

**Министерство образования и науки Российской Федерации**  
**МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ**  
**(государственный университет)**  
**ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛЕНИЯ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ**  
**КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ**  
**(Специализация «Управление и механика космического полета»)**

**ОДНООСНОЕ УПРАВЛЕНИЕ**  
**ОРБИТАЛЬНЫМ ДВИЖЕНИЕМ СПУТНИКОВ**  
**В ОДИНОЧНОМ И ГРУППОВОМ ПОЛЕТЕ**

**Выпускная квалификационная работа**  
**студента 672 группы**  
**Трофимова Сергея Павловича**

**Научный руководитель**  
**д.ф.-м.н., проф. Овчинников М.Ю.**

**г. Москва**

**2012**

## Оглавление

1. Введение .....	3
2. Оптимальное управление при наличии ограничений на направление вектора тяги. Понятие одноосного управления .....	4
3. Одноосная коррекция плоскости орбиты КА.....	10
4. Развертывание созвездия спутников для просвечивания ионосферы .....	17
4.1. Постановка задачи .....	18
4.2. Высота трассы: нулевое приближение.....	19
4.3. Высота трассы: эффекты первого порядка .....	21
4.3.1. Радиальное смещение.....	21
4.3.2. Боковое смещение .....	24
4.4. Оптимизация для двух способов разведения.....	25
5. Одноосное управление относительным движением формации из двух спутников на околокруговых орбитах.....	29
5.1. Линеаризованные уравнения относительного движения.....	29
5.2. Управляемость и существование замкнутых траекторий относительного движения.....	31
5.3. Достаточные условия существования замкнутых траекторий для разных типов одноосного управления.....	36
5.4. Численное построение замкнутых траекторий относительного движения.....	41
Заключение.....	46
Литература .....	47

## 1. Введение

Данная работа посвящена исследованию возможностей управления орбитальным движением космического аппарата (КА) при наличии геометрических ограничений на направление вектора тяги. Такие ограничения часто являются следствием использования пассивных систем управления ориентацией. Простые и надежные в эксплуатации, они, однако, обычно обеспечивают лишь одноосную стабилизацию спутника<sup>1</sup>. В общем же случае оптимальный закон изменения тяги при выполнении различных орбитальных маневров требует наличия сложной системы управления ориентацией, которая позволяет реализовать режим трехосной стабилизации КА.

Таким образом, возникает необходимость определения класса задач орбитального маневрирования, решение которых может быть получено при существовании некоторых заданных априори ограничений на направление вектора тяги. Кроме того, для каждой задачи из этого класса должна быть формализована и решена проблема нахождения оптимального закона изменения величины тяги.

В литературе, посвященной оптимизации управления движением КА, случаю наличия ограничений на направление управляющего воздействия уделяется незаслуженно мало внимания. Из важных с теоретической точки зрения работ здесь можно отметить проведенное А.А. Сухановым и А.Ф.Б. Прадо исследование [1, 2], основные результаты которого будут изложены в следующей главе. Что касается прикладных задач, изучалась проблема поддержания формации спутников при помощи солнечного давления [3] либо серией управляющих импульсов, направление каждого из которых совпадает с направлением локального геомагнитного поля (случай использования пассивной магнитной системы управления ориентацией) [4].

В настоящей работе, помимо продолжения исследования проблемы поддержания пространственной конфигурации спутников, образующих тесную формацию (глава 5), рассматриваются также задачи коррекции плоскости орбиты (глава 3) и развертывания созвездия КА для исследования ионосферы (глава 4). Для этих целей показывается принципиальная возможность использования спутников, пассивно стабилизированных вдоль вектора локального геомагнитного поля. В этом случае направление тяги, создаваемой для управления орбитальным движением, оказывается заданным в каждый момент времени. Такой тип управления, получивший название одноосного, описывается более подробно в главе 2. Функция величины тяги (для импульсного управления – величины импульса скорости) оптимизируется для разных видов двигательных установок,

---

<sup>1</sup> Здесь и далее термины «спутник» и «космический аппарат» используются как взаимозаменяемые.

что подразумевает, соответственно, разные типы целевого функционала. В Заключении указываются возможные направления дальнейших исследований по данной тематике.

## 2. Оптимальное управление при наличии ограничений на направление вектора тяги. Понятие одноосного управления

В соответствии с величиной и продолжительностью действия управляющего ускорения орбитальные маневры делятся на

- маневры под действием импульсной тяги (импульсные);
- маневры под действием непрерывной тяги.

