

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(национальный исследовательский университет)

ФИЗТЕХ-ШКОЛА АЭРОКОСМИЧЕСКИХ ТЕХНОЛОГИЙ
Кафедра математического моделирования и прикладной математики

Квалификационная работа на соискание степени магистра
по направлению 03.04.01 «Прикладные математика и физика», профиль
подготовки «Космические технологии»

Влияние гладкости интерполяционных кривых на возбуждение колебательных мод КА с нежёсткими элементами

Выполнил:

студент группы 301

Зенин Кирилл Алексеевич

Научный руководитель:

к.ф.-м.н., доцент

Ткачев Степан Сергеевич

Москва, 2025

Аннотация

Рассматривается космический аппарат (КА) с крупногабаритными нежёсткими элементами (КНЭЖ), прикрепленными к его корпусу. К ним относятся, например, крупногабаритные антенны и панели, которые часто входят в состав широко используемых в настоящее время орбитальных телескопов и спутников ДЗЗ высокого и сверхвысокого разрешения, а также геостационарных спутников связи.

При изменении ориентации КА в нежёстких элементах возбуждаются колебания, которые влияют на движение КА. В связи с этим, требуется строить управление таким образом, чтобы свести к минимуму или совсем исключить возникновение колебаний в КНЭЖ.

Основное предположение о характере возбуждения колебаний в нежёстких элементах связано с гладкостью функции управления. Задачей работы является выявление связи амплитуды возбуждённых колебаний и гладкости функции управления. В работе показано, что существует два режима. В первом амплитуда уменьшается с увеличением порядком гладкости, а в другом – наоборот: с повышением порядка гладкости амплитуда колебаний растёт.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Обозначения и сокращения.....	5
Введение.....	6
1. Постановка задачи и уравнения движения.....	8
1.1. Общие соображения постановки задачи.....	8
1.2. Математическая модель	8
2. Аналитическое исследование динамики системы	11
2.1. Спектральный анализ	11
2.2. Естественная замена времени	14
2.3. Получение и применение рекуррентных интегральных соотношений	15
2.4. Получение аналитической оценки	17
2.5. Физический смысл как соотношение неопределённостей	22
2.6. Случай управления в виде алгебраического полинома	24
2.7. Общий случай.....	25
2.8. Критерий выбора функции управления.....	26
3. Численное моделирование	30
3.1. Методика.....	30
3.2. О способах оценки амплитуды колебаний	31
3.3. Случай простейшей модели с единственной колебательной модой	35
3.4. Случай не полиномиального управления.....	39
3.5. Модель с большим числом колебательных мод	41
3.6. Проверка соответствия теоретической оценки реальным амплитудам	43

3.7. Сравнение двух различных управлений на сводном графике....	45
Заключение	47
Список использованных источников	49
Приложение А. Параметры спутника	52

Обозначения и сокращения

КА	космический аппарат
КНЭК; НЭ	Крупногабаритные нежёсткие элементы конструкции
СДУ	Система дифференциальных уравнений
СЛДУ	Система линейных дифференциальных уравнений
СЗ	Собственное значение
СВ	Собственный вектор
ФСР	Фундаментальная система решений
J	Момент инерции
S	Вспомогательная матрица
M	Матрица нормальных мод
Ω	Диагональная матрица собственных частот
α	Угловая координата КА
$\omega = \dot{\alpha}$	Угловая скорость КА
q	Переменная, соответствующая колебаниям мод
$v_q = \dot{q}$	Скорость колебаний мод
x	Фазовый вектор
A	Амплитуда
U	Управление

Введение

Современные автономные космические аппараты (КА) играют важную роль в космонавтике. Они выполняют широкий спектр задач на орбите, включая зондирование земной поверхности, обеспечение связи и передачу данных[22]. Крупные КА, такие как спутники и космические станции, оснащены крупногабаритными нежёсткими элементами конструкции (КНЭК), такими как солнечные панели и антенны[24]. Как правило, их масса значительно ниже массы центральной части КА, при этом их размеры часто превышают размеры корпуса КА[22, 23]. Все это приводит к тому, что их тензор инерции может оказаться на порядок больше тензора инерции КА, а возникающие в них упругие деформации могут оказывать значительное влияние на движение всего КА, мешая выполнению его целевой задачи[1, 3, 23, 26, 5, 7, 10, 12, 15–18].

Есть два основных способа построения модели углового движения КА с КНЭК[4, 8–12, 22–24]. Первым является объединение уравнений в частных производных (описывающих деформации) и обыкновенных дифференциальных уравнений (описывающих абсолютное движение) [8, 20]. Во втором используется дискретное представление упругих колебаний [9, 11, 12]. В этом случае уравнения могут быть получены через Лагранжиан [4, 9, 14] или из основного уравнения динамики и принципа Д'Аламбера [12].

На практике часто требуется перевести КА из одного углового положения в другое, а затем стабилизировать его в этой ориентации [6, 9, 19]. Это осуществляется с помощью управляющих элементов, установленных на КА, таких как гироскопы, двигатели ориентации, маховики, магнитные катушки[13, 19].

Проблема рассмотрения таких КА заключается в том, что НЭ по своей природе содержат бесконечное количество мод, и поэтому на практике нельзя наблюдать состояние их всех, то есть нельзя наблюдать состояние НЭ. По той же причине нельзя и управлять движением НЭ[13, 16]. Более того, при

изменении состояния НЭ (изгибании) меняются как их физические параметры – например, тензор инерции, так и их положение равновесия[15].

Другая проблема состоит в том, что процесс стабилизации КА может быть длительным, во время которого аппарат не может функционировать и выполнять свою задачу, что приводит к снижению его эффективности. Поэтому при манёврах имеется прямой интерес в исключении или хотя бы уменьшении амплитуды этих колебаний при маневрах переориентации.

Величину амплитуды возбуждаемых вследствие манёвров колебаний можно варьировать, изменяя управление, которым задаётся переход КА из начального положения в конечное. Разница в амплитудах возбуждённых колебаний для двух разных управлений может составлять несколько порядков.

В работе исследуется зависимость амплитуды возбуждённых колебаний КНЭК от конкретного параметра управления, а именно гладкости функции управления в моментах начала и конца манёвра, когда происходит включение (выключение) управляющих элементов. Рассматривается задача на линеаризованной модели спутника. Для неё выполняется построение решения [25] и поиск критерия режима работы, при котором гладкость функции управления в начальный и в конечный моменты времени влияет на амплитуду колебаний.

В первой главе приводится постановка задачи и выписывается используемая математическая модель. Во второй – проводится спектральный анализ системы, выводится теоретическая оценка амплитуды колебаний и проводится анализ применения этой оценки. При этом получен критерий, который позволяет сравнивать влияние двух разных функций управления. Третья глава посвящена численному моделированию задачи, способах оценки реальной амплитуды и сравнению этой амплитуды с теоретической оценкой.

1. Постановка задачи и уравнения движения

1.1. Общие соображения постановки задачи

Рассматривается плоское угловое движение космического аппарата (КА). Он состоит из центральной части, которая полагается твёрдым телом и прикрепленными к нему жестко крупногабаритными нежесткими элементами конструкции (КНЭК). Исполнительные элементы системы управления ориентации располагаются на центральной части. На НЭ управляющих элементов нет. Деформации НЭ полагаются линейными.

В начальный момент времени КА находится в состоянии полного покоя, его ориентация в пространстве известна, колебательные моды не возбуждены. Известна также целевая ориентация, к которой надо привести КА с помощью одноосного поворота, и время, за которое должен быть осуществлён манёвр.

Вектор управляющего момента всё время коллинеарен оси, вокруг которой осуществляется поворот. Проекция управляющего момента на ось во время всего манёвра задаётся как произвольная непрерывная функция от времени. В реальности управляющий момент не должен превышать заданных максимальных значений, однако в рамках данной работы можно считать управляющий момент значительно меньше допустимых значений, а потому не рассматривать это ограничение.

В дальнейшем в этой работе управляющий момент условимся сокращённо называть словом управление.

1.2. Математическая модель

Как уже упоминалось, КА с КНЭК в математической модели представляет собой корпус, моделируемый как твёрдое тело, и некоторое число НЭ, прикрепленных к корпусу и моделируемых как набор из первых n колебательных мод. Центр масс КА совпадает с центром масс корпуса.

Так как в предыдущих разделах упоминалось, что в работе рассматривается одноосный поворот, то состояние корпуса достаточно задавать всего одним углом α и одной угловой скоростью $\omega = \dot{\alpha}$. Опорный

угол будем обозначать функцией $\beta(t)$, а его разность с настоящим углом $\gamma = \alpha - \beta(t)$. Состояние колебательных мод задаётся векторами \mathbf{q} и $\dot{\mathbf{q}}$.

Линеаризованные уравнения, описывающие угловое движение модели, выглядят следующим образом[6]:

$$\begin{cases} J\ddot{\gamma} + \mathbf{S}\ddot{\mathbf{q}} = U_{ПД}(\alpha, \omega) \\ \mathbf{S}^T \ddot{\gamma} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{\Omega}\mathbf{q} - \mathbf{S}^T J^{-1} U_{Проэ}(t), \end{cases} \quad (1.1)$$

где J представляет момент инерции КА относительно оси поворота, \mathbf{S} – вспомогательная матрица, \mathbf{M} – матрица нормальных мод, $\mathbf{\Omega}$ – диагональная матрица собственных частот, $U_{ПД}$ и $U_{Проэ}$ – функции управления.

Обсудим подробнее выбор этих функций. В работе управление состоит из двух частей: программной и ПД-регулятора. Программная часть задаётся функцией исключительно от времени, ПД-регулятор в свою очередь зависит исключительно от текущего состояния и не зависит от времени.

Нежёсткими элементами, как уже упоминалось, нельзя управлять, поэтому программное управление строится для твердотельной модели, принципиально не обладающей КНЭК. Для твердого тела управление строится тривиальным образом. Динамика такой модели задаётся простым уравнением: $U_{Проэ} = J \cdot \ddot{\beta}(t)$, где $U_{Проэ}$ – программное управление, J – момент инерции, β – угловая координата. Таким образом, зная, как должен меняться угол β , решается обратная задача механики и строится управление. Программное управление, построенное для твёрдого тела, затем применяется для системы, обладающей КНЭК.

Функция угловой координаты от времени $\beta(t)$ в свою очередь тривиально задаётся как произвольная дважды гладкая функция с набором параметров, «сшитая» с начальным и конечным состояниями[2, 25].

В ПД-регуляторе один член пропорционален разности опорной угловой координаты и настоящей угловой координаты, а другой – производной от их разности. Общие выражения для функций управления можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} U_{\text{пд}} &= -k_{\omega}(\dot{\alpha} - \dot{\beta}(t)) - k_{\alpha}(\alpha - \beta(t)), \\ U_{\text{пор}} &= J\ddot{\beta}(t) \end{aligned} \quad (1.2)$$

По сути, управление поворачивает КА по определённому закону, одновременно с этим подавляя возбуждающиеся при этом колебания.

Подставляя (1.2) в (1.1), получим:

$$\begin{cases} J\ddot{\gamma} + k_{\omega}\dot{\gamma} + k_{\alpha}\gamma + \mathbf{S}\ddot{\mathbf{q}} = 0 \\ \mathbf{S}^T\ddot{\gamma} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{\Omega}\mathbf{q} = \mathbf{S}^T\ddot{\beta}(t) \end{cases} \quad (1.3)$$

Понизим порядок производных с 2 до 1 и перепишем (1.3) в виде системы линейных дифференциальных уравнений (СЛДУ) из 4 уравнений:

$$\begin{cases} J\dot{v}_{\gamma} + k_{\omega}v_{\gamma} + k_{\alpha}\gamma + \mathbf{S}\dot{v}_{\mathbf{q}} = 0 \\ \dot{\gamma} = v_{\gamma} \\ \mathbf{S}^T\dot{v}_{\gamma} + \mathbf{M}\dot{v}_{\mathbf{q}} + \mathbf{\Omega}\mathbf{q} = \mathbf{S}^T\ddot{\beta}(t) \\ \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v}_{\mathbf{q}} \end{cases}$$

Перепишем уравнения, выразив все производные от состояний:

$$\begin{cases} \dot{v}_{\gamma} = (J - \mathbf{S}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}^T)^{-1}(-k_{\omega}v_{\gamma} - k_{\alpha}\gamma + \mathbf{S}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{\Omega}\mathbf{q} + \mathbf{S}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}^T\ddot{\beta}(t)) \\ \dot{\gamma} = v_{\gamma} \\ \dot{v}_{\mathbf{q}} = (\mathbf{M} - \mathbf{S}^T J^{-1}\mathbf{S})^{-1}(J^{-1}\mathbf{S}k_{\omega}v_{\gamma} + J^{-1}\mathbf{S}k_{\alpha}\gamma - \mathbf{\Omega}\mathbf{q} - \mathbf{S}^T\ddot{\beta}(t)) \\ \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v}_{\mathbf{q}} \end{cases} \quad (1.4)$$

Введём фазовый вектор $\mathbf{x} = (\dot{\gamma}, \gamma, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})$. Уравнения (1.4) можно представить в матричном виде:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u, \text{ где}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -(J^{-1} - \mathbf{Q}\mathbf{R}\mathbf{Q}^T)k_{\omega} & -(J^{-1} - \mathbf{Q}\mathbf{R}\mathbf{Q}^T)k_{\alpha} & \mathbf{O} & -\mathbf{Q}\mathbf{R}\mathbf{\Omega} \\ 1 & 0 & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{R}\mathbf{Q}^T k_{\omega} & -\mathbf{R}\mathbf{Q}^T k_{\alpha} & \mathbf{O} & \mathbf{R}\mathbf{\Omega} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{E} & \mathbf{O} \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -\mathbf{Q}\mathbf{R}\mathbf{Q}^T \\ 0 \\ \mathbf{R}\mathbf{Q}^T \\ \mathbf{O} \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= (\mathbf{S}^T \mathbf{J}^{-1} \mathbf{S} - \mathbf{M})^{-1}, \mathbf{Q} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{S}, \mathbf{Q}^T = \mathbf{S}^T \mathbf{J}^{-1} \\ (\mathbf{J} - \mathbf{S}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}^T)^{-1} \mathbf{S}\mathbf{M}^{-1} &= -\mathbf{Q}\mathbf{R} \end{aligned}$$

Здесь и далее под управлением *и* подразумевается исключительно программная часть управления, так как часть, отвечающая за ПД-регулятор, уже учтена внутри матрицы **A**.

2. Аналитическое исследование динамики системы

Целью данной главы является найти способ оценивать амплитуду возбуждаемых в процессе переориентации колебаний. Так как колебания описываются гармонической функцией, то надо привести решение к такой форме. Тогда искомой амплитудой будет являться постоянная величина, стоящая перед гармонической функцией. После нахождения способа оценивать амплитуду нужно перейти к следующему шагу и задать критерий, согласно которому можно будет выбирать среди любых двух предложенных функций управления ту, которая будет возбуждать меньшие колебания.

