd(f_n(x), f'_n(x)) = D^{(d)}x^d + M_d^{(1)}x^{d-1} + \dots + M_d^{(i)}.$$

Если у многочлена $f_n(x)$ имеется единственный корень x_{mul} кратности 2, а остальные корни простые, то этот корень равен

$$x_{mul} = -\frac{M_1^{(1)}}{D^{(1)}(f_n)}. \quad (4.4)$$

Метод Кронекера. Л. Кронекер (L. Kronecker) исследовал ряды Лорана рациональной функции $Q(x) \stackrel{\text{def}}{=} g(x)/f(x)$ по степеням переменной x^{-1} , где $f(x)$ и $g(x)$ приведённые многочлены степеней n и m соответственно и $n > m$. Тогда раскладываем функцию $Q(x)$ в ряд по степеням x^{-1}

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_{i-1}}{x^i},$$

и составляем из коэффициентов c_i , $i = 0, \dots, 2n - 2$ ганкелеву матрицу $\mathfrak{C}$ размера $n \times n$

$$\mathfrak{C} = [c_{j+k}]_{j,k=0}^{n-1} = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_n \\ c_2 & c_3 & c_4 & \cdots & c_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1} & c_n & c_{n+1} & \cdots & c_{2n-2} \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Пусть C_j — j -й главный минор матрицы $\mathfrak{C}$.

Следующее утверждение устанавливает связь между субрезультантами многочленов $R^{(k)}(f, g)$ и главными минорами C_j .

Утверждение 4.7 ([127]).

$$C_{n-k} = R^{(k)}(f, g).$$

Для случая, когда $g(x) \equiv f'_n(x)$ элементы матрицы $\mathfrak{C}$ представляют собой *суммы Ньютона* корней исходного многочлена (4.1):

$$s_k(t_1, \dots, t_n) = \sum_{i=1}^n t_i^k.$$

Суммы Ньютона являются симметричными функциями корней многочлена и рационально выражаются через коэффициенты многочлена $f_n(x)$ посредством *формул Ньютона*:

$$n\sigma_n = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} s_i \sigma_{n-i}, \quad (4.6)$$

где σ_i — элементарные симметрические многочлены от корней t_i , $i = 1, \dots, n$, которые согласно теореме Виета связаны с коэффициентами a_i многочлена $f_n(x)$ соотношением

$$\sigma_k(t_1, \dots, t_n) = (-1)^k a_k. \quad (4.7)$$

Помимо рекуррентной формулы (4.6) укажем, что суммы s_k могут быть выражены через коэффициенты a_i многочлена (4.1) с помощью детерминатного представления [119, п. 11.1]

$$s_k = \det \begin{pmatrix} \sigma_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2\sigma_2 & \sigma_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k\sigma_k & \sigma_{k-1} & \sigma_{k-2} & \cdots & \sigma_1 \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Теперь, подставляя выражения (4.8) для ньютоновых сумм s_k в матрицу $\mathfrak{C}$ и применяя подстановку (4.7), можно получить общие выражения для k -х субдискриминантов. Так, для $k = n - i$, $i = 1, 2, 3$, соответствующие формулы имеют следующий вид:

$$D^{(n-1)}(f_n) = n,$$

$$D^{(n-2)}(f_n) = (n-1)a_1^2 - 2na_2, \quad (4.9)$$

$$D^{(n-3)}(f_n) = -2(n-1)a_1^3a_3 + (n-2)a_1^2a_2^2 +$$

$$-4(n-1)a_1^2a_4 + 2(5n-6)a_1a_3a_2 +$$

$$-4(n-2)a_2^3 + 8na_4a_2 - 9na_3^2. \quad (4.10)$$

Ганкелева матрица (4.5), где $c_i = s_i$, используется не только для вычисления субдискриминантов многочлена $f_n(x)$, но и в известной теореме о числе его вещественных корней.

Утверждение 4.8 (Якоби, Борхардт, см. [90; 131]). *Количество вещественных корней многочлена $f_n(x)$ равно сигнатуре квадратичной формы, заданной матрицей (4.5), в которой $c_i = s_i$.*

Поскольку сигнатура квадратичной формы вычисляется с помощью главных миноров ее матрицы [90, Глава X], то в силу утверждения 4.7 имеем следующую процедуру определения числа вещественных и, следовательно, комплексных корней многочлена f_n .

Составим последовательность

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \left(1, D^{(n-1)}(f_n), \dots, D^{(1)}(f_n), D^{(0)}(f_n)\right).$$

Пусть $P(S)$ есть число знакопостоянств в последовательности s , а $V(S)$ — число знакоперемен этой последовательности.

Утверждение 4.9 ([120]). *Число вещественных корней многочлена $f_n(x)$ равно величине*

$$PmV(f_n) \stackrel{\text{def}}{=} P(S) - V(S).$$

Из этого утверждения непосредственно следует, что

Утверждение 4.10. Для того, чтобы многочлен $f_n(x)$ имел только вещественные корни необходимо и достаточно, чтобы все его субдискриминанты $D^{(k)}(f_n)$, $k = 0, \dots, n - 1$, были неотрицательны.

Другие варианты условия вещественности корней многочлена см. в [122; 132].

Метод, основанный на алгоритме Евклида. Алгоритм Евклида, который по утверждению Дональда Кнута является старейшим нетривиальным алгоритмом дожившим до наших дней, позволяет вычислять субдискриминанты пары многочленов $f(x)$ и $g(x)$. Для краткости, рассмотрим далее вариант метода для вычисления субдискриминантов многочлена $f_n(x)$.

Классический алгоритм Евклида для пары многочленов $f(x)$ и $g(x)$ позволяет найти такие многочлены $q(x)$ и $r(x)$, называемые соответственно частное и остаток, что $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$, где $\deg q(x) = \deg f(x) - \deg g(x)$ и $\deg r(x) < \deg g(x)$. Следуя [121, Section 4], определим правило деления.

Определение 4.10. *Правилом деления* $\mathcal{R}$ назовём отображение

$$\mathcal{R} : \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}^2 : (f(x), g(x)) \mapsto (\alpha, \beta),$$

которое для каждой пары многочленов $(f(x), g(x))$ позволяет найти такие многочлены $q(x)$ и $r(x)$, что

$$\alpha f(x) = q(x)g(x) + \beta r(x), \quad \deg r < \deg g.$$

Классический алгоритм Евклида имеет правило деления $\mathcal{R}(f, g) = (1, 1)$. Главный недостаток его заключается в том, что если исходная пара многочленов $f, g \in \mathbb{Z}[x]$, то остаток от деления $r(x)$ может, вообще-то говоря, не принадлежать $\mathbb{Z}[x]$. В 1836 году К. Якоби (С. Jacobi) предложил *псевдоделение*: $\mathcal{R}(f, g) = (\text{lс } g^{\deg f - \deg g + 1}, 1)$, которое гарантировало, что остаток $r(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Недостаток псевдоделения заключается в экспоненциальном росте коэффициентов промежуточных многочленов на каждом шаге применения алгоритма. Как показано в [133], коэффициенты увеличиваются приблизительно в $1 + \sqrt{2}$ раза.

Если обобщить правило деления так, что на каждом i -м шаге коэффициенты (α_i, β_i) выбираются определенным образом, то последовательность остатков $r_i(x)$ будет представлять собой полиномиальные субрезультанты, а $\text{lc } r_i(x)$ — соответственно скалярные субрезультанты. В [121] это правило деления выглядит так. Положим $r_0 \equiv f(x)$, $r_1 \equiv g(x)$, $\rho_0 = 1$. На каждом шаге $\mathcal{R}_i(f, g) = (\alpha_i, \beta_i)$ для $2 \leq i$ рекурсивно определяем

$$\begin{aligned} (\alpha_i, \beta_i) &= \left(\rho_{i-1}^{d_{i-2}+1}, -\rho_{i-2} \psi^{d_{i-2}} \right), \\ \psi_i &= \begin{cases} -1, & \text{для } i = 2, \\ (-\rho_{i-2})_{i-3}^d \psi_{i-1}^{1-d_{i-3}}, & \text{для } i > 2. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Здесь r_i — остаток, полученный на i -м шаге, $\rho_i = \deg r_i$, $d_{i-1} = \deg r_{i-1} - \deg r_i$.

Если $r_0(x) \equiv f_n(x)$, $r_1(x) \equiv f'_n(x)$ и $f_n(x)$ — приведённый многочлен, то правило деления (4.11) упрощается:

$$\mathcal{R}_i(f_n, f'_n) = ((\text{lc } r_i)^2, -(\text{lc } r_{i-1})^2).$$

Заметим, что встроенная процедура `resultant` вычисления результата двух многочленов в системе компьютерной алгебры `Maple` в итоге использует именно описанный выше алгоритм. Сравнение производительности различных методов вычисления субдискриминантов многочлена от одной переменной, реализованных автором в системе `Maple`, показало, что для многочленов с числовыми коэффициентами метод, основанный на алгоритме Евклида, существенно опережает любой матричный метод. Однако, если многочлен $f_n(x)$ имеет символьные коэффициенты, то для $n \geq 10$ метод, основанный на симметричной матрице Безу работает быстрее, чем метод, основанный на алгоритме Евклида. Это можно объяснить тем, что в случае символьных коэффициентов львиная доля времени уходит на упрощение промежуточных символьных результатов.

Содержание раздела 4.1 опубликовано в [13; 134].

4.2. Параметризация дискриминантного множества $\mathcal{D}(f_n)$

Множество $\mathcal{D}(f_n)$ состоит из алгебраических многообразий $\mathcal{V}_k$ размерностей k , $1 \leq k \leq n - 1$. Общее число этих многообразий, а также число различных многообразий $\mathcal{V}_k$, имеющих фиксированную размерность k , зависит от числа разбиений степени n многочлена $f_n(x)$.

4.2.1. Разбиения натурального числа

Определение 4.11. Разбиением λ натурального числа n называется всякая конечная неубывающая последовательность натуральных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, для которой $\sum_{i=1}^k \lambda_i = n$. Каждое из разбиений будем записывать в виде $\lambda = [1^{n_1} 2^{n_2} 3^{n_3} \dots]$, где n_i — число повторений слагаемого i в разбиении, т. е. $\sum i n_i = n$.

Определение 4.12. Определим основные числовые функции, связанные с множеством разбиений.

- Функция $p(n)$ задается числом всех разбиений числа n .
- Функция $p_k(n)$ задается числом всех разбиений n на k слагаемых.
- Функция $q(n)$ задается числом всех разбиений n на различные слагаемые.
- Функция $q_k(n)$ задается числом всех разбиений n на k различных слагаемых.

Очевидно, $p(n) = \sum_{k=1}^n p_k(n)$ и $q(n) = \sum_{k=1}^n q_k(n)$. Вычислению функций $p(n)$, $p_k(n)$, $q_k(n)$ посвящено огромное число работ (см., например, [135; 136]), но, наверное, самой знаменитой является пентагональная теорема Эйлера.

Указанные выше функции могут быть вычислены либо с помощью производящих функций, либо с помощью рекуррентных соотношений. Так, для функции $p(n)$ соответствующие формулы были найдены ещё Л. Эйлером и имеют следующий вид: $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k}$, $p(n) = \sum_{k \neq 0} (-1)^{k-1} p(n - g_k)$,

$g_k = k(3k-1)/2$. Для функции $p_k(n)$ соответствующие формулы таковы: $P_k(x) = \sum p_k(n)x^n = x^k \prod_{i=1}^k \frac{1}{1-x^i}$, $p_k(n) = p_k(n-k) + p_{k-1}(n-1) = \sum_{i=1}^k p_i(n-k)$.

Нетрудно видеть, что для любого $n > 0$ имеем $p_1(n) = p_n(n) = p_{n-1}(n) = 1$. Последнее равенство следует из того, что для любого натурального n имеется по одному разбиению на одно слагаемое ($[n^1]$), на n одинаковых слагаемых ($[1^n]$), на $n-1$ слагаемое ($[1^{n-2}2^1]$). Для $k = 2, 3$ можно привести явные формулы $p_2(n) = [n/2]$, $p_3(n) = \lfloor (n^2 + 9)/12 \rfloor - 1$, где $\lfloor \cdot \rfloor$ — операция округления до ближайшего целого.

Для функции $q(n)$ в качестве производящей функции $Q(x)$ можно выбрать следующую функцию $Q(x) = \sum_n q(n)x^n = \prod_{i=1}^n (1+x^i)$. Наконец, для функции $q_k(n)$ производящая функция $Q_k(x)$ имеет вид $Q_k(x) = \sum_n q_k(n)x^n = \frac{x^{k+\binom{k}{2}}}{\prod_{i=0}^k (1-x^i)}$, где $\binom{k}{2}$ — биномиальный коэффициент. Явная формула для $q_2(n)$ имеет вид $q_2(n) = [(n-1)/2]$.

4.2.2. Число компонент дискриминантного множества $\mathcal{D}(f_n)$

Рассмотрим разбиение $\lambda = [1^{n_1}2^{n_2} \dots i^{n_i} \dots]$ натурального числа n . Величина i в разбиении λ задаёт кратность корня, а n_i — количество корней соответствующей кратности. Тогда $k = \sum_i n_i$ есть число различных корней многочлена $f_n(x)$ и $\sum_i in_i = n$. Любое разбиение λ числа n определяет некоторую структуру кратных корней многочлена и этой структуре соответствует в пространстве коэффициентов $\mathbf{K}$ некоторое алгебраическое многообразие $\mathcal{V}_k^i$, $i = 1, \dots, p_k(n)$, размерности k по числу различных корней. Число таких многообразий размерности k равно $p_k(n)$, а общее число многообразий всех возможных размерностей равно $p(n)-1$, поскольку разбиению $[1^n]$ соответствует ситуация, когда все корни многочлена (4.1) различны.

В силу того, что исходный многочлен (4.1) вещественный, то комплексные корни его образуют пары — сам комплексный корень t_i и ему комплексно сопряжённый $\bar{t}_i$. Если комплексный корень t_i кратный, то и сопряжённый ему имеет

такую же кратность. Значит, в разбиении λ , которое соответствует такой структуре корней, будет два равных слагаемых. Следовательно, алгебраическое многообразие $\mathcal{V}_k \subset \mathbf{K}$ размерности k задаёт только вещественные корни многочлена $f_n(x)$, если соответствующее ему разбиение числа n есть разбиение, состоящее из k различных слагаемых. Число таких разбиений для фиксированного k есть значение функции $q_k(n)$, а общее число компонент дискриминантного множества $\mathcal{D}(f_n)$, на которых все корни вещественны задаётся функцией $q(n)$.

4.2.3. Иерархическая структура компонентов множества $\mathcal{D}(f_n)$

Начнём с разбиения $[n^1]$, которое соответствует случаю, когда имеется единственный (очевидно вещественный) корень t_1 максимальной кратности n . Тогда многочлен $f_n(x)$ имеет вид

$$f_n(x) = (x - t_1)^n, \quad (4.12)$$

а его коэффициенты a_i выражаются через биномиальные коэффициенты

$$a_i = (-1)^i \binom{n}{i} t_1^i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.13)$$

Согласно утверждению 4.4 в этом случае $\deg \tilde{f}_n(x) = n - 1$, т. е. в последовательности субдискриминантов $D^{(i)}(f_n)$, $i = 0, \dots, n - 1$, первый отличный от нуля субдискриминант есть $D^{(n-1)}(f_n)$. Следовательно, формулы (4.13) задают параметрическое представление нулей идеала $\mathcal{J}_{n-1}$. Эти нули представляют собой одномерное многообразие $\mathcal{V}_1$ без особых точек, поскольку $da_1/dt = -n \neq 0$.

Двумерные алгебраические многообразия $\mathcal{V}_2^i$, $i = 1, \dots, p_2(n)$, задаются разбиениями λ числа n на два слагаемых: $\lambda = [n_1^1, n_2^1]$, $n_1 + n_2 = n$. Число таких многообразий равно $p_2(n)$, из них многообразий, на которых многочлен (4.1) имеет только вещественные корни, равно $q_2(n)$. Корни многочлена могут быть комплексными лишь на одном из многообразий $\mathcal{V}_2^i$, для которого соответствующее разбиение λ имеет вид $[m^2]$, где $n = 2m$.

Пусть на каждом из многообразий $\mathcal{V}_2^i$ многочлен $f_n(x)$ имеет только два различных вещественных корня. Тогда его можно представить в виде

$$f_n(x) = (x - t_1)^{n_1}(x - t_1 - t_2)^{n_2}. \quad (4.14)$$

Для случая, когда $n = 2m$, представим его в виде

$$f_n(x) = \begin{cases} [(x - v_1)^2 - v_2^2]^m, & t_{1,2} = v_1 \pm v_2 \in \mathbb{R}, \\ [(x - v_1)^2 + v_2^2]^m, & t_{1,2} = v_1 \pm iv_2 \in \mathbb{C}. \end{cases} \quad (4.15)$$

Очевидно, что при $v_2 = 0$ многочлен вида (4.14), а при $v_2 = 0$ многочлен вида (4.15) переходят в многочлен вида (4.12). Следовательно, каждое из многообразий $\mathcal{V}_2^i, i = 1, \dots, p_2(n)$, пересекается друг с другом по многообразию $\mathcal{V}_1$.

Аналогично можно описать все многообразия $\mathcal{V}_3^i, i = 1, \dots, p_3(n)$, размерности 3, и так далее, пока, в итоге, мы не придём к многообразию $\mathcal{V}_{n-1}$, на котором многочлен $f_n(x)$ имеет единственный двойной корень и $n - 2$ простых корня.

4.2.4. Конструктивный алгоритм построения параметризации многообразий $\mathcal{V}_k$

Рассмотрим конструктивную процедуру построения параметрического представления многообразий $\mathcal{V}_k^i$ для всех значений $k = 1, \dots, n - 1$ и $i = 1, \dots, p_k(n)$.

Теорема 4.1. Пусть в пространстве коэффициентов $\mathbf{K}$ многочлена $f_n(x)$ степени n имеется алгебраическое многообразие $\mathcal{V}_k$ размерности $k < n$, на котором $f_n(x)$ имеет k различных корней, из которых t — вещественный корень кратности m , $m \leq n - k + 1$, т. е. $f_n(x) = (x - t)^m u(x)$, где $u(x)$ — частное от деления многочлена $f_n(x)$ на бином $(x - t)^m$, а $u_i, i = 1, \dots, k - 1$, его различные корни с кратностью отличной от m . Пусть $\mathbf{r}_k(t, u_1, \dots, u_{k-1})$ — параметрическое представление многообразия $\mathcal{V}_k$. Тогда выражение

$$\mathbf{r}_{k+1}(t, v, u_1, \dots, u_{k-1}) = \mathbf{r}_k + \frac{v}{m} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t} \quad (4.16)$$

задаёт параметризацию алгебраического многообразия $\mathcal{V}_{k+1}$, на котором многочлен $f_n(x)$ имеет корень t кратности $m - 1$, простой корень $t + v$, а кратности и значения остальных $k - m$ корней остаются неизменными. При $v = 0$ параметризация (4.16) переходит в параметризацию $\mathbf{r}_k$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательный многочлен $g(x; t, v)$, коэффициенты которого непрерывно зависят от параметров t, v следующим образом

$$g(x; t, v) = f_n(x) + av \frac{\partial f}{\partial t},$$

где $a = \text{const}$. Подставляя выражение для $f_n(x)$ из условия теоремы, получим

$$g(x; t, v) = (x - t)^{m-1}(x - t - mav)u(x).$$

Полагая $a = m^{-1}$ получаем $g(x; t, v) = (x - t)^{m-1}(x - t - v)u(x)$. Таким образом, многочлен $g(x; t, v)$ имеет корень t кратности $m - 1$, один простой корень $t + v$ и остальные $m - k$ корней такие же, как у многочлена $f_n(x)$. Для коэффициентов $g_i(t, v)$ многочлена $g(x; t, v)$ получаем

$$g_i(t, v) = a_i(t) + \frac{v}{m} \frac{\partial a_i(t)}{\partial t}.$$

Следовательно, формула (4.16) параметризует ту часть многообразия $\mathcal{V}_{k+1}$, на которой многочлен $f_n(x)$ имеет описанную выше структуру корней. $\square$

Формула (4.16) в теореме 4.1 имеет прозрачную геометрическую интерпретацию, ибо показывает, что каждое многообразие $\mathcal{V}_{k+1}$ может рассматриваться как линейчатая касательная развёртывающаяся поверхность размерности $k + 1$ в пространстве коэффициентов $\mathbf{K}$ (см. [137; 138]). Направляющей этой поверхности служит многообразие $\mathcal{V}_k$.

Если вместо формулы (4.16) воспользоваться выражением

$$\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_k + \frac{t_2 - t_1}{m} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t_1}, \quad (4.17)$$

то получим параметризацию многообразия $\mathcal{V}_{k+1}$, на котором многочлен $f_n(x)$ раскладывается на множители следующим образом:

$$f_n(x) = (x - t_1)^{m-1}(x - t_2)u(x).$$

Пусть один из корней, например u_1 , многочлена $u(x)$ в условии теоремы 4.1 простой, т. е. $u(x) = (x - u_1)\tilde{u}(x)$. Тогда на части многообразия $\mathcal{V}_{k+1}$ исходный многочлен $f_n(x)$ имеет пару простых корней. Эта часть многообразия непрерывно продолжается на ту её часть, где многочлен имеет пару комплексно сопряжённых корней. Чтобы получить параметрическое представление этой части многообразия $\mathcal{V}_{k+1}$, следует сделать такую замену параметров:

$$t + v \rightarrow v_1 + iv_2, \quad u_1 \rightarrow v_1 - iv_2.$$

Эта замена параметров приведёт к тому, что многочлен $f_n(x)$ можно представить в виде

$$f_n(x) = (x - t)^{m-1} ((x - v_1)^2 + v_2^2) \tilde{u}(x). \quad (4.18)$$

Если поменять знак перед слагаемым v_2^2 в правой части формулы (4.18), то получим факторизацию многочлена $f_n(x)$ на той части многообразия $\mathcal{V}_{k+1}$, где имеется пара простых корней $v_1 \pm v_2$. Таким образом, для получения параметризации всего многообразия $\mathcal{V}_{k+1}$ следует использовать подстановку

$$t + v \rightarrow v_1 + \sqrt{v_2}, \quad u_1 \rightarrow v_1 - \sqrt{v_2}, \quad (4.19)$$

которая, в итоге, позволит записать многочлен $f_n(x)$ на всем многообразии $\mathcal{V}_{k+1}$ в виде

$$f_n(x) = (x - t)^{m-1} ((x - v_1)^2 + v_2) \tilde{u}(x).$$

Аналогично можно поступить, если многочлен $u(x)$ в условии теоремы 4.1 имеет один из корней, например u_2 , кратности $m-1$, только в этом случае вместо подстановки (4.19) следует использовать подстановку

$$t \rightarrow v_1 + \sqrt{v_2}, \quad u_2 \rightarrow v_1 - \sqrt{v_2}. \quad (4.20)$$

Лемма 4.1. Для того, чтобы получить параметрическое представление многообразия $\mathcal{V}_l \subset \mathcal{D}(f_n)$ размерности l , $l \geq 2$, на котором многочлен $f_n(x)$ имеет два корня одинаковой кратности l , необходимо $l - 1$ раз применить преобразование (4.17) к параметризации (4.13), а затем к каждой из различных $[(l - 1)/2]$ пар параметров t_i , $i = 2, \dots, l$, применить преобразование (4.20). Здесь $[x]$ — целая часть числа x .

Введём три основные операции, которые позволят последовательно перейти от параметрического представления одномерного многообразия $\mathcal{V}_1$ к параметризации всех других компонентов дискриминантного множества $\mathcal{D}(f_n)$.

I. Назовём операцию перехода от многообразия $\mathcal{V}_k$ к многообразию $\mathcal{V}_{k+1}$ «**ПОДЪЁМ**». Эта операция позволяет перейти к многообразию, размерность которого на единицу больше размерности исходного. Если на нем многочлен (4.1) имеет только вещественные корни, то получим его полную параметризацию, если имеются комплексные корни, то применим следующую операцию.

II. Операцию, основанную на замене (4.19), назовём «**ПРОДОЛЖЕНИЕ**». Эта операция позволяет получить параметризацию всего многообразия $\mathcal{V}_{k+1}$, полученного в результате операции «ПОДЪЁМ» в случае, когда на последнем имеются комплексные корни.

III. Если на многообразии $\mathcal{V}_{k+1}$ многочлен $f_n(x)$ имеет пару различных корней одинаковой кратности, то можно перейти к многообразию $\mathcal{V}_k$, на котором имеется один корень удвоенной кратности. Такую операцию назовём «**СПУСК**». Если после этого перехода на многообразии $\mathcal{V}_k$ имеется пара корней одинаковой кратности, то для них следует выполнить процедуру «ПРОДОЛЖЕНИЕ».

Опишем алгоритм получения параметрического представления алгебраических многообразий $\mathcal{V}_k^i$, $k = 1, \dots, n - 1$, $i = 1, \dots, p_k(n)$, составляющих дискриминантное множество $\mathcal{D}(f_n)$.

1. Вначале строим параметрическое представление одномерного многообразия $\mathcal{V}_1$ по формулам (4.13).

2. Применяем операцию «ПОДЪЁМ» с использованием формулы (4.17) и получаем параметризацию многообразия $\mathcal{V}_2^1$, соответствующего разбиению $[1^1(n-1)^1]$.
3. Вновь применяем операцию «ПОДЪЁМ» и получаем параметризацию многообразия $\mathcal{V}_3^1$, которое соответствует разбиению $[1^2(n-2)^1]$. Поскольку на этом многообразии имеется пара простых корней, то следует применить операцию «ПРОДОЛЖЕНИЕ». В итоге получаем полную параметризацию многообразия $\mathcal{V}_3^1$.
4. Применяя к последней параметризации операцию «СПУСК» получаем параметрическое представление многообразия $\mathcal{V}_2^2$, на котором корни многочлена $f_n(x)$ соответствуют разбиению $[2^1(n-2)^1]$.
5. Далее, последовательно комбинируя операции «ПОДЪЁМ», «ПРОДОЛЖЕНИЕ» и «СПУСК», получим параметрическое представление всех компонент дискриминантного множества $\mathcal{D}(f_n)$.

Поскольку на каждом шаге алгоритма мы остаёмся в рамках полиномиальных параметризаций, то доказана следующая

Теорема 4.2. *Дискриминантное множество $\mathcal{D}(f_n)$ многочлена $f_n(x)$ допускает полиномиальную параметризацию каждого из составляющих его многообразий $\mathcal{V}_l^k$, $l = 1, \dots, n-1$, $k = 1, \dots, p_l(n)$.*

Для многообразий $\mathcal{V}_k^i$, соответствующих разбиениям вида $[1^{k-1}(n-k+1)^1]$, т.е. когда многочлен $f_n(x)$ имеет в точности k различных корней, из которых $k-1$ корень простой, а один корень кратный, можно предложить следующую формулу:

$$a_i = (-1)^i \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n-k+1}{i-j} t_1^{i-j} \sigma_{j+1}(t_2, \dots, t_k), \quad (4.21)$$

где $\sigma_j(t_2, \dots, t_k)$ — элементарный симметрический многочлен j -й степени от $(k-1)$ -й переменной $t_2, \dots, t_k$. Формула (4.21) параметризует только ту часть

многообразия $\mathcal{V}_k^i$, на которой многочлен имеет вещественные корни. Для получения полной параметризации следует применить процедуру «ПРОДОЛЖЕНИЕ» по любым $[(k-1)/2]$ парам простых корней.

В заключении сформулируем теорему, обобщающую теорему 4.1. Она была доказана в [15] в более общем случае для описания так называемых резонансных множеств $\mathcal{R}_q(f_n)$, частным случаем которых является дискриминантное множество $\mathcal{D}(f_n)$. Здесь она переформулирована для дискриминантного множества.

Теорема 4.3. Пусть в пространстве $\mathbf{K}$ имеется многообразие $\mathcal{V}_l$ размерности l , на котором многочлен $f_n(x)$ имеет l различных корней, причём корень t_1 является корнем кратности $1 < m < l$, а другие корни имеют кратности отличные от m . Пусть $\mathbf{r}_l(t_1, \dots, t_l)$ — параметризация многообразия $\mathcal{V}_l$. Тогда для любого $0 < k < m$ формула

$$\mathbf{r}_l(t_1, \dots, t_l, t_{l+1}) = \mathbf{r}_l(t_1, \dots, t_l) + \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} \frac{(m-i)!}{m!} \frac{\partial \mathbf{r}_l}{\partial t_1} (t_{l+1} - t_1)^i \quad (4.22)$$

задаёт параметризацию части многообразия $\mathcal{V}_{l+1}$, на котором имеются корни t_1 кратности k и t_{l+1} кратности $m - k$, а остальные корни такие же, как на исходном многообразии $\mathcal{V}_l$.

4.2.5. Программная реализация

Автором была написана библиотека SubDiscrim для системы компьютерной алгебры Maple, в которой были реализованы как описанные выше процедуры, так и методы вычисления субдискриминантов. Заметим, что в пакете RegularChains[ChainTools], который входит в состав математической библиотеки Maple, имеется процедура, позволяющая вычислять субрезультанты двух многочленов, однако, по мнению автора, пользоваться ею довольно неудобно.

В состав библиотеки вошли следующие процедуры:

- Процедуры для вычисления субдискриминантов многочлена $f_n(x)$ на основе матричных методов, описанных в разделе 4.1..
- ProcUp — для реализации процедуры «ПОДЪЁМ».
- ProcCont — для реализации процедуры «ПРОДОЛЖЕНИЕ».
- ProcDown — для реализации процедуры «СПУСК».
- ParVk — для вычисления по формуле (4.21) параметрического представления многообразия $\mathcal{V}_k$, на котором многочлен $f_n(x)$ имеет один корень кратности k и $n - k$ простых корней.

4.2.6. Параметризация при ограничениях на коэффициенты

В прикладных задачах, в которых возникает необходимость исследовать дискриминантное множество $\mathcal{D}(f_n)$, часто пространство параметров Π многочлена $f_n(x)$ не совпадает с пространством его коэффициентов $\mathbf{K}$. Далее рассмотрим два способа получения описания множества $\mathcal{D}(f_n)$ в этом случае. Для определённости будем считать, что все коэффициенты $a_i, i = 1, \dots, n$, приведённого многочлена $f_n(x)$ являются полиномами от некоторого набора параметров $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_k) \in \Pi \subset \mathbb{R}^k, 0 < k < n$, которые назовём **параметрами задачи**. Переход от пространства параметров задачи Π к пространству коэффициентов $\mathbf{K}$ многочлена $f_n(x)$ задаётся отображением

$$S : \Pi \rightarrow \mathbf{K} : \mathbf{s} \mapsto \mathbf{a}(\mathbf{s}),$$

матрица Якоби которого $J_S = \left[\frac{\partial a_i}{\partial s_j} \right], i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, k$, может иметь ранг $m, 0 \leq m \leq k$. Далее считаем, что ранг m матрицы J_S принимает наибольшее значение, что соответствует условию невырожденности отображения S .