Как правило, такое разделение связано с энергетическими возможностями и принципом действия используемых маршевых двигательных установок (МДУ). К классу МДУ большой тяги ( $a = 10^{-3} \dots 10^{-1} g$ , где  $g$  – ускорение свободного падения у поверхности Земли) относят химические двигатели, в то время как под двигателями малой тяги ( $a = 10^{-6} \dots 10^{-4} g$ ) обычно понимают электрореактивные МДУ.

Приведем некоторые важные и широко известные результаты из теории оптимального маневрирования, основы которой были заложены в 60-х годах прошлого века Д.Ф. Лоуденом (*Lawden*) [5]. Для упрощения дальнейшего изложения ограничимся рассмотрением случая, когда моменты начала маневра  $t_0$  и его окончания  $t_1$  фиксированы.

При планировании процесса маневрирования осуществляется оптимизация некоторого целевого функционала. Обычно таковым является интегральный функционал затрат рабочего тела

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \mu dt, \quad \mu = -\dot{m}.$$

Минимизация его эквивалентна максимизации массы полезной нагрузки, которую можно поместить на борт КА. Уравнения движения центра масс КА в векторной форме имеют вид<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{a}_{ext} + \mathbf{a}_{cont}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где  $\mathbf{a}_{ext}$  – ускорение, создаваемое внешними силами (возмущающее ускорение),  $\mathbf{a}_{cont}$  – управляющее ускорение. Чаще всего задача оптимального маневрирования относится к классу краевых. Граничные условия в общем виде могут быть записаны как

---

<sup>1</sup> Здесь и далее векторные величины обозначаются полужирным шрифтом, а их абсолютные величины – обычным шрифтом.

$$\alpha_1 \mathbf{r}(t_0) + \alpha_2 \mathbf{r}(t_1) + \alpha_3 \mathbf{v}(t_0) + \alpha_4 \mathbf{v}(t_1) = \boldsymbol{\beta}, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, 4, \quad \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^3. \quad (2.2)$$

Чтобы воспользоваться принципом максимума, обратимся к функции Гамильтона данной задачи:

$$H = -p_m \mu + \mathbf{p}_r \cdot \mathbf{v} + \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{a}_{ext} + \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{a}_{cont}. \quad (2.3)$$

Здесь  $\mathbf{p}_r$  и  $\mathbf{p}_v$  – вектора, сопряженные соответственно радиус-вектору и вектору скорости КА, а скалярная переменная  $p_0$  сопряжена массе КА. Обозначим через  $\mathbf{u}$  скорость истечения рабочего тела. Из определения реактивной силы  $\mathbf{R} = m \mathbf{a}_{cont} = \mu \mathbf{u}$  имеем:

$$m \mathbf{a}_{cont} = \mu \mathbf{u}. \quad (2.4)$$

Отсюда явно следует очевидный факт: массовый расход  $\mu$  задает лишь абсолютную величину  $a_{cont}$  управляющего ускорения и не изменяется при варьировании его направления. Поэтому требование максимальности функции Гамильтона приводит к выводу, что оптимальная тяга сонаправлена с вектором  $\mathbf{p}_v$ , который получил название базис-вектора Лоудена. Таким образом, учитывая соотношение (2.4), можно записать:

$$\mathbf{a}_{cont} = \frac{\mu \mathbf{p}_v}{m p_v}. \quad (2.5)$$

Далее процесс нахождения оптимального закона управления разветвляется. Сначала рассмотрим случай, когда скорость истечения  $u$  постоянна. После подстановки выражения (2.5) в (2.3) получаем:

$$H = \kappa \mu + \mathbf{p}_r \cdot \mathbf{v} + \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{a}_{ext}.$$

Функцию

$$\kappa = \kappa(t) = -p_m + \frac{u p_v}{m}$$

называют функцией переключения. Вновь пользуясь требованием максимальности функции Гамильтона, заключаем, что оптимальная траектория может состоять в общем случае из дуг следующих типов: участки нулевой тяги ( $\mu = 0$  при  $\kappa < 0$ ), участки максимальной тяги ( $\mu = \mu_{max}$  при  $\kappa > 0$ ) и участки промежуточной тяги ( $0 < \mu < \mu_{max}$  при  $\kappa = 0$ ). Величина максимального массового расхода  $\mu_{max}$  является характеристикой конкретного двигателя. Для вычисления  $\kappa$  можно использовать формулу

$$\dot{\kappa} = \frac{u \dot{p}_v}{m},$$

которая легко выводится с учетом соотношения

$$\dot{p}_m = -\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{up_v}{m^2} \mu.$$