2.1. Спектральный анализ

Будем исследовать поставленную задачу с точки зрения собственных значений и собственных векторов. Пусть матрице (1.5) соответствуют $2n$ комплексных собственных значений

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2} &= -\beta_1 \pm i\Omega_1 \\ \dots \\ \lambda_{2n-1,2n} &= -\beta_n \pm i\Omega_n\end{aligned}$$

и $2n$ комплексных собственных векторов

$$\begin{aligned}\xi_{1,2} &= \xi_{1,\text{Re}} \pm \xi_{1,\text{Im}} \\ \dots \\ \xi_{2n-1,2n} &= \xi_{n,\text{Re}} \pm \xi_{n,\text{Im}}.\end{aligned}$$

Если среди собственных значений (СЗ) и собственных векторов (СВ) есть сугубо действительные, то конкретно эти спектры колебаний не возбуждают, так как описывают аperiodические решения, а анализ этих СЗ и СВ аналогичен анализу комплексных.

Матрица фундаментальной системы решений (ФСР) записывается в виде

$$\Phi(t) = \left(e^{\lambda_1 t} \xi_1 \mid e^{\lambda_2 t} \xi_2 \mid \dots \mid e^{\lambda_{2n-1} t} \xi_{2n-1} \mid e^{\lambda_{2n} t} \xi_{2n} \right)$$

Эта матрица является комплексной. Решение системы находится как $\mathbf{x}(t) = \Phi(t) \cdot \mathbf{C}(t)$, где $\mathbf{C}(t)$ – столбец свободных коэффициентов. Имеем ввиду, что $\mathbf{x}(t)$ – тот же фазовый вектор, что и в предыдущей главе, $\mathbf{x}(t) = (\gamma, \dot{\gamma}, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, и что решение описывает поведение всех фазовых переменных. ФСР $\Phi(t)$ можно преобразовать в действительную матрицу $\tilde{\Phi}(t)$, для которой решение будет записываться аналогичным образом, но с другим столбцом свободных коэффициентов: $\mathbf{x}(t) = \tilde{\Phi}(t) \cdot \tilde{\mathbf{C}}(t)$. Сама матрица $\tilde{\Phi}(t)$ будет выглядеть следующим образом:

$$\tilde{\Phi}(t) = \left(e^{-\beta_1 t} (\xi_{1,\text{Re}} \cos \Omega_1 t - \xi_{1,\text{Im}} \sin \Omega_1 t) \mid e^{-\beta_1 t} (\xi_{1,\text{Re}} \sin \Omega_1 t + \xi_{1,\text{Im}} \cos \Omega_1 t) \mid \dots \right. \\ \left. \dots e^{-\beta_n t} (\xi_{n,\text{Re}} \cos \Omega_n t - \xi_{n,\text{Im}} \sin \Omega_n t) \mid e^{-\beta_n t} (\xi_{n,\text{Re}} \sin \Omega_n t + \xi_{n,\text{Im}} \cos \Omega_n t) \right)$$

Новые свободные коэффициенты записываются следующим образом:

$$\tilde{C}_1(t) = \frac{1}{\Delta} \int_{t_0}^t u(\tau) e^{\beta_1 \tau} (\cos \Omega_1 \tau \Delta_{1,\text{Im}} + \sin \Omega_1 \tau \Delta_{1,\text{Re}}) d\tau + \tilde{C}_{1,0}$$

$$\tilde{C}_2(t) = \frac{1}{\Delta} \int_{t_0}^t u(\tau) e^{\beta_1 \tau} (-\cos \Omega_1 \tau \Delta_{1,\text{Re}} + \sin \Omega_1 \tau \Delta_{1,\text{Im}}) d\tau + \tilde{C}_{1,0}$$

...

$$\tilde{C}_{2n-1}(t) = \frac{1}{\Delta} \int_{t_0}^t u(\tau) e^{\beta_n \tau} (\cos \Omega_n \tau \Delta_{n,\text{Im}} + \sin \Omega_n \tau \Delta_{n,\text{Re}}) d\tau + \tilde{C}_{n,0}$$

$$\tilde{C}_{2n}(t) = \frac{1}{\Delta} \int_{t_0}^t u(\tau) e^{\beta_n \tau} (-\cos \Omega_n \tau \Delta_{n,\text{Re}} + \sin \Omega_n \tau \Delta_{n,\text{Im}}) d\tau + \tilde{C}_{n,0},$$

где $u(t)$ – управление, \tilde{C}_0 – постоянная часть свободных коэффициентов, определяемая начальными условиями и задающаяся матричным уравнением $\tilde{\mathbf{C}}_0 = \tilde{\Phi}^{-1}(t_0) \cdot \mathbf{x}(t_0)$, а Δ -ы являются определителями комбинации из собственных векторов и вектор-столбца правой части исходной системы:

$$\begin{aligned}
\Delta &= \det \left(\begin{array}{cc|ccc} \xi_{1,\text{Re}} & \xi_{1,\text{Im}} & \cdots & \xi_{n,\text{Re}} & \xi_{n,\text{Im}} \end{array} \right), \\
\Delta_{1,\text{Re}} &= \det \left(\begin{array}{c|ccc} \mathbf{B} & \xi_{1,\text{Re}} & \cdots & \xi_{n,\text{Re}} \end{array} \right), \\
\Delta_{1,\text{Im}} &= \det \left(\begin{array}{c|ccc} \mathbf{B} & \xi_{1,\text{Im}} & \cdots & \xi_{n,\text{Im}} \end{array} \right), \\
&\dots \\
\Delta_{n,\text{Re}} &= \det \left(\begin{array}{ccc|c} \xi_{1,\text{Re}} & \xi_{1,\text{Im}} & \cdots & \mathbf{B} \end{array} \right), \\
\Delta_{n,\text{Im}} &= \det \left(\begin{array}{ccc|c} \xi_{1,\text{Re}} & \xi_{1,\text{Im}} & \cdots & \mathbf{B} \end{array} \right)
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Таким образом, общее решение СДУ записывается в виде:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{\text{общ}}(t) &= \\
&= \frac{e^{-\beta_1 t}}{\Delta} \left(\xi_{1,\text{Re}} \cos \Omega_1 t - \xi_{1,\text{Im}} \sin \Omega_1 t \right) \left(\int_{t_0}^t u(\tau) e^{\beta_1 \tau} \left(\cos \Omega_1 \tau \Delta_{1,\text{Im}} + \sin \Omega_1 \tau \Delta_{1,\text{Re}} \right) d\tau + \tilde{C}_{1,0} \right) + \\
&+ \frac{e^{-\beta_1 t}}{\Delta} \left(\xi_{1,\text{Re}} \sin \Omega_1 t + \xi_{1,\text{Im}} \cos \Omega_1 t \right) \left(\int_{t_0}^t u(\tau) e^{\beta_1 \tau} \left(\sin \Omega_1 \tau \Delta_{1,\text{Im}} - \cos \Omega_1 \tau \Delta_{1,\text{Re}} \right) d\tau + \tilde{C}_{1,0} \right) + \\
&+ \dots + \\
&+ \frac{e^{-\beta_n t}}{\Delta} \left(\xi_{n,\text{Re}} \cos \Omega_n t - \xi_{n,\text{Im}} \sin \Omega_n t \right) \left(\int_{t_0}^t u(\tau) e^{\beta_n \tau} \left(\cos \Omega_n \tau \Delta_{n,\text{Im}} + \sin \Omega_n \tau \Delta_{n,\text{Re}} \right) d\tau + \tilde{C}_{n,0} \right) + \\
&+ \frac{e^{-\beta_n t}}{\Delta} \left(\xi_{n,\text{Re}} \sin \Omega_n t + \xi_{n,\text{Im}} \cos \Omega_n t \right) \left(\int_{t_0}^t u(\tau) e^{\beta_n \tau} \left(\sin \Omega_n \tau \Delta_{n,\text{Im}} - \cos \Omega_n \tau \Delta_{n,\text{Re}} \right) d\tau + \tilde{C}_{n,0} \right)
\end{aligned}$$

Если раскрыть скобки и воспользоваться формулами синуса и косинуса разности, то формула выше преобразуется в:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{\text{общ}}(t) &= \frac{1}{\Delta} \int_{t_0}^t -u(\tau) e^{-\beta_1(t-\tau)} \left\{ \Delta_{1,\text{Re}} \left(\xi_{1,\text{Re}} \sin(\Omega_1(t-\tau)) + \xi_{1,\text{Im}} \cos(\Omega_1(t-\tau)) \right) + \right. \\
&+ \Delta_{1,\text{Im}} \left(-\xi_{1,\text{Re}} \cos(\Omega_1(t-\tau)) + \xi_{1,\text{Im}} \sin(\Omega_1(t-\tau)) \right) \left. \right\} d\tau + \\
&\dots \\
&+ \frac{1}{\Delta} \int_{t_0}^t -u(\tau) e^{-\beta_n(t-\tau)} \left\{ \Delta_{n,\text{Re}} \left(\xi_{n,\text{Re}} \sin(\Omega_n(t-\tau)) + \xi_{n,\text{Im}} \cos(\Omega_n(t-\tau)) \right) + \right. \\
&+ \Delta_{n,\text{Im}} \left(-\xi_{n,\text{Re}} \cos(\Omega_n(t-\tau)) + \xi_{n,\text{Im}} \sin(\Omega_n(t-\tau)) \right) \left. \right\} d\tau +
\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}
& +e^{-\beta t} \left[\tilde{C}_{1,0} (\xi_{1,\text{Re}} \cos \Omega_1 t - \xi_{1,\text{Im}} \sin \Omega_1 t) + \tilde{C}_{1,0} (\xi_{1,\text{Re}} \sin \Omega_1 t + \xi_{1,\text{Im}} \cos \Omega_1 t) \right] + \\
& \dots \\
& +e^{-\beta_n t} \left[\tilde{C}_{n,0} (\xi_{n,\text{Re}} \cos \Omega_n t - \xi_{n,\text{Im}} \sin \Omega_n t) + \tilde{C}_{n,0} (\xi_{n,\text{Re}} \sin \Omega_n t + \xi_{n,\text{Im}} \cos \Omega_n t) \right]
\end{aligned}$$

Таким образом, решение складывается из двух частей: нижней, с постоянными свободными коэффициентами \tilde{C}_0 и верхней, с интегралом. Нижняя отвечает за релаксацию начальных условий, по сути – это формула гармонических колебаний с затуханием. В матричном виде она запишется как:

$$\mathbf{x}_{\text{релакс}}(t) = \mathbf{\Phi}(t) \cdot \tilde{\mathbf{C}}_0 = \mathbf{\Phi}(t) \cdot \mathbf{\Phi}^{-1}(t_0) \mathbf{x}(t_0) \quad (2.3)$$

Так как мы рассматриваем задачу переориентации из полного покоя, то $\mathbf{x}(t_0) = 0$, и связанной с релаксацией части нет. В дальнейшем мы не будем её писать при выводе формул.

Верхняя часть (2.2) отвечает за отклик системы на управление. То есть, решение зависит от управления только под интегралом, и поэтому именно эта часть формулы представляет интерес в нашем исследовании.

Мы получили решение в виде спектра. Отдельно стоит отметить, что решение складывается из n аналогичных независимых слагаемых, каждое из которых соответствует своей паре комплексно-сопряжённых СЗ и СВ. Поэтому можно без уменьшения общности анализировать влияние на амплитуду возбуждённых колебаний только от, например, первых двух слагаемых.

2.2. Естественная замена времени

Рассмотрим следующую функцию:

$$x(t) = \int_{t_0}^t u(\tau) e^{-\beta(t-\tau)} \sin(\omega(t-\tau)) d\tau \quad (2.4)$$

Оказывается, есть естественная замена переменной интегрирования, существенно упрощающая запись решения: $\tilde{\tau} = t - \tau$. Дифференциал переменной интегрирования при этом меняет знак: $d\tilde{\tau} = -d\tau$. Пределы

интегрирования заменяются на: $t_0 \rightarrow t - t_0$; $t \rightarrow 0$. Поменяв местами пределы интегрирования, знак меняется второй раз, оставаясь прежним.

Введём также естественную функцию управления $v(\tilde{\tau})$, заданную на \mathbb{R} , такую, что: $v(\tilde{\tau}) = v(t - \tau) = u(\tau)$. В частности, если k -ая производная $u(\tau)$ в точке существует, то $\frac{d^k v}{d\tau^k}(t - \tau) = (-1)^k \frac{d^k u}{d\tau^k}(\tau)$. Функция $v(t - \tau)$ - это функция $u(\tau)$, симметрично отражённая вокруг вертикальной оси в точке $(t - t_0) / 2$.

Применим вышеуказанные замены к (2.4):

$$x(t) = \int_0^{t-t_0} v(\tilde{\tau}) e^{-\beta \tilde{\tau}} \sin \omega \tilde{\tau} d\tilde{\tau} \quad (2.5)$$

Таким образом, интеграл инвариантен относительно естественной замены времени. Стерев над τ тильду и записав обе формулы в одной переменной, различия в записях станут минимальными. Будем далее везде иметь ввиду, что можно свободно переходить от одной записи к другой, не приводя лишней раз выражения к какой-нибудь одной из них. Из этих же соображений не будем различать и отдельные символы в выражениях. В следующем заголовке будут рассмотрены ключевые идеи, ведущие к решению.