Вычисление с помощью элиминационного идеала

Выберем некоторую компоненту $\mathcal{V}_l$ размерности l дискриминантного множества $\mathcal{D}(f_n)$. Тогда с помощью алгоритма, описанного в подпункте 4.2.4, можно

вычислить параметрическое представление этого многообразия в виде

$$a_i = r_i(t_1, \dots, t_l), \quad i = 1, \dots, n.$$

Составляем полиномиальный идеал

$$\mathcal{J}_l = \{a_i(s_1, \dots, s_k) - r_i(t_1, \dots, t_l), \quad i = 1, \dots, n\},$$

состоящий из n многочленов от $k + l$ переменных. Этот идеал в пространстве Π параметров задаёт некоторое алгебраическое многообразие, компоненты которого могут иметь размерности от 0 до $l - (n - k)$, если последняя величина неотрицательна. Для того чтобы получить его параметрическое представление, нужно вычислить *элиминационный идеал* [139, Ch. 3, § 1]. Эта задача решается с помощью вычисления базиса Грёбнера, если указать при этом такой лексикографический порядок, чтобы в первую очередь были исключены переменные $s_1, \dots, s_k$. В большинстве систем компьютерной алгебры это может быть достаточно легко выполнено. Например, в системе Maple при использовании команды Basis из пакета Groebner следует указать лексикографический порядок `lexdeg([s_1, ..., s_k], [t_1, ..., t_l])`. В системе Mathematica при использовании процедуры GroebnerBasis — указать опцию `MonomialOrder -> EliminationOrder`. Если элиминационный идеал вычислен, то его первые многочлены зависят только от параметров t_i , $i = 1, \dots, l$, а параметры s_i , $i = 1, \dots, k$, входят в остальные многочлены таким образом, что позволяет выразить их в виде рациональных функций от t_i . Число независимых параметров t_i равно гильбертовой размерности идеала, и поэтому нужно среди l параметров t_i выбрать $l - (n - k)$ независимых, а остальные выразить через них. Обозначим эти независимые параметры через $\tilde{t}_i$, $i = 1, \dots, l - (n - k)$. В итоге получим выражение исходных параметров s_i , $i = 1, \dots, k$ от $l - (n - k)$ независимых параметров $\tilde{t}_i$, а следовательно, и выражение для коэффициентов a_i , $i = 1, \dots, n$, через них.

Вычисление с помощью производных

Пусть многочлен $f_n(x)$ имеет корень кратности $m > 1$. Тогда, согласно указанному выше теореме 4.3 и лемме 4.1, его производная по переменной x имеет корень кратности $m - 1$. Следовательно, для того чтобы найти параметризацию многообразия $\mathcal{V}_l$, которое соответствует разбиению $[m^1 1^{(n-m)}]$, необходимо решить относительно коэффициентов a_i , $i = 1, \dots, n$, систему уравнений

$$\left\{ f_n^{(i)}(x) = 0, \quad i = 0, \dots, m - 1 \right\}. \quad (4.23)$$

Для этого можно опять использовать технику вычисления элиминационного базиса, описанную в предыдущем подпункте.

Наиболее эффективно этот способ работает в том случае, если некоторые из коэффициентов a_i многочлена $f_n(x)$ принимают постоянные значения. В этом случае система (4.23) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений относительно тех коэффициентов a_i , значения которых не фиксированы. Её решение можно записать в виде рациональных выражений от параметра t . Этот параметр является корнем соответствующей кратности, а полученное решение позволяет задавать параметризацию многообразия, на котором многочлен $f_n(x)$ имеет корень такой кратности. Кроме того, с помощью этой параметризации и преобразования (4.22) теоремы 4.3 можно получить параметризацию многообразия, следующего в иерархии компонент дискриминантного множества.

4.2.7. Примеры дискриминантных множеств кубики и квартики

Рассмотрим работу алгоритма п. 4.2.4 для приведённых многочленов степеней $n = 3, 4$.

Дискриминантное множество кубики

Кубический многочлен

$$f_3 = x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3$$

имеет согласно (4.9) и (4.10) два нетривиальных субдискриминанта:

$$D^{(1)}(f_3) = 2a_1^2 - 6a_2,$$

$$D^{(0)}(f_3) = -4a_1^3a_3 + a_1^2a_2^2 + 18a_1a_2a_3 - 4a_2^3 - 27a_3^2.$$

Его дискриминантное множество $\mathcal{D}(f_3)$ состоит из двух компонент

$$\mathcal{V}_1 : \{a_1 = -3t_1, \quad a_2 = 3t_1^2, \quad a_3 = -t_1^3\},$$

$$\mathcal{V}_2 : \{a_1 = -2t_1 - t_2, \quad a_2 = t_1^2 + 2t_1t_2, \quad a_3 = -t_1^2t_2\}.$$

Поскольку на многообразии $\mathcal{V}_1$ нет комплексных корней, то $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2$.

Геометрически множество $\mathcal{D}(f_3)$ представляет собой линейчатую развёртывающуюся поверхность с направляющей $\mathcal{V}_1$ (см. [137; 138]) и показана на рис. 4.1.

В работах [12; 14] дискриминантное множество кубики $\mathcal{D}(f_3)$ использовалось для исследования одного вещественного алгебраического многообразия в $\mathbb{R}^3$, играющего важную роль в изучении нормализованного потока Риччи на обобщённых пространствах Уоллаха, которые в свою очередь связаны с инвариантными метриками Эйнштейна. Была предложена методика получения глобального параметрического представления этого многообразия состоящая в том, что пересечение этого многообразия с дискриминантным множеством вспомогательного кубического многочлена используется в качестве оси параметризации.

Дискриминантное множество кватрики

Пусть

$$f_4 = x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4. \quad (4.24)$$

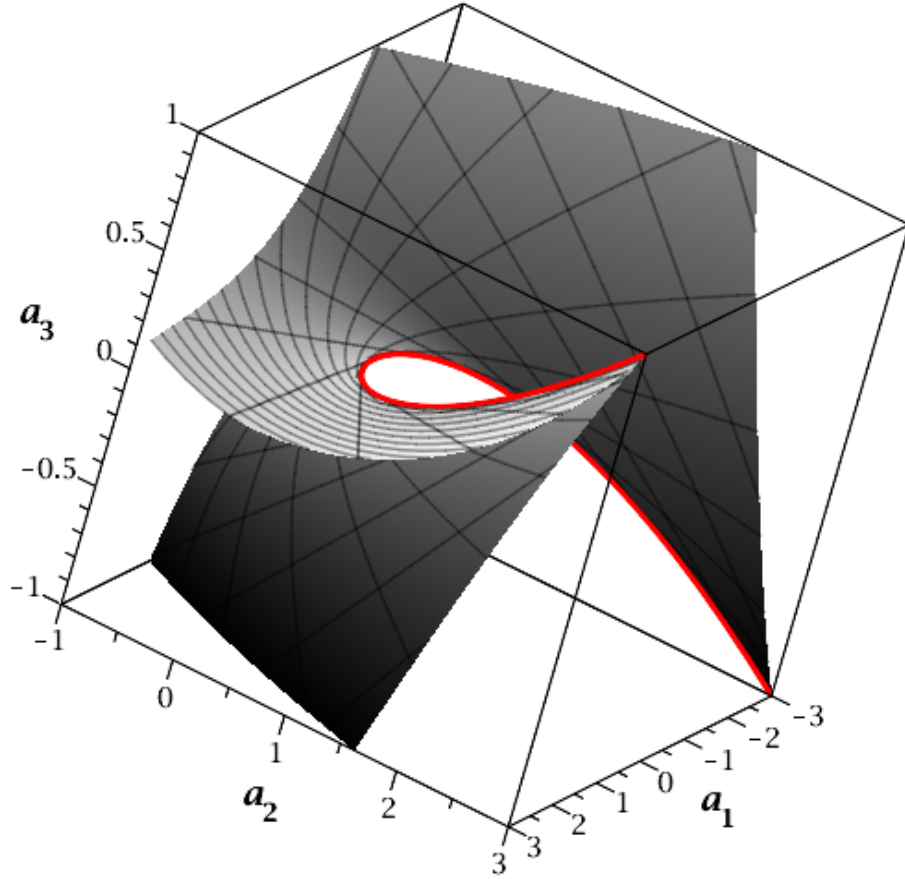


Рис. 4.1. Дискриминантная поверхность кубического многочлена в пространстве его коэффициентов. Показана кривая $\mathcal{V}_1$, на которой многочлен имеет тройной корень.

Его три нетривиальных субдискриминанта суть

$$D^{(2)}(f_4) = 3a_1^2 - 8a_2,$$

$$D^{(1)}(f_4) = -6a_1^3a_3 + 2a_1^2a_2^2 - 12a_1^2a_4 + 28a_1a_2a_3 - 8a_2^3 + 32a_4a_2 - 36a_3^2$$

$$\begin{aligned} D^{(0)}(f_4) = & -27a_1^4a_4^2 + 18a_1^3a_2a_3a_4 - 4a_1^3a_3^3 - 4a_1^2a_2^3a_4 + a_1^2a_2^2a_3^2 + 144a_1^2a_2a_4^2 - \\ & - 6a_1^2a_3^2a_4 - 80a_1a_2^2a_3a_4 + 18a_1a_2a_3^3 + 16a_2^4a_4 - 4a_2^3a_3^2 - 192a_1a_3a_4^2 - \\ & - 128a_2^2a_4^2 + 144a_2a_3^2a_4 - 27a_3^4 + 256a_4^3. \end{aligned}$$

Дискриминантное множество $\mathcal{D}(f_4)$ состоит из $p(4) - 1 = 4$ алгебраических многообразий $\mathcal{V}_k^i$, $k = 1, 2, 3$: по одному размерностей 1 и 3 и пары двумерных. В силу малой размерности легко перечислить все разбиения числа 4, которым соответствуют компоненты множества $\mathcal{D}(f_4)$: $[4^1]$, $[1^13^1]$, $[2^2]$, $[1^22^1]$.

Согласно формуле (4.13) многообразие $\mathcal{V}_1$ имеет параметризацию

$$\mathcal{V}_1 : \{a_1 = -4t_1, \quad a_2 = 6t_1^2, \quad a_3 = -4t_1^3, \quad a_4 = t_1^4\}.$$

Применим к этому многообразию процедуру «ПОДЪЁМ» и получим параметризацию двумерного многообразия $\mathcal{V}_2^1$, которое соответствует разбиению $[1^1 3^1]$:

$$\mathcal{V}_2^1 : \{a_1 = -3t_1 - t_2, \quad a_2 = 3t_1^2 + 3t_1t_2, \quad a_3 = -t_1^3 - 3t_1^2t_2, \quad a_4 = t_1^3t_2\}$$

Переход к многообразию $\mathcal{V}_3$ проводится в два этапа. Сначала применяем к многообразию $\mathcal{V}_2^1$ операцию «ПОДЪЁМ», затем операцию «ПРОДОЛЖЕНИЕ», поскольку на $\mathcal{V}_3$ многочлен $f_4(x)$ имеет пару простых корней. Получаем параметризацию

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_3 : \{a_1 = -2t_1 - 2t_2, \quad a_2 = t_1^2 + 4t_1t_2 + t_2^2 - t_3, \\ a_3 = -2t_1^2t_2 - 2t_1t_2^2 + 2t_1t_3, \quad a_4 = t_1^2t_2^2 - t_1^2t_3\}. \end{aligned}$$

Наконец, многообразие $\mathcal{V}_2^2$, на котором имеется пара двукратных корней, получается с помощью операции «СПУСК».

$$\mathcal{V}_2^2 : \{a_1 = -4t_1, \quad a_2 = 6t_1^2 - 2t_2, \quad a_3 = -4t_1^3 + 4t_1t_2, \quad a_4 = t_1^4 - 2t_1^2t_2 + t_2^2\}$$

Иерархия компонент $\mathcal{V}_k$ множества $\mathcal{D}(f_n)$ показана на рис. 4.2.

Рассмотрим структуру множества $\mathcal{D}(f_4)$, когда один из коэффициентов кватерники (4.24) равен нулю. При $a_1 = 0$ структура $\mathcal{D}(f_4)$, а также его параметрическое и визуальное представления даны в [11; 134].

Пусть $a_2 = 0$. В трёхмерном подпространстве $\tilde{\Pi}$ ненулевых коэффициентов a_1, a_3, a_4 одномерное многообразие $\mathcal{V}_1$ стягивается в точку начала координат. Двумерное многообразие $\mathcal{V}_2^1$ станет одномерной гладкой кривой с параметризацией

$$\tilde{\mathcal{V}}_2^1 = \{a_1 = -2t_1, \quad a_3 = 2t_1^3, \quad a_4 = -t_1^4\},$$

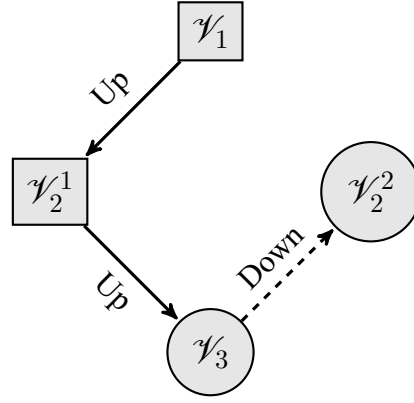


Рис. 4.2. Иерархия компонент $\mathcal{V}_k$ множества $\mathcal{D}(f_4)$. Процедуры «ПОДЪЁМ» и «СПУСК» обозначены Up и Down соответственно, процедура «ПРОДОЛЖЕНИЕ» — кружком.

Многообразие $\mathcal{V}_3$ перейдёт в многообразие $\tilde{\mathcal{V}}_3$ с параметризацией

$$\tilde{\mathcal{V}}_3 = \{a_1 = -4t_1 - t_2, a_3 = 27t_1^2t_2, a_4 = 27t_1^3(t_1 - 2t_2)\},$$

которое представляет собой линейчатую касательную развёртывающуюся поверхность с направляющей $\tilde{\mathcal{V}}_2^1$.

Эта поверхность самопересекается по кривой $\tilde{\mathcal{V}}_2^2$ с параметризацией

$$\tilde{\mathcal{V}}_2^2 = \{a_1 = -4t_1, a_3 = 8t_1^3, a_4 = 4t_1^4\},$$

касающейся $\tilde{\mathcal{V}}_2^1$ в начале координат. Поверхность $\tilde{\mathcal{V}}_3$ имеет ребро возврата — прямую $a_3 = a_4 = 0$, на которой многочлен (4.24) имеет нулевой корень кратности три. На кривой $\tilde{\mathcal{V}}_2^1$ кватрика имеет корень кратности три, а на кривой $\tilde{\mathcal{V}}_2^2$ — пару двукратных корней. На рис. 4.3 показана линейчатая поверхность $\tilde{\mathcal{V}}_3$ и кривые $\tilde{\mathcal{V}}_2^{1,2}$ её особых точек.

Содержание разделов 4.1 и 4.2 опубликовано в [11; 13; 134] кроме подраздела 4.2.6, который опубликован в [16; 140].

4.3. Асимптотическое решение алгебраического уравнения

В тех случаях, когда нельзя построить явную параметризацию дискриминантного множества $\mathcal{D}(f_n)$ в силу сложной зависимости между коэффициента-

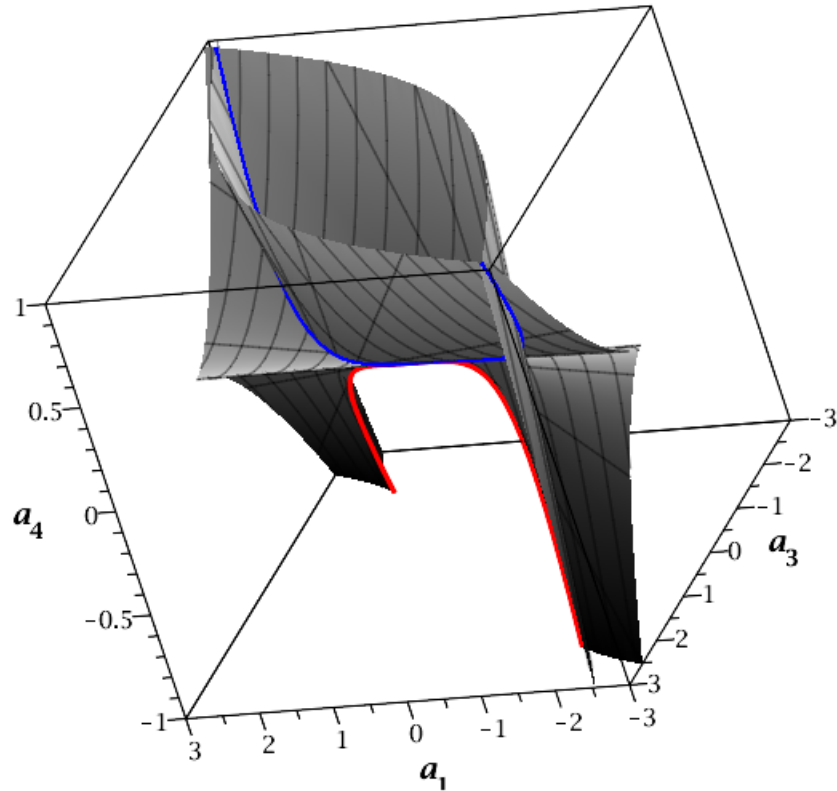


Рис. 4.3. Дискриминантная поверхность $\mathcal{D}(f_4)$ в пространстве коэффициентов a_1, a_3, a_4 .

ми многочлена (4.1) и параметрами исходной задачи, можно воспользоваться методами степенной геометрии [27, Гл. II] для вычисления асимптотического разложения множества $\mathcal{D}(f_n)$ вблизи её простых или особых точек. Далее излагается метод асимптотического решения одного алгебраического уравнения от трёх переменных, который был применён при решении задачи 5.1 главы 5.

4.3.1. Постановка задачи

Пусть $g(\mathbf{Q})$ — многочлен от трёх переменных (комплексных или вещественных), т. е. $\mathbf{Q} = (x, y, z)$.

Определение 4.13. Точка $\mathbf{Q}^0$ называется *особой точкой порядка k* многочлена $g(\mathbf{Q})$, если в этой точке обращаются в ноль сам многочлен g и все его частные производные до порядка k включительно, но отлична от нуля хотя бы одна производная порядка $k + 1$. Если $g(\mathbf{Q}^0) = 0$, но в точке $\mathbf{Q}^0$ хотя бы одна частная

производная многочлена $g(\mathbf{Q})$ не равна нулю, то $\mathbf{Q}^0$ — *простая точка* многочлена g или множества $\mathcal{G} = \{\mathbf{Q} : g(\mathbf{Q}) = 0\}$.

Пусть $g(\mathbf{Q}^0) = 0$, наша задача — исследовать множество $\mathcal{G}$ вблизи точки $\mathbf{Q}^0$. Если $\mathbf{Q}^0$ — простая точка, то по теореме Коши о неявной функции вблизи этой точки на множестве $\mathcal{G}$ одна из локальных координат выражается в виде степенного ряда от других локальных координат, что и является локальным описанием множества $\mathcal{G}$. Содержательной такая задача является вблизи особой точки $\mathbf{Q}^0$. Ниже уточняется постановка задачи и описываются способы ее решения.

Задача 4.1. Вблизи особой точки $\mathbf{Q}^0 = 0$ для всех ветвей решений уравнения $g(\mathbf{Q}) = 0$ найти разложения одного из следующих трёх типов:

Тип 1:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} b_k v^k, \quad y = \sum_{k=1}^{\infty} c_k v^k, \quad z = \sum_{k=1}^{\infty} d_k v^k,$$

где v — локальный параметр, b_k, c_k, d_k — либо вещественные, либо комплексные постоянные коэффициенты.

Тип 2:

$$x = \sum b_{pq} u^p v^q, \quad y = \sum c_{pq} u^p v^q, \quad z = \sum d_{pq} u^p v^q,$$

где u и v — локальные координаты, коэффициенты b_{pq}, c_{pq}, d_{pq} постоянны, целочисленные показатели (p, q) лежат в некотором секторе раствора меньше π .

Тип 3:

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(u) v^k, \quad y = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k(u) v^k, \quad z = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k(u) v^k,$$

где $\beta_k(u), \gamma_k(u), \delta_k(u)$ либо рациональные функции от u , либо рациональные функции от u и $\sqrt{\psi(u)}$, где $\psi(u)$ — многочлен. Здесь u — глобальная координата, а v — локальная.

Задача 4.2. Для всех кривых особых точек множества $\mathcal{G}$, примыкающих к точке Q^0 , найти разложения типа 1.

4.3.2. Объекты и алгоритмы степенной геометрии [27, гл. I, II]

Пусть задана конечная сумма (например, многочлен)

$$g(Q) = \sum g_R Q^R \text{ по } R \in S,$$

где $Q = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $R = (r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{R}^3$ и $Q^R = x^{r_1} y^{r_2} z^{r_3}$, $g_R = \text{const} \in \mathbb{R}$. Каждому слагаемому суммы (4.3.2) ставится в соответствие его векторный показатель степени R , а всей сумме (4.3.2) — множество S всех векторных показателей ее слагаемых, которое называется *носителем* суммы (4.3.2) или многочлена $g(Q)$ и обозначается $S(g)$. Выпуклая оболочка носителя $S(g)$ называется *многогранник Ньютона* суммы $g(Q)$ и обозначается $\Gamma(g)$. Граница $\partial\Gamma$ многогранника $\Gamma(g)$ состоит из *обобщённых граней* $\Gamma_j^{(d)}$ разных размерностей $d = 0, 1, 2$. Здесь j — номер грани. Каждой обобщённой грани $\Gamma_j^{(d)}$ ставится в соответствие *укороченная сумма*

$$\hat{g}_j^{(d)}(Q) = \sum g_R Q^R \text{ по } R \in \Gamma_j^{(d)} \cap S(g).$$

Обобщённая грань $\Gamma_j^{(d)}$ имеет $3 - d$ линейно независимых нормальных векторов $N_k = (n_{1k}, n_{2k}, n_{3k})$, направленных наружу многогранника $\Gamma(g)$. Если все точки R носителя $S(g)$ рациональны, то все нормальные векторы N_k можно взять целочисленными. Каждая укороченная сумма $\hat{g}_j^{(d)}(Q)$ является квазиоднородной, и число ее разных квазиоднородностей равно $3 - d$.

Пусть $\mathbb{R}_*^3$ трёхмерное вещественное пространство, двойственное пространству $\mathbb{R}^3$, и $s = (s_1, s_2, s_3)$ — точки этого пространства. Тогда для точек $R \in \mathbb{R}^3$ и $s \in \mathbb{R}_*^3$ определено скалярное произведение

$$\langle R, s \rangle = r_1 s_1 + r_2 s_2 + r_3 s_3. \quad (4.25)$$

Множество всех тех точек $s \in \mathbb{R}_*^3$, для которых скалярное произведение (4.25)

достигает максимума по всем точкам $R \in \mathbf{S}(g)$ именно на точках $R \in \Gamma_k^{(d)}$, называется *нормальным конусом* обобщённой грани $\Gamma_k^{(d)}$ и обозначается $\mathbf{U}_k^{(d)}$.

Пусть двумерные грани $\Gamma_j^{(2)}$, $j = 1, \dots, 3$, примыкают к обобщённой грани $\Gamma_k^{(d)}$, т. е. $\Gamma_k^{(d)} = \Gamma_{j_1}^{(2)} \cap \dots \cap \Gamma_{j_m}^{(2)}$. Тогда

$$\mathbf{U}_k^{(d)} = \{S = \lambda_1 N_{j_1} + \dots + \lambda_m N_{j_m}\}, \quad (4.26)$$

где $\lambda_j > 0$, N_j — внешние нормали к граням $\Gamma_j^{(2)}$. То есть нормальный конус обобщённой грани является выпуклой конической оболочкой внешних нормалей двумерных граней, примыкающих к ней.

Теорема 4.4. *Если при $t \rightarrow \infty$ кривая*

$$x = bt^{s_1}(1 + o(1)), \quad y = ct^{s_2}(1 + o(1)), \quad z = dt^{s_3}(1 + o(1)), \quad (4.27)$$

где b, c, d и s_i — постоянные, лежит в множестве $\mathcal{G}$, и вектор $\mathbf{s} \in \mathbf{U}_j^{(d)}$, то первое приближение

$$x = bt^{s_1}, \quad y = ct^{s_2}, \quad z = dt^{s_3}$$

кривой (4.27) удовлетворяет укороченному уравнению $\hat{g}_j^{(d)}(\mathbf{Q}) = 0$.

Для вершины $\Gamma_j^{(0)}$ укороченная сумма $\hat{g}_j^{(0)}$ состоит из одного слагаемого. Такие укорочения нам не интересны и в дальнейшем не рассматриваются. Будем рассматривать лишь укорочения, т. е. укороченные суммы, соответствующие рёбрам $\Gamma_j^{(1)}$ и граням $\Gamma_j^{(2)}$.

Введём *степенные преобразования*

$$\ln \mathbf{Q} = B \ln \mathbf{Q}_1, \quad (4.28)$$

где $\ln \mathbf{Q} = (\ln x, \ln y, \ln z)^\top$, $\ln \mathbf{Q}_1 = (\ln x_1, \ln y_1, \ln z_1)^\top$, B — невырожденная квадратная 3×3 матрица (b_{ij}) с рациональными элементами b_{ij} (зачастую они будут целыми). При степенном преобразовании (4.28) моном $\mathbf{Q}^R$ переходит в моном $\mathbf{Q}_1^{R_1}$, где $R_1^\top = B^\top R^\top$. Действительно, справедлива цепочка равенств

$$\mathbf{Q}^R = \exp \langle R, \ln \mathbf{Q} \rangle = \exp \langle R, B \ln \mathbf{Q}_1 \rangle = \exp \langle B^\top R^\top, \ln \mathbf{Q}_1 \rangle = \mathbf{Q}_1^{B^\top R^\top}.$$

Степенное преобразование (4.28) в двойственном пространстве $\mathbb{R}_*^3$ индуцирует линейное преобразование

$$\tilde{\mathbf{s}}^\top = B^{-1} \mathbf{s}^\top.$$

Матрица B называется *унимодулярной*, если все ее элементы целые и $\det B = \pm 1$. Очевидно, для унимодулярной матрицы B обратная матрица B^{-1} также унимодулярна.

Теорема 4.5. Для грани $\Gamma_j^{(d)}$ существует степенное преобразование (4.28) с унимодулярной матрицей B , которое переводит укороченную сумму $\hat{g}_j^{(d)}(\mathbf{Q})$ в сумму от d координат, т. е.

$$\hat{g}_j^{(d)}(\mathbf{Q}) = \mathbf{Q}_1^R h(\mathbf{Q}_1),$$

где $h(\mathbf{Q}_1) = h(x_1)$, если $d = 1$, и $h(\mathbf{Q}_1) = h(x_1, y_1)$, если $d = 2$. Здесь $R = (r_1, \dots, r_3) \in \mathbb{R}^3$. При этом дополнительные координаты y_1, z_1 при $d = 1$ и z_1 при $d = 2$ являются локальными, и для многочлена $\hat{g}_j^{(d)}(\mathbf{Q})$ сумма $h(\mathbf{Q}_1)$ также будет многочленом.

Умножению многочлена $g(\mathbf{Q})$ на $\mathbf{Q}^P$ соответствует параллельный перенос носителя $S(g)$ и многогранника $\Gamma(g)$ на вектор P . Поэтому если после степенного преобразования (4.28), применённого к многочлену $g(\mathbf{Q})$, получаем конечную сумму $h(\mathbf{Q}_1)$, содержащую отрицательные степени координат x_1, y_1 или z_1 , то существует такой вектор P , что произведение $\mathbf{Q}_1^P h(\mathbf{Q}_1)$ является многочленом, т. е. все показатели степени его мономов неотрицательны.

Назовём *конусом задачи* $\mathbf{K}$ множество таких векторов $\mathbf{s} \in \mathbb{R}_*^3$, что кривые вида (4.27) замечают ту часть пространства (x, y, z) , которую надо исследовать. Так, задаче 4.1 соответствует конус задачи $\mathbf{K} = \{\mathbf{s} : \mathbf{s} < 0\}$, ибо $x, y, z \rightarrow \infty$. Если $x \rightarrow \infty$, то $s_1 > 0$ в конусе задачи $\mathbf{K}$.

4.3.3. Алгоритм решения задачи 4.1

Пусть известна особая точка $\mathbf{Q}^0$ или кривая $\mathcal{F}$, состоящая из особых точек, или поверхность $\mathcal{S}$, состоящая из особых точек, вблизи которой мы хотим исследовать строение нашего множества $\mathcal{G} = \{\mathbf{Q} : g(\mathbf{Q}) = 0\}$. Тогда надо выполнить следующую последовательность шагов вычислений.

1. Делаем замену координат $\mathbf{Q} \stackrel{\text{def}}{=} (x, y, z) \rightarrow \mathbf{Q}_1 \stackrel{\text{def}}{=} (x_1, y_1, z_1)$, переводящую множество особенностей в координатное подпространство. То есть особая точка переводится в начало координат, особая кривая — в координатную ось, а особая поверхность — в координатную плоскость. Предпочтительны замены вида $x = \xi(\mathbf{Q}_1)$, $y = \eta(\mathbf{Q}_1)$, $z = \zeta(\mathbf{Q}_1)$, где ξ, η, ζ — многочлены. Теперь получаем задачу: исследовать корни многочлена $\tilde{g}(\mathbf{Q}_1) \stackrel{\text{def}}{=} g(\mathbf{Q})$ вблизи координатного подпространства $\mathbf{Q}_1 = 0$ или $x_1 = y_1 = 0$ или $x_1 = 0$. При этом в каждом из этих трёх случаев в $\mathbb{R}_*^3$ будет свой конус задачи $\mathbf{K}$: $s < 0$ или $s_1, s_2 < 0$ или $s_1 < 0$, соответственно.

2. Записываем многочлен g в координатах $\mathbf{Q}_1$, т. е. $g_1(\mathbf{Q}_1) = g(\mathbf{Q})$, вычисляем его носитель $\mathbf{S}(g_1)$, многогранник $\Gamma(g_1)$, его двумерные грани $\Gamma_j^{(2)}$ и их внешние нормали N_j . Согласно формуле (4.26) по нормальям N_j вычисляем нормальные конусы $\mathbf{U}_k^{(1)}$ рёбер $\Gamma_k^{(1)}$.

3. Отбираем все те рёбра $\Gamma_k^{(1)}$ и грани $\Gamma_j^{(2)}$, нормальные конусы которых $\mathbf{U}_k^{(1)}$ и $\mathbf{U}_j^{(2)}$ пересекаются с конусом задачи $\mathbf{K}$. Зачастую, для этого достаточно отобрать все грани $\Gamma_j^{(2)}$, у которых внешняя нормаль N_j пересекается с конусом задачи $\mathbf{K}$, и добавить все рёбра $\Gamma_k^{(1)}$ этих граней.

4. Для каждого отобранного ребра $\Gamma_k^{(1)}$ или грани $\Gamma_j^{(2)}$ с нормальным конусом $\mathbf{U}_k^{(1)}$ или $\mathbf{U}_j^{(2)}$ находим корни соответствующего укороченного многочлена $\hat{g}_k^{(1)}(\mathbf{Q}_1)$ или $\hat{g}_j^{(2)}(\mathbf{Q}_1)$. Здесь возможны два случая.