Базис-вектор  $\mathbf{p}_v$  находится из системы уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}_r &= -\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}\right)^T = -\left(\frac{\partial \mathbf{a}_{ext}}{\partial \mathbf{r}}\right)^T \mathbf{p}_v, \\ \dot{\mathbf{p}}_v &= -\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{v}}\right)^T = -\mathbf{p}_r - \left(\frac{\partial \mathbf{a}_{ext}}{\partial \mathbf{v}}\right)^T \mathbf{p}_v. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Граничные условия для компонент векторов сопряженных переменных выражаются известным образом через граничные условия (2.2) для компонент векторов положения и скорости КА.

Сухую массу КА  $m_1$  со стартовой массой  $m_0$  связывает знаменитая формула Циолковского

$$\frac{m_1}{m_0} = \exp\left(-\frac{1}{u} \int_{t_0}^{t_1} a_{cont} dt\right),$$

получающаяся простым интегрированием уравнения реактивного движения

$$-\frac{dm}{dt} = \frac{ma_{cont}}{u}.$$

Кроме того, если уже найдено минимальное значение  $J_m$  целевого функционала затрат рабочего тела, то сухая масса КА может быть легко вычислена из очевидного соотношения  $m_1 = m_0 - J_m$ .

Что касается электрореактивных двигателей малой тяги, то здесь процесс оптимизации может иметь свою специфику. Так, если эффективная мощность<sup>1</sup>  $W$  двигателя постоянна (ядерные электрореактивные МДУ) или выражается в виде явной/неявной зависимости от времени (солнечные электрореактивные МДУ), то целесообразно сделать замену и перейти от  $u$  к  $W$ . Из определения эффективной мощности

$$W = \frac{\mu u^2}{2}$$

и формулы (2.4) имеем:

$$\mu = \frac{m^2 a_{cont}^2}{2W}.$$

Интегрируя соотношение

---

<sup>1</sup> Под эффективной мощностью понимается та часть мощности ДУ, которая переходит в кинетическую энергию реактивной струи.

$$-\frac{dm}{dt} = \frac{m^2 a_{cont}^2}{2W},$$

получаем аналог формулы Циолковского:

$$\frac{m_1}{m_0} = \left( 1 + \frac{m_0}{2} \int_{t_0}^{t_1} \frac{a_{cont}^2}{W} dt \right)^{-1}.$$

Легко заметить, что теперь для минимизации расхода рабочего тела нужно минимизировать квадратичный по управляющему ускорению функционал, в отличие от линейного функционала характеристической скорости в формуле Циолковского. Функция Гамильтона новой оптимизационной задачи имеет вид:

$$H = -\frac{a_{cont}^2}{2W} + \mathbf{p}_r \cdot \mathbf{v} + \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{a}_{ext} + p_v a_{cont}.$$

Значение ее достигает максимума при  $a_{cont} = W p_v$  или, учитывая сонаправленность управляющего ускорения с базис-вектором,  $\mathbf{a}_{cont} = W \mathbf{p}_v$ . Для нахождения  $\mathbf{p}_v$  можно по-прежнему пользоваться системой (2.6).

Теперь перейдем к изложению некоторых важных результатов упоминавшегося выше исследования [1, 2], посвященного случаю наличия ограничений на направление управляющего воздействия. Любое такое ограничение, очевидно, может быть записано в виде

$$\mathbf{a}^0 \in G \cup \{\mathbf{0}\},$$

где  $G$  – некоторое замкнутое подмножество единичной 3D-сферы, а вектор  $\mathbf{a}^0$  отвечает за направление управляющего ускорения:

$$\mathbf{a}^0 = \begin{cases} \frac{\mathbf{a}_{cont}}{a_{cont}}, & a_{cont} \neq 0, \\ \mathbf{0}, & a_{cont} = 0. \end{cases}$$

Сначала рассмотрим случай, когда множество  $G$  задается некоторой системой равенств

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t, \mathbf{a}^0) = \mathbf{0}. \quad (2.7)$$

Если в (2.7) имеется явная зависимость от времени, то для обеспечения автономности системы к исходным уравнениям (2.1) необходимо добавить еще одно уравнение

$$\dot{t} = 1. \quad (2.8)$$

Функция Гамильтона принимает следующую форму:

$$H = -p_m \mu + \mathbf{p}_r \cdot \mathbf{v} + \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{a}_{ext} + \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{a}_{cont} + \lambda \cdot \mathbf{g} + p_t. \quad (2.9)$$