2.3. Получение и применение рекуррентных интегральных соотношений

Получим формулу, которая будет общей для интегралов вида (2.5). Рассмотрим интегралы вида:

$$\begin{aligned} & \int e^{-\beta t} \sin(\Omega t + \varphi) dt \\ & \int e^{-\beta t} \cos(\Omega t + \varphi) dt \end{aligned} \quad (2.6)$$

Так как на данном этапе β – это просто параметр, который может принимать любое действительное значение, минус из показателя экспоненты в интеграле можно «засунуть» в этот параметр, произведя замену $\beta = -\beta$. Это упростит вычисления, а после получения результата можно, сделав обратную

замену, прийти к исходной задаче. Пользуясь этим приёмом, приведём точное решение интегралов в (2.6) с выводом:

$$\begin{aligned}
 I &= \int e^{\beta t} \overset{\text{cos}}{\sin}(\Omega t + \varphi) dt = \frac{1}{\beta} e^{\beta t} \overset{\text{cos}}{\sin}(\Omega t + \varphi) + \frac{\Omega}{\beta} \int e^{\beta t} \overset{\text{sin}}{\cos}(\Omega t + \varphi) dt = \\
 &= \frac{1}{\beta} e^{\beta t} \overset{\text{cos}}{\sin}(\Omega t + \varphi) + \frac{\Omega}{\beta^2} e^{\beta t} \overset{\text{sin}}{\cos}(\Omega t + \varphi) - \frac{\Omega^2}{\beta^2} \cdot I \\
 I &= \frac{\beta e^{\beta t} (\overset{\text{cos}}{\sin}(\Omega t + \varphi) + \frac{\Omega}{\beta} \overset{\text{sin}}{\cos}(\Omega t + \varphi))}{\beta^2 + \Omega^2} = \frac{e^{\beta t} (\beta \overset{\text{cos}}{\sin}(\Omega t + \varphi) + \Omega \overset{\text{sin}}{\cos}(\Omega t + \varphi))}{\beta^2 + \Omega^2}.
 \end{aligned}$$

Преобразование выполнено для верхнего интеграла в (2.6). Подписи «cos», «sin» мелким шрифтом и знак плюса демонстрируют преобразование второго интеграла, во многом аналогичное первому. Обозначим $\omega = \sqrt{\Omega^2 + \beta^2}$, $\phi = -\arcsin \frac{\Omega}{\omega}$ и преобразуем последнее выражение с помощью формулы сложения гармонических колебаний:

$$I = \frac{e^{\beta t}}{\omega} \sin(\Omega t + \varphi + \phi).$$

Здесь ω – частота свободных колебаний. Таким образом, для (2.6) получаем рекуррентные интегральные соотношения:

$$\begin{aligned}
 \int e^{-\beta t} \overset{\text{sin}}{\cos}(\Omega t + \varphi) dt &= \frac{1}{\omega} e^{-\beta t} \overset{\text{sin}}{\cos}(\Omega t + \varphi + \phi) \\
 \int e^{-\beta t} \overset{\text{sin}}{\cos}(\Omega t + \varphi + k\phi) dt &= \frac{1}{\omega} e^{-\beta t} \overset{\text{sin}}{\cos}(\Omega t + \varphi + (k+1)\phi) \\
 \phi &= -\arcsin \frac{\Omega}{\omega} \\
 \int e^{-\beta t} \overset{\text{cos}}{\sin}(\Omega t + \varphi) dt &= \frac{1}{\omega} e^{-\beta t} \overset{\text{cos}}{\sin}(\Omega t + \varphi + \phi_2) \\
 \int e^{-\beta t} \overset{\text{cos}}{\sin}(\Omega t + \varphi + k\phi_2) dt &= \frac{1}{\omega} e^{-\beta t} \overset{\text{cos}}{\sin}(\Omega t + \varphi + (k+1)\phi_2) \\
 \phi_2 &= \arccos \frac{\Omega}{\omega}
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

То есть, результатом взятия интеграла вида (2.6) является та же самая подынтегральная функция, поделённая на частоту свободных колебаний и сдвинутая на постоянную фазу ϕ .

Пусть $n \in \mathbb{N}$, и пусть все производные от 0 до $n-1$ порядка функции управления $u(\tau)$ на $[0, t]$ существуют и непрерывны. Тогда, обозначив за

$$I(t, u(t)) = \int u(t) e^{-\beta t} \sin \Omega t dt, \quad \text{применяя формулы (2.7) и технику}$$

интегрирования по частям к выражению (2.5), получим:

$$I(t, u(t)) = e^{-\beta t} \sum_{k=0}^n \frac{1}{\omega^{k+1}} \sin(\Omega t + k\phi) u^{(k)}(t) + \frac{1}{\omega^n} \int u^{(n)}(t) e^{-\beta t} \sin(\Omega t + n\phi) dt$$

2.4. Получение аналитической оценки

Теперь соберём формулы, полученные в предыдущих разделах, вместе. Как упоминалось в 2.1, для анализа достаточно рассмотреть лишь одно слагаемое из всей формулы. Также достаточно рассмотреть лишь один элемент из всего вектора. Будем рассматривать выражение:

$$I(t, u(t)) = -\frac{1}{\Delta} \int_{t_0}^t u(\tau) e^{-\beta(t-\tau)} \left\{ \Delta_{\text{Re}} (\xi_{\text{Re}} \sin(\Omega(t-\tau)) + \xi_{\text{Im}} \cos(\Omega(t-\tau))) + \right. \\ \left. + \Delta_{\text{Im}} (-\xi_{\text{Re}} \cos(\Omega(t-\tau)) + \xi_{\text{Im}} \sin(\Omega(t-\tau))) \right\} d\tau$$

Применим к нему естественную замену времени:

$$I(t, u(t)) = -\frac{1}{\Delta} \int_0^{t-t_0} v(\tilde{\tau}) e^{-\beta\tilde{\tau}} \left\{ \Delta_{\text{Re}} (\xi_{\text{Re}} \sin(\Omega\tilde{\tau}) + \xi_{\text{Im}} \cos(\Omega\tilde{\tau})) + \right. \\ \left. + \Delta_{\text{Im}} (-\xi_{\text{Re}} \cos(\Omega\tilde{\tau}) + \xi_{\text{Im}} \sin(\Omega\tilde{\tau})) \right\} d\tilde{\tau} \quad (2.8)$$

Введём новые обозначения:

$$\Delta_{\text{sin}} = (\Delta_{\text{Re}} \xi_{\text{Re}} + \Delta_{\text{Im}} \xi_{\text{Im}}) / \Delta \\ \Delta_{\text{cos}} = (\Delta_{\text{Re}} \xi_{\text{Im}} - \Delta_{\text{Im}} \xi_{\text{Re}}) / \Delta \quad (2.9)$$

Упростим (2.8) и произведём замену (2.9):

$$\begin{aligned}
I(t, u(t)) &= -\frac{1}{\Delta} \int_0^{t-t_0} v(\tilde{\tau}) e^{-\beta\tilde{\tau}} \left\{ \sin(\Omega\tilde{\tau}) (\Delta_{\text{Re}} \xi_{\text{Re}} + \Delta_{\text{Im}} \xi_{\text{Im}}) + \right. \\
&+ \left. \cos(\Omega\tilde{\tau}) (\Delta_{\text{Re}} \xi_{\text{Im}} - \Delta_{\text{Im}} \xi_{\text{Re}}) \right\} d\tilde{\tau} = \\
&= -\int_0^{t-t_0} v(\tilde{\tau}) e^{-\beta\tilde{\tau}} (\Delta_{\text{sin}} \sin \Omega\tilde{\tau} + \Delta_{\text{cos}} \cos \Omega\tilde{\tau}) d\tilde{\tau}
\end{aligned}$$

Теперь применим формулу сложения гармонических колебаний к вышеприведённому выражению, предварительно введя новые обозначения:

$$\begin{aligned}
\Delta_0 &= \sqrt{\Delta_{\text{sin}}^2 + \Delta_{\text{cos}}^2} \\
\varphi &= \arcsin\left(\frac{\Delta_{\text{cos}}}{\Delta_0}\right)
\end{aligned}$$

Итого получим:

$$I(t, u(t)) = -\int_0^{t-t_0} v(\tilde{\tau}) e^{-\beta\tilde{\tau}} \Delta_0 \sin(\Omega\tilde{\tau} + \varphi) d\tilde{\tau}$$

Пусть далее управление $u(t)$ имеет гладкость порядка l в начальный момент времени ($t = t_0$) и порядка r в конце манёвра ($t = t_1$). Другими словами,

$$\begin{aligned}
u^{(k)}(t) \Big|_{t=t_0} &= (-1)^k v^{(k)}(t_1 - t) \Big|_{t=t_0} = 0, \quad k < l \\
u^{(l)}(t) \Big|_{t=t_0} &= (-1)^l v^{(l)}(t_1 - t) \Big|_{t=t_0} \neq 0, \\
u^{(k)}(t) \Big|_{t=t_1} &= (-1)^k v^{(k)}(t_1 - t) \Big|_{t=t_1} = 0, \quad k < r \\
u^{(r)}(t) \Big|_{t=t_1} &= (-1)^r v^{(r)}(t_1 - t) \Big|_{t=t_1} \neq 0.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Тогда:

$$\begin{aligned}
I(t_1, u(t)) &= -\int_0^{t_1-t_0} v(\tilde{\tau}) e^{-\beta\tilde{\tau}} \Delta_0 \sin(\Omega\tilde{\tau} + \varphi) d\tilde{\tau} = \\
&= -\frac{\Delta_0}{\omega} v(\tilde{\tau}) e^{-\beta\tilde{\tau}} \sin(\Omega\tilde{\tau} + \varphi + \phi) \Big|_0^{t_1-t_0} + \frac{\Delta_0}{\omega} \int_0^{t_1-t_0} v^{(1)}(\tilde{\tau}) e^{-\beta\tilde{\tau}} \sin(\Omega\tilde{\tau} + \varphi + \phi) d\tilde{\tau} = \\
&\dots \\
&= \Delta_0 \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^{k+1}}{\omega^{k+1}} v^{(k)}(\tilde{\tau}) e^{-\beta\tilde{\tau}} \sin(\Omega\tilde{\tau} + \varphi + (k+1)\phi) \Big|_0^{t_1-t_0} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\Delta_0 \frac{(-1)^{N+1}}{\omega^{N+1}} \int_0^{t_1-t_0} v^{(N+1)}(\tilde{\tau}) e^{-\beta\tilde{\tau}} \sin(\Omega\tilde{\tau} + \varphi + (N+1)\phi) d\tilde{\tau} = \\
& = \Delta_0 \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^{k+1}}{\omega^{k+1}} v^{(k)}(t_1 - t_0) e^{-\beta(t_1-t_0)} \sin(\Omega(t_1 - t_0) + \varphi + (k+1)\phi) - \\
& - \Delta_0 \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^{k+1}}{\omega^{k+1}} v^{(k)}(0) \sin(\varphi + (k+1)\phi) + \\
& + \Delta_0 \frac{(-1)^{N+1}}{\omega^{N+1}} \int_0^{t_1-t_0} v^{(N+1)}(\tilde{\tau}) e^{-\beta\tilde{\tau}} \sin(\Omega\tilde{\tau} + \varphi + (N+1)\phi) d\tilde{\tau}
\end{aligned}$$

Имея ввиду (2.10), первые l членов первой суммы, и первые r членов второй суммы зануляются:

$$\begin{aligned}
& \Delta_0 \sum_{k=0}^{l-1} \frac{(-1)^{k+1}}{\omega^{k+1}} v^{(k)}(t_1 - t_0) e^{-\beta(t_1-t_0)} \sin(\Omega(t_1 - t_0) + \varphi + (k+1)\phi) = 0 \\
& \Delta_0 \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(-1)^{k+1}}{\omega^{k+1}} v^{(k)}(0) \sin(\varphi + (k+1)\phi) = 0
\end{aligned}$$

Таким образом, на решение начинают влиять первые ненулевые производные функции управления. Решение для исходной системы записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
x(t_1) & = \Delta_0 \sum_{k=l}^N \frac{(-1)^{k+1}}{\omega^{k+1}} v^{(k)}(t_1 - t_0) e^{-\beta(t_1-t_0)} \sin(\Omega(t_1 - t_0) + \varphi + (k+1)\phi) - \\
& - \Delta_0 \sum_{k=r}^N \frac{(-1)^{k+1}}{\omega^{k+1}} v^{(k)}(0) \sin(\varphi + (k+1)\phi) + \\
& + \Delta_0 \frac{(-1)^{N+1}}{\omega^{N+1}} \int_0^{t_1-t_0} v^{(N+1)}(\tilde{\tau}) e^{-\beta\tilde{\tau}} \sin(\Omega\tilde{\tau} + \varphi + (N+1)\phi) d\tilde{\tau}
\end{aligned}$$

Сделаем замену от $v(t)$ к $u(t)$, заодно избавимся от $(-1)^k$ в формуле:

$$\begin{aligned}
x(t_1) = & \underbrace{\Delta_0 \sum_{k=l}^N \frac{1}{\omega^{k+1}} u^{(k)}(t_0) \cdot e^{-\beta(t_1-t_0)} \sin(\Omega(t_1-t_0) + \varphi + (k+1)\phi)}_{(1)} - \\
& - \underbrace{\Delta_0 \sum_{k=r}^N \frac{1}{\omega^{k+1}} u^{(k)}(t_1) \sin(\varphi + (k+1)\phi)}_{(2)} + \\
& + \underbrace{\Delta_0 \frac{1}{\omega^{N+1}} \int_0^{t_1-t_0} u^{(N+1)}(t_1-\tilde{\tau}) e^{-\beta\tilde{\tau}} \sin(\Omega\tilde{\tau} + \varphi + (N+1)\phi) d\tilde{\tau}}_{(3)}
\end{aligned} \tag{2.11}$$

В (2.11) первая часть представляет собой влияние негладкости управления в начале манёвра. Возбуждись в момент времени $(t = t_0)$, эти колебания за время манёвра успели уменьшиться вследствие затухания, что отражено в домножении на экспоненту. Вторая часть представляет влияние негладкости управления в конце манёвра. Здесь экспоненты нет, так как эффект рассматривается сразу же после породившей его причины. Третья же часть представляет влияние высших производных функции управления на всём манёвре, а не только на его концах. Конечно, взятием интеграла по частям дополнительный раз можно перевести часть влияния из 3 части в 1 и во 2.

После того, как система достигает конца манёвра, её дальнейшая эволюция определяется обыкновенной релаксацией, описываемой уравнением (2.3), где система испытывает гармонические колебания с затуханием около новой достигнутой целевой ориентации. Непосредственно в точку между управлением и релаксацией система приходит с какой-то фазой, и с точно такой же фазой она начинает релаксировать. В (2.11) в первых двух частях за эту фазу отвечают функции синуса. Соответственно, всё, что стоит в них до синуса, суть искомая амплитуда:

$$\begin{aligned}
A(t_1) = & \underbrace{\Delta_0 \sum_{k=l}^N \frac{1}{\omega^{k+1}} |u^{(k)}(t_0)| \cdot e^{-\beta(t_1-t_0)}}_{(1)} + \underbrace{\Delta_0 \sum_{k=r}^N \frac{1}{\omega^{k+1}} |u^{(k)}(t_1)|}_{(2)} + \\
& \underbrace{\Delta_0 \frac{1}{\omega^{N+1}} \int_0^{t_1-t_0} u^{(N+1)}(t_1 - \tilde{\tau}) e^{-\beta \tilde{\tau}} \sin(\Omega \tilde{\tau} + \varphi + (N+1)\phi) d\tilde{\tau}}_{(3)}
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Отдельно стоит оговорить полученные формулы (2.11) и (2.12) с точки зрения энергии. Известно, что для гармонического осциллятора полная энергия сохраняется, а для осциллятора с затуханием – в среднем равномерно убывает [21]. Если есть возбуждающая сила – то она, наоборот, может накачивать энергию в систему. В любом случае, полная энергия осциллятора не осциллирует или осциллирует с небольшой амплитудой – в отличие от фазовой переменной. Так и в нашей системе, которая на деле является суммой действия n осцилляторов: при управлении КА, помимо непосредственного совершения манёвра, происходит также накачка системы энергией. К концу манёвра система будет обладать некоторой энергией, пропорциональной амплитуде, и состоящей из кинетической и потенциальной частей. У потенциальной части в виде фазовой координаты есть дополняющая её кинетическая часть в виде фазовой скорости. Сложив их вместе правильным образом, можно также оценить искомую амплитуду колебаний.