Случай а). Если множество корней имеет вид

$$x_1 = \psi_1(z_1), \quad y_1 = \psi_2(z_1), \quad (4.29)$$

или

$$x_1 = \psi_1(y_1, z_1), \quad (4.30)$$

где ψ_i — многочлены, то делаем замену координат

$$x_2 = x_1 - \psi_1(z_1), \quad y_2 = y_1 - \psi_2(z_1), \quad z_2 = z_1$$

или

$$x_2 = x_1 - \psi_1(y_1, z_1), \quad y_2 = y_1, \quad z_2 = z_1,$$

и получаем в координатах $\mathbf{Q}_2 \stackrel{\text{def}}{=} (x_2, y_2, z_2)$ задачу исследования окрестности оси $x_2 = y_2 = 0$ или координатной плоскости $x_2 = 0$ с конусами задачи

$$\mathbf{K} = \{S = \mu_1 N_1 + \mu_2 N_2 - \lambda_1(1, 0, 0)\} \quad (4.31)$$

или

$$\mathbf{K} = \{S = \mu_1 N_1 - \lambda_1(1, 0, 0) - \lambda_2(0, 1, 0)\}, \quad (4.32)$$

где $\lambda_i > 0$, $\mu_i \geq 0$, $\mu_1 + \mu_2 > 0$, а N_1 и N_2 — внешние нормали к граням, примыкающим к рассматриваемому ребру для (4.31) или N_1 — внешняя нормаль к выбранной грани для (4.32).

Случай б). Множество корней укороченного уравнения $\hat{g}_j^{(1)}(\mathbf{Q}_1)$ или $\hat{g}_j^{(2)}(\mathbf{Q}_1)$ не имеет вид (4.29) или (4.30). Тогда в укороченном многочлене делаем степенное преобразование от $\mathbf{Q}_1$ к $\mathbf{Q}_2$, описанное теоремой 4.5, и получаем укороченное уравнение в виде

$$h(x_2) = 0, \quad \text{если } d = 1, \quad (4.33)$$

или

$$h(x_2, y_2) = 0, \quad \text{если } d = 2, \quad (4.34)$$

а дополнительные координаты y_2 , z_2 или z_2 , соответственно, будут локальными, т. е. малыми. Если x_2^0 — простой корень уравнения (4.33), то справедлив аналог

теоремы Коши о неявной функции, и решения полного уравнения $g_2(\mathbf{Q}_2) = 0$ разлагаются в ряд вида

$$x_2 - x_2^0 = \sum b_{pq} y_2^p z_2^q,$$

где целочисленные показатели (p, q) лежат в некотором секторе плоскости p, q с раствором меньше π . Возвращаясь к исходным координатам, получаем разложение решений типа 2.

Если x_2^0 — кратный корень уравнения (4.33), то делаем замену, как в случае а), строим новый многогранник Ньютона и т. д.

Пусть решение уравнения (4.34) имеет вид

$$x_2 = \psi_2(y_2), \quad (4.35)$$

где ψ_2 — многочлен. Если на этой кривой

$$\frac{\partial h}{\partial x_2} \stackrel{\text{def}}{=} a(y_2) \neq 0, \quad (4.36)$$

то согласно [27, Гл. II, теорема 1.1] решения полного уравнения разлагаются в ряд

$$x_2 = \psi_2(y_2) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(y_2) z_2^k,$$

где $b_k(y_2)$ — рациональные функции. Возвращаясь к исходным переменным, получаем разложение решений типа 3.

Если на кривой (4.35) условие (4.36) не выполнено, то полагаем

$$x_3 = x_2 - \psi_2(y_2), \quad y_3 = y_2, \quad z_3 = z_2,$$

вычисляем многочлен в новых координатах $g_3(\mathbf{Q}_3) \stackrel{\text{def}}{=} g(\mathbf{Q})$, строим его многогранник Ньютона (как в случае а).

Если решения уравнения (4.34) не имеют вид (4.35), то поступаем следующим образом. Разлагаем $h(x_2, y_2)$ на неприводимые множители. Пусть $\tilde{h}(x_2, y_2)$ — такой множитель и ρ — род его кривой.

Если $\rho = 0$, то существует бирациональная униформизация этой кривой $x_2 = \Xi(y_3), y_2 = \mathbf{H}(y_3)$ [141]. Делаем замену $x_2 = \Xi(y_3) + x_3, y_2 = \mathbf{H}(y_3)$. Тогда

$\tilde{h}$ делится на x_3 . Перейдём к переменным $x_3, y_3, z_3 = z_2$ в полном многочлене и получим $g_3(\mathbf{Q}_3)$. Если $\tilde{h}(x_2, y_2)$ — простой множитель в $h(x_2, y_2)$, то согласно теореме 1.1 гл. II [27] в полном многочлене $g_3(\mathbf{Q}_3)$ решения разлагаются в ряд вида

$$x_3 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(y_3) z_3^k, \quad (4.37)$$

где $\alpha_k(y_3)$ — рациональные функции от y_3 . В исходных координатах ему соответствует разложение типа 3. Если $\tilde{h}(x_2, y_2)$ — кратный множитель в $h(x_2, y_2)$, то для $g_3(\mathbf{Q}_3)$ строим многогранник Ньютона, конус задачи $\mathbf{K}_3 = \{S : s_2, s_3 < 0\}$ и продолжаем процедуру.

Если $\rho = 1$, то существует бирациональная замена $x_2, y_2 \rightarrow x_3, y_3$, приводящая $\tilde{h}(x_2, y_2)$ к нормальной форме

$$x_3^2 - \psi(y_3), \quad (4.38)$$

где ψ — многочлен степени 3 или 4. Если $\rho > 1$, то различают гиперэллиптические и негиперэллиптические кривые. Гиперэллиптическая кривая бирационально эквивалентна $x_2, y_2 \rightarrow x_3, y_3$ нормальной форме (4.38), где $\psi(y_3)$ — многочлен степени $2\rho + 1$ или $2\rho + 2$ [141, гл. VI, § 7]. Если множитель $\tilde{h}$ в h прост, то это приводит к разложению решений уравнения $g_3(\mathbf{Q}_3) = 0$ в ряд (4.37), где α_k — рациональные функции от y_3 и $\sqrt{\psi(y_3)}$. В исходных координатах получаем разложение третьего типа. Если $\tilde{h}$ — кратный множитель в h , то описанная процедура не продолжается.

Может случиться, что множество корней укороченного уравнения содержит компоненты, относящиеся к разным случаям а) и б). Тогда для каждой компоненты поступаем согласно сказанному выше, и процедура ветвится.

5. Нули (x_2^0, y_2^0) суммы $h(x_2, y_2)$ или $h(x_2)$ разделяем на семейства простых точек и семейства особых точек. Простые точки после обратных преобразований $\mathbf{Q}_2 \rightarrow \mathbf{Q}_1 \rightarrow \mathbf{Q}$ дадут приближение поверхности $g(\mathbf{Q}) = 0$. Особые точки надо снова подвергнуть локальному анализу. Для этого надо снова выполнить шаги 1–5 и так далее.

На каждом цикле из этих шагов будет происходить упрощение особенности, и через конечное число циклов особенность удастся разрешить.

Замечания. а) Если укорочение $\hat{g}_j^{(2)}(\mathbf{Q}_1)$ является степенью некоторой суммы $\varphi(\mathbf{Q}_1)$, то вместо шагов 3 и 4 лучше ввести новую переменную $x_2 = \varphi(\mathbf{Q}_1)$, а y_1 и z_1 не менять. Аналогично, если укорочение $\hat{g}_k^{(1)}(\mathbf{Q}_1)$, соответствующее ребру $\Gamma_k^{(1)}$ грани $\Gamma_j^{(2)}$, является степенью некоторой суммы $\psi(\mathbf{Q}_1)$, то вместо шагов 3 и 4 лучше ввести новую переменную $x_2 = \psi(\mathbf{Q}_1)$, а y_1 и z_1 не менять.

б) Если укороченный многочлен $\hat{g}_j^{(2)}(\mathbf{Q}_1)$ факторизуется, то аналогично факторизуется и многочлен $h(x_1, y_1)$, полученный с помощью степенного преобразования теоремы 4.5. В этом случае решение уравнения $h(x_1, y_1) = 0$ упрощается.

в) Для асимптотического анализа множества $\{\mathbf{Q} : g(\mathbf{Q}) = 0\}$ при $\mathbf{Q} \rightarrow \infty$ делаются шаги 2 и т. д. Только в этом случае отбираются все те грани $\Gamma_j^{(2)}$ многогранника $\Gamma(g)$, у которых положительны внешние нормали: $N_j > 0$, ибо здесь конус задачи $\mathbf{K} = \{s > 0\}$.

г) Укорочение $\hat{g}_k^{(1)}$, соответствующее ребру $\Gamma_k^{(1)}$, содержащему только две точки носителя, не имеет кратных корней. Простые корни многочлена $\hat{g}_k^{(1)}$, соответствующего ребру $\Gamma_k^{(1)}$, можно не рассматривать, ибо они отлавливаются по семействам корней укороченных многочленов, соответствующих граням, прилегающим к ребру $\Gamma_k^{(1)}$.

д) Окончание описанной процедуры вычисления разложения особых точек или кратных корней соответствует «сквозной дыре» в многограннике, которой соответствует грань параллельная координатной оси с внешним нормальным вектором вида $N = -(n, m, 0)$, где n и m — натуральные числа.

е) Отбор нормалей N_j , попадающих в конус задачи $\mathbf{K}$, удобно выполнять, записав формулы (4.31) или (4.32) в координатной форме

$$s_1 = \mu_1 n_{11} + \mu_2 n_{21} - \lambda_1, \quad s_2 = \mu_1 n_{12} + \mu_2 n_{22}, \quad s_3 = \mu_1 n_{13} + \mu_2 n_{23},$$

или

$$s_1 = \mu_1 n_{11} - \lambda_1, \quad s_2 = \mu_1 n_{12} - \lambda_2, \quad s_3 = \mu_1 n_{13},$$

а затем решить получившуюся систему линейных уравнений относительно переменных μ_i и λ_i . Если свойство д) не выполнено, то указанные выше системы всегда будут совместны. Здесь $N_1 = (n_{11}, n_{12}, n_{13})$, $N_2 = (n_{21}, n_{22}, n_{23})$.

ж) При вычислении бесконечного разложения можно остановиться либо на простом решении со свойством (4.36), либо на том цикле, где у грани имеется фиксированное ребро, а точка, противолежащая этому ребру, находится уже достаточно далеко («стабилизация» разложения).

з) Для решения задачи 4.2 надо на каждом шаге отбирать кратные решения уравнения (4.33) и особые точки уравнения (4.34). Тогда получаются разложения типа 1, но для них аналогом теоремы о неявной функции служит «стабилизация» предыдущего замечания.

Теорема 4.6. *Если в процедуре, состоящей из повторения последовательности описанных выше шагов 1–5, на каждом шаге находить все указанные грани и ребра и все корни соответствующих укороченных уравнений, и при этом все встречающиеся кривые корней двумерных укороченных уравнений, имеющие положительный род эллиптичны или гиперэллиптичны и просты, то получим локальное описание всех компонент множества $g(\mathbf{Q}) = 0$, примыкающих к исходной точке $\mathbf{Q}^0$, в виде разложений типов 1–3.*

На самом деле, описанная процедура довольно громоздка, и ее лучше выполнять с помощью какой-либо системы компьютерной алгебры, разработав соответствующее математическое обеспечение.

4.3.4. Описание программной реализации

Реализация алгоритмов, описанных в п. 4.3.3 потребовала привлечения нескольких программных средств. Все вычисления, связанные с полиномами

и плоскими алгебраическими кривыми, осуществлялись с помощью системы компьютерной алгебры Maple. Для неё была написана библиотека процедур (названная PGeomlib), реализующая алгоритмы пространственной степенной геометрии. Для работы с плоскими алгебраическими кривыми использовался пакет `algsurves`, с помощью которого определялся род кривой (функция `genus`), вычислялась рациональная параметризация кривой рода 0 (функция `parametrization`), а также использовались процедуры для работы с эллиптическими и гиперэллиптическими кривыми. Для вычисления особых точек множества $\mathcal{U}$ необходимо решать системы алгебраических уравнений. Это делалось с использованием пакета `Groebner`.

Вычисление основных объектов пространственной степенной геометрии осуществлялось с использованием программы `qconvex` из свободного программного пакета `Qhull`. Эта программа вычисляет по носителю $S(g)$, представленному в виде списка координат точек, многогранник Ньютона, его двумерные грани и нормали к ним. Полученные объекты передаются в среду Maple, где осуществляются остальные вычисления. На текущий момент интерфейс обмена данными между системой компьютерной алгебры Maple и программой `qconvex` из пакета `Qhull` реализован на уровне файлов. Это позволяет при необходимости проводить анализ получаемых в процессе вычисления выпуклой оболочки носителя полинома данных альтернативными программами. Отметим, что процедуры библиотеки PGeomlib реализованы так, что позволяют работать с полиномом от трёх переменных, коэффициенты которого сами являются рациональными функциями от других параметров.

Дадим краткое описание процедур, входящих в библиотеку PGeomlib, которые можно разделить на две группы: основные и вспомогательные. Имена всех объектов, хранящихся в библиотеке, начинаются заглавными буквами PG.

Основные процедуры библиотеки **PGeomlib**

PGsave — вычисляет и сохраняет в текстовом файле носитель $S(g)$ многочлена $g(Q)$ для обработки программой `qconvex`. Процедура имеет два обязательных входных параметра: полином $g(Q)$ и имя файла для сохранения координат точек носителя в формате программы `qconvex`. Опциональный параметр — список имён переменных, для которых нужно построить носитель полинома. Использует вспомогательную процедуру `PGsupp`.

PGgetnormals — получает информацию о многограннике Ньютона, его гранях и нормалях к ним, а затем преобразует ее в виде списка нормальных векторов с целочисленными коэффициентами. Процедура имеет один обязательный параметр — имя файла с результатами работы программы `qconvex` — и возвращает список опорных плоскостей многогранника Ньютона, задаваемых вектором нормали и смещением. Использует вспомогательную процедуру `PGnormpriv`.

PGtruncface, **PGtruncedge**, **PGtruncfwe** — три варианта процедуры, вычисляющей укороченные многочлены, соответствующие грани, ребру или грани и всем прилегающим рёбрам. Во втором варианте ребро задаётся двумя смежными гранями. Первый вариант процедуры используется для вычисления укороченного многочлена, соответствующего выбранной грани. Второй вариант используется для вычисления укороченного многочлена, соответствующего выбранному ребру. Это ребро задаётся двумя смежными гранями. Наконец, третий вариант процедуры вычисляет список укороченных многочленов, соответствующих выбранной грани и всем смежным с ней рёбрам. Использует вспомогательные процедуры `PGsupp` и `PGgetneighbours`.

PGfitnormal — отбирает из списка нормалей многогранника Ньютона те, которые попадают в конус задачи K , задаваемый списком линейных неравенств. Входными параметрами процедуры являются список опорных плос-

костей (нормалей), вычисленный с помощью процедуры `PGgetnormals`, и список неравенств, определяющих конус задачи K .

PGplot — процедура визуализации многогранника Ньютона $\Gamma(g)$ и носителя $S(g)$ многочлена $g(Q)$. Процедура использует результаты вычислений носителя $S(g)$, полученные с помощью вспомогательной процедуры `PGsupp`, и результаты работы программы `qconvex`, вычисляющий многогранник Ньютона $\Gamma(g)$ в графическом формате `Maple`.

PGsupp — возвращает носитель $S(g)$ многочлена $g(Q)$ в виде списка векторных показателей мономов.

PGnormpriv — преобразует список векторов с соизмеримыми координатами в записи чисел с плавающей точкой к списку коллинеарных векторов с целочисленными координатами. Эта процедура потребовалась, поскольку программа `qconvex` сохраняет нормали к граням многогранника Ньютона в формате вещественных чисел с плавающей точкой, а все операции с векторными показателями степеней должны выполняться в целочисленной арифметике.

PGgetneighbours — для каждой вершины многогранника Ньютона вычисляет номера смежных с ней граней.

Схема использования библиотеки **PGeomlib**

Укажем схематически порядок работы с библиотекой `PGeomlib`.

Для многочлена $g(Q)$ с помощью процедуры `PGsave` вычисляем носитель $S(g)$, сохраняя его в файле для последующей обработки программой `qconvex`, которая вычисляет многогранник Ньютона $\Gamma(g)$, а также его опорные грани. Эти объекты получаем с помощью процедуры `PGgetnormals`. Задаём конус задачи K в виде списка неравенств и с помощью процедуры `PGfitnormals` отбираем подходящие грани. Для них вычисляем укороченные многочлены с помощью одной из процедур `PGtruncface`, `PGtruncedge` или `PGtruncfwe`.

Если корни укороченного многочлена $\hat{g}(\mathbf{Q})$ подпадают под случай а) подраздела 4.3.3, то вычисляем новый конус задачи по формулам (4.31) или (4.32), выполняем замену переменных и повторяем вычисления.

Для случая б) подраздела 4.3.3 находим и применяем степенное преобразование, описанное теоремой 4.5. Проводим вычисление рода и, если необходимо, параметризации алгебраической кривой, задаваемой укороченным многочленом (4.34), с использованием пакета `algcurves`.

Результаты раздела 4.3 опубликованы в [1; 4; 5; 142]. Двумерный вариант алгоритма описан в [18].

Глава 5

Множество устойчивости линейной многопараметрической системы

Рассматривается задача об устойчивости положения равновесия (ПР) системы с функцией Гамильтона $H(\mathbf{z})$, которая полиномиальным образом зависит от вектора параметров $\mathbf{P} \in \Pi$. В случае общего положения аналитическая автономная функция Гамильтона $H(\mathbf{z})$ в окрестности ПР, совпадающего с началом координат, раскладывается в сходящийся ряд из однородных форм H_k степени k :

$$H(\mathbf{z}; \mathbf{P}) = \sum_{k=2}^{\infty} H_k(\mathbf{z}; \mathbf{P}). \quad (5.1)$$

Разложение (5.1) начинается с квадратичного гамильтониана $H_2(\mathbf{z}; \mathbf{P})$. Поведение фазового потока в первом приближении описывается линейной системой Гамильтона

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{J}\mathbf{A}(\mathbf{P})\mathbf{z}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{P}) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H_2(\mathbf{P})}{\partial \mathbf{z} \partial \mathbf{z}}, \quad (5.2)$$

где $\mathbf{J}$ — симплектическая единица, $\mathbf{A}$ — постоянная симметрическая матрица, зависящая от вектора параметров $\mathbf{P} \in \Pi \subset \mathbb{R}^m$. Здесь $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})^\top$ — фазовый вектор, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ — векторы обобщённых координат и канонически сопряжённых импульсов.

Определение 5.1. *Множество устойчивости $\mathcal{S}$ линейной системы Гамильтона — это множество значений параметров $\mathbf{P} \in \Pi$, для которых стационарное решение $\mathbf{z} = 0$ системы устойчиво по Ляпунову.*

5.1. Общая схема исследования окрестности ПР многопараметрической системы Гамильтона

Общая схема вычисления множества устойчивости положения равновесия многопараметрической гамильтоновой системы в линейном приближении дана в [3, п. 2.6]. Основная идея этой схемы заключается в том, что основная часть этапов вычисления проводится не с матрицей $JA(\mathbf{P})$, а с её характеристическим многочленом

$$\check{f}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{2n} \check{f}_j(\mathbf{P}) \lambda^j, \quad \check{f}_{2n} = 1$$

который в силу симплектичности матрицы $JA(\mathbf{P})$ содержит только чётные степени λ . Поэтому в дальнейшем для вычислений используется многочлен от $\mu = \lambda^2$

$$f(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^n f_j(\mathbf{P}) \mu^j, \quad f_n = 1, \quad f_j = \check{f}_{2j}, \quad (5.3)$$

называемый *полухарактеристическим*.

Напомним критерий устойчивости положения равновесия линейной гамильтоновой системы, который является следствием хорошо известного результата об устойчивости стационарного решения линейной системы ОДУ [143]. Здесь он переформулирован в терминах полухарактеристического многочлена (5.3).

Теорема 5.1 ([3, п. 2.1]). *Положение равновесия $\mathbf{z} = 0$ линейной гамильтоновой системы (5.2) устойчиво по Ляпунову тогда и только тогда, когда*

- 1) *все корни μ_k полухарактеристического многочлена (5.3) вещественны и неположительны;*
- 2) *все элементарные делители матрицы JA просты.*

Доказательство для последнего условия теоремы 5.1 было дано в [144, п. 5.2] с помощью нормальной формы линейной системы Гамильтона, приведённой ранее в [22, гл. I].

Граница $\partial\mathcal{S}$ множества устойчивости $\mathcal{S}$ состоит из частей двух гиперповерхностей в пространстве параметров Π

$$\mathcal{F}_0 = \{\mathbf{P} : f_0(\mathbf{P}) = 0\} \quad \text{и} \quad \mathcal{F}_2 = \{\mathbf{P} : D(f) = 0\},$$

где $D(f)$ — дискриминант многочлена $f(\mu)$. Таким образом, гиперповерхность $\mathcal{F}_2$ есть компонента максимальной размерности дискриминантного множества $\mathcal{D}(f)$ многочлена $f(\mu)$, подробно рассмотренного в разделе 4.2.

Условие 1) теоремы 5.1 конструктивно проверяется с помощью леммы.

Лемма 5.1. *Для того, чтобы все корни многочлена $f(\mu)$ степени $m \geq 3$ были вещественны и неположительны, необходимо и достаточно выполнения условий*

$$f_i(P) \geq 0, \quad i = 0, \dots, m-1, \quad D^{(k)}(f) \geq 0, \quad k = 0, \dots, m-1.$$

Её доказательство непосредственно следует из леммы 4.10.

Проверка простоты элементарных делителей матрицы JA обеспечивается вычислением ранга матрицы $M_A(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} JA - \sqrt{\mu}E$ для кратных корней многочлена $f(\mu)$. Корни кратности 2 явно вычисляются по формуле (4.4) при условии $D(f) = 0$ и $D^{(1)}(f) \neq 0$.

Лемма 5.2. • Если $\mu_i = 0$ корень многочлена $f(\mu)$ кратности l , то все соответствующие элементарные делители матрицы $M_A(0)$ просты тогда и только тогда, когда $\text{rank } M_A(0) = 2m - 2l$.

• Если $\mu_i < 0$ корень многочлена $f(\mu)$ кратности l , то все соответствующие элементарные делители матрицы $M_A(\mu_i)$ просты тогда и только тогда, когда $\text{rank } M_A(\mu_i) = 2m - l$.

5.1.1. Алгоритм выделения множеств устойчивости

Приведенные выше рассуждения и леммы 5.1 и 5.2 позволяют описать последовательность действий по вычислению множества устойчивости $\mathcal{S}$ линейной многопараметрической системы Гамильтона.

- Гиперповерхности $\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}_2$ делят пространство параметров Π на открытые части W_k .
- В каждой из частей W_k выбирается внутренняя точка P_k , в ней с помощью леммы 5.1 проверяется условие вещественности и отрицательности корней полухарактеристического многочлена $f(\mu)$, и все те части W_k , которые дают устойчивость, включаются в множество $\mathcal{S}$.
- На гиперповерхности $\mathcal{F}_0$ выделяются все участки с простыми элементарными делителями матрицы JA , соответствующие нулевым корням.
- На гиперповерхности $\mathcal{F}_2$ вычисляется кратный корень $\mu_{mul} = \mu_{1,2}$, и выделяются те её части, на которых $\mu_{mul} \leq 0$.
- На гиперповерхности $\mathcal{F}_2$ выделяются участки, где элементарные делители матрицы $M_A(\mu_{1,2})$ просты.
- Части поверхностей $\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}_2$, в которых все корни μ_k и элементарные делители удовлетворяют условиям устойчивости, включаются в множество $\mathcal{S}$.

Успех в его применении существенно зависит от того, насколько эффективно удалось описать взаимное расположение многообразий $\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}_2$. Покажем, что в определённом случае число шагов алгоритма можно сократить.

5.1.2. Структура границы множества устойчивости гироскопической системы

Покажем, что для линейной системы Гамильтона с 4-мя степенями свободы границей множества устойчивости может служить только гиперповерхность $\mathcal{F}_2$.

Рассмотрим гироскопическую систему, уравнения Лагранжа которой в матричной форме имеют вид

$$Mx'' + Gx' + Rx = 0, \quad (5.4)$$

где $x \in \mathbb{R}^4$, M — симметрическая положительно определённая матрица масс, G — кососимметрическая матрица гироскопических сил, R — симметрическая

матрица потенциальных сил. Соответствующая функция Лагранжа представляет собой квадратичную форму

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{2} \left(\mathbf{x}''^\top \mathbf{M} \mathbf{x}'' - \mathbf{x}^\top \mathbf{G} \mathbf{x}' - \mathbf{x}^\top \mathbf{R} \mathbf{x} \right).$$

Применяя к ней преобразование Лежандра, получаем гамильтонову форму уравнений с функцией $H(\mathbf{z})$

$$H(\mathbf{z}) = \frac{1}{2} \mathbf{z}^\top \mathbf{A} \mathbf{z}, \quad \mathbf{z}' = \mathbf{J} \mathbf{A} \mathbf{z}; \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} - \mathbf{G} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G} / 4 & \mathbf{G} \mathbf{M}^{-1} / 2 \\ -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{G} / 2 & \mathbf{M}^{-1} \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Теорема 5.2. *Если в (5.5) матрицы $\mathbf{M}$ и $\mathbf{R}$ симметрические 2×2 -блочно-скалярные и при этом матрица $\mathbf{M}$ невырожденная, то определитель матрицы $\mathbf{A}$ есть полный квадрат, т. е. принимает только неотрицательные значения.*

Доказательство. Поскольку матрица $\mathbf{A}$ в формуле (5.5) 2×2 -блочная, тогда согласно формулам Шура (см. [90, Гл. II, § 5, п. 3])

$$\det \mathbf{A} = \det (\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{21}) \cdot \det \mathbf{A}_{22}, \quad (5.6)$$

где $\mathbf{A}_{ij}$ — квадратные блоки матрицы $\mathbf{A}$. Подставляя вместо блоков $\mathbf{A}_{ij}$ соответствующие матрицы, получаем

$$\det \mathbf{A} = \det \left(\mathbf{R} - \frac{1}{4} \mathbf{G} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G} + \frac{1}{4} \mathbf{G} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G} \right) \cdot \det \mathbf{M}^{-1} = \det \mathbf{R} \cdot \det \mathbf{M}^{-1}.$$

Поскольку матрицы $\mathbf{R}$ и $\mathbf{M}$ 2×2 -блочно-скалярные, то блоки $\mathbf{R}_{ij}$ коммутируют между собой, а тогда из (5.6) следует, что $\det \mathbf{R} = \det \tilde{\mathbf{R}}$, где $\tilde{\mathbf{R}} \equiv \mathbf{R}_{11} \mathbf{R}_{22} - \mathbf{R}_{12} \mathbf{R}_{21}$. Но поскольку блоки $\mathbf{R}_{ij}$ есть 2×2 -скалярные матрицы, то матрица $\tilde{\mathbf{R}}$ также будет 2×2 -скалярной с определителем равным квадрату диагонального элемента. Аналогичные рассуждения применимы и к матрице $\mathbf{M}$, а также к обратной к ней $\mathbf{M}^{-1}$. Следовательно, определитель матрицы $\mathbf{A}$ является полным квадратом, поскольку равен произведению квадратов диагональных элементов матриц $\tilde{\mathbf{R}}$ и $\tilde{\mathbf{M}}^{-1}$, где $\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{M}_{11} \mathbf{M}_{22} - \mathbf{M}_{12} \mathbf{M}_{21}$. $\square$

Следствие 5.2.1. *Если матрицы $\mathbf{R}$ и $\mathbf{M}$ удовлетворяют условию теоремы 5.2, то критическим множеством, на котором может происходить изменение устойчивости стационарного решения системы (5.2), является только множество $\mathcal{F}_2$.*

Таким образом, вычисление границы множества устойчивости сводится к исследованию гиперповерхности $\mathcal{F}_2$.

Содержание раздела 5.1 опубликовано в [144; 145], [3, п. 2] и [10, п. 2].

5.2. Множество устойчивости одной гироскопической задачи

Поясним работу метода раздела 5.1 на примере следующей задачи.

Задача 5.1 ([146, п. 7.8.2]). В поле силы тяжести находится механическая система, состоящая из осесимметричных тел, связанных универсальными шарнирами Кардано-Гука O_1 и O_2 (рис. 5.1). Центры каждого из шарниров находятся на осях симметрии соответствующих тел. Нижнее тело — стержень длины l_1 , посредством шарнира O_1 прикреплён к оси ротора вертикально поставленного мотора и с помощью шарнира O_2 к верхнему стержню длины l_2 , который, в свою очередь жёстко прикреплён к центру плоского диска массы m и диаметра d , перпендикулярно его плоскости. Ротор мотора вращается с постоянной угловой скоростью Ω .

Надо вычислить в линейном приближении множество устойчивости $\mathcal{S}$ для вертикального положения равновесия этой системы при условии, что $l_1 = 2l$, $l_2 = l$ и $d = 4l$.

Такие механические системы, являющиеся статически неуравновешенными, рассматривались ранее, а сама задача является частным случаем более общей задачи исследования устойчивости вертикального вращения статически неуравновешенной системы гироскопов Лагранжа, соединённых универсальными шарнирами Кардано-Гука (см. [147; 148]).

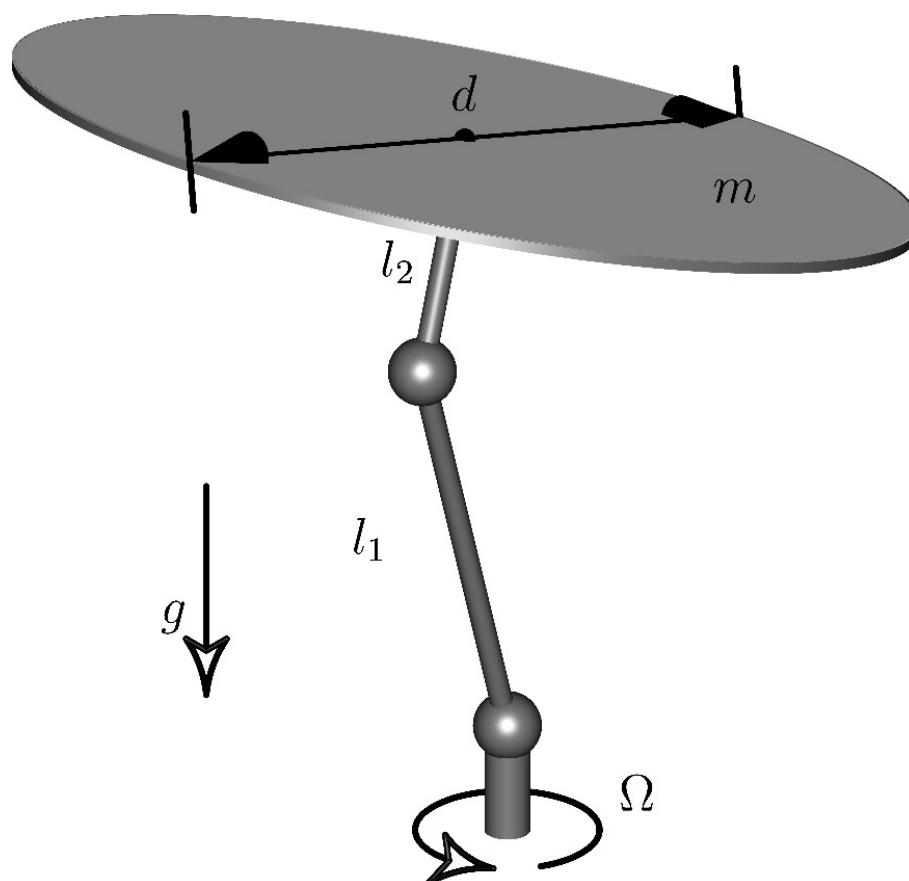


Рис. 5.1. Массивный диск, прикрепленный к ротору двигателя посредством упругих шарниров Кардано–Гука.