Здесь  $\lambda$  и  $p_t$  – новые сопряженные переменные, соответствующие ограничению (2.7) и уравнению (2.8). Система сопряженных уравнений имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{p}_t &= -\frac{\partial H}{\partial t} = -\boldsymbol{\lambda} \cdot \dot{\mathbf{g}}, \\ \dot{\mathbf{p}}_r &= -\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}\right)^T = -\left(\frac{\partial \mathbf{a}_{ext}}{\partial \mathbf{r}}\right)^T \mathbf{p}_v - \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{r}}\right)^T \boldsymbol{\lambda}, \\ \dot{\mathbf{p}}_v &= -\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{v}}\right)^T = -\mathbf{p}_r - \left(\frac{\partial \mathbf{a}_{ext}}{\partial \mathbf{v}}\right)^T \mathbf{p}_v - \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{v}}\right)^T \boldsymbol{\lambda}.\end{aligned}$$

Из требования максимальности функции Гамильтона получаем, что

$$\mathbf{a}_{opt}^0 = \begin{cases} \arg \max_{\mathbf{a}^0 \in G} (\mathbf{p}_v \cdot \mathbf{a}^0), & \max_{\mathbf{a}^0 \in G} (\mathbf{p}_v \cdot \mathbf{a}^0) > 0, \\ \mathbf{0}, & \max_{\mathbf{a}^0 \in G} (\mathbf{p}_v \cdot \mathbf{a}^0) \leq 0, \end{cases} \quad (2.10)$$

где случаю  $\mathbf{a}_{opt}^0 = \mathbf{0}$  соответствует нулевая тяга. Другими словами, оптимальное направление тяги совпадает с направлением проекции  $\mathbf{p}_G$  базис-вектора  $\mathbf{p}_v$  на множество  $G \cup \{\mathbf{0}\}$ :

$$\mathbf{a}_{opt}^0 = \begin{cases} \frac{\mathbf{p}_G}{p_G}, & p_G \neq 0, \\ \mathbf{0}, & p_G = 0. \end{cases} \quad (2.11)$$

Таким образом, все результаты, полученные в предположении отсутствия ограничений на направление управляющего воздействия, остаются справедливыми и при наличии ограничений, если выполнить простую замену  $\mathbf{p}_v \rightarrow \mathbf{p}_G$ . В частности, для МДУ с постоянной скоростью истечения функция переключения приобретает вид

$$\kappa' = \kappa'(t) = -p_m + \frac{u p_G}{m}.$$

Ее производная определяется формулой

$$\dot{\kappa}' = \frac{u \dot{p}_G}{m}.$$

Для электрореактивных МДУ с явной/неявной зависимостью эффективной мощности  $W$  от времени оптимальное управляющее ускорение задается выражением  $\mathbf{a}_{cont} = W \mathbf{p}_G$ .

Перейдем теперь к случаю, когда ограничения задаются системой неравенств. Такие ограничения всегда могут быть приведены к виду

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t, \mathbf{a}^0) \geq 0.$$

Пусть для определенности число неравенств (размерность вектор-функции  $\mathbf{g}$ ) равно  $n$ .

Множество  $G$  представляет собой пересечение множеств

$$G_i = \{\mathbf{a}^0 : g_i = g_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t, \mathbf{a}^0) \geq 0\}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Введем обозначение

$$\mathbf{p}_v^0 = \frac{\mathbf{P}_v}{p_v}.$$

Если для  $\mathbf{p}_v^0$  выполняется  $\mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t, \mathbf{p}_v^0) \geq 0$ , то, очевидно,  $\mathbf{a}_{opt}^0 = \mathbf{p}_v^0$ . В противной ситуации оптимальное управляющее ускорение направлено вдоль проекции базис-вектора на границу множества  $G$ . Эта граница может быть задана следующим образом:

$$g_i = g_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t, \mathbf{a}^0) = 0, \quad i = 1, \dots, k,$$

$$g_i = g_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t, \mathbf{a}^0) > 0, \quad i = k + 1, \dots, n.$$

Здесь без ограничения общности считается, что первые  $k$  неравенств – активные. Как известно, переменные, сопряженные неактивным ограничениям, равны нулю. Таким образом, выражение для функции Гамильтона данной задачи совпадает с (2.9), если понимать под  $\mathbf{g}$  усеченную вектор-функцию размерности  $k$ . В результате все сводится к уже разобранному случаю ограничений в виде равенств, и оптимальное направление тяги определяется соотношениями (2.10), (2.11).