Возвращаясь к (2.2), вспомним, что на самом деле решение у нас является суммой n независимых колебаний, каждое – со своей собственной частотой Ω_i и со своим коэффициентом затухания β_i . Таким образом, чтобы получить выражение для полного решения, надо просуммировать выражение (2.11) по всем частотам:

$$\begin{aligned}
x(t_1) = & \Delta_0 \sum_{i=1}^n \sum_{k=l}^N \frac{1}{\omega_i^{k+1}} u^{(k)}(t_0) \cdot e^{-\beta_i(t_1-t_0)} \sin(\Omega_i(t_1-t_0) + \varphi + (k+1)\phi) - \\
& - \Delta_0 \sum_{i=1}^n \sum_{k=r}^N \frac{1}{\omega_i^{k+1}} u^{(k)}(t_1) \sin(\varphi + (k+1)\phi) + \\
& + \Delta_0 \sum_{i=1}^n \frac{1}{\omega_i^{N+1}} \int_0^{t_1-t_0} u^{(N+1)}(t_1-\tilde{\tau}) e^{-\beta_i\tilde{\tau}} \sin(\Omega_i\tilde{\tau} + \varphi + (N+1)\phi) d\tilde{\tau}
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Если применить к каждому слагаемому в первой сумме рассуждения, аналогичные описанным выше, то можно оценить общую амплитуду системы:

$$\begin{aligned}
A(t_1) = & \Delta_0 \sum_{i=1}^n \sum_{k=l}^N \frac{1}{\omega_i^{k+1}} |u^{(k)}(t_0)| \cdot e^{-\beta_i(t_1-t_0)} + \Delta_0 \sum_{i=1}^n \sum_{k=r}^N \frac{1}{\omega_i^{k+1}} |u^{(k)}(t_1)| + \\
& + \Delta_0 \sum_{i=1}^n \frac{1}{\omega_i^{N+1}} \left| \int_0^{t_1-t_0} u^{(N+1)}(t_1-\tilde{\tau}) e^{-\beta_i\tilde{\tau}} \sin(\Omega_i\tilde{\tau} + \varphi + (N+1)\phi) d\tilde{\tau} \right|
\end{aligned} \tag{2.14}$$

На практике выражение (2.14) – в отличие от выражения (2.12) – не достигается даже в теории. Из-за разных фаз и частот все синусы одновременно не обращаются в единицы. Тем не менее выражение (2.14) всё равно имеет практический интерес, так как позволяет оценить колебания системы сверху.

2.5. Физический смысл как соотношение неопределённостей

Полезно получить предыдущие две формулы в несколько другом виде, а именно в таком, чтобы все множители, связанные с частотой, были полностью обезразмерены. Сперва сделаем несколько полезных замен. Во-первых, обозначим время манёвра $T = t_1 - t_0$, а во-вторых, введём приведённую функцию управления и приведённые производные функции управления:

$$\begin{aligned}
\tilde{u}(t) & \triangleq u(t) \cdot T / 2\pi \\
\tilde{u}^{(k)}(t) & \triangleq u^{(k)}(t) \cdot T^{k+1} / (2\pi)^{k+1}
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Новые функции (2.15) представляют интерес ещё и вот по какой причине. Коэффициенты внутри функции управления существенно зависят от общего

времени манёвра. Если манёвр переориентации выполняется в течение более долгого времени, то системой можно управлять более мягко. В таком случае, величина управления будет меньше в каждый момент меньше, чем при коротком манёвре. Приведённые функции управления нормированы по T (хоть всё ещё не независимы от него).

Произведём замену функций (2.13) и (2.14) на их приведённые версии:

$$\begin{aligned}
 x(t_1) = & \Delta_0 \sum_{i=1}^n \sum_{k=l}^N \left(\frac{2\pi}{\omega_i T} \right)^{k+1} \tilde{u}^{(k)}(t_0) \cdot e^{-\beta_i(t_1-t_0)} \sin(\Omega_i T + \varphi + (k+1)\phi) - \\
 & - \Delta_0 \sum_{i=1}^n \sum_{k=r}^N \left(\frac{2\pi}{\omega_i T} \right)^{k+1} \tilde{u}^{(k)}(t_1) \sin(\varphi + (k+1)\phi) + \\
 & + \Delta_0 \sum_{i=1}^n \left(\frac{2\pi}{\omega_i T} \right)^{N+1} \int_0^{t_1-t_0} \tilde{u}^{(N+1)}(t_1 - \tilde{\tau}) e^{-\beta_i \tilde{\tau}} \sin(\Omega_i \tilde{\tau} + \varphi + (N+1)\phi) d\tilde{\tau}
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}
 A(t_1) = & \Delta_0 \sum_{i=1}^n \sum_{k=l}^N \left(\frac{2\pi}{\omega_i T} \right)^{k+1} |\tilde{u}^{(k)}(t_0)| \cdot e^{-\beta_i(t_1-t_0)} + \Delta_0 \sum_{i=1}^n \sum_{k=r}^N \left(\frac{2\pi}{\omega_i T} \right)^{k+1} |\tilde{u}^{(k)}(t_1)| + \\
 & + \Delta_0 \sum_{i=1}^n \left(\frac{2\pi}{\omega_i T} \right)^{N+1} \left| \int_0^{t_1-t_0} \tilde{u}^{(N+1)}(t_1 - \tilde{\tau}) e^{-\beta_i \tilde{\tau}} \sin(\Omega_i \tilde{\tau} + \varphi + (N+1)\phi) d\tilde{\tau} \right|
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Непосредственно перед управлением и его производными теперь стоит величина $\omega_i T$, которая является безразмерной и соответствует нарастанию фазы колебаний за всё время манёвра. В физике, в частности, в радиотехнике, эта величина участвует в соотношении неопределённостей: $\frac{\omega_i T}{2\pi} \sim 1$.

Перейдём от частоты колебаний ω_i к периоду $T_i = 2\pi / \omega_i$, тогда $\frac{\omega_i T}{2\pi} = \frac{T}{T_i}$, а это

является количеством полных колебаний за время манёвра. В случае, если за время манёвра конкретная колебательная мода успевает испытать несколько

полных колебаний, то $\omega_i T > 2\pi$, и величина $\left(\frac{2\pi}{\omega_i T} \right)^N$ уменьшается с ростом N

показательным образом. Таким образом, производные более высоких

порядков в (2.17) будут вносить гораздо меньший вклад в амплитуду колебаний.

Больше об этом будет упомянуто в разделе 2.8.

2.6. Случай управления в виде алгебраического полинома

Пусть опорная траектория – алгебраический полином степени M :

$$\beta(t) = \sum_{k=0}^M \beta_k \cdot t^k$$

Для того, чтобы опорная траектория согласовывалась с начальными и конечными условиями манёвра, требуется достаточное количество параметров β_k , т.е. требуется взять подходящее M . Оценим его. Минимально требуется 3 параметра для начальных условий и 3 для конечных, таким образом, минимально возможной опорной траекторией является полином 5 степени, а минимально возможным управлением – кубический полином.

Далее, если мы требуем гладкость управления l в начале манёвра и гладкость r в конце – это значит, что полином управления должен быть минимум $l+r+2$ степени (l первых производных в начале манёвра равны нулю, включая само управление, и ещё одна, $l+1$ – не равна нулю. Аналогично для конца манёвра), а полином опорной траектории – $l+r+4$ степени. Исходя из всего выше сказанного, $l+r+4 \leq M+1$, т.е. $M \geq l+r+3$.

Обратим внимание также, что взятие производной от такой функции $M+1$ раз обращает её в нуль: $\beta^{(M+1)}(t) \equiv 0$. Управление, как вторая производная от опорной траектории, тоже будет являться алгебраическим полиномом, но $M-2$ степени. Взятие производной от функции управления $M-1$ раз обратят её в нуль.

Таким образом, подынтегральная функция в (2.13) и (2.14) обращается в тождественный нуль, если в ней стоит производная управления порядка $M-1$ или выше:

$$\int_0^{t_1-t_0} u^{(N)}(t_1 - \tilde{\tau}) e^{-\beta_i \tilde{\tau}} \sin(\Omega_i \tilde{\tau} + \varphi + N\phi) d\tilde{\tau} = 0, \quad N \geq M - 1 \quad (2.18)$$

Тогда решение СДУ и оценка амплитуды будут выглядеть следующим образом:

$$x(t_1) = \Delta_0 \sum_{i=1}^n \sum_{k=l}^{M-1} \frac{1}{\omega_i^{k+1}} u^{(k)}(t_0) \cdot e^{-\beta_i(t_1-t_0)} \sin(\Omega_i(t_1-t_0) + \varphi + (k+1)\phi) - \Delta_0 \sum_{i=1}^n \sum_{k=r}^{M-1} \frac{1}{\omega_i^{k+1}} u^{(k)}(t_1) \cdot \sin(\varphi + (k+1)\phi) \quad (2.19)$$

$$A(t_1) = \Delta_0 \sum_{i=1}^n \sum_{k=l}^{M-1} \frac{1}{\omega_i^{k+1}} |u^{(k)}(t_0)| \cdot e^{-\beta_i(t_1-t_0)} + \Delta_0 \sum_{i=1}^n \sum_{k=r}^{M-1} \frac{1}{\omega_i^{k+1}} |u^{(k)}(t_1)| \quad (2.20)$$

В выражениях (2.19) и (2.20) больше ничего не зависит от вида функции управления на всём манёвре, и эти выражения определяются исключительно производными на концах. Это является исключительно свойством алгебраических полиномов. Оценка амплитуды находится двойным суммированием постоянных значений: по всем частотам и по всем высшим производным.

2.7. Общий случай

Рассмотрим теперь общий случай, когда управление не обязательно является алгебраическим полиномом, а является произвольной функцией (удовлетворяющей при этом всем условиям задачи). В общем случае интеграл (2.18) не получится занулить, но его можно оценить сверху. Пусть $u^{(N)}(t)$ – ограниченная на $[t_0, t_1]$ и непрерывная на (t_0, t_1) функция. Тогда:

$$\frac{1}{\omega_i^{N+1}} \int_0^{t_1-t_0} u^{(N)}(t_1 - \tilde{\tau}) e^{-\beta_i \tilde{\tau}} \sin(\Omega_i \tilde{\tau} + \varphi + N\phi) d\tilde{\tau} \leq \frac{1}{\omega_i^{N+1}} \max_{t \in (t_0, t_1)} (u^{(N)}(t)) \cdot (t_1 - t_0) \quad (2.21)$$

Оценка (2.21) очень грубая, так как синус – это осциллирующая функция, принимающая значения от -1 до 1, но это не должно иметь критичное значение, так как обычно на практике, чем больше порядок производной, тем

кратно меньше её вклад в общую оценку амплитуды, поэтому когда N больше l и r , то величиной $u^{(N)}(t)$ можно будет пренебречь.

В любом случае, выражение для оценки амплитуды в (2.14) запишется как

$$A(t_1) = \Delta_0 \sum_{i=1}^n \sum_{k=l}^{M-1} \frac{1}{\omega_i^{k+1}} |u^{(k)}(t_0)| \cdot e^{-\beta_i(t_1-t_0)} + \Delta_0 \sum_{i=1}^n \sum_{k=r}^{M-1} \frac{1}{\omega_i^{k+1}} |u^{(k)}(t_1)| + \\ + \Delta_0 \sum_{i=1}^n \frac{1}{\omega_i^{N+1}} \max_{t \in (t_0, t_1)} (|u^{(N)}(t)|) \cdot (t_1 - t_0), \quad (2.22)$$

а для оценки амплитуды в (2.17) – как

$$A(t_1) = \Delta_0 \sum_{i=1}^n \sum_{k=l}^N \left(\frac{2\pi}{\omega_i T} \right)^{k+1} |\tilde{u}^{(k)}(t_0)| \cdot e^{-\beta_i(t_1-t_0)} + \Delta_0 \sum_{i=1}^n \sum_{k=r}^N \left(\frac{2\pi}{\omega_i T} \right)^{k+1} |\tilde{u}^{(k)}(t_1)| + \\ + \Delta_0 \sum_{i=1}^n \left(\frac{2\pi}{\omega_i T} \right)^{N+1} \max_{t \in (t_0, t_1)} (|\tilde{u}^{(N)}(t)|) \cdot (t_1 - t_0) \quad (2.23)$$

2.8. Критерий выбора функции управления

Пусть даны две различные функции управления с различной гладкостью в начале и в конце манёвра, обеспечивающие один и тот же манёвр переориентации за одно и то же время $T = t_1 - t_0$:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1(t) & u_2 &= u_2(t) \\ u_1^{(k)}(t_0) &= 0, k < l_1 & u_2^{(k)}(t_0) &= 0, k < l_2 \\ u_1^{(k)}(t_1) &= 0, k < r_1 & u_2^{(k)}(t_1) &= 0, k < r_2 \\ \lim_{t \rightarrow t_0^+} u_1^{(l_1)}(t) &= u_{1l} \neq 0 & \lim_{t \rightarrow t_0^+} u_2^{(l_2)}(t) &= u_{2l} \neq 0 \\ \lim_{t \rightarrow t_1^+} u_1^{(r_1)}(t) &= u_{1r} \neq 0 & \lim_{t \rightarrow t_1^+} u_2^{(r_2)}(t) &= u_{2r} \neq 0 \end{aligned}$$

Разработаем критерий, согласно которому можно будет выбирать из двух функций ту, которая возбуждает колебания меньшей амплитуды. Если амплитуда задаётся (2.22), то ясно, что надо выбирать то управление, для которого эта формула даст меньший результат. Таким образом, искомым критерием является величина $\delta \triangleq A_2 / A_1$.

Попробуем же, однако, упростить вычисления. При делении амплитуд друг на друга сокращается общая величина Δ_0 . Это сильно упростит компьютерную сложность вычисления, так как не нужно будет считать множество детерминантов (2.1). С другой стороны, вычисление величины Δ_0 достаточно произвести всего лишь раз, так как она связана со спектральными величинами задачи и потому неизменна. Для дальнейшего упрощения выражения (2.22) необходимо будет жертвовать точностью формулы чтобы пренебрегать малыми величинами.

Для упрощения выражения (2.22) можно применить следующие действия:

1. Пренебречь вкладом слагаемых первой суммы за счёт убывающей экспоненты
2. Рассмотреть слагаемые с наименьшей частотой
3. Рассмотреть слагаемые с наименьшей степенью производных управления

Разумеется, каждое из этих действий следует применять, только если это применение допустимо условиями задачи. Например, в системе могут быть очень маленькие постоянные затухания β_i , и в таком случае первое упрощение не позволит, скорее всего, занулить первую сумму полностью. Третье упрощение должно начинать работать, начиная с некоторой степени производных, так как величина производных всё более высокого порядка на практике обычно очень быстро снижается с увеличением порядка. Второе упрощение, впрочем, по-видимому, можно применять всегда.