5.2.1. Вывод функции Лагранжа

В [146, п. 7.8.2] приведена без вывода квадратичная часть лагранжиана задачи 5.1. Дадим ниже вывод функции Лагранжа для этой задачи в общей постановке. Сделаем следующие допущения:

- шарниры обладают жёсткостью на изгиб и кручение, силы упругости в первом приближении описываются законом Гука;
- массы стержней и шарниров пренебрежимо малы;
- углы отклонения стержней от вертикали малы;

и схематично опишем получение полного лагранжиана системы, но приведём подробные формулы только для его квадратичной части.

Введём неподвижную систему координат $\xi\eta\zeta$, начало которой находится в

центре O_1 нижнего шарнира Гука, а ось ζ направлена вертикально вверх. Равномерно вращающуюся с угловой скоростью Ω вокруг оси ζ систему обозначим через $\xi_1\eta_1\zeta_1$. Систему $x_1y_1z_1$ с началом в O_1 и осью z_1 , направленной вдоль стержня, свяжем с нижним стержнем. Положение системы координат $x_1y_1z_1$ относительно вращающейся системы $\xi_1\eta_1\zeta_1$ зададим тремя углами Крылова ϕ_1 , θ_1 и ψ_1 (рис. 5.2).

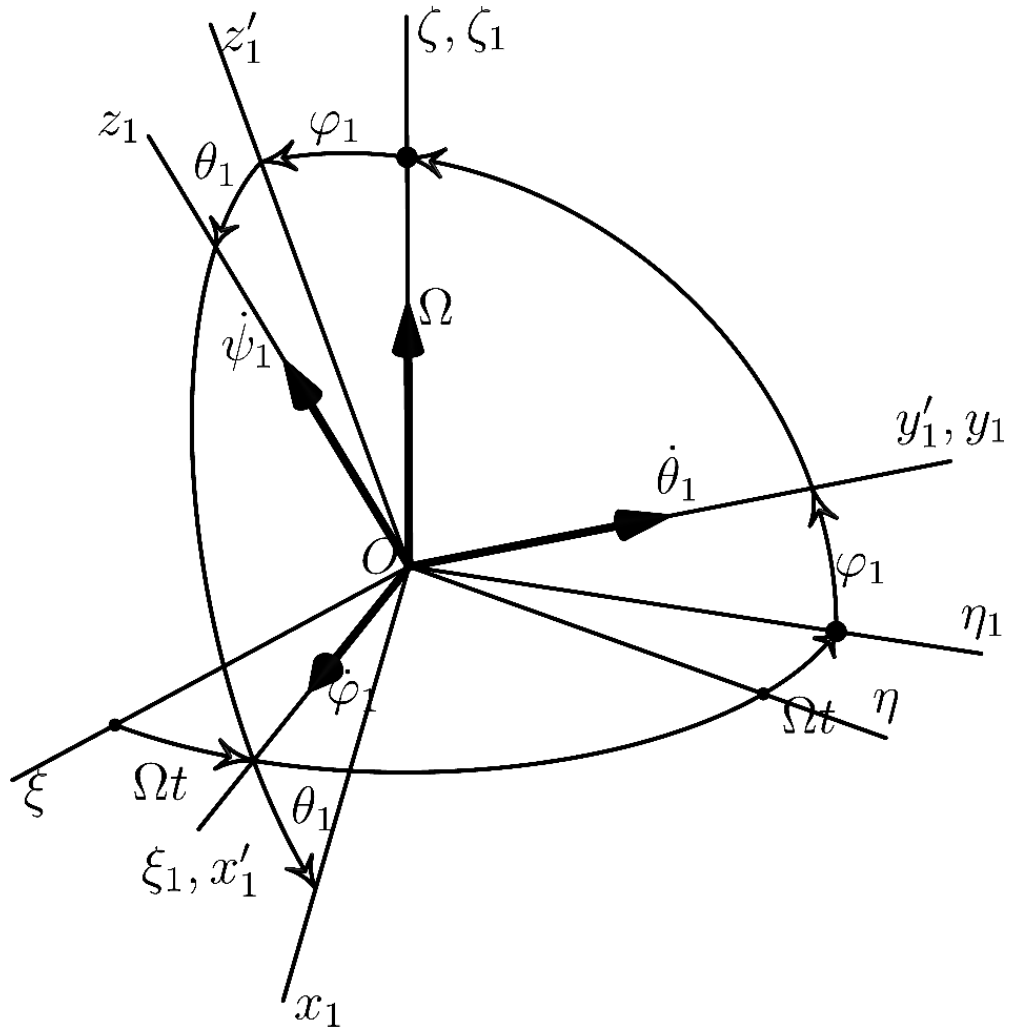


Рис. 5.2. Переход от неподвижной системы координат $\xi\eta\zeta$ к системе $x_1y_1z_1$, связанной с нижним стержнем.

Поскольку переход от неподвижной системы $\xi\eta\zeta$ к системе $x_1y_1z_1$ задаётся последовательностью поворотов $\xi\eta\zeta \xrightarrow{\Omega t} \xi_1\eta_1\zeta_1 \xrightarrow{\varphi_1} x'_1y'_1z'_1 \xrightarrow{\theta_1} x''_1y''_1z''_1 \xrightarrow{\psi_1} x_1y_1z_1$, то вектор ω_1 угловой скорости нижнего стержня определяется по формуле

$$\omega_1 = A_3(-\psi_1) \cdot \left(A_2(-\theta_1) \cdot (A_1(-\varphi_1)\Omega + \dot{\varphi}_1) + \dot{\theta}_1 \right) + \dot{\psi}_1,$$

где $A_i(\alpha)$ — матрица поворота относительно i -й оси на угол α .

Аналогично вводится система координат $\xi_2\eta_2\zeta_2$ с центром в верхнем шарнире и осями, параллельными осям системы $x_1y_1z_1$, а со вторым стержнем свяжем систему координат $x_2y_2z_2$, которая получается из системы $\xi_2\eta_2\zeta_2$ последовательными поворотами на углы φ_2 , θ_2 и ψ_2 . Тогда вектор угловой скорости ω_2 массивного диска определяется по формуле

$$\omega_2 = A_3(-\psi_2) \cdot \left(A_2(-\theta_2) \cdot (A_1(-\varphi_2)\omega_1 + \dot{\varphi}_2) + \dot{\theta}_2 \right) + \dot{\psi}_2.$$

Положение центра масс диска в неподвижной системе координат $\xi\eta\zeta$ задаётся вектором

$$\mathbf{C} = A_3(\Omega t) \cdot A_1(\varphi_1) \cdot A_2(\theta_1) (l_1\mathbf{k} + A_1(\varphi_2) \cdot A_2(\theta_2) \cdot l_2\mathbf{k}).$$

Здесь l_1 и l_2 — длины нижнего и верхнего стержней соответственно.

Следуя [149] введём новые угловые переменные

$$\alpha_1 = \varphi_1, \beta_1 = \theta_1, \gamma_1 = \psi_1, \alpha_2 = \varphi_1 + \varphi_2, \beta_2 = \theta_1 + \theta_2, \gamma_2 = \psi_1 + \psi_2. \quad (5.7)$$

Для получения функции Лагранжа L остаётся записать выражения кинетической и потенциальной энергии

$$T = \frac{m}{2} (\dot{C}_x^2 + \dot{C}_y^2 + \dot{C}_z^2) + \frac{A}{2} (\omega_{2x}^2 + \omega_{2y}^2) + \frac{B}{2} \omega_{2z}^2,$$

$$\Pi = mgC_z + \Pi_{\text{изгиб}} + \Pi_{\text{кручение}},$$

в новых координатах (5.7), а затем разложить функцию L в ряд Тейлора и ограничиться только квадратичными по переменным $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, i = 1, 2$ членами. Здесь A и B — главные моменты инерции диска, а $\Pi_{\text{изгиб}}$ и $\Pi_{\text{кручение}}$ — потенциальная энергия сил упругости изгибных и крутильных деформаций в шарнирах, $\tilde{\mathbf{x}} = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ — вектор обобщённых координат как набор углов Крылова.

Получающееся таким образом выражение функции Лагранжа L может быть

упрощено с учётом калибровочной инвариантности. В итоге имеем

$$\begin{aligned}
L(\tilde{\mathbf{x}}, \dot{\tilde{\mathbf{x}}}) = & \frac{A}{2} \left((\dot{\alpha}_2 - \Omega\beta_2)^2 + (\dot{\beta}_2 + \Omega\alpha_2)^2 \right) + \\
& + \frac{C}{2} \left(\Omega^2 (1 - \alpha_2^2 - \beta_2^2) + \Omega (\dot{\alpha}_2\beta_2 - \alpha_2\dot{\beta}_2) + \dot{\gamma}_2^2 \right) - \\
& + \frac{m}{2} \left((l_1(\dot{\alpha}_1 - \Omega\beta_1) + l_2(\dot{\alpha}_2 - \Omega\beta_2))^2 + (l_1(\dot{\beta}_1 + \Omega\alpha_1) + l_2(\dot{\beta}_2 + \Omega\alpha_2))^2 \right) + \quad (5.8) \\
& - mg \left(l_2 (1 - \alpha_2^2/2 - \beta_2^2/2) + l_1 (1 - \alpha_1^2/2 - \beta_1^2/2) \right) - \\
& - \frac{C_1}{2} (\alpha_1^2 + \beta_1^2) - \frac{C_2}{2} ((\alpha_2 - \alpha_1)^2 + (\beta_1 - \beta_2)^2) - \frac{C'_1}{2} \gamma_1^2 - \frac{C'_2}{2} (\gamma_2 - \gamma_1)^2,
\end{aligned}$$

где $l_1 = Kl$, $l_2 = l$, $A = md^2/4$ и $C = md^2/2$, $d = 4kl$, $C_{1,2}$ и $C'_{1,2}$ — коэффициенты жёсткости на изгиб и кручение в шарнирах соответственно.

Уравнения движения рассматриваемой системы могут быть расщеплены на две подсистемы. Первая подсистема зависит только от углов $\gamma_{1,2}$ и имеет вид

$$\gamma_1 = \frac{C'_2}{C'_1 + C'_2} \gamma_2, \quad \ddot{\gamma}_2 + \frac{C'_1 C'_2}{B(C'_1 + C'_2)} \gamma_2 = 0$$

Она устойчива при $C'_{1,2} > 0$.

Вторая подсистема после введения безразмерного времени $\tau = \Omega t$ сводится к гироскопической системе движения с четырьмя степенями свободы вида (5.4). Её гамильтонова форма задаётся системой (5.5).

Матрицы, которые входят в выражение для матрицы $\mathbf{A}$, имеют вид

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} = & \begin{pmatrix} \Delta(4) & \Delta(2) \\ \Delta(2) & \Delta(2) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \varkappa(8) & \varkappa(4) \\ \varkappa(4) & \varkappa(2) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \frac{1}{\tilde{\Omega}^2} \begin{pmatrix} \Delta(c_1 + c_2 - 2) & \Delta(-c_2) \\ \Delta(-c_2) & \Delta(c_2 - 1) \end{pmatrix} \\
\Delta(\xi) = & \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi \end{pmatrix}, \quad \varkappa(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & -\xi \\ \xi & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

а безразмерные параметры c_1 , c_2 , $\tilde{\Omega}$ выражаются через исходные следующим образом:

$$c_1 = C_1/(\tilde{m}gl), \quad c_2 = C_2/(\tilde{m}gl), \quad \tilde{\Omega} = \Omega\sqrt{l/g}$$

Область физических значений параметров — положительный октант

$$\Phi = \{c_1 > 0, \quad c_2 > 0, \quad \tilde{\Omega} > 0\}$$

5.2.2. Введение удобных параметров

Выполним следующую замену параметров:

$$p = c_1/\tilde{\Omega}^2, \quad q = c_2/\tilde{\Omega}^2, \quad r = 1/\tilde{\Omega}^2.$$

Таким образом, вектор параметров $\mathbf{P} = (p, q, r)$. Физические значения параметров образуют область $\Phi : \mathbf{P} > 0$.

Полухарактеристический многочлен (5.3) теперь имеет следующие коэффициенты:

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{1}{16} (2r^2 - 3rq - rp + pq + 4r - 8q - 4)^2 \\ f_1 &= -2r^3 + \frac{11}{2}r^2q + \frac{3}{2}r^2p - \frac{15}{4}rq^2 - 3rqp - \frac{1}{4}rp^2 + \frac{1}{4}p^2q + \frac{5}{4}pq^2 + \\ &\quad + 5r^2 - 14rq - 2rp + \frac{1}{4}p^2 + \frac{5}{2}pq + \frac{41}{4}q^2 - 8r + p + 13q + 4 \\ f_2 &= 5r^2 - \frac{23}{2}rq - \frac{5}{2}rp + \frac{25}{4}q^2 + 3pq + \frac{1}{4}p^2 - 10r + 2p + 14q + 6 \\ f_3 &= -4r + 5q + p + 4 \end{aligned}$$

Поскольку свободный член f_0 является полным квадратом, удобно ввести и исследовать многочлен

$$f_{00} = \sqrt{f_0} = \frac{1}{2}r^2 - \frac{3}{4}rq - \frac{1}{4}rp + \frac{1}{4}qp + r - 2q - 1$$

Ноль этого квадратичного многочлена определяет коническую поверхность в пространстве параметров $\mathbf{P}$ с особой точкой $P_0 = (2, -2, -2)$. Эта точка также является особой для полинома третьей степени $f_1(\mathbf{P})$. Следовательно, чтобы упростить формулы для коэффициентов, надо сделать параллельный перенос начала координат пространства параметров в точку P_0 . Будем обозначать эти координаты буквами x, y и z , соответственно, а знак тильда над f_i будет означать, что коэффициент записывается в новых координатах $\mathbf{Q} = (x, y, z)$, т.е. $\mathbf{P} = P_0 + \mathbf{Q}$.

В новых координатах $\mathbf{Q}$ коэффициенты полухарактеристического много-

члена (5.3) имеют вид

$$\begin{aligned}\tilde{f}_{00} &= \frac{1}{2}z^2 - \frac{3}{4}zy - \frac{1}{4}zx + \frac{1}{4}xy, & \tilde{f}_0 &= \tilde{f}_{00}^2, & \tilde{f}_1 &= (\tilde{f}_3 - 4)\tilde{f}_0 + \tilde{f}_4^2 \\ \tilde{f}_2 &= 5z^2 - \frac{23}{2}zy - \frac{5}{2}zx + \frac{25}{4}y^2 + 3yx + \frac{1}{4}x^2 - 12z + 18y + 2x \\ \tilde{f}_3 &= -4z + 5y + x + 4 \text{ где } \tilde{f}_4 = 3z - \frac{9}{2}y - \frac{1}{2}x\end{aligned}$$

В новых координатах уравнение $\tilde{f}_{00} = 0$ определяет конус $\mathcal{C}_0$ с центром в начале координат $Q_0 = 0$.

5.2.3. Исключительная плоскость

Дискриминант полухарактеристического многочлена (5.3) имеет вид

$$D(f) = l^4(\mathbf{Q})g(\mathbf{Q})/256 \quad (5.9)$$

где

$$l(\mathbf{Q}) = 2z - 3y - x \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned}g(\mathbf{Q}) &= 512z^6 - 4352z^5y - 768z^5x + 14848z^4y^2 + 5376z^4yx + 512z^4x^2 - 25408z^3y^3 \\ &\quad - 14656z^3y^2x - 2752z^3yx^2 - 192z^3x^3 + 21800z^2y^4 + 19168z^2y^3x \\ &\quad + 5360z^2y^2x^2 + 736z^2yx^3 + 40z^2x^4 - 7500zy^5 - 11700zy^4x - 4376zy^3x^2 \\ &\quad - 904zy^2x^3 - 92zyx^4 - 4zx^5 + 2500y^5x + 1200y^4x^2 + 344y^3x^3 + 48y^2x^4 \\ &\quad + 4yx^5 - 256z^5 + 2880z^4y + 1344z^4x - 14976z^3y^2 - 6720z^3yx - 1344z^3x^2 \\ &\quad + 37928z^2y^3 + 13816z^2y^2x + 5144z^2yx^2 + 456z^2x^3 - 45120zy^4 - 14464zy^3x \\ &\quad - 6784zy^2x^2 - 1152zyx^3 - 64zx^4 + 20250y^5 + 6490y^4x + 3156y^3x^2 + 740y^2x^3 \\ &\quad + 82yx^4 + 2x^5 + 1872z^4 + 2016z^3y - 5088z^3x - 35496z^2y^2 + 15888z^2yx \\ &\quad + 2200z^2x^2 + 67608zy^3 - 12936zy^2x - 5176zyx^2 - 344zx^3 - 37827y^4 \\ &\quad + 828y^3x + 2782y^2x^2 + 412yx^3 + 13x^4 - 13824z^3 + 62208z^2y + 6912z^2x \\ &\quad - 93312zy^2 - 20736zyx - 1152zx^2 + 46656y^3 + 15552y^2x + 1728yx^2 + 64x^3. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Обозначим множества

$$\mathcal{G} = \{\mathbf{Q} : g(\mathbf{Q}) = 0\}, \quad \mathcal{L} = \{\mathbf{Q} : l(\mathbf{Q}) = 0\} \quad (5.12)$$

При исследовании задачи об устойчивости на исключительной плоскости

$$\mathcal{L} : l(\mathbf{Q}) \equiv 2z - 3y - x = 0 \quad (5.13)$$

оказалось [150, п. 4.3], что на плоскости $\mathcal{L}$ множество устойчивости $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$ лежит в множестве устойчивости $\mathcal{S}$, соответствующем множителю $g(\mathbf{Q})$ дискриминанта (5.9). Кроме того, область устойчивости $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$ лежит вне области $\Phi = \{\mathbf{Q} \geqslant (-2, 2, 2)\}$ физических значений параметров.

5.2.4. Особые точки множества $\mathcal{G}$

Рассмотрим особые точки множества $\mathcal{G}$ (5.11), (5.12). Особенности первого порядка удовлетворяют системе уравнений

$$g(\mathbf{Q}) = 0, \quad \partial g / \partial x = 0, \quad \partial g / \partial y = 0, \quad \partial g / \partial z = 0 \quad (5.14)$$

Особенности второго порядка множества $\mathcal{G}$ должны удовлетворять системе (5.14), к которой добавлено условие, что все вторые частные производные равны нулю. Этой системе удовлетворяют только четыре точки:

$$Q_0 = 0, \quad Q_1 = (-2, 2, 2), \quad Q_2 = (7/2, 7/2, 6), \quad Q_3 = (-5/2, 3/2, 2) \quad (5.15)$$

В этих точках

$$\mu_{1,2,3,4}(Q_1) = -1, \quad \mu_{1,2,3,4}(Q_{2,3}) = -1/4, \quad \mu_{1,2,3}(Q_0) = 0, \quad \mu_4(Q_0) = -4$$

Особенностей третьего порядка у множества $\mathcal{G}$ нет.

С помощью базиса Грёбнера удалось найти все решения системы (5.14). Они расположены на трёх однопараметрических семействах $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ и $\mathcal{F}$.

Семейство $\mathcal{P}_1$ определяется нулями следующих многочленов:

$$2z - 3y - x, \quad z^2 - 4zy + 4z + 4y^2 - 6y \quad (5.16)$$

Это семейство представляет собой параболу $\mathcal{P}_1$:

$$z = -4t^2 - 6t, \quad y = -2t^2 - 4t, \quad x = -2t^2 \quad t \in \mathbb{R} \quad (5.17)$$

Первый из многочленов (5.16) совпадает с линейной функцией, определяющей исключительную плоскость (5.10). Вдоль этой параболы корни полухарактеристического многочлена принимают значения

$$\mu_{1,2,3} = -t^2, \quad \mu_4 = -(t+2)^2$$

т. е. всем точкам параболы $\mathcal{P}_1$ кроме $t = 0$ и $t = 2$ соответствует устойчивость. Парабола $\mathcal{P}_1$ соединяет особые точки Q_1 и Q_0 , которые разбивают ее на три части $\mathcal{P}_1^-$, $\mathcal{P}_1^0$, $\mathcal{P}_1^+$:

$$\mathcal{P}_1^- \text{ при } t < -1, \quad \mathcal{P}_1^0 \text{ при } -1 < t < 0, \quad \mathcal{P}_1^+ \text{ при } t > 1$$

Вершина параболы находится в точке $Q_4 = (-1/2, 3/2, 2)$. Вся парабола $\mathcal{P}_1$ лежит в плоскости $\mathcal{L}$ (см. уравнение (5.13)).

Семейство $\mathcal{P}_2$ определяется нулями следующих многочленов:

$$-z + 2y - 1, \quad (y - x)^2 - 16y + 8x + 28 \quad (5.18)$$

и представляет собой параболу:

$$z = v^2 + 2v + 3, \quad y = v^2/2 + v + 2, \quad x = v^2/2 + 3v \quad v \in \mathbb{R} \quad (5.19)$$

На ней корни полухарактеристического многочлена суть

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{4}v^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-v^2}, \quad \mu_{3,4} = \frac{1}{4}v^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-v^2} \quad (5.20)$$

Корни (5.20) вещественны и неположительны при условии $-1 \leq v \leq 1$ и принимают значения из интервала $[-1, 0]$. Таким образом, семейство $\mathcal{P}_2$ разбивается на три части $\mathcal{P}_2^-$, $\mathcal{P}_2^0$, $\mathcal{P}_2^+$:

$$\mathcal{P}_2^- \text{ при } v < -1, \quad \mathcal{P}_2^0 \text{ при } -1 < v < 1, \quad \mathcal{P}_2^+ \text{ при } v > 1$$

Парабола $\mathcal{P}_2$ соединяет особые точки Q_2 и Q_3 , а ее вершина — точка $Q_5 = (0, 2, 3)$. Парабола $\mathcal{P}_2$ лежит в плоскости $\mathcal{M} = \{\mathbf{Q} : 2y = z + 1\}$ (см. равенства (5.18)).

Семейство $\mathcal{F}$ представляет собой криволинейный четырёхугольник, проходящий через особые точки Q_0, Q_3, Q_1, Q_2 . Его параметрическое представление имеет вид

$$\mathcal{F} : \begin{cases} z = 2 + 6 \cos^2 \varphi - 8 \cos^6 \varphi - 2 \sin^3 2\varphi \\ y = 2 + 6 \cos^4 \varphi - 8 \cos^6 \varphi - \sin^3 2\varphi, \\ x = 2 \sin^4 \varphi (4 \cos^2 \varphi - 1) - 3 \sin^3 2\varphi \end{cases} \quad 0 \leq \varphi < \pi \quad (5.21)$$

На семействе (5.21) корни полухарактеристического многочлена (5.3) суть

$$\mu_{1,2,3} = -\sin^4 \varphi, \quad \mu_4 = -(3 \sin^2 \varphi - 2)^2$$

Кроме решений системы (5.15) были изучены решения неполных систем вида

$$g(\mathbf{Q}) = 0, \quad \partial g(\mathbf{Q})/\partial s = 0, \quad \partial g(\mathbf{Q})/\partial t = 0 \quad (5.22)$$

где s, t — две координаты из набора x, y, z . Анализ решений всех систем вида (5.22) с помощью базиса Грёбнера показал, что нет других решений, кроме найденных ранее семейств особых точек первого порядка множества $\mathcal{G}$. Таким образом, имеет место

Лемма 5.3. *Все особые точки множества $\mathcal{G}$ исчерпываются двумя параболом $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ и кривой $\mathcal{F}$. Неполные системы (5.22) не дают других решений.*

Таким образом, особенности множества $\mathcal{G}$ сосредоточены на семействах $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ и $\mathcal{F}$, которые своими интервалами $\mathcal{P}_1^0, \mathcal{P}_2^0$ и кривой $\mathcal{F}$ формируют «каркас» поверхности в форме криволинейного тетраэдра $\mathcal{S}_1$, который показан на рис. 5.3, где сегменты $\mathcal{P}_1^0, \mathcal{P}_2^0$ изображены сплошной линией, а семейство $\mathcal{F}$ — пунктирной. Показаны проекции «каркаса» на три координатные плоскости.

Детальный анализ (см. 5.2.5) показывает, что множество $\mathcal{G}$ содержит несколько компонент размерностей 1 и 2. Четыре компоненты размерности 1 представляют собой части $\mathcal{P}_{1,2}^\pm$ парабол $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$. При этом плоскости $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$, в которых лежат семейства $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$, пересекаются по прямой, проходящей через точки Q_4 и Q_5 — вершины этих парабол.

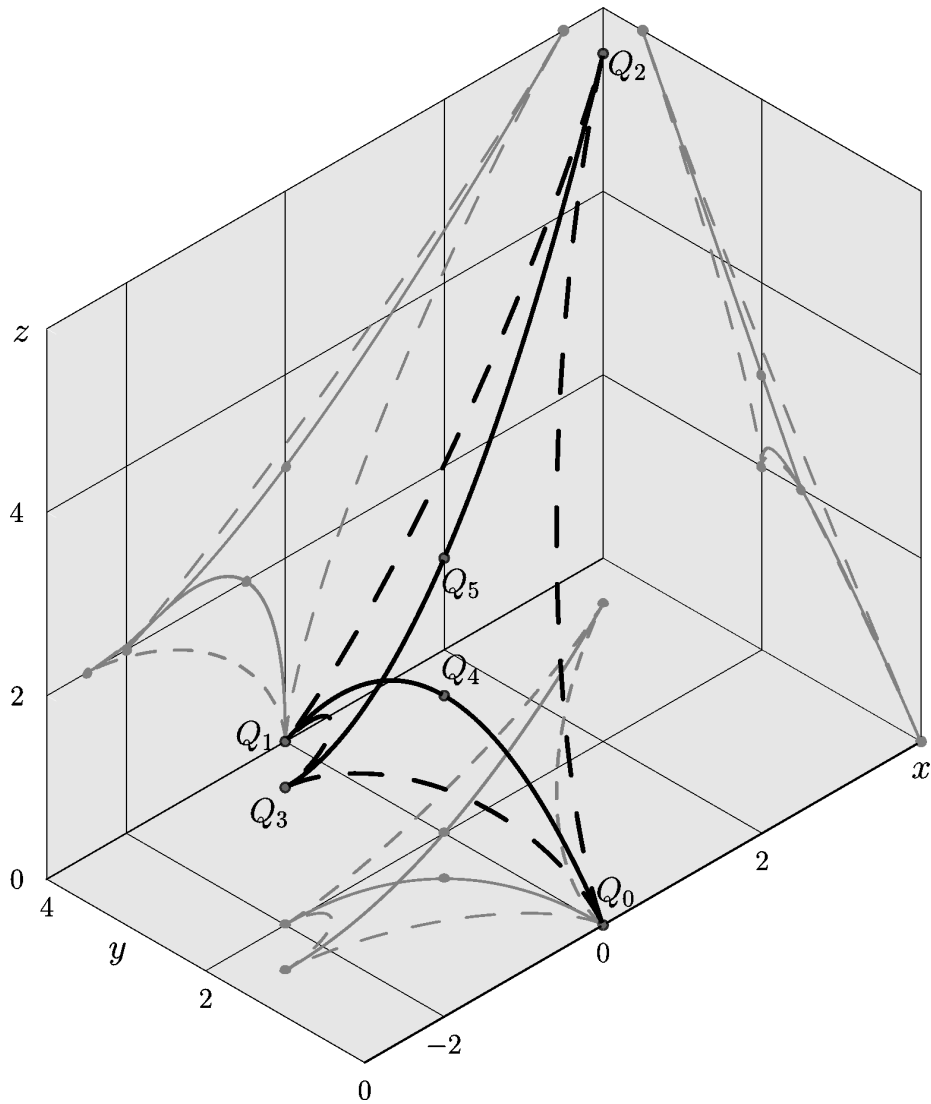


Рис. 5.3. Каркас криволинейного тетраэдра $\mathcal{S}_1$, образованный интервалами $\mathcal{P}_1^0$, $\mathcal{P}_2^0$ (сплошные линия) и семейством $\mathcal{F}$ (пунктирная линия). Показаны его проекции на три координатные плоскости.

5.2.5. Глобальное строение множества $\tilde{\mathcal{G}}$

В множестве $\mathcal{G}$ было найдено несколько прямых. Это позволило выдвинуть гипотезу о линейчатой структуре подмножества множества $\mathcal{G}$, которая была найдена средствами базиса Грёбнера. Подмножество, соответствующее линейчатой поверхности, обозначим $\tilde{\mathcal{G}}$.

Компонента $\tilde{\mathcal{G}}$ размерности 2 множества $\mathcal{G}$ является развертывающейся линейчатой поверхностью (см., например, [151, гл. VII, § 5], или [152, гл. 4]) и

состоит из касательных семейства $\mathcal{F}$. Каждая из касательных проходит через две точки, которые лежат на частях $\mathcal{P}_1^0$ и $\mathcal{P}_2^0$, соответственно. Положения точек на указанных выше семействах задаются через параметры t и v следующим образом:

$$t = -\sin^2 \varphi, \quad v = -\sin 2\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

Подставляя эти выражения в формулы (5.17) и (5.19), соответственно, получим координаты пары точек, определяющих прямую линейчатой поверхности $\tilde{\mathcal{G}}$. Параметрическое представление последней задаётся следующим образом:

$$\begin{aligned} z &= -2(u+1)\sin 2\varphi + u(1+2\cos^2 \varphi) + \sin^2 2\varphi + 3 \\ y &= -(u+1)\sin 2\varphi + 2u\cos^2 \varphi + \frac{1}{2}\sin^2 2\varphi + 2 \\ x &= -3(u+1)\sin 2\varphi + 2u\sin^2 \varphi + \frac{1}{2}\sin^2 2\varphi \\ 0 &\leq \varphi < \pi, \quad u \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{5.23}$$

В координатах φ , u на развёртке поверхности $\tilde{\mathcal{G}}$ семейства особых точек выглядят очень просто:

$$\mathcal{P}_1^0 : u = -1, \quad \mathcal{P}_2^0 : u = 0, \quad \mathcal{F} : u = -\cos^2 2\varphi.$$

Они показаны на рис. 5.4, где пунктирной линией показан разрез на поверхности $\tilde{\mathcal{G}}$.

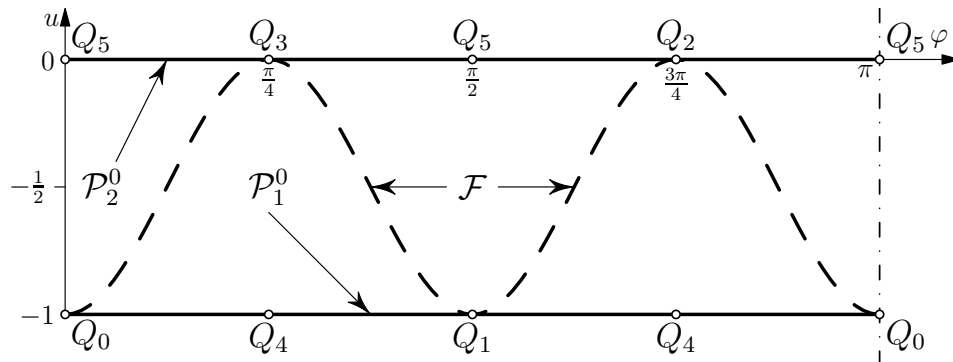


Рис. 5.4. Семейства особых точек $\mathcal{F}$, $\mathcal{P}_1^0$ и $\mathcal{P}_2^0$ на развёртке цилиндра (φ, u) .