Наиболее важный с практической точки зрения тип ограничений – линейные однородные ограничения в виде равенств:

$$\mathbf{B}\mathbf{a}^0 = \mathbf{0}. \tag{2.12}$$

Ранг матрицы  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  может быть равен 1 или 2. В первом случае система (2.12) редуцируется к уравнению

$$\mathbf{b}\mathbf{a}^0 = 0,$$

означающему, что вектор тяги лежит в плоскости, ортогональной вектору  $\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ .

Если же  $\text{rank } \mathbf{B} = 2$ , то направление тяги и вовсе оказывается заданным в каждый момент времени, и остается лишь определить ее величину. Такой тип управления называется *одноосным*, поскольку он характерен для случая пассивной одноосной стабилизации КА, когда максимум два маршевых двигателя могут быть установлены в противоположных направлениях вдоль единственной стабилизированной оси. Пусть  $\mathbf{b}^0$  – единичный вектор, задающий такую ось. Условимся называть одноосное управление *односторонним*, если двигатель только один, и значит,  $\mathbf{a}^0 \uparrow \uparrow \mathbf{b}^0$  или  $\mathbf{a}^0 \uparrow \downarrow \mathbf{b}^0$ . Если двигателя два, то будем говорить о *двустороннем* одноосном управлении.

Все последующие главы посвящены анализу принципиальной возможности использования одноосного управления для выполнения некоторых стандартных операций орбитального маневрирования. В рассматриваемых прикладных задачах исследуются случаи пассивной стабилизации вдоль геомагнитного поля (главы 3, 4, 5) и стабилизации собственным вращением (глава 5).

### 3. Одноосная коррекция плоскости орбиты КА

При отсутствии жестких требований к угловому движению КА (высокая точность ориентации/стабилизации, выполнение программных поворотов и т.п.) зачастую бывает целесообразно использовать *пассивные системы управления ориентацией* (ПСУО). Они просты в эксплуатации, имеют относительно небольшой вес и не потребляют топлива или электрической энергии. Такие преимущества становятся особенно важными для малых аппаратов.

Типичным примером ПСУО может служить *пассивная магнитная система управления ориентацией* (ПМСУО). Она состоит, как правило, из постоянного магнита, создающего выравнивающий вдоль направления внешнего магнитного поля момент сил, и гистерезисных стержней, рассеивающих энергию колебаний относительно этого направления. Использование ПМСУО позволяет обеспечить пассивную одноосную стабилизацию КА вдоль вектора локального геомагнитного поля (ГМП).

Рассмотрим задачу одноосной коррекции плоскости орбиты спутника, имеющего ПМСУО. Будем считать, что в каждый момент времени КА стабилизирован строго по ГМП и два маршевых двигателя малой тяги установлены в противоположных направлениях вдоль единственной стабилизированной оси. Для представления ГМП воспользуемся *моделью прямого диполя*, согласно которой за магнитное поле Земли принимается поле магнитного диполя, помещенного в центре Земли и антипараллельного ее оси вращения [6]. Радиальная, трансверсальная и бинормальная компоненты орта индукции поля, определяющего в каждой точке орбиты направление тяги, могут быть записаны в виде

$$\frac{\mathbf{B}}{B} = \frac{1}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 i \sin^2 \theta}} \begin{pmatrix} -2 \sin i \sin \theta \\ \sin i \cos \theta \\ \cos i \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\theta$  – аргумент широты,  $i$  – наклонение орбиты.

Для величины управляющего ускорения введем альтернативное обозначение  $f \equiv a_{cont}$ , чтобы избежать путаницы с обозначением, принятым для большой полуоси орбиты. Условимся, что  $f$  может принимать значения разного знака в зависимости от того, какой из двух маршевых двигателей используется. Другими словами, знак  $f$  показывает коллинеарность или антиколлинеарность векторов  $\mathbf{a}_{cont}$  и  $\mathbf{B}$ .