Пусть $\omega_i T > 2\pi$, где i – номер наименьшей частоты. Величина $\omega_i T$ удобна, потому что она безразмерная. Поэтому отталкиваться от (2.23) вместо (2.22) немного удобнее. Итак, каждое следующее слагаемое в сумме в (2.23) будет меньше в $\omega_i T / 2\pi$ раз. Слагаемым с интегралом можно пренебречь. Переведя для ёмкости приведённые функции обратно к первоначальным, получим:

$$\frac{A_2}{A_1} \approx \frac{\max\left(\frac{|u_2^{(l_2)}(t_0)|}{\omega_i^{l_2+1}} \cdot e^{-\beta_i T}, \frac{|u_2^{(r_2)}(t_1)|}{\omega_i^{r_2+1}}\right)}{\max\left(\frac{|u_1^{(l_1)}(t_0)|}{\omega_i^{l_1+1}} \cdot e^{-\beta_i T}, \frac{|u_1^{(r_1)}(t_1)|}{\omega_i^{r_1+1}}\right)}$$

Трактовать это надо так: для каждого управления рассматривается та негладкость, что вносит больший вклад в амплитуду – в начале манёвра или в конце – и далее в критерий идёт их отношение. К примеру, если функция управления обладает большой гладкостью в конце манёвра, но маленькой в начале – то вероятнее всего больший вклад будет вносить то слагаемое, что относится к началу манёвра, несмотря на наличие убывающей экспоненты в нём.

Итак, пусть для примера в обеих частях отношение наибольшим будет второе выражение – связанное с концом манёвра. Тогда:

$$\frac{A_2}{A_1} \approx \frac{|u_2^{(r_2)}(t_1)|}{\omega_i^{r_2+1}} \cdot \frac{\omega_i^{r_1+1}}{|u_1^{(r_1)}(t_1)|} = \frac{|u_2^{(r_2)}(t_1)|}{|u_1^{(r_1)}(t_1)|} \cdot \omega_i^{r_1-r_2}$$

Аналогичное выражение получилось бы, если решающий вклад будет вносить другая часть. Запишем критерий в более общем и более простом виде. Пусть u_{10} – значение первой ненулевой производной, рассматриваемой в нужный момент времени (начало или конец манёвра) для первого управления, а u_{20} – аналогично для второго. Пусть также n_1 и n_2 – порядки этих производных (n может быть как l , так и r). Тогда:

$$\delta \approx \frac{u_{20}}{u_{10}} \cdot (\omega_i)^{n_1-n_2} = \frac{\tilde{u}_{20}}{\tilde{u}_{10}} \cdot \left(\frac{\omega_i T}{2\pi}\right)^{n_1-n_2} \quad (2.24)$$

Из этого видно, что если $\omega_i T > 2\pi$, то менее гладкая функция, при последовательном увеличении T , начиная с какого-то момента, будет проигрывать более гладкой.

Если $\omega_i T < 2\pi$, то каждое следующее слагаемое в сумме (2.23) будет не меньше, а, наоборот, больше в $\omega_i T / 2\pi$ раз, и соотношение амплитуд

становится менее очевидным, хотя общие рассуждения всё ещё можно провести. Увеличение каждого последующего слагаемого с более высокой производной в $\omega_i T / 2\pi$ раз побуждает нас использовать менее гладкие функции управления с меньшим порядком гладкости в начале и в конце манёвра. При последовательном уменьшении T , начиная с какого-то момента эффект от использования менее гладкого управления будет обеспечивать меньшую амплитуду колебаний. На практике, однако, выигрыш от использования менее гладкой функции оказывается относительно небольшим (см. главу 3).

Таким образом, заявленный критерий работает следующим образом: сравнивая δ с единицей, выбирается одна из двух функций управления: $u_1(t)$ или $u_2(t)$. Если δ много больше 1 – то целесообразнее использовать вторую функцию $u_2(t)$. Если же δ много меньше 1 – то целесообразнее использовать первую функцию $u_1(t)$. Если выражение сравнимо с единицей – по критерию нельзя определить, какая из функций более выгодна с точки зрения уменьшения амплитуды колебаний, и можно выбирать любую из них – результат будет отличаться слабо. Если требуется выбрать управление среди множества кандидатов – то надо применять критерий (2.24) к функциям попарно.

Интересно обсудить полученный критерий с точки зрения упомянутого ранее соотношения неопределённостей. Величина $\omega_i T / 2\pi$, как уже упоминалось ранее, имеет физический смысл. Она определяет, сколько полных колебаний приходится на время манёвра. Таким образом, критерий можно сформулировать и так: если за время манёвра все собственные частоты свободных колебаний ω_i испытают полное колебание, то более гладкая функция однозначно будет выигрывать у менее гладкой (если соответствующие производные одной величины).

3. Численное моделирование

Эта глава посвящена описанию алгоритмов и методов, использованных в работе, а также проведённым численным экспериментам. Начиная с раздела 3.3 приводятся описания и результаты конкретных численных экспериментов. Описание экспериментов в разделах упорядочены от более простого к более сложному. В экспериментах сравниваются как влияние двух различных функций управления на систему, так и теоретические оценки с величинами, промоделированными численно.

3.1. Методика

Сперва опишем общую методику проведения числового эксперимента. Его можно разделить на следующие шаги:

1. Задание функции опорной траектории
2. Задание функции управления
3. Интегрирование уравнений движения
4. Определение амплитуды колебаний
5. Отображение результатов

Весь численный эксперимент проводился на языке программирования **Python 3** в среде **Jupyter Lab**. В работе были использованы общедоступные библиотеки **math**, **numpy**, **numpy.linalg**, **scipy**, **scipy.integrate**, **scipy.misc**, **scipy.interpolate**, **matplotlib.pyplot**, **matplotlib.gridspec**, **matplotlib.ticker**, **cycler**, **copy**.

Для задания функции опорной траектории использовался интерполятор **KroghInterpolator** из пакета **scipy.interpolate**. Интерполятор принимает в качестве аргументов пары значений (x_i, y_i) интерполируемой функции, а также может принимать значения её производных. Возвращает интерполятор объект-функцию, к которой можно обращаться по аргументу. Помимо самой функции опорной траектории, интерполятор может возвращать любую производную этой функции. В работе интерполятору передавались начальные и конечные значения опорной траектории и значения, соответствующие

задаваемой гладкости управления. Если обращаться к функции опорной траектории вне промежутка манёвра, то она не обращается к интерполятору, а возвращает значение, соответствующее движению без управления.

Функция управления находится по формуле $u(t) = J \cdot \ddot{\beta}(t)$. Так как интерполятор может возвращать любую производную опорной функции $\beta(t)$, функция управления получается тривиальным образом.

В рамках моделирования для интегрирования уравнений движения использовалась функция `solve_ivp` библиотеки `scipy.integrate`. Уравнения движения интегрировались в матричной форме (1.5) с помощью метода RK45 (Рунге-Кутты 5(4) порядка).

Определение амплитуды возбуждённых в процессе манёвра колебаний будет рассмотрено отдельно в следующем разделе, так как эта часть численного моделирования не является тривиальной.

Для отображения результатов в виде графиков использовался инструментарий библиотеки `matplotlib`. Был также реализован собственный класс для автоматического оформления графиков. Были построены графики от времени для опорной траектории β , абсолютной и относительной координат α и γ , абсолютной и относительной скоростей ω и $\dot{\gamma}$, координат и скоростей колебательных мод q_i и \dot{q}_i , свободных коэффициентов \tilde{C}_i . Также были построены сводные графики, отображающих оценку амплитуд при разных временах манёвра и разных гладкостях управления l и r .

3.2. О способах оценки амплитуды колебаний

На практике величина амплитуды колебаний не всегда может быть легко оценена по графику. К тому же, стоит задача автоматической оценки амплитуды – программным образом. Этот раздел посвящён различным способам оценки этой амплитуды.

За величину амплитуды естественно взять ту же величину, что и в формуле (2.17), т.е. максимальную величину угловой координаты сразу после конца манёвра. Проблема заключается в том, что в эту точку система

приходится с какой-то фазой, и потому значение угловой координаты само по себе будет меньше амплитуды. Можно попытаться взять некоторый следующий по времени момент, когда в процессе колебаний координата достигнет максимального значения, однако при этом произойдёт затухание колебаний, поэтому полученное значение будет также меньше искомой амплитуды.

Для того, чтобы оценить амплитуду более точно, было предложено несколько способов. Первый – оценка величины затухания колебаний за время релаксации и затем масштабирование полученного значения амплитуды на эту величину. Оценить величину затухания можно либо по известным постоянным затухания β_i , либо непосредственно по полученным при моделировании значениям. В данной работе был использован второй способ. Общая идея состоит в следующем: надо отметить два последовательных локальных максимума колебаний. Между собой они должны отличаться как раз затуханием, которое выражается убывающей экспонентой. Если продолжить эту экспоненту назад, то можно найти искомую амплитуду.

Распишем эту идею подробнее. Пусть t_1 – конец манёвра, t_2 – положение первого максимума, t_3 – положение второго. Далее, пусть y_2 – значение первого максимума, а y_3 – значение второго. Запишем также формулу, описывающую затухание:

$$f(t) = \exp(-\lambda(t - t_0))$$

Тогда:

$$y_2 = f(t_2) = \exp(-\lambda(t_2 - t_0)),$$

$$y_3 = f(t_3) = \exp(-\lambda(t_3 - t_0))$$

В этой формуле неизвестны два параметра: λ и t_0 . Их можно выразить:

$$\lambda = -\frac{\ln y_3 - \ln y_2}{t_3 - t_2} = -\frac{\ln \frac{y_3}{y_2}}{t_3 - t_2},$$

$$t_0 = -\frac{t_2 \ln y_3 - t_3 \ln y_2}{\lambda(t_3 - t_2)} = \frac{t_2 \ln y_3 - t_3 \ln y_2}{\ln y_3 - \ln y_2}$$

Теперь чтобы получить искомую оценку амплитуды, нужно просто подставить t_1 в $f(t)$.

Однако стоит ещё обсудить способы локализации этих локальных максимумов. Здесь есть ряд проблем. Во-первых, максимумы ищутся среди дискретных наборов значений. Во-вторых, нас интересуют основные пики в качестве локальных максимумов. Так как решение задачи (2.16) является суперпозицией отдельных колебаний, то рядом с основными пиками будут многочисленные, но небольшие второстепенные. Требуется создать алгоритм, который будет искать локальные максимумы в виде основных пиков, не включая при этом вторичные.

Были предложены два таких алгоритма. Первый мы назвали методом k -соседей, и он заключается в поиске локальных максимумов традиционным способом: точка сравнивается со своими соседями, и если она их больше, то она становится локальным максимумом. Отличие от традиционного способа здесь, однако в большем количестве соседей: k слева и k справа. Обычно k выбиралось от 20 до 30. Таким образом, мелкие, второстепенные пики будут пропускаться, так как у них меньше соседних точек. Минус метода заключается в том, что для его корректной работы нужно заранее подбирать параметр k .

Второй метод поиска локальных максимумов эксплуатирует тот факт, что максимум ищется от системы с колебаниями, и что между каждыми двумя основными пиками находится основной отрицательный пик (впадина), а между основным пиком и основной впадиной обязательно находится ноль. Таким образом, этот метод ищет все нули функции, а затем в качестве максимума берёт наибольшее значение между двумя нулями (в случае если

между нулями пик, а не впадина). Для этого метода не требуется заведомо подбирать параметры, однако у него есть свои недостатки. Например, если есть второстепенное мелкое колебание около нуля, то может оказаться, что оно пересечёт ноль дважды, и таким образом в локальный максимум выберется второстепенный максимум вместе с основными, большими максимумами. Оба метода поиска локальных максимумов в колебаниях дают приемлемые результаты.

Помимо масштабирования по затуханию, был предложен и другой способ оценки амплитуды, основанный на рассуждениях, аналогичных рассуждениям на 21 странице. Там, в частности, говорилось, что можно оценить амплитуду, сложив фазовую координату и фазовую скорость определённым образом. Этот способ применим для гармонических колебаний с затуханием вообще. Распишем его.

Пусть есть физическая величина $s(t)$, описываемая законом гармонического осциллятора с затуханием:

$$\begin{aligned} s(t) &= A \cdot \sin(\Omega t + \phi) \cdot \exp(-\beta t) \\ s'(t) &= A \cdot (\Omega \cos(\Omega t + \phi) \cdot \exp(-\beta t) - \beta \sin(\Omega t + \phi) \cdot \exp(-\beta t)) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Выразим синус и косинус:

$$\begin{aligned} \sin(\Omega t + \phi) &= s(t) \cdot \exp(\beta t) / A \\ \cos(\Omega t + \phi) &= (s'(t) \cdot \exp(\beta t) + \beta \cdot s(t) \cdot \exp(\beta t)) / \Omega A \end{aligned}$$

Подставим эти значения в тригонометрическое тождество и выразим A :

$$\begin{aligned} \left(\frac{s(t) \cdot \exp(\beta t)}{A} \right)^2 + \left(\frac{s'(t) \cdot \exp(\beta t) + \beta \cdot s(t) \cdot \exp(\beta t)}{\Omega A} \right)^2 &= 1 \\ A &= \exp(\beta t) \cdot \sqrt{s^2 + \frac{1}{\Omega^2} (s' + \beta s)^2} \end{aligned}$$

Теперь, имея ввиду, что затухание здесь не рассматривается и $\exp(\beta t) = 1$, получим:

$$A = \sqrt{s^2 + \frac{1}{\Omega^2} (s' + \beta s)^2} \quad (3.2)$$

Таким образом, возвращаясь к насущному вопросу, для нахождения амплитуды следует применить формулу (3.2), взяв за s значение фазовой координаты, а за s' – значение фазовой скорости в точке t_1 (конец манёвра). В данной работе за β и Ω брались минимальная постоянная затухания и минимальная собственная частота.

Стоит оговорить, что формула (3.2) не является точной, так как является решением (3.1) – уравнения единичного осциллятора, в то время как в нашей задаче решение складывается из нескольких колебаний сразу. Кажется, однако, что можно получить аналогичное выражение для более сложного исходного уравнения, приложив большее количество усилий. Тем не менее, (3.2) даёт более точные результаты, чем если бы мы измеряли амплитуду только по значению s .

Сравнение двух описанных алгоритмов определения амплитуды можно найти далее, в разделе 3.6.

3.3. Случай простейшей модели с единственной колебательной модой

Для начала требуется верифицировать полученные во 2 главе формулы на простых моделях. Для этой цели рассмотрим модель, учитывающую помимо углового движения всего лишь одну колебательную моду. Таким образом, такая модель будет иметь 2 степени свободы, 4 фазовых переменных и 2 пары СЗ и СВ. Все матрицы \mathbf{M} , \mathbf{S} , $\mathbf{\Omega}$ станут скалярами. Для простоты положим также $J = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $M = 1 \text{ кг}$, $S = 0,8 \text{ кг} \cdot \text{м}$, $\Omega = \omega^2$, $k_\omega = 0,22 \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$, $k_\alpha = 0,4 \text{ кг} \cdot \text{м}$.