Поверхность $\tilde{\mathcal{G}}$ можно представить себе в виде однополостного гиперболоида с двумя склейками. Одна склейка, расположенная на уровне $u = 0$ с крайними точками Q_2 и Q_3 , повернута относительно другой склейки с крайними точками Q_0 и Q_1 , расположенной на уровне $u = -1$.

Итак, доказана

Лемма 5.4. *Множество $\mathcal{G}$ содержит четыре одномерные компоненты $\mathcal{P}_{1,2}^\pm$ с параметризациями (5.17) и (5.19) и двумерную линейчатую поверхность $\tilde{\mathcal{G}}$ с параметризацией (5.23).*

Определим поведение корней полухарактеристического многочлена (5.3) на границе множества устойчивости так, как это описано в разделе 4.1.1. Выражение для кратного корня μ_{mul} уравнения 4-го порядка довольно громоздко и задаётся формулой (4.4). Однако параметризация (5.23) позволяет его существенно упростить, и кратный корень на поверхности $\tilde{\mathcal{G}}$ равен

$$\mu_{\text{mul}} = -\sin^4 \varphi \leq 0$$

а квадратичный множитель, определяющий другую пару корней полухарактеристического многочлена, и дискриминант этого квадратного многочлена имеют вид

$$\mu^2 + 2(\cos^4 \varphi - u)\mu + (u + \cos^4 \varphi)^2, \quad \tilde{D} = -16u \cos^4 \varphi \quad (5.24)$$

Согласно теореме 5.1 и равенству (5.2.5), условия вещественности и неположительности корней многочлена (5.24) выполнены либо при $u \leq 0$, либо при $\cos \varphi = 0$. Последнее условие приводит к прямой $x = 0$, $y = 2z/3$, на которой устойчивость достигается при $u \leq 0$. Следовательно, уравнения (5.23) при $u \leq 0$ определяют границу области устойчивости.

Таким образом, множество устойчивости $\mathcal{S}$ состоит из двух частей: $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$. Часть $\mathcal{S}_1$ представляет собой криволинейный тетраэдр, натянутый на интервалы $\mathcal{P}_1^0$, $\mathcal{P}_2^0$ и кривую $\mathcal{F}$, его поверхности соответствуют значения параметра $-1 \leq u \leq 0$ в параметризации (5.23). Часть $\mathcal{S}_2$ ограничена частью

The figure is a 2D plot with the horizontal axis labeled $(x+y)/\sqrt{2}$ and the vertical axis labeled z . The horizontal axis ranges from 0 to 3, and the vertical axis ranges from 1 to 4. A dashed line, labeled $\rho \mathcal{F}$, passes through points Q_4 and Q_5 . A solid line, labeled $\mathcal{S}_1$, is also shown. A shaded region, labeled $\mathcal{S}_2$, is bounded by the x -axis and a curve. A hatched region, labeled Φ_2 , is bounded by a curve and the x -axis. Arrows indicate the direction of the dashed line. Labels Φ_1 and Φ_2 are also present.

214

5.2.6. Устойчивость в случаях нулевых и кратных корней

Характеристический многочлен $f(\mu)$ имеет нулевые корни только на конусе $\mathcal{C}_0 = \{\mathbf{Q} : f_{00}(\mathbf{Q}) = 0\}$. Исследуем взаимное расположение конуса $\mathcal{C}_0$ и множества $D(f) = 0$.

Система уравнений $g(\mathbf{Q}) = 0$, $f_{00}(\mathbf{Q}) = 0$ имеет два семейства решений $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$.

Первое представляет собой образующую конуса $\mathcal{C}_0$

$$\mathcal{C}_1 : y = 2z/3, \quad x = 0.$$

вдоль которой происходит касание поверхностей $\tilde{\mathcal{G}}$ и $\mathcal{C}_0$. Это прямая, которая проходит через особую точку Q_0 — вершину конуса $\mathcal{C}_0$ и точку Q_5 — вершину параболы $\mathcal{P}_2$ (5.19). Элементарные делители матрицы $\mathbf{JA}$ для этого семейства имеют вид

$$\lambda^2, \lambda^2, \lambda - \lambda_1, \lambda + \lambda_1, \lambda - \lambda_2, \lambda + \lambda_2,$$

где $\lambda_{1,2} = i(\sqrt{-3z+9} \pm 3)/3$. Таким образом, вдоль семейства $\mathcal{C}_1$ устойчивости не будет, хотя на интервале $0 < z < 3$ собственные числа $\lambda_{1,2}$ являются число мнимыми.

Второе семейство $\mathcal{C}_2$ есть пересечение конуса $\mathcal{C}_0$ с поверхностью криволинейного тетраэдра S и представляет собой криволинейный треугольник, одна из вершин которого есть точка Q_0 . Система уравнений $l = 0 = f_{00}$ имеет два семейства решений $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_3 = \{x = 2z, y = 0\}$. Анализ матрицы $\mathbf{JA}$ на конусе $\mathcal{C}_0$ вне семейства $\mathcal{C}_1$ показал, что ее жорданова форма, соответствующая нулевым собственным числам, имеет простую структуру. Тем самым, имеет место

Лемма 5.5. *Если $f_{00}(\mathbf{Q}) = 0$, то матрица $\mathbf{JA}$ имеет простые элементарные делители всюду кроме исключительной прямой*

$$\mathcal{C}_1 : y = 2z/3, \quad x = 0$$

Рассмотрим структуру элементарных делителей матрицы $\mathbf{JA}$ в особых точках, сосредоточенных на семействах $\mathcal{P}_{1,2}$, $\mathcal{F}$, и в точках, соответствующих кратным корням, которые принадлежат множествам $\mathcal{G}$, $\mathcal{L}$ и $\mathcal{F}$. Для этого вычислим ранг матрицы $M_A(\mu)$ для всех нулевых и кратных корней полухарактеристического многочлена (5.3).

Лемма 5.6. *На границе $\partial\mathcal{S}$ множества устойчивости, задаваемой частью поверхности $\tilde{\mathcal{G}}$ за исключением интервала $\mathcal{P}_1^0$, элементарные делители матрицы $\mathbf{JA}$ непростые, а на $\mathcal{P}_1^0$ — простые.*

5.2.7. Эффективное выделение множества устойчивости

В п. 5.2.5 было дано описание множества устойчивости задачи. Здесь приведём систему неравенств, которая позволяет эффективно определять принадлежность произвольной точки $\mathbf{Q}$ пространства параметров множеству устойчивости $\mathcal{S}$. Для этого напомним основные свойства этого множества.

Границей $\partial\mathcal{S}$ множества устойчивости служит двумерная компонента $\tilde{\mathcal{G}}$ множества $\mathcal{G}$, которая является линейчатой поверхностью. Её параметризация даётся формулой (5.23). Эта поверхность имеет участки самопересечения вдоль сегментов $\mathcal{P}_1^0$ и $\mathcal{P}_2^0$ однопараметрических семейств особых точек первого порядка и делит пространство параметров на 4 области: W_i ($i = 0, 1, 2, 3$). Область W_1 выделяется поверхностью $\tilde{\mathcal{G}}$ при значениях параметра $u > 0$. Эта область содержит «рога» — одномерные компоненты $\mathcal{P}_2^\pm$. Область W_2 — криволинейный тетраэдр, натянутый на сегменты $\mathcal{P}_1^0$, $\mathcal{P}_2^0$ и кривую $\mathcal{F}$, его поверхность соответствует значениям параметра $-1 < u < 0$. Область W_3 выделяется поверхностью $\tilde{\mathcal{G}}$ при значениях параметра $u < -1$. Эта область содержит «копыта» — одномерные компоненты $\mathcal{P}_1^\pm$. Область W_2 «соединяется» с областями W_1 и W_3 вдоль сегментов $\mathcal{P}_1^0$ и $\mathcal{P}_2^0$ соответственно. Наконец, область $W_0 = \mathbb{R}^3 \setminus (W_1 \cup W_2 \cup W_3)$ — внешняя часть, дополняющая пространство параметров $\mathbb{R}^3$. Схематически деление пространства параметров на области W_i

показано на рис. 5.6, где знаки $+$ и $-$ в каждой из областей указывают знак дискриминанта $D(f)$ полухарактеристического многочлена, а затенением выделены части множества устойчивости.

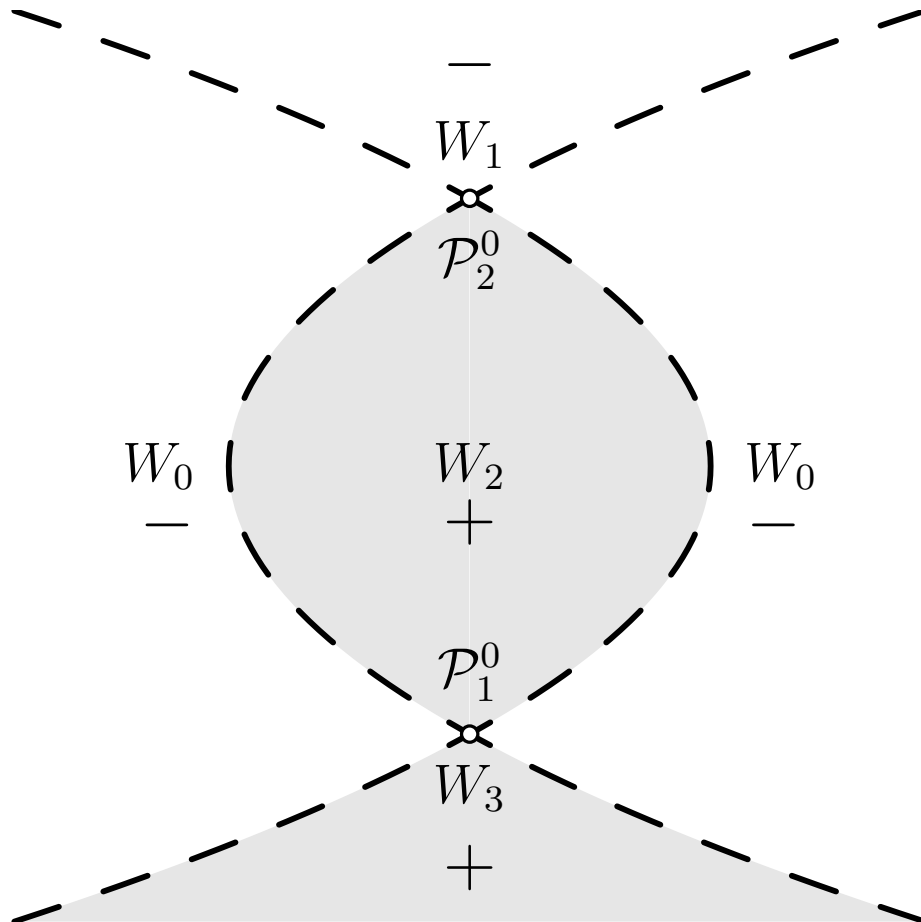


Рис. 5.6. Схематическое деление пространства параметров Π поверхностью $\tilde{\mathcal{G}}$ на части. Знаки $+$ и $-$ в каждой из частей указывают знак дискриминанта. Затенением выделены части множества устойчивости $\mathcal{S}$.

Дискриминант $D(f)$ принимает неотрицательные значения в областях W_1 , W_2 , W_3 , однако в области W_1 многочлен $f(\mu)$ имеет две пары комплексно сопряжённых корней, поэтому она не входит в множество устойчивости.

Сформулируем неравенства, позволяющие отделить область W_1 от области неотрицательных значений дискриминанта. Для этого введём косоугольную

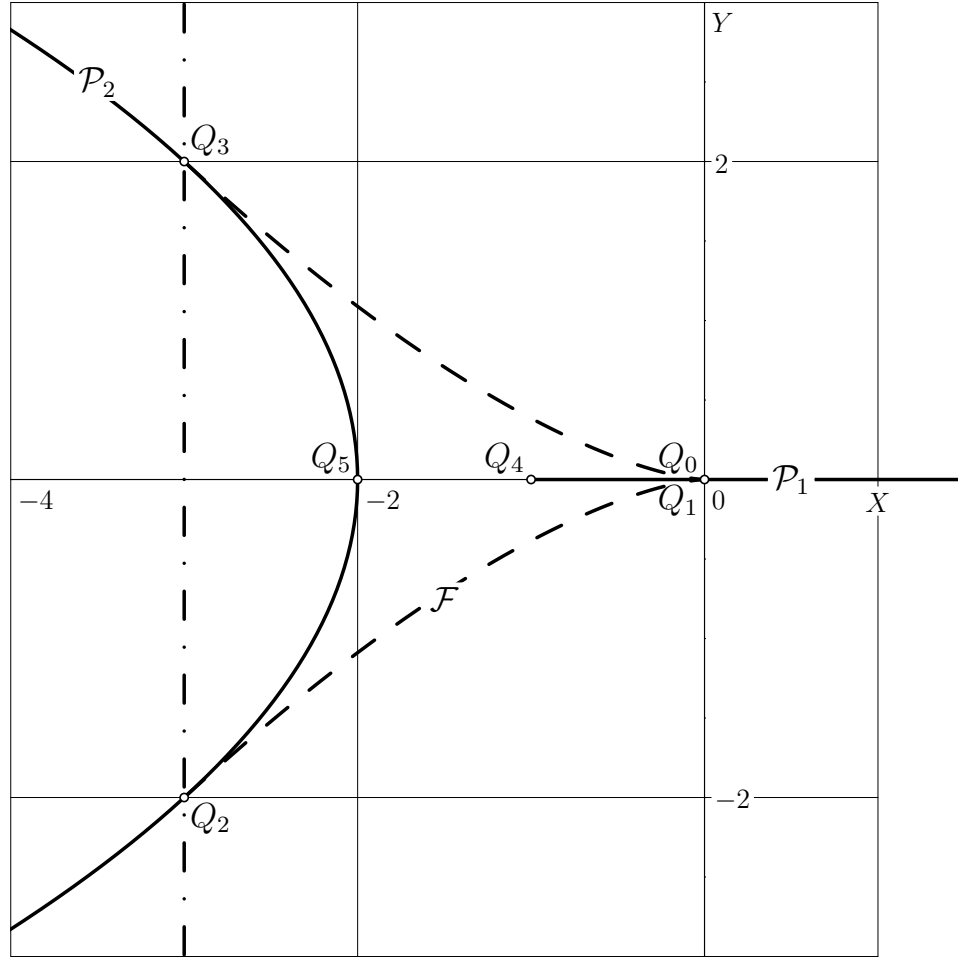


Рис. 5.7. Проекция семейств особых точек на плоскость $\mathcal{T}$.

систему координат с базисом

$$R_1 = (Q_1 - Q_0)/2, \quad R_2 = (Q_2 - Q_3)/2, \quad R_3 = 2(Q_5 - Q_4)$$

Точки Q_i ($i = 0, \dots, 3$) являются особыми точками второго порядка множества $\mathcal{G}$, а точки Q_4 и Q_5 — вершины парабол $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$, соответственно. Рассмотрим проекцию семейств особых точек множества $\mathcal{G}$ на плоскость $\mathcal{T}$, натянутую на векторы R_2 и R_3 (см. рис. 5.7). Координаты X, Y на плоскости $\mathcal{T}$ даются соотношениями

$$X = (\mathbf{Q}, R_1, R_2), \quad Y = (\mathbf{Q}, R_3, R_1)$$

где $(\cdot, \cdot, \cdot)$ — смешанное произведение в $\mathbb{R}^3$, т. е. определитель из указанных векторов. Проекция семейства $\mathcal{P}_2$ на плоскость $\mathcal{T}$ дается уравнением $Y^2 + 4X + 8 = 0$. Особые точки Q_2 и Q_3 , выделяющие на параболе $\mathcal{P}_2$ сегмент $\mathcal{P}_2^0$, перейдут

при проектировании в точки с координатами $(X, Y) = (-3, -2)$ и $(-3, 2)$ соответственно. Следовательно, область W_1 отделяется двумя неравенствами:

$$Y^2 + 4X > -8, \quad X > -3$$

В исходных переменных $\mathbf{Q}$ они записываются в виде

$$\begin{aligned} 4z^2 - 12zy - 4zx + 9y^2 + 6yx + x^2 - 16z + 20y + 4x + 8 &> 0 \\ -4z + 5y + x + 3 &> 0 \end{aligned} \quad (5.25)$$

Таким образом, из теорем 5.5 и 5.6 следует

Теорема 5.3. *Множество устойчивости $\mathcal{S}$ гироскопической системы есть $\widetilde{\mathcal{S}} \cup \mathcal{P}_1^0$, где $\widetilde{\mathcal{S}}$ задаётся неравенствами $g(\mathbf{Q}) > 0$ и (5.25).*

5.2.8. Физические значения и сравнение с известными результатами

Множество устойчивости $\mathcal{S} \cap \Phi$ для физических значений параметров $\mathbf{Q}$ получается отсечением от множества $\mathcal{S}$ плоскостями $x = -2$, $y = 2$, $z = 2$. Эти плоскости выделяют две области устойчивости. Первая область Φ_1 представляет собой часть криволинейного тетраэдра $\mathcal{S}_1$ от его вершины Q_2 до плоскости $y = 2$, которая проходит через точки Q_1 и Q_5 . Эта область ограничена и представляет собой криволинейный трехгранный клин. Вторая область Φ_2 ограничена сверху участком линейчатой поверхности (5.23) при $u < -1$, а снизу — плоскостью $z = 2$. Границы этих областей имеют общую точку Q_1 . Сечение множества устойчивости $\mathcal{S} \cap \Phi$ плоскостью $\mathcal{K}$ (см. 5.2.5), проходящей через области Φ_1 и Φ_2 , показано на рис. 5.6. Отметим, что общая точка Q_1 этих областей не принадлежит плоскости $\mathcal{K}$.

В работах [153, с. 181–185], [146, п. 7.8.2] было проведено аналитическое исследование устойчивости вблизи двух точек, одна из которых Q_2 , а другая была взята на сегменте $\mathcal{P}_2^0$, с координатами

$$\left(1/4 + 3\sqrt{2}/2, 9/4 + \sqrt{2}/2, 7/2 + \sqrt{2}/2 \right).$$

Вблизи этих точек область устойчивости приблизительно выделялась посредством вычисления корней полухарактеристического многочлена (5.3) по сетке в пространстве параметров. Также был выполнен численный анализ небольшой области в диапазоне изменения исходных параметров задачи:

$$1,36 \leq c_1 \leq 1,56, \quad 0,3 \leq c_2 \leq 0,38, \quad 0,5 \leq \tilde{\Omega} \leq 0,7,$$

что соответствует интервалам

$$0,78 \leq x \leq 4,24, \quad 2,61 \leq y \leq 3,52, \quad 4,04 \leq z \leq 6,00$$

в параметрах Q . В монографии [146, с. 214] отмечалось, что «... область устойчивости является очень узкой, что требует тонкой настройки коэффициентов жёсткости в шарнирах.» На самом деле, второе множество устойчивости Φ_2 обладает достаточной «мощностью», позволяя выбирать параметры в широком диапазоне значений. Ещё раз отметим, что представленные выше формулы (5.17), (5.19), (5.21), (5.23) дают точное и исчерпывающее описание границы множества устойчивости движения гироскопической системы задачи 5.1.

5.2.9. Локальный анализ множества $\mathcal{G}$ вблизи особенностей

В качестве демонстрации работы алгоритма асимптотического решения алгебраического уравнения от трёх переменных, описанного в разделе 4.3, проведём локальный анализ множества $\mathcal{G}$ вблизи особой точки Q_0 второго порядка. Все вычисления этого раздела были выполнены в СКА Maple с использованием библиотеки PGeomLib, описанной в п. 4.3.

Задаём конус задачи $K_0 = \{s < 0\}$, вычисляем многогранник Ньютона $\Gamma(g)$ многочлена (5.11) (см. рис. 5.8), его внешние нормали N_{0j} и отбираем только те грани, нормали которых попадают в конус задачи K_0 . Такой гранью будет единственная грань $\Gamma_{01}^{(2)}$, а соответствующий ей укороченный многочлен есть $\hat{g}_{01}^{(2)} = 64(x + 9y - 6z)^3$.

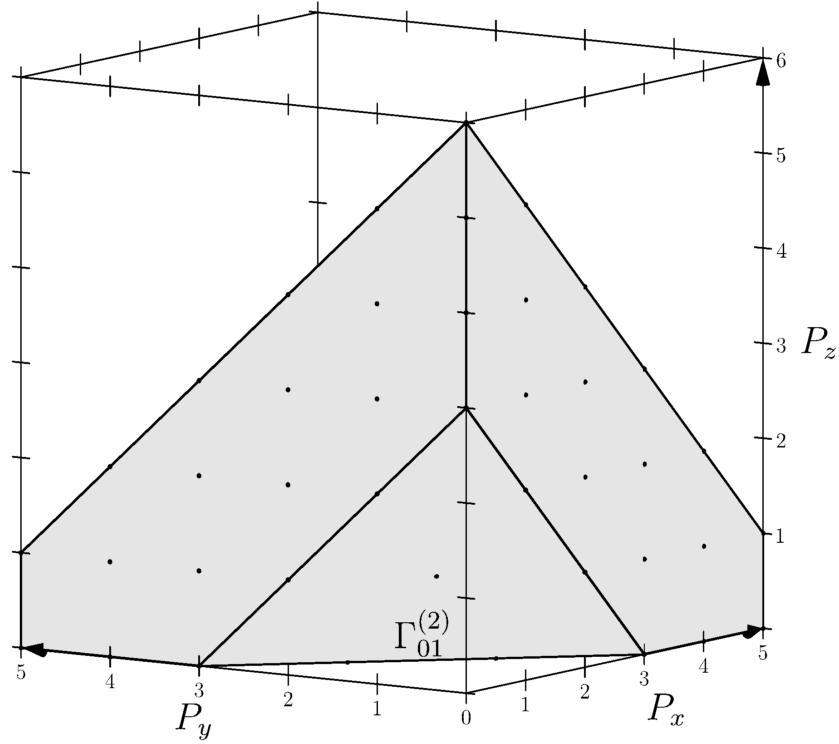


Рис. 5.8. Многогранник Ньютона для многочлена $g(\mathbf{Q})$ со стороны начала координат. Показаны грани с отрицательными внешними нормальными.

Следуя замечанию а) п. 4.3.3, выполним замену переменных $x = 6z_1 - 9y_1 + x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$ и получим многочлен $g_1(\mathbf{Q}_1) \stackrel{\text{def}}{=} g(\mathbf{Q})$ и новый конус задачи $\mathbf{K}_1 = \{\mathbf{s} : s_1 < s_2 = s_3 < 0\}$. Вновь вычисляем многогранник Ньютона $\Gamma(g_1)$ и его внешние нормали N_{1j} к граням, среди которых имеется лишь одна грань $\Gamma_{11}^{(2)}$ с нормальным вектором $N_{11} = (-4, -3, -3) \in \mathbf{K}_1$, которой соответствует укорочение $\hat{g}_{11}^{(2)} = 64x_1^3 - 432(3y_1 - 2z_1)^4$. Грань $\Gamma_{11}^{(2)}$ является треугольником, два её ребра содержат лишь по две точки носителя. Эти ребра не рассматриваем по замечанию в) п. 4.3.3. Третьему ребру $\Gamma_{11}^{(1)}$ соответствует факторизуемое укорочение $\hat{g}_{11}^{(1)} = -432(3y_1 - 2z_1)^4$. К этому ребру примыкает грань $\Gamma_{16}^{(2)}$ с нормалью $N_{16} = (-1, 0, 0)$. Поэтому делаем замену $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 = 3y_2/2 + z_2$ и получаем многочлен $g_2(\mathbf{Q}_2) \stackrel{\text{def}}{=} g_1(\mathbf{Q}_1)$. Новый конус задачи есть $\mathbf{K}_2 = \{S = \mu_1 N_{11} + \mu_2 N_{16} + \lambda_1(0, 0, -1)\}$, где $\mu_{1,2} \geq 0$, $\mu_1 + \mu_2 > 0$, $\lambda_1 > 0$. Вычисляем внешние нормали N_{2j} к граням нового многогранника Ньютона $\Gamma(g_2)$ (см. рис. 5.9).

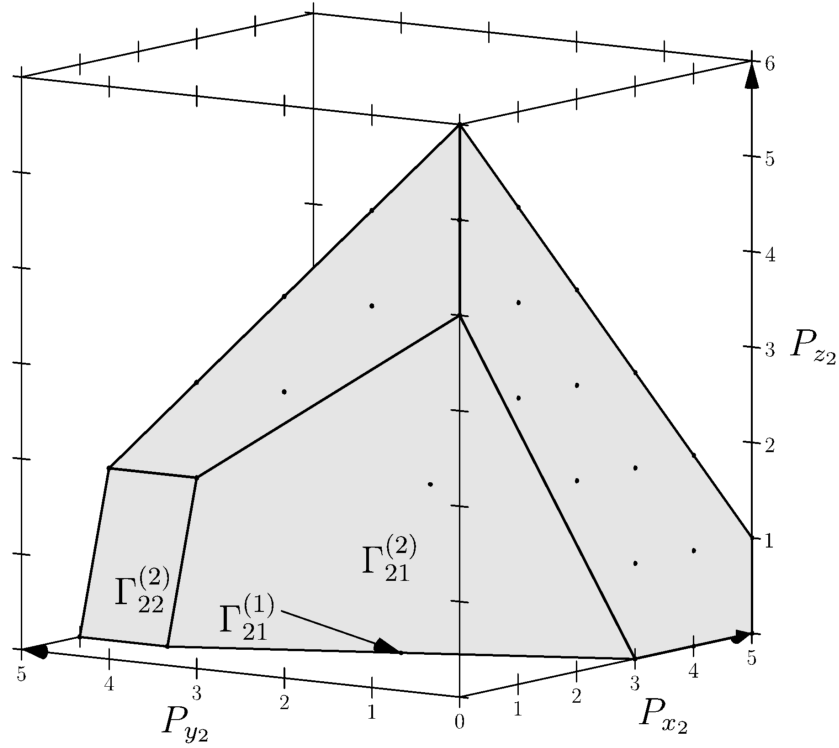


Рис. 5.9. Многогранник Ньютона для многочлена $g_2(\mathbf{Q}_2)$. Показаны грани с отрицательными внешними нормальными.

Из них только две $N_{21} = -(4, 2, 3)$ и $N_{22} = -(2, 0, 1)$ лежат в конусе задачи $\mathbf{K}_2$.

Согласно замечанию г) п. 4.3.3 грани $\Gamma_{22}^{(2)}$ соответствует «дыра» в многограннике, т. е. на ней процедура разложения заканчивается. Этой грани соответствует прямая $\mathcal{C}_1 = \{x_2 = z_2 = 0\}$, принадлежащая линейчатой поверхности $\tilde{\mathcal{G}}$. Грани $\Gamma_{22}^{(2)}$ соответствует многочлен $\hat{g}_{22}^{(2)} = -2y_2^3(y_2 - 2)(x_2y_2 + 8z_2^2)$. При малых y_2 он имеет кратный нуль $y_2 = 0$, который соответствует точке Q_0 . Нуль последнего множителя многочлена $\hat{g}_{22}^{(2)}$ соответствует части поверхности $\tilde{\mathcal{G}}$, примыкающей к прямой $\mathcal{C}_1$.

Другой отобранной грани $\Gamma_{21}^{(2)}$ соответствует укорочение

$$\hat{g}_{21}^{(2)} = 32z_2^2y_2^3 - 6912z_2^4 - 1152z_2^2y_2x_2 + 4x_2(4x_2 - y_2^2)^2. \quad (5.26)$$

Эта грань $\Gamma_{21}^{(2)}$ является четырёхугольником, а три её ребра содержат только по две точки носителя, и по замечанию в) п. 4.3.3 их не рассматриваем. Четвёртое ребро $\Gamma_{21}^{(1)}$ содержит три точки носителя, и соответствующий укорочен-

ный многочлен $\hat{g}_{21}^{(1)} = 4x_2(4x_2 - y_2^2)^2$ содержит квадратный множитель. Поэтому согласно общей процедуре здесь делаем замену $x_2 = x_3 + y_3^2/4$, $y_2 = y_3$, $z_2 = z_3$, получаем новый многочлен $g_3(\mathbf{Q}_3) \stackrel{\text{def}}{=} g_2(\mathbf{Q}_2)$ и новый конус задачи $\mathbf{K}_3 = \{\mathbf{s} = \mu_1 N_{21} + \mu_2 N_{25} + \lambda_1(-1, 0, 0)\}$, где $N_{25} = (0, 0, -1)$ – нормаль грани $\Gamma_{25}^{(2)}$, смежной с ребром $\Gamma_{21}^{(1)}$. Для многочлена $g_3(\mathbf{Q}_3)$ вновь вычисляем многогранник Ньютона (см. рис. 5.10), его внешние нормали N_{3j} и т. д.

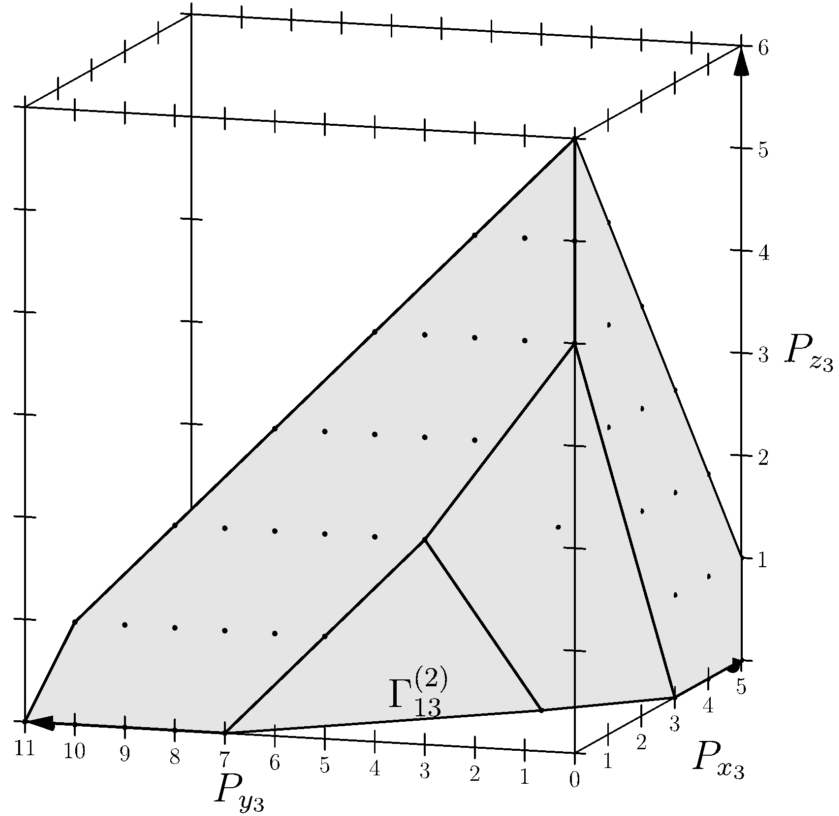


Рис. 5.10. Многогранник Ньютона для многочлена $g_3(\mathbf{Q}_3)$.