Пусть в начальный момент времени орбита КА – околокруговая (эксцентриситет  $e = e_0 \approx 10^{-4}$ ) с долготой восходящего узла  $\Omega = \Omega_0$ , наклонением  $i = i_0$ ,  $\sin 2i_0 \neq 0$  и большой полуосью  $a = a_0$ . Поскольку для управляемого полета с малой тягой

( $|f| < 1 \text{ мм/с}^2$ ) изменение эксцентриситета в результате коррекции орбиты длительностью несколько десятков витков не превосходит по порядку величины  $10^{-3}$ , то можно полагать орбиту спутника околокруговой на протяжении всего времени коррекции.

Из всех возмущающих факторов ограничимся рассмотрением влияния второй зональной гармоники гравитационного поля Земли. Полагая  $e=0$  в уравнениях Гаусса для вариаций оскулирующих орбитальных элементов и вводя в правую часть одноосное управление, можно записать:

$$\begin{aligned}\frac{d\Omega}{dt} &= -\frac{2\delta \cos i \sin^2 \theta}{\sqrt{\mu a^7}} + f(\theta) \sqrt{\frac{a}{\mu}} \frac{\text{ctg } i \sin \theta}{\sqrt{1+3\sin^2 i \sin^2 \theta}}, \\ \frac{di}{dt} &= -\frac{\delta \sin 2i \sin 2\theta}{2\sqrt{\mu a^7}} + f(\theta) \sqrt{\frac{a}{\mu}} \frac{\cos i \cos \theta}{\sqrt{1+3\sin^2 i \sin^2 \theta}}, \\ \frac{da}{dt} &= -\frac{2\delta \sin^2 i \sin 2\theta}{\sqrt{\mu a^5}} + f(\theta) \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \frac{2 \sin i \cos \theta}{\sqrt{1+3\sin^2 i \sin^2 \theta}}.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Здесь  $\mu = GM_{\oplus} \approx 398600.44 \text{ км}^3/\text{с}^2$  – гравитационная постоянная Земли,  $\delta = \frac{3}{2} J_2 \mu R_{\oplus}^2$ ,  $J_2 \approx 1.082 \cdot 10^{-3}$ ,  $R_{\oplus}$  – экваториальный радиус Земли. Разделив два последних уравнения одно на другое, получим

$$\frac{da}{a} = 2 \text{tg } i \cdot di$$

или, что эквивалентно,

$$\frac{da}{2\sqrt{a}} \cos i + \sqrt{a} (-\sin i) di = 0.$$

В результате приходим к выводу о существовании первого интеграла  $\sqrt{a} \cos i = \text{const}$ . Он выражает постоянство проекции орбитального момента на земную ось. В самом деле, нетрудно убедиться, что в модели прямого диполя тяга, направленная вдоль поля, не создает момента вдоль земной оси. Таким образом, система уравнений (3.1) может быть редуцирована к виду

$$\begin{aligned}\frac{d\Omega}{dt} &= -\frac{2\delta \cos i \sin^2 \theta}{\sqrt{\mu a^7}} + f(\theta) \sqrt{\frac{a}{\mu}} \frac{\text{ctg } i \sin \theta}{\sqrt{1+3\sin^2 i \sin^2 \theta}}, \\ \frac{di}{dt} &= -\frac{\delta \sin 2i \sin 2\theta}{2\sqrt{\mu a^7}} + f(\theta) \sqrt{\frac{a}{\mu}} \frac{\cos i \cos \theta}{\sqrt{1+3\sin^2 i \sin^2 \theta}},\end{aligned}\tag{3.2}$$

Удобно переписать эти уравнения, приняв за независимую переменную аргумент широты. Воспользуемся приближенным соотношением

$$\frac{d\theta}{dt} \approx \sqrt{\frac{\mu}{a^3}},$$

справедливым для случая околокруговой орбиты. Разделив на него оба уравнения (3.2), получим:

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{d\theta} &= -\frac{2\delta \cos i \sin^2 \theta}{\mu a^2} + f(\theta) \frac{a^2}{\mu} \frac{\operatorname{ctg} i \sin \theta}{\sqrt{1+3\sin^2 i \sin^2 \theta}}, \\ \frac{di}{d\theta} &= -\frac{\delta \sin 2i \sin 2\theta}{2\mu a^2} + f(\theta) \frac{a^2}{\mu} \frac{\cos i \cos \theta}{\sqrt{1+3\sin^2 i \sin^2 \theta}}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Перейдем теперь непосредственно к задаче коррекции плоскости орбиты. Пусть требуемые значения элементов финальной орбиты равны  $\Omega_f = \Omega_0 + \Delta\Omega$ ,  $i_f = i_0 + \Delta i$ , а аргумент широты в начальный момент времени равен  $\theta_0$ . Интервал коррекции  $\Delta\theta$  будем считать заданным. Усредним на этом интервале уравнения (3.3), полагая величины орбитальных элементов в правых частях постоянными и равными своим начальным значениям:

$$\begin{aligned} \Delta\Omega &= -\frac{\delta \cos i_0}{\mu a_0^2} (\Delta\theta - \sin \Delta\theta \cos(2\theta_0 + \Delta\theta)) + \frac{a_0^2 \operatorname{ctg} i_0}{\mu} \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \Delta\theta} \frac{f(\theta) \sin \theta d\theta}{\sqrt{1+3\sin^2 \theta \sin^2 i_0}}, \\ \Delta i &= -\frac{\delta \sin i_0 \cos i_0}{\mu a_0^2} \sin \Delta\theta \sin(2\theta_0 + \Delta\theta) + \frac{a_0^2 \cos i_0}{\mu} \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \Delta\theta} \frac{f(\theta) \cos \theta d\theta}{\sqrt{1+3\sin^2 \theta \sin^2 i_0}}. \end{aligned}$$

В силу малости управляющего ускорения в сравнении с возмущающим ускорением от  $J_2$ -гармоники удобно разделить соответствующие процессы изменения орбитальных элементов и рассматривать задачу относительной коррекции – коррекции относительно прецессирующей под действием  $J_2$ -гармоники плоскости орбиты:

$$\Delta\Omega = \Delta\Omega_J + \Delta\Omega_{rel},$$

$$\Delta i = \Delta i_{rel}.$$

Введем следующие обозначения:

$$g(\theta) = \frac{\sin \theta}{\sqrt{1+3\sin^2 i_0 \sin^2 \theta}}, \quad h(\theta) = \frac{\cos \theta}{\sqrt{1+3\sin^2 i_0 \sin^2 \theta}},$$

$$\tilde{f}(\theta) = f(\theta) \frac{a_0^2 \operatorname{ctg} i_0}{\mu} - \text{безразмерное управляющее ускорение.}$$

Тогда для относительных изменений имеем:

$$\begin{aligned} \Delta\Omega_{rel} &= \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \Delta\theta} \tilde{f}(\theta) g(\theta) d\theta, \\ \Delta i_{rel} &= \sin i_0 \cdot \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \Delta\theta} \tilde{f}(\theta) h(\theta) d\theta. \end{aligned} \quad (3.4)$$

В зависимости от типа МДУ малой тяги – с постоянной эффективной мощностью или с постоянной скоростью истечения – можно сформулировать две оптимизационных задачи, отличающихся лишь видом целевого функционала. Для первого случая функционал квадратичный:

$$I_1 = \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \Delta\theta} |\tilde{f}(\theta)|^2 d\theta \rightarrow \min,$$

и оптимальное управление находится в виде конечной формулы

$$\tilde{f}(\theta) = p_\Omega g(\theta) + p_i h(\theta) \sin i_0 \quad (3.5)$$

в результате максимизации функции Гамильтона

$$H(\theta) = -\frac{1}{2} \tilde{f}^2(\theta) + \tilde{f}(\theta)(p_\Omega g(\theta) + p_i h(\theta) \sin i_0).$$

Здесь  $p_\Omega$  и  $p_i$  – компоненты постоянного вектора сопряженных переменных; коэффициент  $1/2$  в квадратичном члене введен для удобства. После подстановки оптимального управления (3.5) в соотношения (3.4) и интегрирования получим систему

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \sin i_0 \\ M_{21} \sin i_0 & M_{22} \sin^2 i_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_\Omega \\ p_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta\Omega_{rel} \\ \Delta i_{rel} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

из двух линейных уравнений для нахождения сопряженных переменных, где

$$M_{11} = \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \Delta\theta} g^2(\theta) d\theta, \quad M_{22} = \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \Delta\theta} h^2(\theta) d\theta,$$

$$M_{12} = M_{21} = \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \Delta\theta} g(\theta) h(\theta) d\theta.$$

Определитель системы  $D = (M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21}) \sin^2 i_0$  отличен от нуля. Это прямо следует из неравенства Коши-Буняковского и линейной независимости функций  $g(\theta)$  и  $h(\theta)$ .