Тогда матричные элементы (1.5) упростятся до:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -k_\omega R & -k_\alpha R & 0 & Q\omega^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ k_\omega Q & k_\alpha Q & 0 & -R\omega^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} SQ \\ 0 \\ -Q \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ где } R = \frac{1}{1-S^2}, Q = \frac{S}{1-S^2}. \quad (3.3)$$

Было проведено 4 численных эксперимента: по двое с различной гладкостью и по двое с различным временем манёвра T . Опорной траекторией

для всех 4 экспериментов являлся алгебраический полином. Для всех экспериментов $t_0 = 0$, а начальные и конечные условия одинаковы:

$$\beta(t_0) = 0 \text{ рад} \quad \dot{\beta}(t_0) = 0 \text{ рад/с}$$

$$\beta(t_1) = 2 \text{ рад} \quad \dot{\beta}(t_1) = 0 \text{ рад/с}$$

Гладкость, время манёвра, а также значение первой производной управления в начале манёвра для каждого эксперимента представлены в Таблица 1.

Таблица 1. Параметры численного экспериментов

Эксперимент, №	1	2	3	4
Время манёвра, с	30	30	15	15
Время моделирования, с	60	60	30	30
Порядок гладкости слева l	1	1	1	1
Порядок гладкости справа r	1	2	1	2
$u'(t_0)$, кг·Н	$4,44 \cdot 10^{-3}$	$8,89 \cdot 10^{-3}$	0,036	0,071

Результаты численного моделирования первых двух экспериментов представлены на рисунке 1, а результаты последних двух – на рисунке 2. На графиках отображены абсолютные координаты α , опорная траектория β , относительные координаты γ , относительные скорости $\dot{\gamma}$, программная часть управления u , модальная координата q и модальная скорость \dot{q} . На втором рисунке всё аналогично.

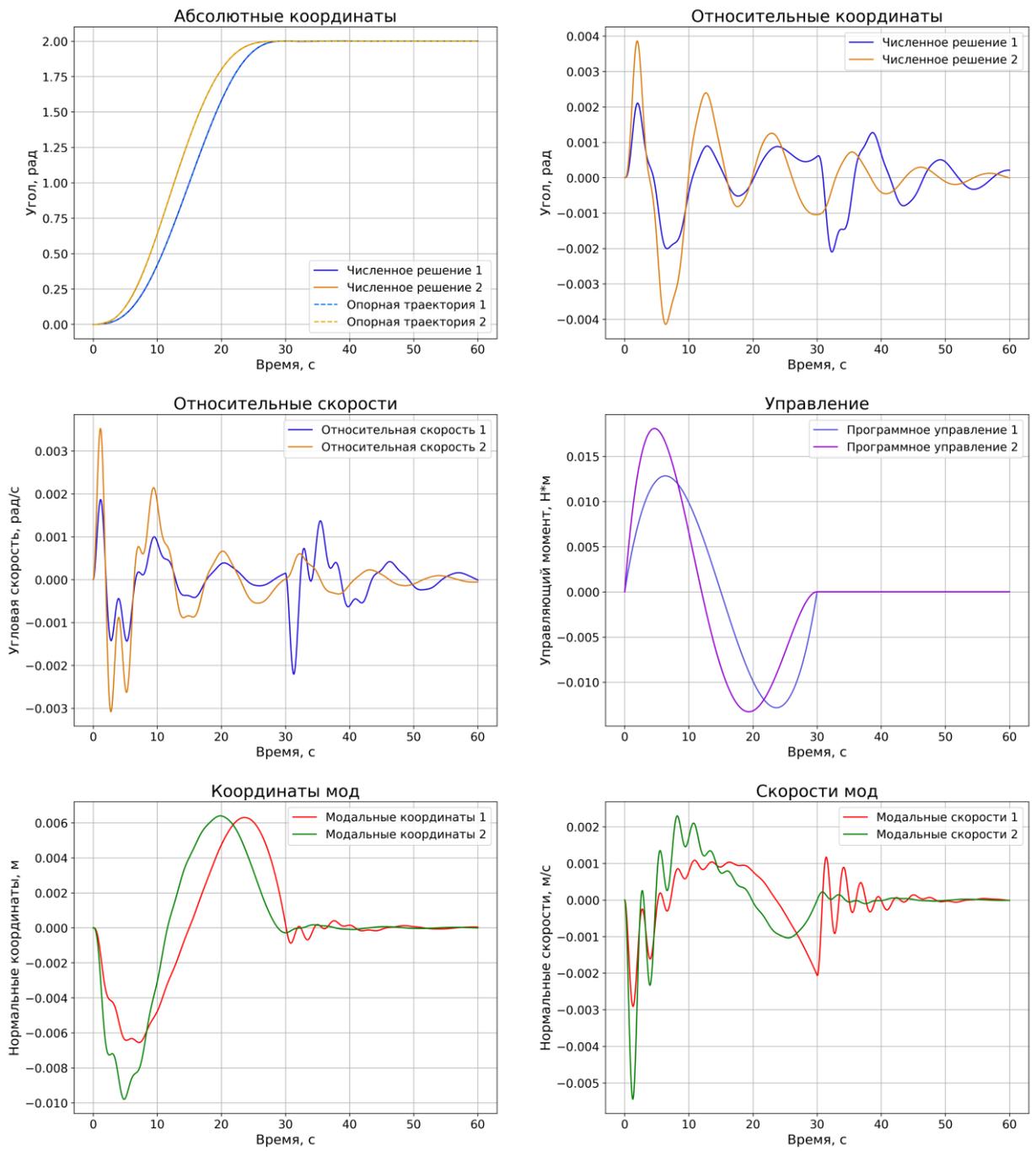


Рисунок 1: эксперименты 1 и 2. Координаты, скорости, управление и моды

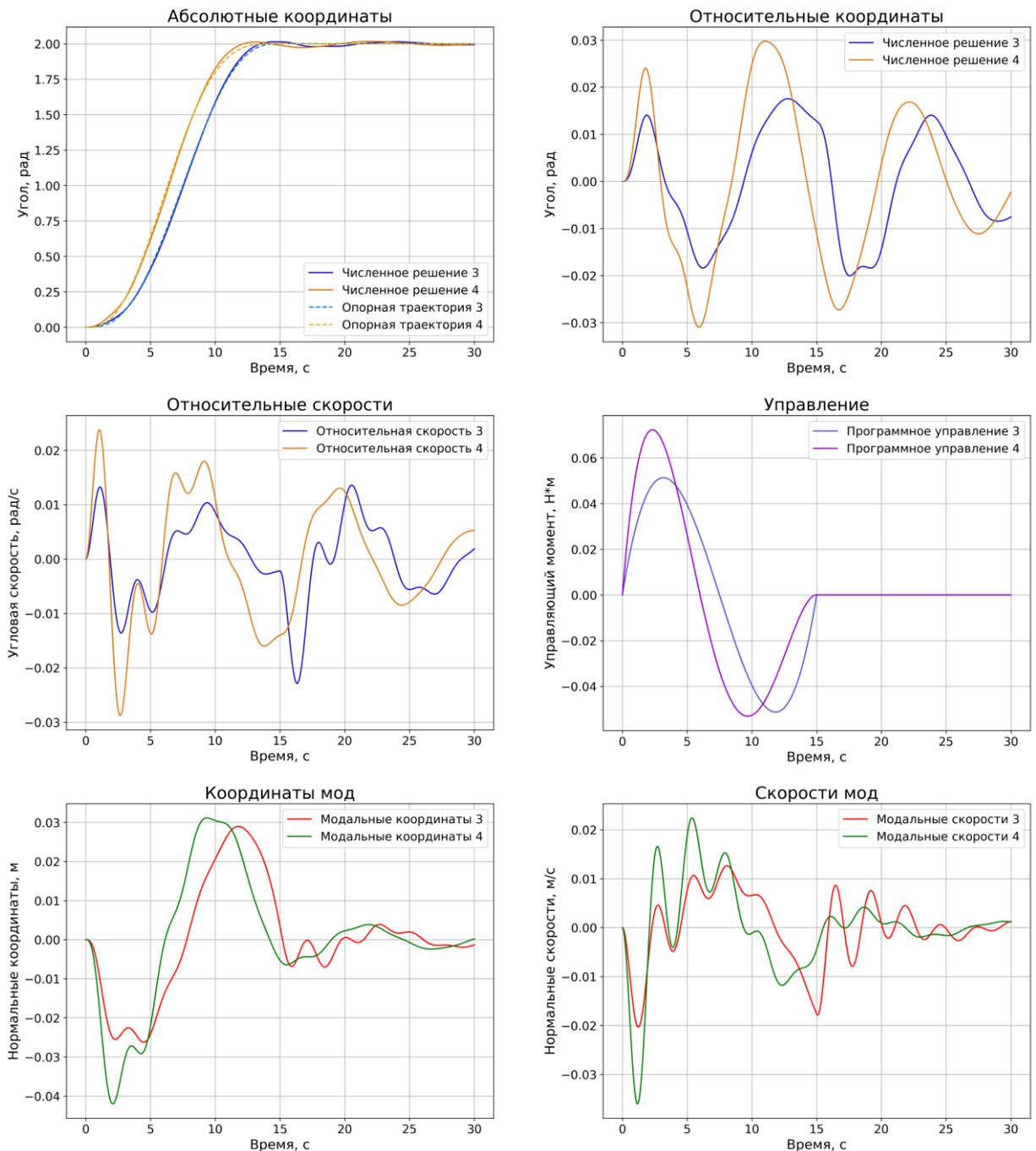


Рисунок 2: эксперименты 3 и 4. Координаты, скорости, управление и моды

На рисунках наибольший интерес представляет график относительных координат. В сущности, эти графики подтверждают критерий (2.24). На них можно заметить, что в самом начале амплитуда колебаний оранжевой кривой больше синей (причём в 2 раза), что обусловлено одинаковым порядком гладкости у обеих функций управления слева и отличием первых производных ровно в 2 раза. В поведении после прекращения управления (вторая половина графиков) можно заметить отличия. На первом рисунке оранжевая кривая

имеет меньшую амплитуду колебаний, в то время как на втором рисунке, при меньшем времени управления – всё наоборот. Причём переход с одного режима на другой происходит очень быстро, практически на одном критическом значении t . Это связано с тем, что в данной модели только две собственные частоты, и потому критерий (2.24) выполняется особенно точно.

3.4. Случай не полиномиального управления

Проверим, как работает теория для других функций управления помимо алгебраических полиномов. Для численного эксперимента возьмём те же значения системы, что и в предыдущем разделе. Матричные элементы также задаются (3.3). Сравним предсказания теории на двух управлениях: куске функции синуса u_1 и алгебраическом полиноме u_2 . Для простоты рассмотрена неполная задача переориентации: из целевых значений задана только ориентация β_f , а все остальные значения – свободные. Манёвр начинается при $t_0 = 0$.

Функции управления будут следующими:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= A \sin \omega t & u_2(t) &= at \\ u_1'(t) &= \omega A \cos \omega t & u_2'(t) &= a \\ u_1'(+0) &= \omega A & u_2'(+0) &= a > 0 \end{aligned}$$

Опорные траектории будут задаваться следующими функциями:

$$\begin{aligned} \beta_1(t) &= \frac{A}{\omega^2} (\omega t - \sin \omega t), & A &= \frac{\beta_f \cdot \omega^2}{\omega T - 1}, & \omega &= \frac{\pi}{2T} \\ \beta_2(t) &= \beta_f \frac{t^3}{T^3}, & a &= \frac{3\beta_f}{T^3} \end{aligned}$$

Сравнивать будем амплитуду в процессе манёвра. Время моделирования $T = t_1 = 80$ с. Начальные и конечные условия следующие:

$$\begin{aligned} \beta(t_0) &= 0 \text{ рад} \\ \dot{\beta}(t_0) &= 0 \text{ рад/с} \\ \beta(t_1) &= 2 \text{ рад} \end{aligned}$$

Результаты моделирования представлены на Рисунок 3.

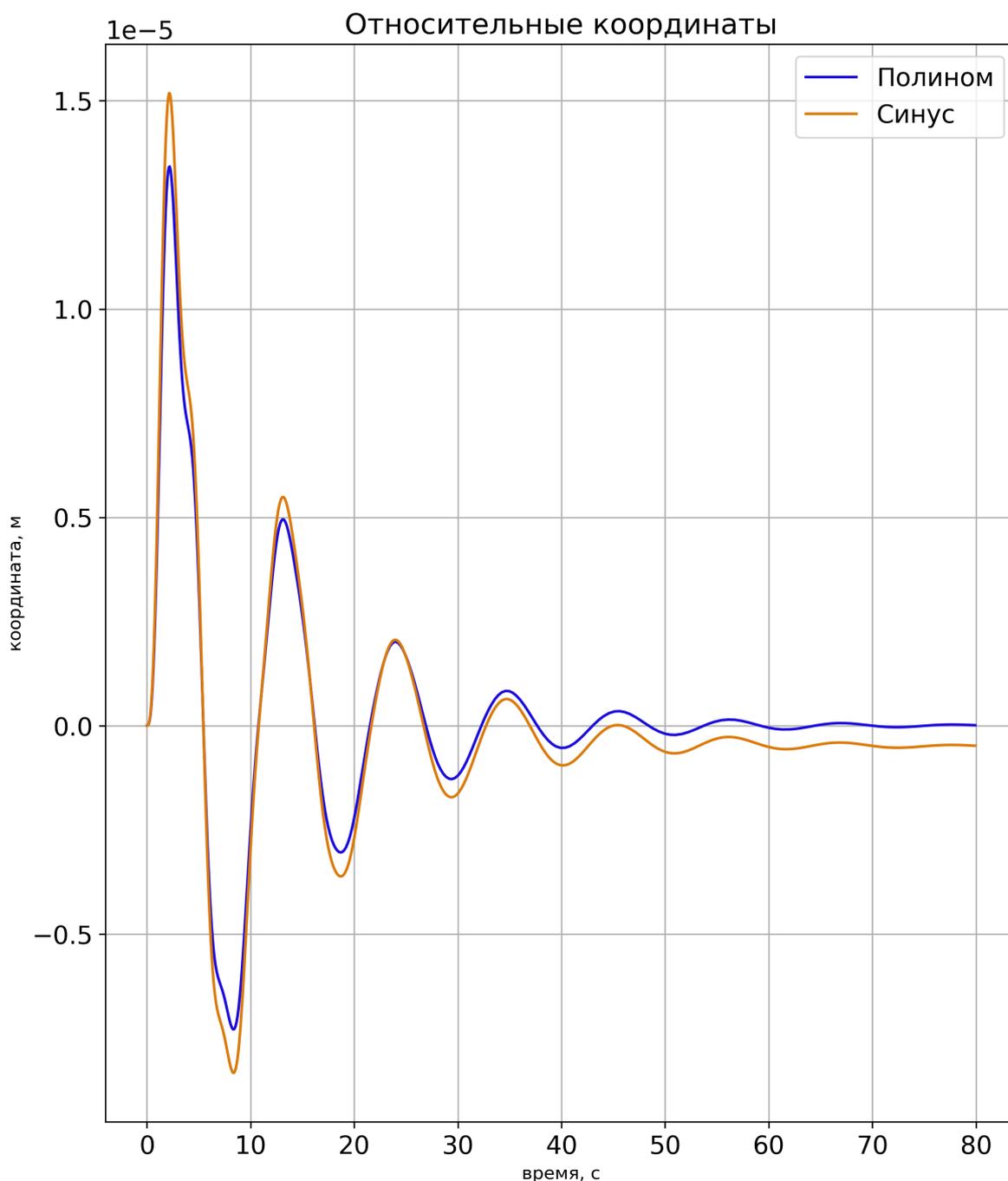


Рисунок 3: Относительные координаты в процессе манёвра

Колебания координаты на графике происходят не вокруг нуля, а с каким-то смещением, но существенные результаты всё равно отображены. Воздействие полинома на колебания немного меньше воздействия синуса, как это предсказывал критерий (2.24). Амплитуды отличаются примерно в столько же раз, во сколько раз отличаются первые производные управления. Из этого можно судить, что критерий выполняется для неполиномиальных функций.