Такие вычисления продолжаются до бесконечности, но на каждом шаге мы имеем следующее:

- 1) имеется лишь одна подходящая грань с нормалью из конуса задачи;
- 2) эта грань представляет собой треугольник с неподвижным ребром и вершиной, лежащей на оси;
- 3) согласно замечанию д) п. 4.3.3 мы имеем «стабилизацию» разложения.

Обрывая процедуру на 5-м шаге, получим асимптотическое разложение семейства $\mathcal{P}_1$ вблизи Q_0 в виде $x = -2t^2 - 6t^3 - 13t^4/2 - 3t^5 - t^6/2$, $y = -4t - 2t^2$,

$z = -6t - 4t^2 - t^3 - t^4/4$. Это разложение типа 1 задачи 4.1.

Покажем, что укороченный многочлен (5.26) даёт в первом приближении разложение линейчатой поверхности $\tilde{\mathcal{G}}$ в окрестности точки Q_0 . Для этого выполним степенное преобразование

$$x_2 = \xi^{-1}\eta^{-2}\zeta^4, \quad y_2 = \xi^{-1}\eta^{-1}\zeta^2, \quad z_2 = \xi^{-1}\eta^{-1}\zeta^3, \quad (5.27)$$

задаваемое унимодулярной матрицей $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, которое после факторизации позволяет превратить многочлен (5.26) в многочлен от двух переменных $\hat{h}_{21}^{(2)}(\xi, \eta) = 1728\xi\eta^2 - 16\xi^2 + 288\xi\eta + 8\xi - 8\eta - 1$, нуль которого задаёт плоскую кривую рода 0 (см. рис. 5.11), допускающую бирациональную параметризацию $\xi = \Xi(w)$, $\eta = H(w)$.

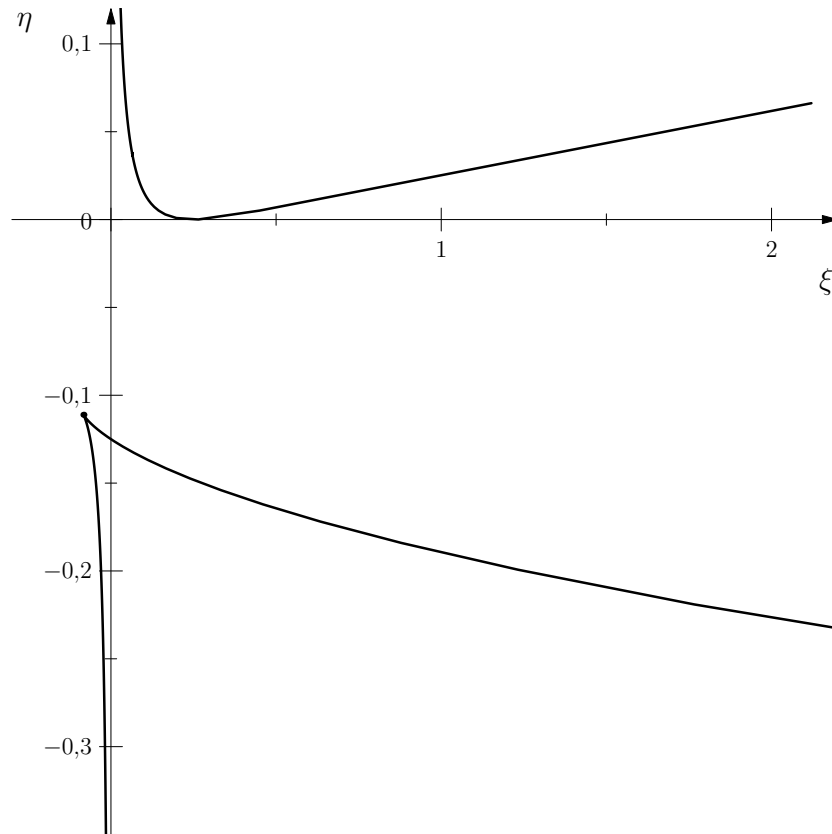


Рис. 5.11. Кривая $\hat{h}_{21}^{(2)}(\xi, \eta) = 0$, полученная с помощью степенного преобразования (5.27).

Эта параметризация определяет замену

$$\xi = \xi_1 + \frac{(28w + 3)(12w + 1)}{64(9w + 1)^2}, \quad \eta = \frac{(8w + 1)^2}{16(9w + 1)(12w + 1)}, \quad \zeta = \zeta_1, \quad (5.28)$$

как указано в п. 3, шаг 4, для случая $\rho = 0$. Для того, чтобы найти первый член разложения (4.37), выполним последовательно замены переменных (5.27) и (5.28) в полном многочлене $g_2(\mathbf{Q}_2)$, затем выделим в нем общий множитель, а оставшийся многочлен представим в виде многочлена от двух переменных ξ_1, ζ_1 с полиномиальными коэффициентами от w . Вычисляем для этого многочлена многоугольник Ньютона по ξ_1, η_1 и находим ребро с отрицательной внешней нормалью. Тогда начальный член в разложении (4.37) находится из решения укороченного многочлена, соответствующего выделенному ребру многоугольник Ньютона. В нашем случае он равен $\alpha_1(w) = -(10w + 1)(12w + 1)/[2(8w + 1)(9w + 1)]$, а тогда $\xi_1 = \alpha_1(w)\zeta_1 + o(\zeta_1)$. Собирая последовательно замены переменных, получим начальные члены разложения типа 3 задачи 4.1 линейчатой поверхности $\tilde{\mathcal{G}}$ в точке Q_0 : $x = 12\Omega(w)\zeta_1^3, y = 2\Omega(w)\zeta_1^2, z = 3\Omega(w)\zeta_1^2$, где $\Omega = 512(9w + 1)^3/[(28w + 3)(8w + 1)^2]$.

Особая точка $(-1/12, -1/9)$ кривой $\hat{h}_{21}^{(2)}(\xi, \eta) = 0$ соответствует однопараметрическому семейству $\mathcal{F}$ особых точек первого порядка.

Лемма 5.7. Вблизи особой точки Q_0 второго порядка найдены следующие объекты множества $\mathcal{G}$:

- 1) прямая $\mathcal{C}_1$ — образующая линейчатой поверхности $\tilde{\mathcal{G}}$;
- 2) разложения типа 1 семейств $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{F}$ особых точек первого порядка;
- 3) разложение типа 3 линейчатой поверхности $\tilde{\mathcal{G}}$.

Локальный анализ поверхности $\tilde{\mathcal{G}}$ вблизи бесконечности и вблизи особых точек второго порядка выполнен в работах [4, п. 3] и [3, п. 4].

Содержание раздела 5.2 опубликовано в [3; 145] кроме п. 5.2.1, соответствующего [10, п. 1], и п. 5.2.9, соответствующего [1].

Глава 6

Вычисление множества устойчивости по Ляпунову нелинейной многопараметрической системы

Для нелинейных гамильтоновых систем исследование устойчивости ПР по линейному приближению не может исчерпывающим образом решить проблему устойчивости. Вычисление множества устойчивости по линейной части системы является необходимым, но не достаточным шагом. Данная глава посвящена исследованию устойчивости по Ляпунову двухпараметрического семейства гироскопических задач. Вначале показано, как получить описание множества устойчивости в линейном приближении таких задач в виде, вычисленном в главе 5. Затем обсуждается метод исследования множества устойчивости по Ляпунову ПР многопараметрической нелинейной системы Гамильтона. С помощью этого метода вычисляется множество устойчивости по Ляпунову указанного выше семейства задач.

6.1. Множество устойчивости семейства гироскопических задач

При рассмотрении задачи 5.1 в разделе 5.2 могло сложиться впечатление, что особые свойства полухарактеристического многочлена $f(\mu)$ матрицы $\mathbf{JA}$ этой задачи, а именно то, что дискриминант многочлена $D(f)$ факторизуется с выделением множителя $g(\mathbf{Q})$, а двумерная компонента множества $\mathcal{G}$ является линейчатой поверхностью, связаны исключительно со специальным подбором параметров задачи. Однако это не так. Все указанные выше особенности, позволившие эффективно разрешить проблему устойчивости этой задачи, а также некоторые другие ее специфические свойства, сохраняются и для более широкого класса задач. Рассмотрим обобщение задачи 5.1, когда длины стержней и

диаметр массивного диска произвольны.

6.1.1. Постановка задачи

Задача 6.1. В условиях задачи 5.1 предполагается, что диаметр массивного диска $d = 4kl_2$, а длина нижнего стержня $l_1 = Kl_2$, где $k, K > 0$ (см. рис. 5.1). Надо вычислить множество устойчивости по Ляпунову этой системы.

Поскольку допущения п. 5.2.1 остаются прежними, то функция Лагранжа (5.8) линеаризованной системы не меняется, но матрица $\mathbf{A}$ гамильтоновой формы записи гироскопической системы (5.5) становится другой.

Матрицы, которые входят в выражение для матрицы $\mathbf{A}$ в (5.5), теперь имеют вид

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= \begin{pmatrix} \Delta(K^2) & \Delta(K) \\ \Delta(K) & \Delta(k^2 + 1) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \varkappa(2K^2) & \varkappa(2K) \\ \varkappa(2K) & \varkappa(2) \end{pmatrix}, \\ \mathbf{R} &= \frac{1}{\tilde{\Omega}^2} \begin{pmatrix} \Delta(c_1 + c_2 - K) & \Delta(-c_2) \\ \Delta(-c_2) & \Delta(c_2 - 1) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Delta(K^2) & \Delta(K) \\ \Delta(K) & \Delta(1 - k^2) \end{pmatrix}, \\ \Delta(\xi) &= \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi \end{pmatrix}, \quad \varkappa(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & -\xi \\ \xi & 0 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

а безразмерные параметры $c_1, c_2, \tilde{\Omega}$ выражаются через исходные параметры C_1, C_2, m, l, g следующим образом:

$$c_1 = \frac{C_1}{mgl}, \quad c_2 = \frac{C_2}{mgl}, \quad \tilde{\Omega} = \Omega\sqrt{l/g}.$$

Область физических значений параметров — это положительный ортант

$$\Phi = \{c_1 > 0, \quad c_2 > 0, \quad \tilde{\Omega} > 0, \quad k > 0, \quad K > 0\}.$$

Выполним следующую замену параметров:

$$p = \frac{c_1}{\tilde{\Omega}^2}, \quad q = \frac{c_2}{\tilde{\Omega}^2}, \quad r = \frac{2}{K\tilde{\Omega}^2},$$

которая приведёт к тому, что элементы матрицы $\mathbf{JA}$ в (5.2) станут линейными функциями от параметров p, q, r и рациональными от параметров k и K :

$$\mathbf{JA} = \begin{pmatrix} -\varkappa(1) & -\varkappa(1/K) & \Delta((k^2 + 1)/(k^2 K^2)) & -\Delta(1/(k^2 K)) \\ \Delta(0) & \Delta(0) & -\Delta(1/(k^2 K)) & \Delta(1/k^2) \\ \Delta(\gamma_1) & \Delta(Kq/2) & -\varkappa(1) & \Delta(0) \\ \Delta(Kq/2) & \Delta(\gamma_2) & -\varkappa(1/K) & \Delta(0) \end{pmatrix}, \quad (6.1)$$

где $\gamma_1 = K(Kr - p - q)/2$, $\gamma_2 = K(r - q)/2 - k^2$.

Таким образом, вектор параметров задачи есть $\mathbf{P} = (p, q, r, k, K)$. Физические значения параметров образуют область $\Phi : \mathbf{P} > 0$.

Как и для задачи 5.1 границей множества устойчивости служит поверхность $\mathcal{F}_2$ — двумерная компонента дискриминантного множества $\mathcal{D}(f)$. Однако, проведение вычислений этой поверхности как это было сделано в п.5.2 связано с серьёзными вычислительными трудностями в силу сложности самого выражения. В данном случае был применён другой приём, основанный на построении упрощающего преобразования. Это позволило свести исследование двупараметрического семейства гироскопических задач 6.1 к задаче 5.1.

6.1.2. Вычисление множества устойчивости

Дискриминант полухарактеристического многочлена (5.3) матрицы (6.1) имеет вид

$$D(f) = l(\mathbf{P})^4 g(\mathbf{P}) / (4k^{14} K^9),$$

где $l(\mathbf{P}) = -Kr + (K + 1)q + p$, а $g(\mathbf{P})$ есть многочлен 5-го порядка по переменным p и q , 6-го по r и 10-го по k и K . Здесь его выражение не приводится из-за его громоздкости (многочлен содержит 976 слагаемых), но может быть легко получено из (6.1) с помощью любой системы компьютерной алгебры.

Для того, чтобы упростить интерпретацию получаемых объектов, будем рассматривать полиномы в 3-х мерном пространстве Π' параметров $\mathbf{P}' = (p, q, r)$,

считая, что два оставшихся параметра k и K принимают фиксированные положительные значения.

Таким образом гиперповерхность $\mathcal{F}_2$ в пространстве Π' представляет собой объединение множеств $\mathcal{L}$ и $\mathcal{G}$, где

$$\mathcal{L} = \{\mathbf{P}' : l(\mathbf{P}') = 0\}, \quad \mathcal{G} = \{\mathbf{P}' : g(\mathbf{P}') = 0\}.$$

Множество $\mathcal{L}$ — плоскость в пространстве Π' играет важную роль в вычислении корней кратности 3 многочлена (5.3), но самостоятельного интереса не представляет, поскольку, как будет показано ниже, на $\mathcal{L}$ множество устойчивости $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$ лежит в множестве устойчивости $\mathcal{S}$.

В [3] показано, что структура множества $\mathcal{G}$ связана с условиями кратности корней полухарактеристического многочлена $f(\mu)$ следующим образом:

- 1) в особых точках 2-го порядка множества $\mathcal{G}$ многочлен $f(\mu)$ имеет либо нулевой корень кратности 3, либо один ненулевой корень кратности 4;
- 2) в особых точках 1-го порядка множества $\mathcal{G}$ многочлен $f(\mu)$ имеет либо корень кратности 3, либо пару двукратных корней;
- 3) в точках множества $\mathcal{G}$ многочлен $f(\mu)$ имеет по крайней мере один корень кратности не ниже 2.

Вычисление особых точек множества $\mathcal{G}$

Можно предложить несколько способов вычисления особых точек множества нулей многочлена $g(\mathbf{P})$.

I. *Метод параметрического базиса Грёбнера [154]*. Метод заключается в том, что если для полного набора переменных не удаётся построить базис Грёбнера полиномиального идеала, то одной или несколькими переменным присваиваются фиксированные значения и для меньшего набора переменных проводятся вычисления. В случае успеха эти вычисления повторяются, но для других фиксированных значений, а затем при достаточном числе узлов восстанавливается

базис Грёбнера для полного набора переменных. Метод был опробован для решения задачи 6.1, но его использование оказалось очень трудоёмким.

II. *Методы степенной геометрии* [27]. Алгоритмы степенной геометрии позволяют, в частности, получить разложения для частей границы множества устойчивости $\partial\mathcal{S}$ в виде бесконечного ряда корней многочлена от нескольких переменных, как вблизи неособой, так и вблизи особой точек. В п. 5.2.9 для задачи 5.1 было получено точное разложение однопараметрических семейств особых точек 1-го порядка множества нулей многочлена $g(\mathbf{P})$, на которых расположены и особые точки 2-го порядка. Аналогичное разложение может быть получено и для более общей задачи 6.1, что позволяет провести упрощение алгебраических объектов и, в итоге, решить задачу.

III. *Методы теории исключений* [122; 127]. Особые точки множества $\partial\mathcal{S}$ оказались тесно связанными с кратностью корней характеристического многочлена матрицы $\mathbf{JA}(\mathbf{P})$. Условия кратности корней многочлена формулируются в терминах его субдискриминантов, которые в свою очередь выражаются через инноры матрицы Сильвестра самого многочлена и его первой производной (см. п. 4.1.1). Далее был использован именно этот способ.

Все дальнейшие вычисления в работе выполнялись в СКА Maple, но при этом использовались лишь стандартные средства системы для работы с многочленами нескольких переменных: группировка слагаемых, разложение на множители, вычисление результата. Поэтому все шаги решения могут быть проделаны с помощью любой системы компьютерной алгебры.

Итак, имеется многочлен четвертой степени

$$f(\mu) = \mu^4 + f_3\mu^3 + f_2\mu^2 + f_1\mu + f_0, \quad (6.2)$$

а его субдискриминанты суть инноры соответствующих порядков его матрицы

Сильвестра (4.3). Они имеют следующий вид

$$\begin{aligned}
D(f) &= -27f_3^4f_0^2 + 18f_3^3f_2f_1f_0 - 4f_3^3f_1^3 - 4f_3^2f_2^3f_0 + f_3^2f_2^2f_1^2 + \\
&\quad + 144f_3^2f_2f_0^2 - 6f_3^2f_1^2f_0 - 80f_3f_2^2f_1f_0 + 18f_3f_2f_1^3 + 16f_2^4f_0 - \\
&\quad - 4f_2^3f_1^2 - 192f_3f_1f_0^2 - 128f_2^2f_0^2 + 144f_2f_1^2f_0 - 27f_1^4 + 256f_0^3, \\
D^{(1)}(f) &= -6f_3^3f_1 + 2f_3^2f_2^2 - 12f_3^2f_0 + 28f_3f_2f_1 - 8f_2^3 + 32f_2f_0 - 36f_1^2, \\
D^{(2)}(f) &= 3f_3^2 - 8f_2.
\end{aligned}$$

Для многочлена (6.2) можно явно выписать условия на его коэффициенты, при которых он будет иметь либо единственный корень кратности 4, либо пару корней кратности 3 и 1, либо пару двукратных корней в терминах корней наибольшего общего делителя $\tilde{f} \stackrel{\text{def}}{=} \gcd(f(x), f'(x))$. Приведём эти условия здесь, поскольку они используются в дальнейших вычислениях.

Согласно утверждению 4.6 корень кратности 4 многочлена $f(\mu)$ обеспечивается условиями $D^{(0)}(f) = D^{(1)}(f) = D^{(2)}(f) = 0$, которые в коэффициентах многочлена $f(\mu)$ записываются в виде системы

$$f_3^4 - 256f_0 = 0, \quad f_3^3 - 16f_1 = 0, \quad 3f_3^2 - 8f_2 = 0, \quad (6.3)$$

а корень кратности 4 равен $\mu_{1,2,3,4} = -f_3/4$.

Пусть нулевой и первый субдискриминанты равны нулю $D^{(0)}(f) = D^{(1)}(f) = 0$, тогда многочлен $\tilde{f}$ есть квадратный трёхчлен вида

$$H(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} D^{(2)}(f)\mu^2 + 2(f_3f_2 - 6f_1)\mu + f_3f_1 - 16f_0. \quad (6.4)$$

Если дискриминант квадратного трёхчлена (6.4) не равен нулю, тогда многочлен $H(\mu)$ имеет два различных корня, а многочлен $f(\mu)$ имеет соответственно пару корней кратности 2. В этом случае коэффициенты многочлена $f(\mu)$ удовлетворяют системе

$$f_3^3 - 8f_3^2f_2 + 16f_2^2 - 64f_0 = 0, \quad f_3^3 - 4f_3f_2 + 8f_1 = 0,$$

а пара двукратных корней есть

$$\mu_{1,2} = - \left(f_3 + \sqrt{D^{(2)}(f)} \right) / 4, \quad \mu_{3,4} = - \left(f_3 - \sqrt{D^{(2)}(f)} \right) / 4. \quad (6.5)$$

Если $D(H) = 0$, тогда многочлен $H(\mu)$ имеет один корень кратности 2, а многочлен $f(\mu)$ имеет соответственно корни кратности 3 и 1. В этом случае коэффициенты многочлена $f(\mu)$ удовлетворяют системе

$$3f_3f_1 - f_2^2 - 12f_0 = 0, \quad 27 [8f_1 - f_3 (-f_3^2 + 4f_2)]^2 + D^{(2)}(f)^3 = 0,$$

а корни суть

$$\mu_{1,2,3} = -f_3/4 + \sqrt{3D^{(2)}(f)^3}/12, \quad \mu_4 = -f_3/4 - \sqrt{3D^{(2)}(f)^3}/12. \quad (6.6)$$

Напомним, что условие $D^{(k)}(f) \geq 0$, $k = 0, 1, 2$, гарантирует вещественность, а при дополнительных условиях $f_i \geq 0$, $i = 0, 1, 2, 3$ и неположительность корней многочлена $f(\mu)$. При условии $D^{(2)}(f) = 0$ корни с различной кратностью в (6.5) и (6.6) становятся корнем кратности 4.

Наконец, если лишь $D(f) = 0$, то корень кратности 2 находится по формуле

$$\mu_{1,2} = -\det M_1^{(1)} / D^{(1)}(f),$$

где

$$\det M_1^{(1)} = -9f_3^3f_0 + f_3^2f_2f_0 + 32f_3f_2f_0 + 3f_3f_1^2 - 4f_2^2f_1 - 48f_1f_0.$$

Два других корня многочлена $f(\mu)$ удовлетворяют уравнению

$$\mu^2 + (f_3 + 2\mu_{1,2})\mu + f_2 + 2f_3\mu_{1,2} + 3\mu_{1,2}^2 = 0.$$

Начнём с определения параметров, при которых многочлен $f(\mu)$ имеет нулевой корень кратности 3. Свободный член f_0 полинома (5.3) равен определителю матрицы (6.1) и, в силу теоремы 5.2, является полным квадратом величины

$$f_{00} = \frac{K}{4} \left(-K^2r^2 + K(K+1)rq + Krp - Kqp - 2K(K-k^2+1)r + \right. \\ \left. + 2((K+1)^2 - k^2)q - 2(k^2 - 1)p + 4Kk^2 \right).$$

При фиксированных значениях параметров k и K уравнение $f_{00}(\mathbf{P}') = 0$ задаёт конус в пространстве параметров $\mathbf{P}'$ с центром в точке

$$P_0 : [p = 2k^2, q = -2, r = -2(K - k^2 + 1)/K] .$$

Подставляя P_0 в многочлен $f(\mu)$ получаем корни $\mu_{1,2,3} = 0, \mu_4 = -4$.

Точку P_0 можно найти и другим способом, используя тот факт, что в ней полухарактеристический многочлен $f(\mu)$ имеет нулевой корень кратности 3. Тогда координаты точки P_0 являются решением системы

$$f_2(P_0) = f_1(P_0) = f_{00}(P_0) = 0.$$

Эту систему можно решить либо с использованием базиса Грёбнера, либо методом теории исключений. В последнем случае достаточно вычислить многочлен от одной переменной

$$H(r) = \mathcal{R}_q(\mathcal{R}_p(f_2, f_{00}), \mathcal{R}_p(f_1, f_{00})) , \quad (6.7)$$

где $\mathcal{R}_x(g, h)$ — результат многочленов g и h по переменной x . Решая уравнение $H(r) = 0$ находим координату r точки P_0 , а затем последовательно подставляя ее в результаты из (6.7), вычисляем и другие координаты.

Корень кратности 4 многочлен $f(\mu)$ имеет в особых точках 2-го порядка, а коэффициенты многочлена удовлетворяют в этом случае системе (6.3). Эта система имеет следующие корни:

$$\begin{aligned} P_1 : [p = 0, q = 0, r = 0] , \\ P_2 : \left[p = \frac{k}{2}(5k + K + 1), q = k + \frac{1}{2}, r = \frac{5k^2 + 2Kk + 4k + K + 1}{2K} \right] , \\ P_3 : \left[p = \frac{k}{2}(5k - K - 1), q = -k + \frac{1}{2}, r = \frac{5k^2 - 2Kk - 4k + K + 1}{2K} \right] . \end{aligned}$$

В точке P_1 многочлен $f(\mu)$ имеет четырёхкратный корень $\mu_{1,2,3,4} = -1$, а в точках $P_{2,3}$ — четырёхкратный корень $\mu_{1,2,3,4} = -1/4$.

Отметим, что в точках $P_i, i = 0, \dots, 3$ собственные числа матрицы JA не зависят от параметров k и K .

Для построения упрощающего преобразования в [3] были использованы ещё две особые точки — вершины двух параболических сегментов, каждый из которых есть часть однопараметрического семейства точек первого порядка.

Первый сегмент принадлежит семейству $\mathcal{P}_1$, который лежит в плоскости $\mathcal{L}$ и проходит через точки P_0 и P_1 . На $\mathcal{P}_1$ многочлен $f(\mu)$ имеет корень кратности 3. Параметрическое представление семейства $\mathcal{P}_1$ задаётся формулами

$$\mathcal{P}_1 : \begin{cases} p = -k^2(t^2 + 2t - 3)/2, \\ q = -(t - 1)^2/2, \\ r = -\frac{(K + k^2 + 1)t^2 - 2(k^2 - K + 1)t + K - 3k^2 + 1}{2K}. \end{cases}$$

Вершина этой параболы есть точка при $t = 0$

$$P_4 : [p = 3k^2/2, \quad q = -1/2, \quad r = -(K - 3k^2 + 1)/(2K)].$$

Вдоль семейства $\mathcal{P}_1$ корни многочлена $f(\mu)$ равны $\mu_{1,2,3} = -(t + 1)^2/4$, $\mu_4 = -(t - 3)^2/4$.

Второй сегмент принадлежит семейству $\mathcal{P}_2$, который проходит через точки P_2 и P_3 . Оно вычисляется при решении системы (6.3) и имеет параметрическое представление

$$\mathcal{P}_2 : \begin{cases} p = k^2v^2/2 + k(K + 1)v + 2k^2, \\ q = v^2/2 + kv, \\ r = -((K + k^2 + 1)v^2 + 2k(K + 2k)v + 4k^2)/(2K). \end{cases}$$

Вершина этой параболы есть точка при $v = 0$

$$P_5 : [p = 2k^2, \quad q = 0, \quad r = 2k^2/K].$$

Вдоль семейства $\mathcal{P}_2$ корни многочлена $f(\mu)$ равны $\mu_{1,2(3,4)} = (v^2 - 2)/4 \pm \sqrt{1 - v^2}/2$.

Упрощающее преобразование

Шесть найденных особых точек P_i , $i = 0, \dots, 5$ позволяют определить преобразование пространства параметров Π' , упрощающее многочлен $f(\mu)$. Идея такой замены была высказана ещё в [3, п. 3.7], но была реализована лишь частично. Эта замена переводит плоскости $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$, в которых лежат семейства $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ соответственно, в координатные плоскости, а точку, лежащую на середине отрезка P_4P_5 , переводит в начало координат новой системы. Такое преобразование имеет вид

$$\mathbf{Q} = B\mathbf{P}' + \overrightarrow{P_4P_5}/2, \quad (6.8)$$

где B — матрица, столбцы которой суть векторы $\overrightarrow{P_0P_1}/2$, $\overrightarrow{P_2P_3}/2$ и $\overrightarrow{P_4P_5}/2$:

$$B = \begin{pmatrix} k^2 & k(K+1) & k^2/4 \\ -1 & k & 1/4 \\ \frac{k^2 - K - 1}{K} & \frac{k(K+2)}{K} & \frac{k^2 + K + 1}{4K} \end{pmatrix},$$

а $\mathbf{Q} = (U, V, W)$ — вектор новых параметров. Тогда в новых переменных коэффициенты многочлена $f(\mu)$ существенно упрощаются:

$$f_3 = (5 - W)/2,$$

$$f_2 = -U^2/2 - V^2/2 + 3W^2/32 - 3U - 7W/16 + 43/32,$$

$$f_1 = U^2W/8 + V^2W/8 - W^3/128 + 11U^2/8 + UW/4 + \\ + 3V^2/8 - W^2/128 - 5U/4 - 27W/128 + 29/128,$$

$$f_{00} = -U^2/4 + V^2/4 - W^2/64 - U/2 - 3W/32 + 7/64, \quad f_0 = f_{00}^2.$$

Дискриминант $D(f)$ зависит лишь от параметров (U, V, W) а множитель $g(\mathbf{Q})$ имеет вид

$$g(\mathbf{Q}) = 64U^6 + 192U^4V^2 - 4U^4W^2 + 192U^2V^4 - 8U^2V^2W^2 + \\ + 64V^6 - 4V^4W^2 + 72U^4W - 4U^2W^3 - 72V^4W + 4V^2W^3 + \\ + 60U^4 - 312U^2V^2 + 20U^2W^2 + 60V^4 + 20V^2W^2 - W^4 + \\ + 36U^2W - 36V^2W + 12U^2 + 12V^2 + 2W^2 - 1.$$

Отметим, что в новых переменных многочлен $g(\mathbf{Q})$ содержит переменные U и V только в чётных степенях, следовательно он инвариантен при замене знаков у переменных U и V . Более того, если переменные U и V поменять местами, а знак переменной W заменить на противоположный, то многочлен $g(\mathbf{Q})$ не изменится. Следовательно, достаточно исследовать нули многочлена $g(\mathbf{Q})$ в одном октанте, например, для $\mathbf{Q} \geq 0$.

Поскольку упрощающее преобразование (6.8) линейное невырожденное, то топологическая структура особых точек гиперповерхности F_2 остаётся неизменной, а независимость полухарактеристического многочлена $f(\mu)$ после преобразования (6.8) от параметров k и K позволяет утверждать, что все результаты, полученные в новых параметрах $\mathbf{Q}$ верны и для любых значений параметров $k > 0$, $K > 0$.

Множество $\mathcal{G}$ состоит из двумерной компоненты $\tilde{\mathcal{G}}$ и четырёх одномерных компонент. Компонента $\tilde{\mathcal{G}}$ является линейчатой поверхностью с параметризацией

$$U = u \sin \varphi, \quad V = (u + 1) \cos \varphi, \quad W = 4u + 2 \cos^2 \varphi + 1. \quad (6.9)$$

Образующие линейчатой поверхности $\tilde{\mathcal{G}}$ пересекаются с семействами $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ только в точках параболических сегментов, заключённых между P_0 и P_1 для семейства $\mathcal{P}_1$ и между P_2 и P_3 для семейства $\mathcal{P}_2$. Будем обозначать эти сегменты $\mathcal{P}_1^0$ и $\mathcal{P}_2^0$, соответственно, а их параметрическое представление задаётся формулами

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1^0 : [V = 0, \quad W = -2U^2 - 1], \quad -1 \leq U \leq 1, \\ \mathcal{P}_2^0 : [U = 0, \quad W = 2V^2 + 1]. \quad -1 \leq V \leq 1. \end{aligned}$$

Семейство образующих имеет огибающую

$$\mathcal{F} : U = -\sin^3 \varphi, \quad V = \cos^3 \varphi, \quad W = 3 \cos 2\varphi.$$

При изменении параметра φ образующие поверхности $\tilde{\mathcal{G}}$ движутся вдоль параболических сегментов $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$, проходя последовательно через точки P_i ,

$i = 0, \dots, 5$. С учётом параметризации (6.9) корни полухарактеристического многочлена $f(\mu)$ на поверхности $\tilde{\mathcal{G}}$ равны

$$\mu_{1,2} = -(1 + \sin \varphi)^2/4, \quad \mu_{3,4} = u \pm (1 - \sin \varphi)\sqrt{-u} - \cos^2 \varphi/4.$$

Из выражения для $\mu_{3,4}$ следует, что эта пара корней вещественна и отрицательна при $u \leq 0$.