3.5. Модель с большим числом колебательных мод

Рассмотрим теперь модель, приближённую к реальной. Для этой модели количество мод равно 7, а численные значения её параметров приведены в приложении А.

Всего было проведено 6 численных экспериментов: по трое с разной гладкостью и по двое с разным временем манёвра T . Опорной траекторией для всех 6 экспериментов являлся алгебраический полином. Для всех экспериментов $t_0 = 0$, а начальные и конечные условия одинаковы:

$$\begin{aligned}x_0 &= 0 \text{ рад} & \dot{x}_0 &= 0 \text{ рад/с} \\x_1 &= 0,2 \text{ рад} & \dot{x}_1 &= 0 \text{ рад/с}\end{aligned}$$

Гладкость и время манёвра для каждого эксперимента представлены в Таблица 2.

Таблица 2. Параметры численных экспериментов для общего случая

	1	2	3	4	5	6
Время манёвра, с	100	100	35	35	12	12
Время моделирования, с	250	250	87,5	87,5	54	54
Гладкость слева l	1	2	1	2	1	2
Гладкость справа r	1	2	1	2	1	2

Результаты численного моделирования представлены на рисунке 4. Эксперименты разбиты по графикам на основании времени манёвра. Для удобства читателя красной вертикальной пунктирной линией на графиках обозначен конец манёвра и, вместе с этим, соответственно, точка негладкого поведения функции управления.

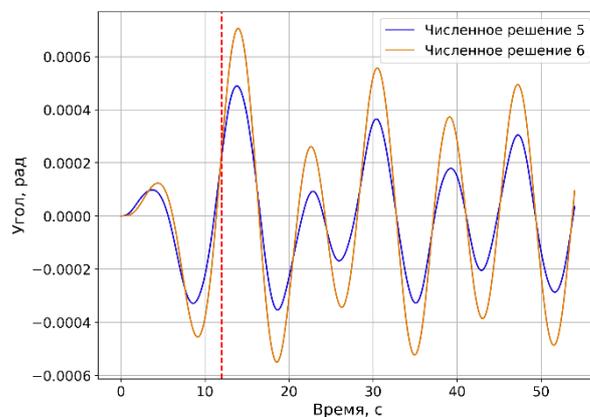
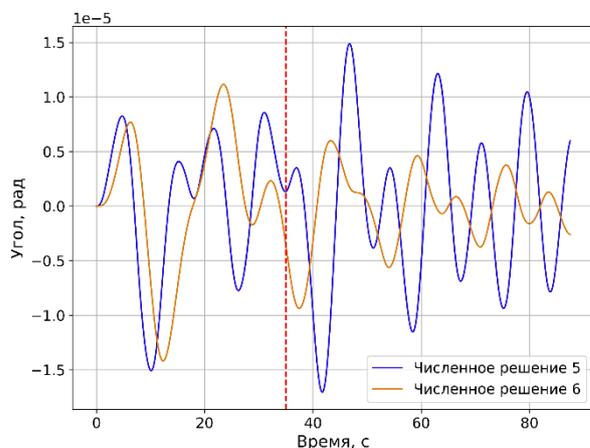
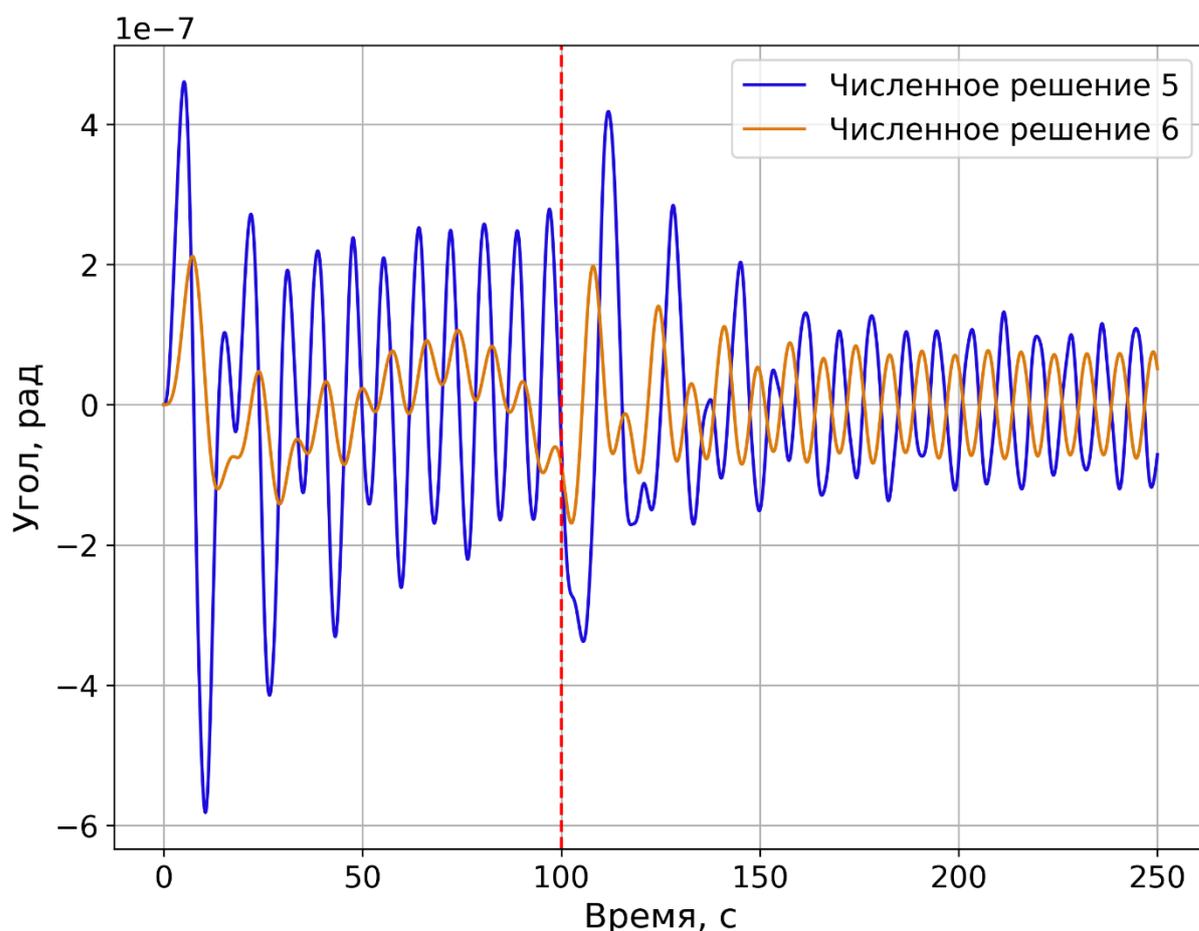


Рисунок 4: Относительные координаты. Результаты численных экспериментов 1-6.

Можно заключить, что для моделей, приближённых к реальным, теория, описанная в главе 2, продолжает работать. При очень коротком манёвре ($T = 12$ с, правый нижний график) менее гладкое управление ($l = 1, r = 1$) возбуждает колебания меньшей амплитуды, чем более гладкое ($l = 2, r = 2$). Для среднего по длине манёвра (левый нижний график) во время манёвра амплитуды от двух управлений сравнимы, а сразу же после конца манёвра –

амплитуда более гладкого управления меньше. Предполагается, что разность управлений в конце манёвра более весомая, поэтому она создаёт и большее различие по амплитуде. Ну, а если же манёвр длительный (верхний график) – более гладкое управление повсюду будет возбуждать колебания меньшей амплитуды. Чем больше будет время манёвра – тем больше будет разница в амплитуде у двух функций управления различной гладкости.

Обратим внимание ещё на тот факт, что на Рисунке 4 на верхнем графике после конца манёвра колебания сначала затухают относительно быстро, а затем почти не затухают. Это связано с сильно разнящимися постоянными затухания в СЗ. Среди них есть такие, у которых постоянная затухания $\beta_i \sim 10^{-5} c^{-1}$. Колебания, связанные с такими, СЗ затухают в течение сверхдолгого времени. На графике можно заметить, что после конца манёвра быстро затухло одно конкретное колебание с частотой, отличающейся от частоты колебания незатухающего.

3.6. Проверка соответствия теоретической оценки реальным амплитудам

Проверим теперь, насколько соответствует теоретическая оценка (2.20) реальной амплитуде. В этом численном эксперименте будет проводить множество расчётов с различными временами манёвра и выводить на графике сводные результаты по всем измерениям.

Для численного эксперимента взята та же модель, что и в предыдущем разделе. Начальные и конечные условия такие же, как в предыдущем разделе. За функцию управления взят алгебраический полином с единичной гладкостью как в начале, так и в конце. Будем считать теоретическую оценку вклада в амплитуду отдельно в начале манёвра и в конце. Реальную амплитуду будем определять двумя методами: методом масштабирования по затуханию, описанному на стр. 32, и методом рассмотрения координаты со скоростью, описанному на стр. 34 (по формуле (3.2)). На графике они подписаны как «метод 1» и «метод 2» соответственно. Всего выполнено 200 расчётов, время

манёвра будем изменять с 30 с до 300 с. Результаты представлены на Рисунок 5. Для более наглядного отображения результатов, по вертикальной оси график представлен в логарифмическом масштабе.

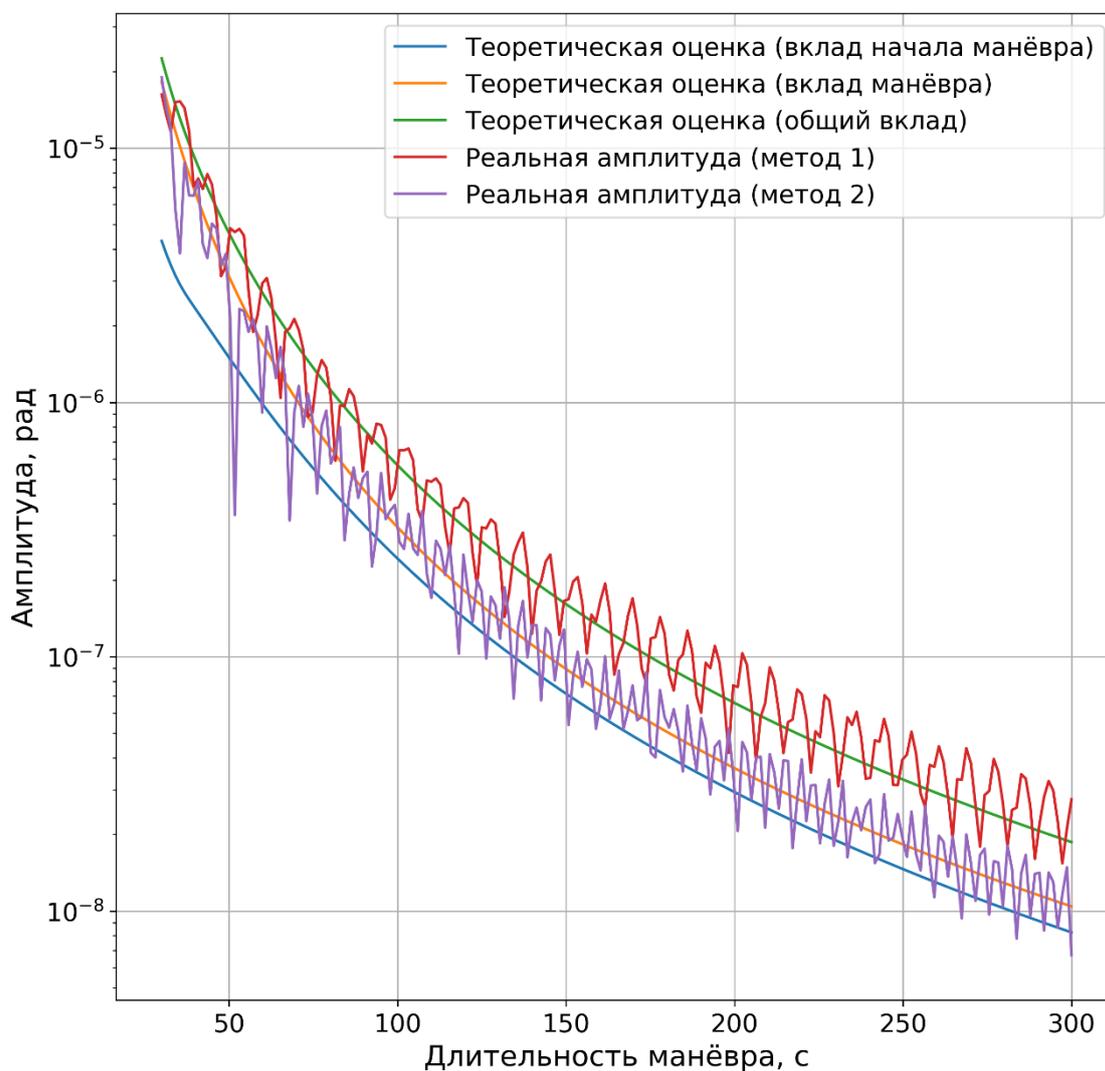


Рисунок 5: сводный график амплитуд по различным временам манёвра T

Из графика можно вынести несколько заключений. Во-первых, теоретическая оценка вклада негладкости (синяя кривая) в разы меньше вклада негладкости в конце манёвра (оранжевая кривая). Это связано с тем, что в формуле (2.20) первое слагаемое домножается на убывающую экспоненту, то есть вклад от него со временем уменьшается. Чем дольше длится манёвр, тем больше успевает энергия уменьшиться, и тем меньший вклад в итоговый результат вносит негладкость в начале манёвра.

Во-вторых, реальная амплитуда, определённая первым методом (красная кривая) большей частью отлично совпадает с теоретической оценкой. Амплитуда, определённая вторым методом в большинстве точек несколько меньше, но в целом она тоже неплохо описывает динамику. Таким образом, теоретическая оценка амплитуды (2.22) действительно оценивает её правильным образом.

Впрочем, конкретный вид графика на рисунке 5 рекомендуется перепроверить.

3.7. Сравнение двух различных управлений на сводном графике

Выполним действия, аналогичные предыдущему разделу, только теперь будем выполнять расчёты сразу для двух различных функций управления, чтобы сравнить их влияние на возбуждение колебаний на сводном графике. Согласно теории главы 2, при быстрых манёврах, в левой части графика, менее гладкое управление должно возбуждать меньшие колебания, а начиная с какого-то момента должно быть наоборот.

Модель и начальные и конечные взяты такие же, как в предыдущем разделе. В качестве управлений взяты два алгебраических полинома различной гладкости: $l = 1, r = 1$ для первого и $l = 2, r = 2$ для второго. Длительность манёвра T для каждого последующего расчёта будет равномерно увеличиваться с 5 с до 150 с. Всего проведено 100 расчётов.

На графике будем отображать только суммарную оценку влияния начала и конца манёвра и реальные амплитуды, посчитанные методом масштабирования затухания (см. стр. 32) для обеих функций. Как и в предыдущем разделе, вертикальная ось для удобства представлена в логарифмическом масштабе. Результаты представлены на Рисунок 6.

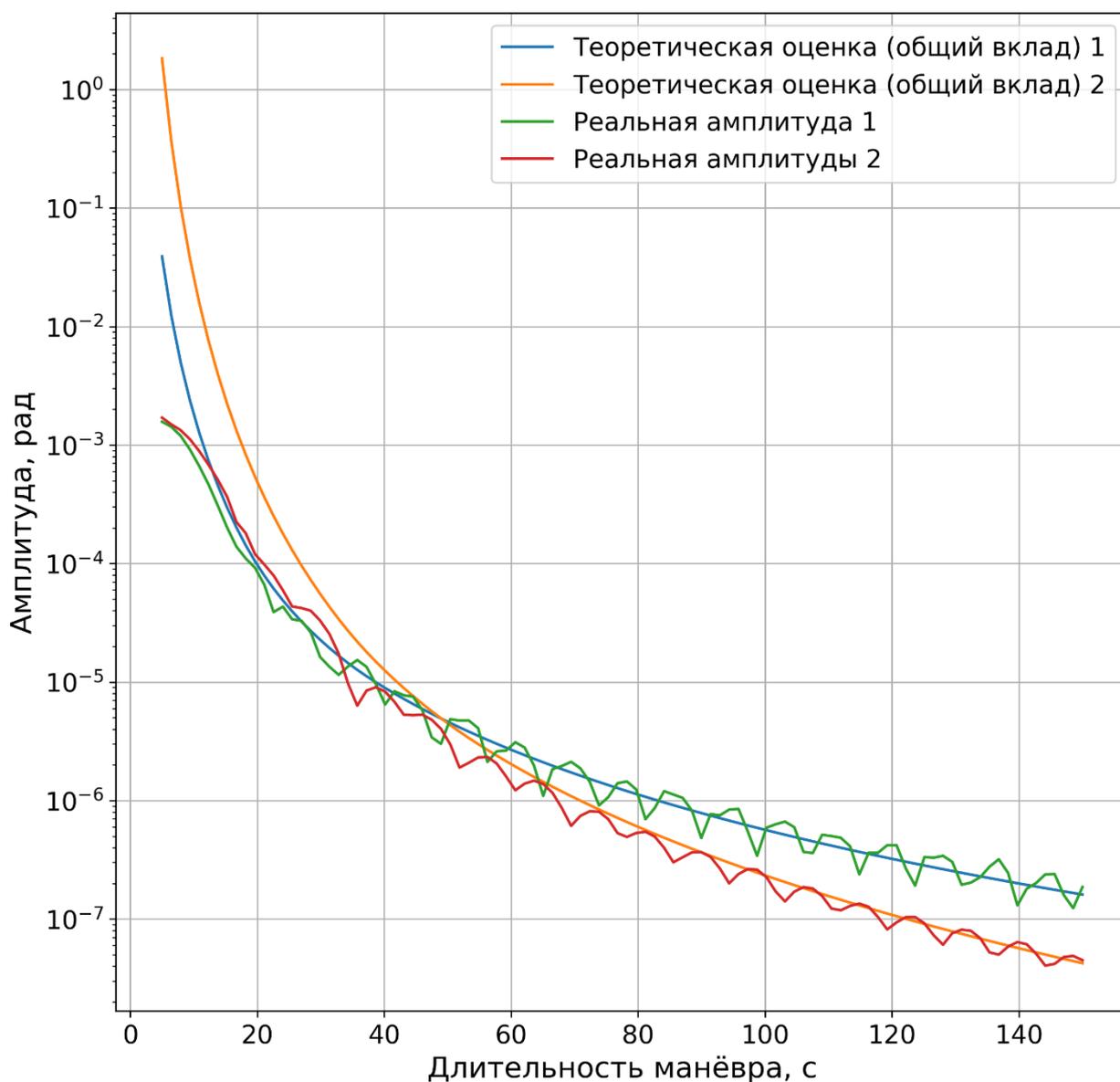


Рисунок 6: сводный график для двух управлений различной гладкости

Из графика можно видеть, что теоретические кривые (синяя и оранжевая), соответствующие различным управлениям, имеют точку пересечения. Эта точка – теоретический момент смены режима: она разделяет область значений для длительности манёвра на ту, для которой целесообразно выбирать более гладкое управление, и ту, для которой – менее гладкую. Эта точка смены режима в (2.24) соответствует $\delta = 1$. Теоретические кривые также не совпадают с реальными амплитудами на сверхмалых длительностях манёвра. Вероятнее всего, для таких времён формула (2.22) перестает быть верной, и они требуют отдельного исследования.

В реальности в системе с большим количеством колебательных мод и степеней свободы единичная точка смены режима невозможна. Вместо неё идёт интервал, на котором обе функции управления дают примерно одинаковые результаты. Такой интервал можно видеть на Рисунок 6 примерно при $25 \leq T \leq 50$. На этом промежутке кривые, отображающие реальные амплитуды (зелёная и красная) мешаются друг с другом, и невозможно понять, какое управление там выгоднее. При $T \leq 25$ менее гладкая первая функция имеет очевидный выигрыш перед второй, однако по тому же графику видно, что этот выигрыш небольшой при всех значениях и не увеличивается с уменьшением T .

Заключение

В работе представлено общее решение линеаризованной системы уравнений, отвечающей угловому движению космического аппарата с крупногабаритными нежёсткими элементами конструкции. Был выполнен анализ решения этих уравнений и получена теоретическая оценка амплитуды возбуждаемых колебаний в системе при выполнении манёвров переориентации космического аппарата. Кроме того, сформулирован критерий, позволяющий выбирать более эффективную из двух различных функций управления.

Выполнен ряд численных экспериментов, направленных на верификацию теоретических выводов и оценку их применимости в реальных условиях эксплуатации. Отдельное внимание уделено исследованию влияния гладкости функции управления на амплитуду возбуждаемых колебаний, а также проверке гипотезы о том, что более гладкая функция вызывает меньшие колебания.

Ключевым элементом исследования является критерий (2.24), согласно которому при достаточно длительном манёвре (не менее нескольких минут) указанная гипотеза подтверждается. Более того, с увеличением длительности

манёвра различие между воздействием более и менее гладких функций управления на амплитуду колебаний становится всё более выраженным.

Однако при недостаточной длительности манёвра различия в гладкости функций управления могут не оказывать существенного влияния на амплитуду колебаний. В случае коротких манёвров (порядка десятков секунд) возможно, что менее гладкая функция возбуждает колебания меньшей амплитуды.

Упомянутый критерий обладает наглядной физической интерпретацией, связанной с соотношением характерных временных масштабов системы: при достаточно большой длительности манёвра эта длительность превышает периоды собственных колебаний, возникающих в системе, в результате чего поведение решения приобретает квазипериодический характер. Напротив, при короткой продолжительности манёвра большинство колебательных процессов не успевают завершиться в течение времени управления, что приводит к аperiodическому характеру отклика системы в процессе манёвра.

В наиболее общем виде амплитуда колебаний определяется совокупностью факторов: наличием начальных (непогашенных) колебаний, степенью гладкости функции управления отдельно в момент начала и в момент завершения манёвра. Влияние каждого из этих факторов тем значительнее, чем ближе во времени он расположен к текущему моменту, и, напротив, ослабевает с увеличением временного интервала от момента его действия.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Bifa C. [и др.]. A multi-point decentralized control for mitigating vibration of flexible space structures using reaction wheel actuators // Scientific Reports. 2024. № 1 (14). С. 1–15.
2. Caubet A., Biggs J. A MOTION PLANNING METHOD FOR SPACECRAFT ATTITUDE MANEUVERS USING SINGLE POLYNOMIALS / A. Caubet, J. Biggs, 2015.
3. Dong H. [и др.]. Dynamic modeling and attitude control for large modular antennas on-orbit assembly // Aerospace Science and Technology. 2024. (146).
4. Gili P. A. [и др.]. Articulated and flexible multibody satellite dynamics modeling American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc., 2002.
5. Hu Q. Variable structure maneuvering control with time-varying sliding surface and active vibration damping of flexible spacecraft with input saturation // Acta Astronautica. 2009. № 11–12 (64). С. 1085–1108.
6. Ivanov D. [и др.]. Coupled Motion Determination and Stabilization of a Satellite Equipped with Large Flexible Elements Using ADCS Only // 70 th International Astronautical Congress (IAC). 2019. С. 21–25.
7. Ivanov D. S. [и др.]. Methods for the vibration determination and parameter identification of spacecraft with flexible structures // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2017. № 2 (56). С. 311–327.
8. Junkins J. L. ., Kim Y. Introduction to Dynamics and Control of Flexible Structures / J. L. . Junkins, Y. Kim, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1993. 452 с.
9. Meirovitch L., Quinn R. D. Equations of motion for maneuvering flexible spacecraft // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 1987. № 5 (10). С. 453–465.
10. Ovchinnikov M. Y. [и др.]. Angular motion equations for a satellite with hinged flexible solar panel // Acta Astronautica. 2016. № 1. Ovchinnikov M. Y. [и др.]. Angular motion equations for a satellite with hinged flexible solar panel // Acta

Astronautica. 2016. (128). (128). С. 534–539.

11. Santini P., Gasbarri P. Dynamics of multibody systems in space environment; Lagrangian vs. Eulerian approach // Acta Astronautica. 2004. № 1 (54). С. 1–24.

12. Santini P., Gasbarri P. General background and approach to multibody dynamics for space applications, 64(11-12), 1224–1251 | 10.1016/j.actaastro.2009.01.033 // Acta Astronautica [Электронный ресурс]. URL: <https://sci-hub.ru/10.1016/j.actaastro.2009.01.033> (дата обращения: 21.06.2023).

13. Sasaki T. [и др.]. Attitude and vibration control with double-gimbal variable-speed control moment gyros // Acta Astronautica. 2018. (152). С. 740–751.

14. Shahravi M., Azimi M. Attitude and Vibration Control of Flexible Spacecraft Using Singular Perturbation Approach // ISRN Aerospace Engineering. 2014. (2014). С. 1–13.

15. Thomas R. K., David A. L. Formulation of Equations of Motion for Complex Spacecraft // Journal of Guidance, Control, and Dynamics [Электронный ресурс]. URL: <https://sci-hub.ru/10.2514/3.55956> (дата обращения: 21.06.2023).

16. Vu-Quoc L., Simo J. C. Dynamics of earth-orbiting flexible satellites with multibody components // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 1987. № 6 (10). С. 549–558.

17. Wang S. J., Cameront J. M. Dynamics and control of a large space antenna // Journal of Guidance Control and Dynamics. 1984. № 1 (7). С. 69–76.

18. Аб Н., Сс Т. Математическая модель спутника с гибкой солнечной панелью на управляемом шарнире.

19. Б. В. Раушенбах Управление движением космических аппаратов / Б. В. Раушенбах, 1986.

20. Бобылева Т. Н., Гусев И. М., Шамаев А. С. ОГРАНИЧЕННЫЕ И ГЛАДКИЕ УПРАВЛЕНИЯ КОЛЕБАНИЯМИ В СИСТЕМАХ, ЗАДАННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ // Прикладная математика и механика. 2023. № 5 (87). С. 820–828.

21. Бутиков Е. И. Собственные колебания линейного осциллятора [Электронный ресурс]. URL: https://web.archive.org/web/20201023112256/http://butikov.faculty.ifmo.ru/Applets/manlr_1.pdf (дата обращения: 21.06.2023).

22. Н. Я. Е., А. Р. В., В. Л. М. Анализ динамики системы ориентации и стабилизации упругого космического аппарата с силовым гироскопическим комплексом на базе гиродин ГД 02-150 // Сибирский аэрокосмический журнал. 2013. № 2 (48) (2).

23. Овчинников М. Ю. [и др.]. Математическая Модель Спутника С Произвольным Числом Нежестких Элементов // Математическое Моделирование. 2020. № 12 (32). С. 14–28.

24. Сергеевич И. Д. [и др.]. Алгоритмы управления и определения движения космического аппарата с двумя нежесткими элементами // Космические аппараты и технологии. 2019. № 3 (29) (3). С. 132–139.

25. Ткачев С. С. [и др.]. Построение опорной траектории третьего порядка гладкости углового движения космического аппарата // Математическое моделирование. 2021. № 10 (33). С. 3–18.

26. Шестопёров А. И. Стабилизация Заданных Режимов Углового Движения Спутников С Нежесткими Элементами Конструкции 2022. С. 1–113.

Приложение А. Параметры спутника

$$J = 1.266 \cdot 10^5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$\mathbf{S} = (1.678 \quad -11.33 \quad 1.680 \quad 11.31 \quad -4.973 \quad -27.07 \quad -22.06) \text{ кг} \cdot \text{м}$$

$$\mathbf{W} = \text{diag}(0.3250, 6.2249, 0.3243, 6.2125, 0.4055, 0.5431, 3.0551) \text{ с}^{-2}$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0.981 & -3.25 \cdot 10^{-6} & -1.94 \cdot 10^{-2} & -3.21 \cdot 10^{-6} & 6.06 \cdot 10^{-10} & -8.93 \cdot 10^{-3} & -3.41 \cdot 10^{-2} \\ \vdots & 1.00 & -3.21 \cdot 10^{-6} & -5.29 \cdot 10^{-10} & 6.25 \cdot 10^{-13} & -1.47 \cdot 10^{-6} & -5.63 \cdot 10^{-6} \\ \vdots & \cdot & 0.981 & -3.11 \cdot 10^{-6} & 6.06 \cdot 10^{-10} & -8.93 \cdot 10^{-3} & -3.41 \cdot 10^{-2} \\ \vdots & & \cdot & 1.00 & -4.25 \cdot 10^{-13} & -1.47 \cdot 10^{-6} & -5.63 \cdot 10^{-6} \\ \vdots & & & \cdot & 0.952 & -1.25 \cdot 10^{-9} & -3.62 \cdot 10^{-8} \\ \vdots & & & & \cdot & 0.954 & -1.04 \cdot 10^{-2} \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0.939 \end{pmatrix}$$

кг

$$\mathbf{M}^T = \mathbf{M}$$

$$k_\alpha = 2 \cdot 10^4 \text{ кг} \cdot \text{м}$$

$$k_\omega = 1 \cdot 10^4 \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$$