Поверхность $\tilde{\mathcal{G}}$ можно представить себе в виде однополостного гиперболоида с двумя склейками. Одна склейка выполнена вдоль параболического сегмента $\mathcal{P}_1^0$ и расположена на уровне $u = -1$, другая — вдоль параболического сегмента $\mathcal{P}_2^0$ и расположена на уровне $u = 0$. Склейки повернуты на 90° относительно друг друга. На рис. 6.1 показана линейчатая поверхность $\tilde{\mathcal{G}}$ вместе с семействами особых точек $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ (сплошная линия) и $\mathcal{F}$ (пунктирная линия). Отмечены также особые точки $P_i, i = 0, \dots, 5$.

Линейчатая поверхность $\tilde{\mathcal{G}}$ делит пространство параметров $\mathbf{Q}$ на четыре области $\mathcal{S}_i, i = 0, 1, 2, 3$, в каждой из которых полухарактеристический многочлен $f(\mu)$ имеет набор корней определённой структуры. Для выяснения, принадлежит ли область множеству устойчивости $\mathcal{S}$, достаточно выбрать одну внутреннюю точку области и вычислить корни многочлена $f(\mu)$ в ней. В областях $\mathcal{S}_i, i = 1, 2, 3$ многочлен $g(\mathbf{Q}) \geq 0$, а в области $\mathcal{S}_0$ многочлен $g(\mathbf{Q}) < 0$.

Область $\mathcal{S}_1$ выделяется поверхностью $\tilde{\mathcal{G}}$ при значении $u > 0$ и содержит две ветви параболы $\mathcal{P}_2$. В точках S_1 многочлен $f(\mu)$ имеет две пары комплексных корней, следовательно, эта область не входит в множество устойчивости $\mathcal{S}$.

Область $\mathcal{S}_2$ — криволинейный тетраэдр, натянутый на сегменты $\mathcal{P}_1^0, \mathcal{P}_2^0$ и кривую $\mathcal{F}$. Его поверхность соответствует значениям параметра $-1 < u < 0$. В точках области $\mathcal{S}_2$ многочлен $f(\mu)$ имеет вещественные корни.

Область $\mathcal{S}_3$ выделяется поверхностью $\tilde{\mathcal{G}}$ при значении $u < -1$ и содержит две ветви параболы $\mathcal{P}_1$. В точках области $\mathcal{S}_3$ многочлен $f(\mu)$ имеет вещественные корни.

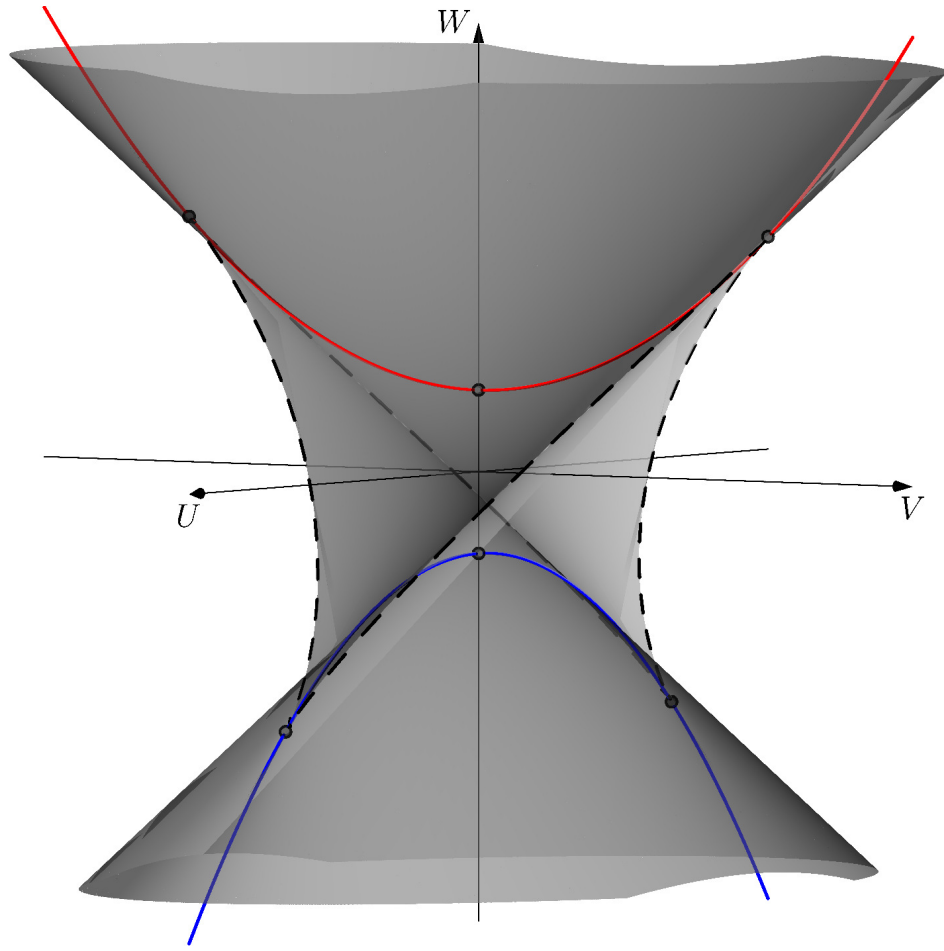


Рис. 6.1. Поверхность $\tilde{\mathcal{G}}$ с семействами $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{F}$ и особыми точками P_i , $i = 0, \dots, 5$.

Область $\mathcal{S}_0 = \Pi' \setminus (\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3 \cup \tilde{\mathcal{G}})$ — дополнение пространства параметров Π' . В точках области $\mathcal{S}_0$ многочлен $f(\mu)$ имеет пару вещественных и пару комплексных корней, следовательно, эта область не входит в множество устойчивости $\mathcal{S}$.

Непосредственная проверка показывает, что для всех точек областей $\mathcal{S}_2$ и $\mathcal{S}_3$ выполнены условия леммы 5.1, следовательно, в этих точках многочлен $f(\mu)$ имеет неположительные корни.

Проверка простоты элементарных делителей в точках гиперповерхностей $\mathcal{F}_0$ (для случая нулевых корней) и $\mathcal{F}_2$ (для случая кратных корней) даёт

Лемма 6.1. Матрица JA на гиперповерхности $\mathcal{F}_0$ имеет простые элементарные делители всюду кроме прямой $\mathcal{C}_1$, которая есть прямая касания гиперпо-

верхностей $\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}_2$. На границе множества устойчивости $\mathcal{S}$, задаваемой частью гиперповерхности $\tilde{\mathcal{G}}$, элементарные делители матрицы $\mathbf{JA}$ непростые всюду кроме сегмента $\mathcal{P}_1^0$.

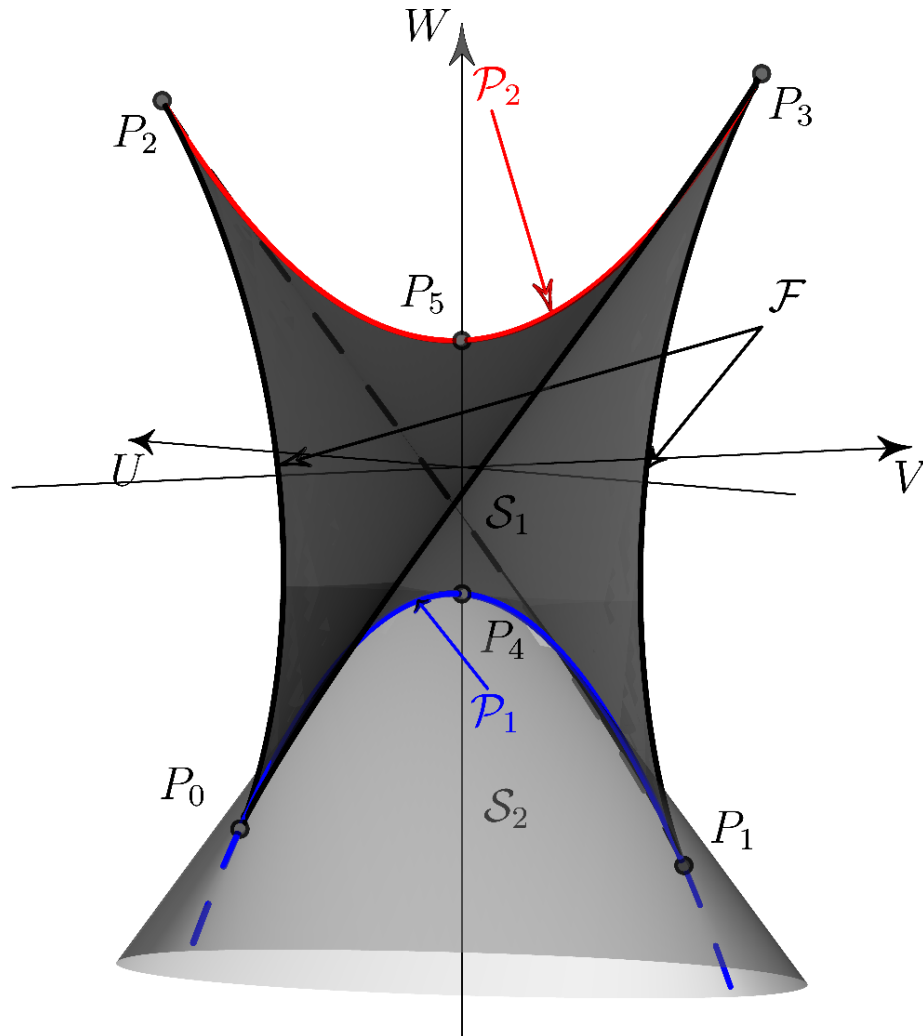


Рис. 6.2. Множество устойчивости в переменных (U, V, W) . Показаны особые точки $P_i, i = 0, \dots, 5$ и семейства $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{F}$.

Теперь можно сформулировать итоговую теорему, позволяющую конструктивно описать множество устойчивости задачи.

Теорема 6.1. *Множество устойчивости задачи есть $\mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3 \cup \mathcal{P}_1^0$, при этом множество $\mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3$ задаётся системой неравенств*

$$g(\mathbf{Q}) > 0, \quad D^{(1)}(f) > 0, \quad D^{(2)}(f) > 0$$

и показано на рис. 6.2.

Для физических значений параметров множество устойчивости всегда состоит:

- из части $\mathcal{S}_1$ в виде трехгранного клина, образованного участками сегмента $\mathcal{P}_2$ и огибающей $\mathcal{F}$,
- массивной подобласти части $\mathcal{S}_2$.

Вершина трехгранного клина — особая точка P_2 задаёт наименьшее значение угловой скорости Ω вращения ротора, при котором имеется устойчивость.

Содержание раздела 6.1 опубликовано в [10; 155].

6.2. Исследование устойчивости по Ляпунову в нелинейной системе

Пусть задана нелинейная система Гамильтона с m степенями свободы, функция $H(\mathbf{z}, \mathbf{P})$ которой полиномиально зависит от m -мерного вектора параметров $\mathbf{P} = (p_1, \dots, p_n) \in \Pi \subset \mathbb{R}^m$ и представлена в виде

$$H(\mathbf{z}, \mathbf{P}) = H_2(\mathbf{z}, \mathbf{P}) + \varepsilon R(\mathbf{z}, \mathbf{P}), \quad \mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})^\top, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n,$$

где $H_2(\mathbf{z}, \mathbf{P})$ — квадратичная форма по $\mathbf{z}$, определяемая симметричной матрицей $\mathbf{A}(\mathbf{P})$, т. е. $H_2(\mathbf{z}, \mathbf{P}) = \mathbf{z}^\top \mathbf{A}(\mathbf{P}) \mathbf{z}$, $\varepsilon R(\mathbf{z}, \mathbf{P})$ — возмущающая функция, аналитическая в окрестности начала координат и разлагающаяся в ряд по $\mathbf{z}$ с младшим членом степени не ниже трёх.

Исследуются условия, когда устойчивость по первому приближению положения равновесия $\mathbf{z} = 0$ системы канонических уравнений

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{J} \partial H / \partial \mathbf{z} \tag{6.10}$$

сохраняется при малых возмущениях $\varepsilon R(\mathbf{z}, \mathbf{P})$.

Пусть для Π $\mathbf{z} = 0$ вычислено множество устойчивости $\mathcal{S}$ в пространстве параметров Π линейной системы (6.10). Малое нелинейное возмущение

$\varepsilon R(\mathbf{z}, \mathbf{P})$ при определённых условиях способно его разрушить в определённых областях множества устойчивости или привести к появлению устойчивости в тех точках, где имеется резонанс порядка два между теми собственными числами матрицы $\mathbf{JA}(\mathbf{P})$, вещественная часть которых равна нулю. В случае резонанса (рациональной соизмеримости собственных чисел матрицы $\mathbf{JA}(\mathbf{P})$) анализ устойчивости обычно проводится с помощью нормализации функции Гамильтона. Хотя процедуры нормализации хорошо разработаны, они являются довольно трудоёмкими, особенно для систем с большим числом параметров. Интерес представляет выделение таких областей множества $\mathcal{S}$, для которых устойчивость сохраняется и при наличии малого возмущения.

Пусть для линейной системы Гамильтона (5.2) вычислено множество устойчивости $\mathcal{S}$. Тогда для каждого значения $\mathbf{P} \in \mathcal{S}$ матрица $\mathbf{JA}(\mathbf{P})$ удовлетворяет условиям теоремы 5.1 и, следовательно, ее собственные числа чисто мнимые $\lambda_j = -\lambda_{j+n} = i\omega_j$, $\omega_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$, а элементарные делители просты. В этом случае существует линейное каноническое преобразование [22, Гл. I], приводящее гамильтониан $H_2(\mathbf{z})$ к нормальной форме с набором инвариантов $\sigma_i(\mathbf{P})$, $i = 1, \dots, n$,

$$\tilde{H}_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \tilde{\lambda}_i(\mathbf{P}) (x_i^2 + y_i^2), \quad \tilde{\lambda}_i(\mathbf{P}) = \sigma_i(\mathbf{P})\omega_i(\mathbf{P}), \quad \sigma_i(\mathbf{P}) = \pm 1. \quad (6.11)$$

Обозначим через $\tilde{\Lambda}(\mathbf{P})$ вектор размерности n , составленный из коэффициентов $\tilde{\lambda}_i(\mathbf{P})$, $i = 1, \dots, n$, нормальной формы (6.11).

Если нормальная форма (6.11) в некоторой области $W_j \subset \mathcal{S}$ знакоопределенная, т. е. все инварианты $\sigma_i(\mathbf{P})$ одного знака, то согласно теореме Дирихле [156, § 29] малые возмущения не нарушают устойчивость положения равновесия, при этом граница этой области ∂W_j сохранится. Отметим, что теорема Дирихле (называемая иногда теоремой Лагранжа-Дирихле) есть частный случай теоремы Ляпунова об устойчивости (см. [143, гл. II, § 9]).

Знакоопределённость квадратичной формы $H_2(\mathbf{z})$ можно установить, не приводя её к нормальной форме. Для этого достаточно вычислить её сигнатуру

ру [90, гл. X].

Определение 6.1. Сигнатура $\mathfrak{s}$ квадратичной формы (6.11) есть разность между числом π положительных и числом ν отрицательных квадратов: $\mathfrak{s} = \pi - \nu$ в ее канонической форме.

Для определения сигнатуры квадратичной формы можно воспользоваться теоремой

Утверждение 6.1 (Якоби [90, гл. X, § 3]). *Если для квадратичной формы $H_2(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^\top \mathbf{A} \mathbf{z}$ ранга r главные миноры D_k , $k = 1, \dots, r$ матрицы $\mathbf{A}$ отличны от нуля, то число π есть число постоянств знака, а число ν — число перемен знака в последовательности $[1, D_1, D_2, \dots, D_r]$. Тогда сигнатура $s = \pi - \nu = r - 2\nu$.*

Правило теоремы Якоби обобщается для случая, когда последовательность главных миноров не содержит более двух идущих подряд нулей, причём последний элемент последовательности ненулевой. В том случае, если последовательность главных миноров имеет подряд три и более нулей, то для определения знакопостоянства квадратичной формы $H_2(\mathbf{z})$ ее следует нормализовать к виду (6.11).

Очевидно, что квадратичная форма знакоопределена, если ее сигнатура равна $\pm 2m$. Для гамильтоновой нормальной формы (6.11) сигнатура $\mathfrak{s}$ может быть только чётным числом вида $2n - 4k$, $k = 0, \dots, n$, а число различных с точностью до смены знака наборов инвариантов $\sigma_i(\mathbf{P})$ равно $[n/2] + 1$, где $[x]$ — целая часть числа x . Следовательно, для гамильтоновой системы с одной степенью свободы имеется один набор инвариантов, с двумя и тремя степенями свободы — два набора, с четырьмя и пятью степенями свободы — три и т. д.

При исследовании устойчивости при наличии резонанса порядка 2 между собственными числами λ_i необходимо выполнить процедуру нормализации функции Гамильтона $H_2(\mathbf{z}, \mathbf{P})$, используя разработанные алгоритмы (их обзор см., например, в [22, гл. I, § 6]).

Для случая, когда выполнены условия устойчивости, можно ограничиться только вычислением инвариантов σ_i соответствующих резонансных частот, не выполняя полной нормализации гамильтониана. Отметим, что выполнение условий теоремы 5.1 гарантирует, что собственные векторы матрицы $\mathbf{JA}(\mathbf{P})$ образуют базис в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$, поскольку простота элементарных делителей этой матрицы равносильна тому, что для каждого ее собственного числа λ_i его алгебраическая и геометрическая кратности равны. Это позволяет снять ограничение на отсутствие кратных корней и применить алгоритмы нормализации, описанные в [86, гл. 2, § 2], [157, гл. I, § 2], [158; 159]. Отметим, что алгоритм нормализации для случая чисто мнимых кратных корней без ограничений на простоту элементарных делителей предложен в [160], однако, по мнению автора, он является слишком трудоёмким для применения в рассматриваемом случае.

Пусть λ_i чисто мнимое собственное число кратности k матрицы $\mathbf{JA}$. Обозначим через $e_i^{(j)} = r_i^{(j)} + i s_i^{(j)}$, $j = 1, \dots, k$, собственные векторы матрицы $\mathbf{JA}$, соответствующие λ_i . Здесь i — мнимая единица. Эти векторы легко вычислить, приведя с помощью метода Гаусса матрицу $\mathbf{JA} - \lambda_i \mathbf{E}$ к верхнетреугольному виду, а затем, выбрав k свободных переменных и последовательно полагая их равными единице, решить полученную систему относительно оставшихся $2n - k$ переменных. Тогда согласно формуле (2.16) в [157, гл. I, § 2] $\sigma_i^{(j)} = \text{sign} \left(\left\langle r_i^{(j)}, \mathbf{J} s_i^{(j)} \right\rangle \right)$, $j = 1, \dots, k$.

Будем считать, что резонансные множества $\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}_2$ вычислены и найдено множество устойчивости $\mathcal{S}$. Для выделения областей множества устойчивости $\mathcal{S}$, устойчивость по Ляпунову которых сохранится и при малом нелинейном возмущении.

Поскольку изменение сигнатуры квадратичной формы $H_2(\mathbf{z})$ может происходить только при переходе через гиперповерхность $\mathcal{F}_0$, то пространство параметров Π делится гиперповерхностью $\mathcal{F}_0$ на области W_j с постоянной сигнатурой. Определяем области $\mathcal{S}_j = \mathcal{S} \cap W_j$. В каждой области $\mathcal{S}_j$ выбираем некоторую точку и вычисляем в ней сигнатуру $\mathfrak{s}$ нормальной формы. Если $\mathfrak{s} = \pm 2m$,

то область $\mathcal{S}_j$ помечается как устойчивая при нелинейных возмущениях.

6.2.1. Вычисление областей устойчивости класса гироскопических задач

Для задачи 6.1 поверхность $\mathcal{F}_0$ задаётся в переменных U, V, W уравнением

$$f_{00} \stackrel{\text{def}}{=} (U - 1)^2 + V^2 - \frac{1}{16}(W + 3)^2 = 0,$$

которая представляет собой прямой круговой конус с вершиной в т. $Q_0(1, 0, -3)$ и осью, параллельной оси OW .

Поверхность $\mathcal{F}_0$ делит подпространство Π' на три области $\mathcal{W}_j$, $j = 1, 2, 3$, в каждой из которой нормальная форма (6.11) имеет свою сигнатуру. Обозначим через $\mathcal{W}_1$ внутренность верхнего конуса, через $\mathcal{W}_2$ — внутренность нижнего конуса и, наконец, через $\mathcal{W}_3$ — внешнюю область. Для вычисления сигнатуры достаточно выбрать по одной точке в каждой из областей $\mathcal{W}_j$ и применить теорему 6.1.

В области $\mathcal{W}_1$ выберем точку $(1, 0, -2)$, тогда последовательность из 8-ми главных миноров матрицы $\mathbf{A}$ имеет вид:

$$1, \frac{7}{8K^2}, \left(\frac{7}{8K^2}\right)^2, -\frac{49k^2}{2^9K^4}, \left(\frac{7k^2}{64K^2}\right)^2, -\frac{7k^2(k^2 - 7)}{2^{12}K^2}, \left(\frac{k^2 - 7}{64}\right)^2, \frac{k^2 - 7}{2^{12}}, \frac{1}{2^{12}}.$$

В этой последовательности при $k^2 > 7$ имеется четыре перемены знака. Если $k^2 < 7$, то число перемен знака остаётся таким же, но эти перемены происходят между другими членами последовательности. При $k^2 = 7$ последовательность содержит три подряд идущих нуля и, следовательно, метод вычисления сигнатуры неприменим, но поскольку при переходе через это значение сигнатура не меняется, то при всех значениях параметра k сигнатура $\mathfrak{s} = 0$.

В области $\mathcal{W}_2$ выберем точку $(1, 0, -4)$. В ней последовательность миноров матрицы $\mathbf{A}$ есть:

$$1, \frac{9}{8K^2}, \left(\frac{9}{8K^2}\right)^2, \frac{81k^2}{2^9K^4}, \left(\frac{9k^2}{64K^2}\right)^2, \frac{9k^2(k^2 + 9)}{2^{12}K^2}, \left(\frac{k^2 + 9}{64}\right)^2, \frac{k^2 + 9}{2^{12}}, \frac{1}{2^{12}}.$$

Поскольку все главные миноры положительны, то сигнатура $\mathfrak{s} = 8$.

В области $\mathcal{W}_3$ выберем точку $O = (0, 0, 0)$, в которой последовательность главных миноров есть:

$$1, \frac{1}{8K^2}, \frac{1}{64K^4}, \frac{k^2}{2^9K^4}, \frac{k^4}{2^{12}K^4}, -\frac{k^2(7k^2-1)}{2^{12}K^2}, \left(\frac{7k^2-1}{64}\right)^2, \frac{7(7k^2-1)}{2^{12}}, \frac{7^2}{2^{12}}.$$

В ней при $7k^2 \neq 1$ имеется 2 перемены знака, следовательно сигнатура $\mathfrak{s} = 4$ при всех значениях параметра k , даже когда при $7k^2 = 1$ в последовательности имеется три идущих подряд нуля.

Дадим описание взаимного расположения конической поверхности $\mathcal{C}$, на которой сигнатура нормальной формы (6.11) меняет своё значение, и границы $\partial\mathcal{S}$ области устойчивости линейной гамильтоновой системы с матрицей $\mathbf{JA}$. Поверхность $\mathcal{C}$ касается линейчатой поверхности $\tilde{\mathcal{G}}$ вдоль прямой

$$\mathcal{C}_1 : \{V = 0, \quad 4U - W + 1 = 0\},$$

которая проходит через точку Q_0 — вершину конуса и точку Q_5 — вершину параболы $\mathcal{P}_2$. Поскольку прямая $\mathcal{C}_1$ принадлежит дискриминантному множеству $\mathcal{G}$, то на ней многочлен $f(\mu)$ имеет нулевой корень кратности 2.

Коническая поверхность $\mathcal{C}$ каждую из областей $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$ делит на две под-области. Подобласть, которая попадает внутрь конуса, обозначим верхним индексом «+», а которая лежит вне его — индексом «−». Область $\mathcal{W}_2$ целиком расположена в области $\mathcal{S}_2$, а область $\mathcal{W}_1$ внешне касается области $\mathcal{S}_2$ вдоль прямой $\mathcal{C}_1$. Следовательно, нижний конус делит область $\mathcal{S}_2$ на две части: $\mathcal{S}_2^+$ с сигнатурой $\mathfrak{s} = 8$ и $\mathcal{S}_2^- = \mathcal{S}_2 \setminus \mathcal{W}_2$ с сигнатурой $\mathfrak{s} = 4$. Верхний конус делит область $\mathcal{S}_1$ на две части: $\mathcal{S}_1^+$ содержит особые точки Q_2 и Q_3 с прилегающими частями в виде трехгранного клина и $\mathcal{S}_1^- = \mathcal{S}_1 \setminus \mathcal{S}_1^+$. В $\mathcal{S}_1^+$ сигнатура $\mathfrak{s} = 0$, в $\mathcal{S}_1^-$ — $\mathfrak{s} = 4$.

На рисунке 6.3 показано сечение этих областей плоскостью $V = 0$, отмечены особые точки 2-го порядка Q_0, Q_1 , множество особых точек 1-го порядка $\mathcal{P}_1$ и области $\mathcal{W}_j$ с разной сигнатурой $\mathfrak{s}$ формы (6.11).

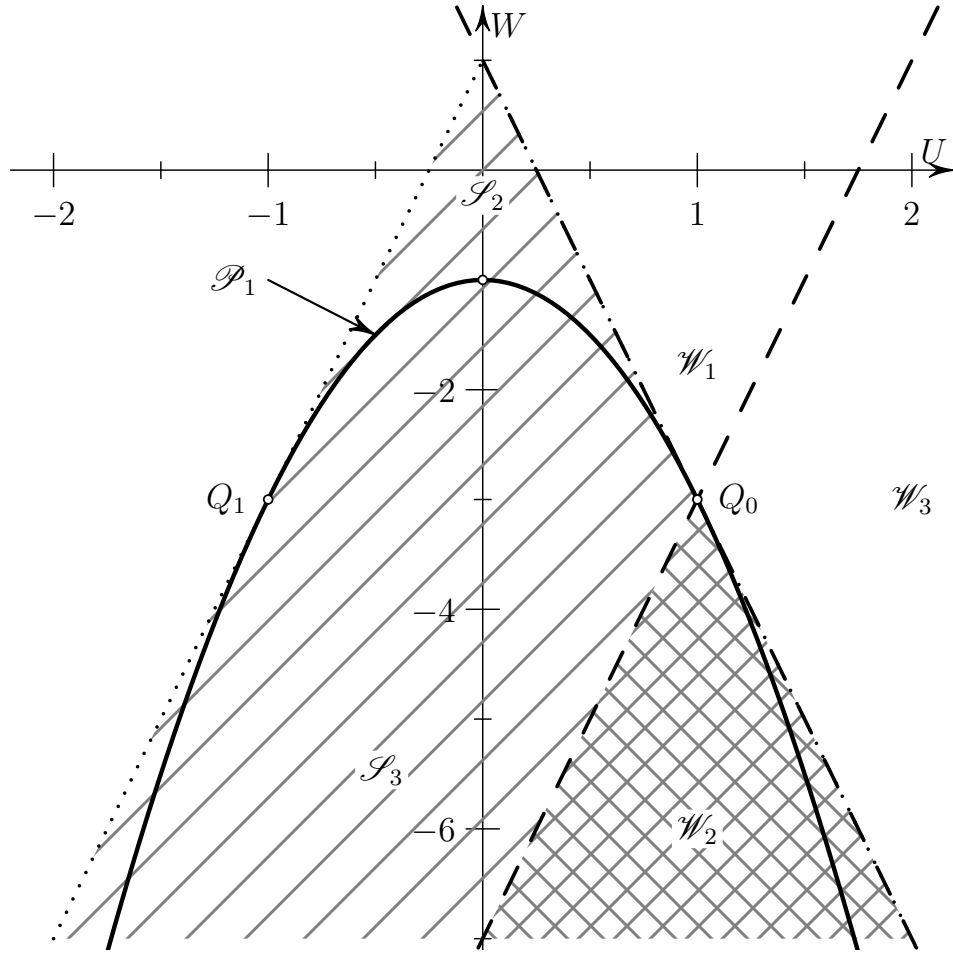


Рис. 6.3. Сечение множества устойчивости $\mathcal{S}$ и области $\mathcal{W}_2$ плоскостью $V = 0$.

Итак, только подобласть $\mathcal{S}_2^+$ с максимальным значением сигнатуры $\mathfrak{s} = 8$ будет устойчивой по Ляпунову при наличии малых нелинейных возмущений. Для других подобластей возможна формальная устойчивость при выполнении дополнительных условий, часть из которых формулируется с помощью резонансных множеств $\mathcal{F}_3$ и $\mathcal{F}_4$ характеристического многочлена.

Содержание раздела 6.2 опубликовано в [6; 161].

Заключение

Методы, использованные в диссертационной работе, могут быть применены для исследования устойчивости инвариантных многообразий больших размерностей, для поиска и продолжения семейств периодических решений систем Гамильтона с большим числом степеней свободы. Вычисленные в работе семейства периодических решений задачи Хилла могут быть продолжены до соответствующих семейств ограниченной или общей задач трёх тел. Периодические орбиты этих семейств могут быть использованы для проектирования космических миссий в окрестности малых тел Солнечной системы. Полученное полиномиальное описание дискриминантного множества многочлена, а также его обобщения может быть использовано при решении задач об устойчивости положений равновесия, а также при вычислении и исследовании нормальной формы системы Гамильтона в её окрестности.

Положения, выносимые на защиту:

- Для плоской круговой задачи Хилла изучены два её предельных интегрируемых случая: задача Энона и задача Кеплера. Дано описание сингулярных порождающих решений в терминах дуг-решений задачи Энона. Доказаны свойства полученных порождающих решений, которые позволяют вычислить асимптотику начальных условий, тип симметрии, глобальную кратности орбит соответствующего семейства. Построен аналог символической динамики на счётном множестве дуг-решений интегрируемой задачи Энона. Реализован численный алгоритм, позволяющий по порождающему решению находить соответствующее семейство симметричных периодических орбит. С помощью этого алгоритма вычислены новые ранее неизвестные семейства, 16 из которых содержат орбиты перелёта в окрестность ближайшей коллинеарной точки либрации L_1 или L_2 , а также орбиты перелёта между этими точками. Эти орбиты продолжаются до периодических орбит ограниченной задачи трёх тел и могут быть использованы в

проектировании космических миссий в окрестность коллинеарных точек либрации.

- Для системы Гамильтона, допускающей две симметрии расширенного фазового пространства, изучена структура фазового потока в окрестности критических решений семейств двояко симметричных периодических орбит. Доказаны теоремы о ветвлении таких семейств в критических случаях, соответствующих значениям индекса устойчивости S критического решения, равного соответственно $+1$, -1 и $\cos(2\pi p/q)$, где $p, q \in \mathbb{N}$. Полученные результаты применены к плоской круговой задаче Хилла для анализа взаимного расположения семейств периодических решений с общими орбитами.
- Предложено новое обобщение классической задачи Хилла, в котором центральное тело может иметь как ньютоновский потенциал притяжения, так и кулоновский потенциал отталкивания. Описаны порождающие решения этой обобщённой задачи в терминах дуг-решений. С их помощью найдены и продолжены новые семейства периодических решений, многие из которых продолжаются либо до периодических решений классической задачи Хилла, либо взаимодействуют с другими семействами. Это обобщение позволяет рассматривать все известные семейства периодических орбит как единую сеть, в которой такие семейства связаны друг с другом либо посредством порождающих решений, либо через общие орбиты с целой локальной кратностью.
- Для исследования устойчивости семейства стационарных решений многопараметрической системы Гамильтона дано полное описание дискриминантного множества в пространстве коэффициентов многочлена, на котором этот многочлен имеет кратные корни. Приведено описание его иерархической структуры, доказана его линейчатая структура и разработан метод вычисления его полиномиальной параметризации.
- Для случая трёхмерного пространства параметров гамильтоновой систе-

мы разработан и реализован алгоритм асимптотического разложения нулей дискриминанта характеристического уравнения в окрестности особых точек в виде рядов трёх типов по степеням его параметров. Алгоритм используется для асимптотического представления множества устойчивости решений вблизи его особенностей.

- Методами компьютерной алгебры, степенной геометрии и с использованием гамильтоновой нормальной формы аналитически вычислено множество устойчивости по Ляпунову статически неуравновешенной системы связанных гироскопов Лагранжа с шестью степенями свободы и пятью параметрами.

Литература

1. Брюно А. Д., Батхин А. Б. Асимптотическое решение алгебраического уравнения // Докл. Акад. Наук. — 2011. — Т. 440, № 3. — С. 295—300.
2. Батхин А. Б., Брюно А. Д. Множества устойчивости многопараметрических гамильтоновых задач // Вестник ННГУ им. Н. И. Лобачевского. — 2011. — 4, часть 2. — С. 57—58.
3. Батхин А. Б., Брюно А. Д., Варин В. П. Множества устойчивости многопараметрических гамильтоновых систем // Прикл. мат. мех. — 2012. — Т. 76, № 1. — С. 80—133.
4. Брюно А. Д., Батхин А. Б. Разрешение алгебраической сингулярности алгоритмами степенной геометрии // Программирование. — 2012. — № 2. — С. 12—30.
5. Batkhin A. B. Application of the method of asymptotic solution to one multi-parameter problem : 14th International Workshop, CASC 2012, Maribor, Slovenia, September 3-6, 2012. Proceedings // Vol. 7442 / ed. by V. P. Gerdt [et al.]. — Berlin Heidelberg : Springer, 2012. — P. 22–33. — (Lecture Notes in Computer Science). — DOI: 10.1007/978-3-642-32973-9_3.
6. Батхин А. Б. Выделение областей устойчивости нелинейной системы Гамильтона // Автоматика и телемеханика. — 2013. — Т. 8. — С. 47—64.
7. Батхин А. Б. Симметричные периодические решения задачи Хилла. I // Космические исследования. — 2013. — Т. 51, № 4. — С. 308—322.
8. Батхин А. Б. Симметричные периодические решения задачи Хилла. II // Космические исследования. — 2013. — Т. 51, № 6. — С. 497—510.
9. Батхин А. Б. Сеть семейств периодических орбит обобщенной задачи Хилла // ДАН. — 2014. — Т. 458, № 2. — С. 131—137.

10. *Батхин А. Б.* Граница множества устойчивости одной многопараметрической системы Гамильтона // Вестник ВолГУ. Серия 1. Математика. Физика. — 2014. — 5 (24). — С. 6—23. — DOI: 10.15688/jvolsu1.2014.5.1.
11. *Батхин А. Б.* Структура дискриминантного множества вещественного многочлена // Чебышевский сборник (Тула). — 2015. — Т. 16, № 2. — С. 23—34.
12. *Батхин А. Б., Брюно А. Д.* Исследование одной вещественной алгебраической поверхности // Программирование. — 2015. — № 2. — С. 7—17.
13. *Батхин А. Б.* Параметризация дискриминантного множества вещественного многочлена // Программирование. — 2016. — Т. 42, № 2. — С. 8—21.
14. *Батхин А. Б.* Одно вещественное многообразие с краем и его глобальная параметризация // Программирование. — 2017. — № 2. — С. 17—27.
15. *Батхин А. Б.* Параметризация множества, определяемого обобщенным дискриминантом многочлена // Программирование. — 2018. — № 2. — С. 5—17.
16. *Батхин А. Б.* Вычисление резонансного множества многочлена при ограничениях на коэффициенты // Программирование. — 2019. — № 2. — С. 6—15. — DOI: 10.1134/S0132347419020043.
17. *Батхин А. Б.* Бифуркации периодических решений системы Гамильтона с дискретной группой симметрий // Программирование. — 2020. — Т. 46, № 2. — С. 14—29. — DOI: 10.31857/S0132347420020041.
18. *Брюно А. Д., Батхин А.* Алгоритмы и программы вычисления корней многочлена от одной или двух неизвестных // Программирование. — 2021. — № 5. — С. 22—43. — DOI: 10.31857/S0132347421050046.

19. *Bruno A. D., Batkhin A. B.* Survey of Eight Modern Methods of Hamiltonian Mechanics // Axioms. — 2021. — Vol. 10, no. 4. — DOI: 10.3390/axioms10040293. — URL: <https://www.mdpi.com/2075-1680/10/4/293>.
20. *Батхин А. Б., Батхина Н. В.* Задача Хилла. — Волгоград : Волгоградское научное издательство, 2009. — 200 с.
21. *Малкин И. Г.* Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. — 2-е. Испр. — М. : Едиториал УРСС, 2004. — 248 с.
22. *Брюно А. Д.* Ограниченная задача трех тел: Плоские периодические орбиты. — М. : Наука, 1990. — 296 с.
23. *Bruno A. D.* On periodic flybys of the Moon // Celestial Mechanics. — 1981. — Т. 24. — С. 255–268.
24. *Hénon M.* Generating Families in the Restricted Three-Body Problem. — Berlin, Heidelberg, New York : Springer, 1997. — 278 p. — (Lecture Note in Physics. Monographs ; 52).
25. *Bruno A. D., Varin V. P.* On families of periodic solutions of the restricted three-body problem // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. — 2006. — Vol. 95. — P. 27–54.
26. *Bruno A. D., Varin V. P.* The limit problems for equation of oscillations of a satellite // Celest. Mech. Dyn. Astr. — 1997. — Vol. 67. — P. 1–40.
27. *Брюно А. Д.* Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. — М. : Наука, 1998. — 288 с.
28. *Hénon M.* Vertical stability of periodic orbits in the restricted problem. II. Hill's case // Astron. & Astr. — 1974. — № 30. — С. 317–321.
29. *Michalodimitrakis M.* Hill's problem: families of three dimensional periodic orbits (part I) // Astrophysics and Space Science. — 1980. — № 68. — С. 253–268.

30. *Лидов М. Л.* Метод построения семейств пространственных периодических орбит в задаче Хилла // *Космические исследования*. — 1982. — Т. XX, № 6. — С. 787–807.
31. *Батхин А. Б., Батхина Н. В.* Иерархия семейств периодических решений пространственной задачи Хилла // *Астрономический вестник*. — 2009. — Т. 43, № 2. — С. 187–192.
32. *Kalantonis V. S.* Numerical Investigation for Periodic Orbits in the Hill Three-Body Problem // *Universe*. — 2020. — Т. 6, № 6. — DOI: 10.3390/universe6060072. — URL: <https://www.mdpi.com/2218-1997/6/6/72>.
33. *Ichtiarogolou S.* Elliptic Hill's problem: The continuation of periodic orbits // *Astron. & Astr.* — 1980. — Vol. 92. — P. 139–141.
34. *Ichtiarogolou S.* Elliptic Hill problem: Families of periodic orbits // *Astron. & Astr.* — 1981. — Vol. 98. — P. 401–405.
35. A Hill problem with oblate primaries and effect of oblateness on Hill stability of orbits / V. V. Markellos [et al.] // *Astrophysics and Space Science*. — 2001. — No. 278. — P. 295–304.
36. *Perdiou A. E., Markellos V. V., Douskos C. N.* The Hill Problem with Oblate Secondary: Numerical Exploration // *Earth Moon and Planets*. — 2005. — Oct. — Vol. 97, no. 1/2. — P. 127–145. — DOI: 10.1007/s11038-006-9065-y.
37. *Perdiou A. E., Perdios E. A., Kalantonis V. S.* Periodic orbits of the Hill problem with radiation and oblateness // *Astrophysics and Space Science*. — 2012. — Nov. — Vol. 342, no. 1. — P. 19–30. — DOI: 10.1007/s10509-012-1145-z.

38. *García Yárnoz D., Scheeres D. J., McInnes C. R.* On the and families of orbits in the Hill problem with solar radiation pressure and their application to asteroid orbiters // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. — 2015. — Apr. — Vol. 121, no. 4. — P. 365–384. — DOI: 10.1007/s10569-015-9604-9.
39. *Hénon M.* Numerical exploration of the restricted problem. VI. Hill's case: non-periodic orbits // *Astron. & Astr.* — 1970. — No. 9. — P. 24–36.
40. *Ваишовьяк М. А., Тесленко Н. М.* О периодически эволюционирующих орбитах в однократно осредненной задаче Хилла // *Письма в Астрономический журнал*. — 2008. — Т. 34, № 4. — С. 311–320.
41. *Ваишовьяк М. А., Тесленко Н. М.* Уточненная модель эволюции далеких спутниковых орбит // *Письма в АЖ*. — 2009. — Т. 35, № 12. — С. 934–950.
42. *Ваишовьяк М. А.* Конструктивно-аналитическое решение эволюционной задачи Хилла // *Астрономический вестник*. — 2010. — Т. 44, № 6. — С. 560–573.
43. *Лидов М. Л., Ляхова В. А.* Об одном варианте орбиты для околоземного радиоинтерферометра // *Письма в АЖ*. — 1988. — Т. 14, № 9. — С. 851.
44. *Белецкий В. В., Салимова О. П.* Задача Хилла как динамический бильярд // *Reg. & Chaot. Dyn.* — 1996. — Т. 1, № 2. — С. 47–58.
45. *Villac B. F., Scheers D. J.* New Class of Optimal Plane Change Maneuvers // *J. Guid. Contr. Dyn.* — 2003. — Сент. — Т. 26, № 5. — С. 750–757.
46. *Gurfil P., Kasdin N. J., Kolemen E.* Hamilton Jacobi modelling of stellar dynamics // *Advances in Space Research*. — 2005. — Т. 36. — С. 1143–1150.
47. *Себехей В.* Теория орбит: ограниченная задача трех тел. — М. : Наука, 1982. — 656 с.
48. *Hill G. W.* Researches in the Lunar Theory // *The Collected Mathematical Works of G.W. Hill*. — 1905. — Т. 1. — С. 284–335.

49. Эйлер Л. Новая теория движения Луны: Пер. с. латинского А.Н. Крылова. — Л. : Издательство АН СССР, 1934.
50. Wilson C. The Hill–Brown Theory of the Moon’s Motion: Its Coming-to-be and Short-lived Ascendancy (1877-1984). — New York, Dordrecht, Heidelberg, London : Springer, 2010. — (Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences).
51. Hénon M. Numerical exploration of the restricted problem. V. Hill’s case: periodic orbits and their stability // Astron. & Astrophys. — 1969. — Vol. 1. — P. 223–238.
52. Hénon M. New families of periodic orbits in Hill’s problem of three bodies // Celest. Mech. Dyn. Astr. — 2003. — Vol. 85. — P. 223–246. — DOI: 10.1023/A:1022518422926.
53. Hénon M. Families of asymmetric periodic orbits in Hill’s problem of three bodies // Celest. Mech. Dyn. Astr. — 2005. — Vol. 93. — P. 87–100. — DOI: 10.1007/s10569-005-3641-8.
54. Breakwell J. V., Perko L. M. Second-order matching in the restricted three-body problem (small μ) // Celestial Mechanics. — 1974. — T. 9. — C. 437–450. — DOI: 10.1007/BF01329325.
55. Perko L. Families of symmetric periodic solutions of Hill’s problem I: First species periodic solutions for $C \ll -1$ // Amer. J. Math. — 1981. — T. 104, № 2. — C. 321–352.
56. Perko L. Families of symmetric periodic solutions of Hill’s problem II: Second species periodic solutions for $C \ll -1$ // Amer. J. Math. — 1981. — T. 104, № 2. — C. 353–397.
57. Simó C., Stuchi T. J. Central stable/unstable manifolds and the destruction of KAM tori in the planar Hill problem // Physica D. — 2000. — Vol. 140. — P. 1–32.

58. *Tsirogiannis G. A., Perdios E. A., Markellos V. V.* Improved grid search method: an efficient tool for global computation of periodic orbits. Application to Hill's problem // *Celest. Mech. Dyn. Astr.* — 2009. — No. 103. — P. 49–78.
59. *Батхин А. Б., Батхина Н. В.* Задача Хилла. — Волгоград : Волгоградское научное издательство, 2009.
60. *Villac B. F.* Dynamics in the Hill problem with applications to spacecraft maneuvers : дис. . . . канд. / Villac B. F. — The University of Michigan, 2003.
61. *Батхина Н. В., Тимофеева И. А.* Гамильтоновы укорочения ограниченной задачи трех тел // *Вестник ВолГУ. Сер. 1. Математика. Физика.* — 2010. — № 13. — С. 5–14.
62. *Брюно А. Д., Варин В. П.* Периодические решения ограниченной задачи трех тел при малых μ // *ПММ.* — 2007. — Т. 71, № 6. — С. 1034–1066.
63. *Perko L.* Periodic solutions of the restricted problem that are analytic continuations of periodic solutions of Hill's problem for small $\mu > 0$ // *Celestial Mechanics.* — 1983. — Vol. 30. — P. 115–132.
64. *Meyer K. R.* Periodic Solutions of the N -body Problem. — Berlin, Heidelberg, New York : Springer-Verlag, 1999. — 154 p. — (Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1719).
65. *Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И.* Математические аспекты классической и небесной механики. — 3-е. — М. : Эдиториал УРСС, 2009. — 416 с.
66. *Morales-Ruiz J., Simó C., Simon S.* Algebraic proof of the non-integrability of Hill's Problem // *Ergodic Theory and Dynamical Systems.* — 2005. — Vol. 25, no. 4. — P. 1237–1256.
67. *Справочное руководство по небесной механике и астродинамике / под ред. Г. Н. Дубошина.* — 2-е, перераб. и дополн. — «Наука», 1978. — 864 с.

68. *Брюно А. Д.* Нулькратные и обратные периодические решения ограниченной задачи трех тел. — ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 1996. — 32 с. — (Препринт № 93).
69. *Белецкий В. В.* Очерки о движении космических тел. — М. : Издательство ЛКИ, 2009.
70. *Clohessy W. H., Wiltshire R. S.* Terminal guidance for satellite rendezvous // J. Aerospace Sciences. — 1960. — Sept. — Vol. 27. — P. 653–658, 674. — DOI: 10.2514/8.8704.
71. *Батхин А. Б.* Символическая динамика и порождающие решения плоских периодических орбит задачи Хилла // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. — М., 2011. — № 34. — URL: http://www.keldysh.ru/papers/2011/source/prep2011_34.pdf.
72. *Батхин А. Б.* Порождающие плоские периодические орбиты задачи Хилла. — М., 2010. — 24 с. — URL: http://www.keldysh.ru/papers/2010/source/prep2010_47.pdf.
73. *Benest D.* Libration effects for retrograde satellites in the restricted three-body problem. I: Circular plane Hill's case // Celestial Mechanics. — 1976. — № 13. — С. 203–215.
74. *Лидов М. Л., Вашковьяк М. А.* О квазиспутниковых орбитах для эксперимента по уточнению гравитационной постоянной // Письма в «Астрон. журнал». — 1994. — Т. 20, № 3. — С. 229–240.
75. *Dynamical Systems, the Three-Body Problem and Space Mission Design / W. S. Koon [и др.].* — Marsden Books, 2006. — 331 с.
76. *Hénon M.* Generating Families in the Restricted Three-Body Problem. II. Quantitative Study of Bifurcations. — Berlin, Heidelberg, New York : Springer-Verlag, 2001. — (Lecture Note in Physics. Monographs ; 65).

77. *Perko L.* Second species periodic solutions with an $O(\mu)$ near-moon passage // *Celestial Mechanics*. — 1976. — Т. 14. — С. 395—427.
78. *Мучник А. А., Притыкин Ю. Л., Семенов А. Л.* Последовательности, близкие к периодическим // *УМН*. — 2009. — Т. 64, 5 (389). — С. 21—96.
79. *Батхин А. Б.* Симметричные периодические решения задачи Хилла // *Препринты ИПИМ им. М. В. Келдыша*. — М., 2012. — № 52. — URL: http://www.keldysh.ru/papers/2012/prep2012_52.pdf.
80. *Parker T. S., Chua L. O.* Practical numerical algorithms for chaotic systems. — Springer-Verlag, 1989.
81. *Barrio R., Blesa F.* Systematic search of symmetric periodic orbits in 2DOF Hamiltonian systems // *Chaos, Solitons and Fractals*. — 2009. — Vol. 41, no. 2. — P. 560–582. — DOI: 10.1016/j.chaos.2008.02.032.
82. *Lamb J. S. W., Roberts J. A. G.* Time-reversal symmetry in dynamical systems: A survey // *Physica D*. — 1998. — Vol. 112. — P. 1–39.
83. *Meyer K. R., Offin D. C.* Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N -Body Problem. — 3rd edition. — New York : Springer International Publishing, 2017. — XIII, 384. — (Applied Mathematical Sciences, Vol. 90). — DOI: 10.1007/978-3-319-53691-0.
84. *Уинтнер А.* Аналитические основы небесной механики. — М. : Наука, 1967. — 523 с.
85. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами. — М. : Наука, 1972. — 720 с.
86. *Маркеев А. П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. — М. : Наука, 1978. — 312 с.
87. *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики. Топология. Теория чисел : в трёх томах. Т. II. — М. : Наука, 1972. — С. 9—356.

88. *Крейсман Б. Б.* Семейства периодических решений гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. Несимметричные периодические решения плоской ограниченной задачи трех тел // Космические исследования. — 2005. — Т. 43, № 2. — С. 1—23.
89. Методы анализа нелинейных динамических моделей / М. Холодниок [и др.]. — М. : «Мир», 1991.
90. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — 4-е изд. — М. : «Наука», 1988. — 552 с.
91. *Williamson J.* On the normal forms of linear canonical transformations in dynamics // American Journal of Mathematics. — 1937. — Vol. 59, no. 3. — P. 599–617.
92. *Каримов С. Р., Сокольский А. Г.* Метод продолжения по параметрам естественных семейств периодических движений гамильтоновых систем. — 1990. — Препринт ИТА АН СССР, №9.
93. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. — 272 с.
94. *Брюно А. Д.* Периодические решения системы Гамильтона // Космические исследования. — 2006. — Т. 44, № 3. — С. 258—271.
95. *Крейсман Б. Б.* Семейства периодических решений гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. Несимметричные периодические решения плоской ограниченной задачи трех тел. — 2003. — Препринт ФИАН им. П.Н. Лебедева. № 66.
96. *Брюно А.* Исследования в ограниченной задаче трёх тел. I. Периодические решения системы Гамильтона // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. — Москва, 1972. — № 18.
97. Теория бифуркаций. Т. 5 / В. И. Арнольд [и др.]. — М. : ВИНТИ АН СССР, 1985. — (Современные проблемы математики. Фундаментальные направления).

98. *Батхин А. Б.* О структуре фазового потока в окрестности симметричного периодического решения системы Гамильтона // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. — 2019. — № 69. — С. 28. — DOI: 10.20948/prepr-2019-69.
99. *Батхин А. Б., Батхина Н. В.* Новые семейства периодических решений задачи Хилла // Труды XXXV академических чтений по космонавтике. — М. : Комиссия РАН, 2011. — С. 122—123.
100. *Коган А. Ю.* Далекие спутниковые орбиты в ограниченной задаче трех тел // Космические исследования. — 1988. — Т. XXVI, № 6. — С. 813—818.
101. *Боярский М. Н., Шейхет А. И.* Об одноимпульсном переходе с орбиты ИСЗ на условнопериодическую траекторию вокруг коллинеарной точки либрации системы Солнце—Земля // Космические исследования. — 1987. — Т. 25, № 1. — С. 152.
102. *Лидов М. Л., Ляхова В. А., Тесленко Н. М.* Одноимпульсный перелет на условнопериодическую орбиту в окрестности точки L_2 системы Земля—Солнце и смежные задачи // Космические исследования. — 1987. — Т. 25, № 2. — С. 163—185.
103. *Крейсман Б. Б.* Одноимпульсные перелеты с орбит искусственных спутников на орбиты вокруг точки либрации L_1 или L_2 // Космические исследования. — 2011. — Т. 49, № 4. — С. 335—344.
104. *Батхин А. Б.* Использование порождающих решений для конструирования перелетов в окрестность коллинеарной точки либрации // Труды XXXIV академических чтений по космонавтике. — М. : Комиссия РАН, 2010. — С. 122—123.
105. *Batkhin A. B.* Families of symmetric periodic solutions of the Generalized Hill's Problem // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. — Moscow, Russia,

2013. — № 60. — URL: http://www.keldysh.ru/papers/2013/prep2013_60_eng.pdf.
106. *Batkhin A. B.* New families of doubly symmetric periodic solutions of Hill problem // 2016 International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference), TRAPEZNIKOV INSTITUTE OF CONTROL SCIENCES. Vol. 1. — IEEE RUSSIA, MOSCOW, V.A, 2016. — P. 1–4. — DOI: 10.1109/STAB.2016.7541164.
 107. *Батхин А. Б.* Поиск периодических решений с особой симметрией в задаче Хилла // Математическая физика и компьютерное моделирование. — 2019. — Т. 22, № 3. — С. 5–25. — DOI: <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2019.3.1>.
 108. *Combot T., Maciejewski A. J., Przybylska M.* Integrability of the generalised Hill problem // Nonlinear Dynamics. — 2021. — DOI: 10.1007/s11071-021-07040-8. — URL: <https://doi.org/10.1007/s11071-021-07040-8>.
 109. *Batkhin A. B.* Network of families of periodic solutions of generalized Hill's problem // Proceedings of the 4th International Conference on Nonlinear Dynamics (June 19–23, 2013, Sevastopol). — Khar'kiv Polytechnical Institute. Khar'kiv : "Tochka", 2013. — P. 17–22.
 110. *Батхин А. Б.* Сеть семейств периодических орбит обобщенной задачи Хилла // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. — М., 2014. — № 9. — URL: http://www.keldysh.ru/papers/2014/prep2014_09.pdf.
 111. *Брюно А.* О типах устойчивости в системах Гамильтона // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. — Москва, 2020. — № 21. — С. 1–24. — DOI: <https://doi.org/10.20948/prepr-2020-21>.
 112. *Ляпунов А. М.* О рядах, предложенных Хиллом для представления движения Луны // Собрание сочинений. Т. I. — М. : Наука, 1998.

113. Moser J. New aspects in the theory of stability of Hamiltonian Systems // Comm. Pure Appl. Math. — 1958. — Vol. 11, no. 1. — P. 81–114.
114. Брюно А. Д. О формальной устойчивости систем Гамильтона // Мат. заметки. — 1967. — Т. 1, № 3. — С. 325–330.
115. Мартынюк А. Практическая устойчивость движения. — Киев : Наукова думка, 1983.
116. Грязина Е. Н., Поляк Б. Т., Тремба А. А. Современное состояние метода D-разбиения // Автоматика и телемеханика. — 2008. — № 12. — С. 3–40.
117. Мейман Н. Н. Некоторые задачи распределения нулей многочленов // УМН. — 1949. — Т. 4, 6 (34). — С. 154–188.
118. Сушкевич А. К. Основы высшей алгебры. — 4-е. — М.-Л. : ОГИЗ ГИТТЛ, 1941. — 460 с.
119. Прасолов В. В. Многочлены. — М. : МЦНМО, 2014. — 336 с.
120. Basu S., Pollack R., Roy M.-F. Algorithms in Real Algebraic Geometry. — Berlin Heidelberg New York : Springer-Verlag, 2006. — ix+662. — (Algorithms and Computations in Mathematics 10).
121. Gathen, J. von zur, Lücking T. Subresultants revisited // Theoretical Computer Science. — 2003. — Vol. 297, issue 1–3. — P. 199–239. — DOI: 10.1016/S0304-3975(02)00639-4.
122. Джурри Э. Инноры и устойчивость динамических систем. — М., 1979. — 304 с.
123. Cayley A. Note sur la méthode d'élimination de Bezout // J. Reine Angew. Math. — 1855. — Т. 53. — P. 366-367. — URL : http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/img/?PPN=PPN243919689_0053&DMDID=DMDLOG_0033&LOGID=LOG_0033&PHYSID=PHYS_0374.

124. *Gelfand I. M., Kapranov M. M., Zelevinsky A. V.* Discriminants, Resultants, and Multidimensional Determinants. — Boston : Birkhäuser, 1994. — 523 p. — ISBN 0-8176-3660-9.
125. *Diaz-Toca G. M., Gonzales-Vega L.* Various New Expressions for Subresultants and Their Applications // *Appl. Algebra in Eng., Comm. & Comp.* — 2004. — Vol. 15. — P. 233–266. — DOI: 10.1007/s00200-004-0158-4.
126. *Abdeljaoued J., Diaz-Toca G. M., Gonzalez-Vega L.* Minors of Bezout matrices, subresultants and the parameterization of the degree of the polynomial greatest common divisor // *Int. J. of Comp. Math.* — 2004. — Vol. 81, issue 10. — P. 1223–1238. — DOI: 10.1080/00207160412331284178.
127. *Калинина Е. А., Утешев А. Ю.* Теория исключения: Учеб. пособие. — СПб. : Изд-во НИИ химии СПбГУ, 2002. — 72 с.
128. *Sylvester J. J.* A method of determining by mere inspection the derivatives from two quations of any degree // *Mathematical Papers. Vol. 1 / J. J. Sylvester.* — N. Y. : Chelsea Publishing Co., 1973. — P. 54–57.
129. *Бохер М.* Введение в высшую алгебру / пер. А. Г. Курош ; предисл. П. С. Александров. — М.-Л. : ГТТИ, 1933. — 292 с.
130. *Lickteig T., Roy M.-F.* Sylvester-Habicht sequences and fast Cauchy index computation // *J. Symbolic Computation.* — 2001. — Vol. 31. — P. 315–341. — DOI: 10.1006/jscs.2000.0427.
131. *Крейн М. Г., Неймарк М. А.* Метод симметрических и эрмитовых форм в теории отделения корней алгебраических уравнений. — Харьков : ГТТИ, 1936. — 36 с.
132. *Коваль В. И.* О действительности всех корней характеристического многочлена уравнений первого приближения в динамике твердого тела // *Механика твердого тела.* — 1999. — Т. 28. — С. 130–145.

133. *Collins G. E.* Subresultants and reduced polynomial remainder sequences // J. ACM. — 1967. — Vol. 14, no. 1. — P. 128–142.
134. *Батхин А. Б.* Параметризация дискриминантного множества вещественного многочлена // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. — 2015. — № 76. — URL: http://www.keldysh.ru/papers/2015/prep2015_76.pdf.
135. *Эндрюс Г.* Теория разбиений. — М. : Наука, 1982. — 256 с.
136. *Макдональд И.* Симметрические функции и многочлены Холла. — М. : Мир, 1985. — 222 с.
137. *Фиников С. П.* Теория поверхностей. — М. : ГТТИ, 1934. — 203 с.
138. *Кривошапко С. Н., Иванов В.* Энциклопедия аналитических поверхностей. — М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. — 560 с.
139. *Cox D., Little J., O'Shea D.* Ideals, Varieties, and Algorithms. An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra. — 3rd ed. — New York : Springer-Verlag, 2007. — 551+xv. — (Undergraduate Texts in Mathematics).
140. *Батхин А. Б.* Структура резонансного множества вещественного многочлена // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. — 2016. — № 29. — DOI: <https://doi.org/10.20948/prepr-2016-29>.
141. *Уокер Р.* Алгебраические кривые. Пер. с англ. — М. : УРСС, 2009. — 240 с.
142. *Брюно А. Д., Батхин А. Б.* Разрешение алгебраической сингулярности алгоритмами степенной геометрии // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. — М., 2011. — № 10. — URL: http://www.keldysh.ru/papers/2011/source/prep2011_10.pdf.
143. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. — М. : Наука, 1966. — 531 с.

144. Брюно А. Д., Батхин А. Б., Варин В. П. Вычисление множеств устойчивости в многопараметрических задачах // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. — М., 2010. — № 23. — URL: http://www.keldysh.ru/papers/2010/source/prep2010_23.pdf.
145. Батхин А. Б., Брюно А. Д., Варин В. П. Множества устойчивости многопараметрических гамильтоновых систем. — 2011. — URL: http://www.keldysh.ru/papers/2011/source/prep2011_42.pdf.
146. Майлыбаев А. А., Сейранян А. П. Многопараметрические задачи устойчивости. Теория и приложения в механике. — М. : Физматлит, 2009. — 400 с.
147. Барняк М. А., Стороженко В. А. К исследованию устойчивости вертикального вращения статически неуравновешенной системы шарнирно-связанных осесимметричных тел // Изв. АН СССР. МТТ. — 1988. — № 4. — С. 51–58. — (МТТ).
148. Болграбская И. А., Савченко А. Я. Об одном методе исследования колебаний вращающихся осесимметричных упругих стержней // Механика твердого тела (Донецк). — 1984. — № 4. — С. 52–73.
149. Ишлинский А. Ю., Стороженко В. А., Темченко М. Е. Вращение твердого тела на струне и смежные задачи. — М. : Наука, 1991. — 330 с.
150. Брюно А. Д., Батхин А. Б., Варин В. П. Множество устойчивости одной гироскопической задачи // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. — М., 2010. — № 4. — URL: http://www.keldysh.ru/papers/2010/source/prep2010_04.pdf.
151. Погорелов А. В. Дифференциальная геометрия. — 6-е. — М. : Наука, 1974. — 176 с.
152. Фиников С. П. Теория поверхностей. — М. : ГТТИ, 1934. — 203 с.
153. Майлыбаев А. А. Многопараметрические задачи теории устойчивости : Дис... докт. физ.-мат. наук: 01.02.01 / Майлыбаев А. А. — СПб., 2008.

154. *Weispfenning V.* Comprehensive Gröbner Bases // J. Symbolic Comput. — 1992. — Vol. 14, no. 1. — P. 1–30.
155. *Батхин А. Б.* Устойчивость одной многопараметрической системы Гамильтона // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. — М., 2011. — № 69. — URL: http://www.keldysh.ru/papers/2011/source/prep2011_69.pdf.
156. *Зигель К., Мозер Ю.* Лекции по небесной механике. — Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. — 384 с.
157. *Маркеев А. П.* Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс. — М.-Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. — 396 с.
158. *Maciejewski A. J., Goździewski K.* Normalization algorithms of Hamiltonian near an equilibrium point // Astrophysics and Space Science. — 1991. — Vol. 179. — P. 1–11. — DOI: 10.1007/BF00642349.
159. *Журавлев В. Ф., Петров А. Г., Шундерюк М. М.* Избранные задачи гамильтоновой механики. — М. : ЛЕНАНД, 2015. — 304 с.
160. *Burgoyne N., Cushman R.* Normal Forms for Real Linear Hamiltonian Systems with Purely Imaginary Eigenvalues // Celestial Mechanics. — 1974. — Vol. 8. — P. 435–443. — DOI: 10.1007/BF01227796.
161. *Батхин А. Б.* Нелинейная устойчивость системы Гамильтона по линейному приближению // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. — 2012. — № 33. — URL: http://www.keldysh.ru/papers/2012/prep2012_33.pdf.