Решение системы (3.6) записывается в виде

$$p_\Omega = \frac{\sin i_0}{D} (M_{22} \Delta\Omega_{rel} \sin i_0 - M_{12} \Delta i_{rel}),$$

$$p_i = \frac{1}{D} (M_{11} \Delta i_{rel} - M_{21} \Delta\Omega_{rel} \sin i_0).$$

После подстановки в (3.5) получим

$$\tilde{f}(\theta) = \frac{\sin i_0}{D} [(M_{11} h(\theta) - M_{12} g(\theta)) \Delta i_{rel} + (M_{22} g(\theta) - M_{21} h(\theta)) \Delta\Omega_{rel} \sin i_0] \quad (3.7)$$

или, возвращаясь от безразмерных величин к размерным,

$$f(\theta) = \frac{a_0^2 \cos i_0}{\mu D} [(M_{11} h(\theta) - M_{12} g(\theta)) \Delta i_{rel} + (M_{22} g(\theta) - M_{21} h(\theta)) \Delta\Omega_{rel} \sin i_0].$$

Для иллюстрации на рис. 3.1 изображена функция  $f(\theta)$ , найденная при следующих значениях параметров:  $i_0 = 35^\circ$ ,  $a_0 = 7000$  км,  $\theta_0 = 0^\circ$ ,  $\Delta\Omega_{rel} = \Delta i_{rel} = 10^{-3}$  рад,  $\Delta\theta = 40\pi$  рад. Величина потребной характеристической скорости равняется приблизительно 15 м/с. Соответствующие зависимости  $\Delta\Omega_{rel} = \Delta\Omega_{rel}(\theta)$  и  $\Delta i_{rel} = \Delta i_{rel}(\theta)$  приведены на рис. 3.2 и 3.3. Сплошными линиями представлены результаты численного интегрирования вариационных уравнений Гаусса. Для долготы восходящего узла учитывается вековой дрейфт  $\Delta\Omega_J$  под действием  $J_2$ -гармоники гeопотенциала:  $\Delta\Omega_{rel} = \Delta\Omega - \Delta\Omega_J$ . Прерывистые линии получены взятием квадратур (3.4), где в качестве  $\tilde{f}(\theta)$  подставлено оптимальное управление (3.7).

Для случая двигателя с постоянной скоростью истечения целевой функционал имеет другой вид:

$$I_2 = \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \Delta\theta} |\tilde{f}(\theta)| d\theta \rightarrow \min.$$

Максимизация функции Гамильтона

$$H(\theta) = -|\tilde{f}(\theta)| + \tilde{f}(\theta)(p_\Omega g(\theta) + p_i h(\theta) \sin i_0)$$

приводит к хорошо известному релейному оптимальному управлению:

$$\tilde{f}(\theta) = \begin{cases} \tilde{f}_{\max}, & \theta \in \{\theta: p_\Omega g(\theta) + p_i h(\theta) \sin i_0 > 1\}, \\ 0, & \theta \in \{\theta: |p_\Omega g(\theta) + p_i h(\theta) \sin i_0| < 1\}, \\ -\tilde{f}_{\max}, & \theta \in \{\theta: p_\Omega g(\theta) + p_i h(\theta) \sin i_0 < -1\}, \end{cases} \quad (3.8)$$

где  $\tilde{f}_{\max}$  – максимальная абсолютная величина безразмерного управляющего ускорения.

Обозначим через  $p_\Omega^0$  и  $p_i^0$  компоненты нормализованного вектора сопряженных переменных. Тогда определяющее моменты включения/выключения двигателей соотношение

$$|p_\Omega g(u) + p_i h(u) \sin i_0| = 1$$

может быть переписано в виде

$$|p_\Omega^0 g(u) + p_i^0 h(u) \sin i_0| = \tau,$$

где

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{p_\Omega^2 + p_i^2}}.$$

Таким образом, каждому направлению вектора сопряженных переменных соответствует в пространстве промахов – на плоскости  $\{\Delta\Omega_{rel}, \Delta i_{rel}\}$  – параметризуемый величиной  $\tau$

годограф. Варьируя направление вектора сопряженных переменных, получаем семейство годографов, формирующее множество корректных краевых условий. Если заданный вектор промаха  $(\Delta\Omega_{rel} \ \Delta i_{rel})^T$  принадлежит этому множеству, можно графически или численно определить, какому именно годографу и какому значению  $\tau$  он соответствует. Тем самым мы находим, какие значения  $p_\Omega$  и  $p_i$  необходимо использовать в законе оптимального управления (3.8), реализующем требуемую коррекцию плоскости орбиты.

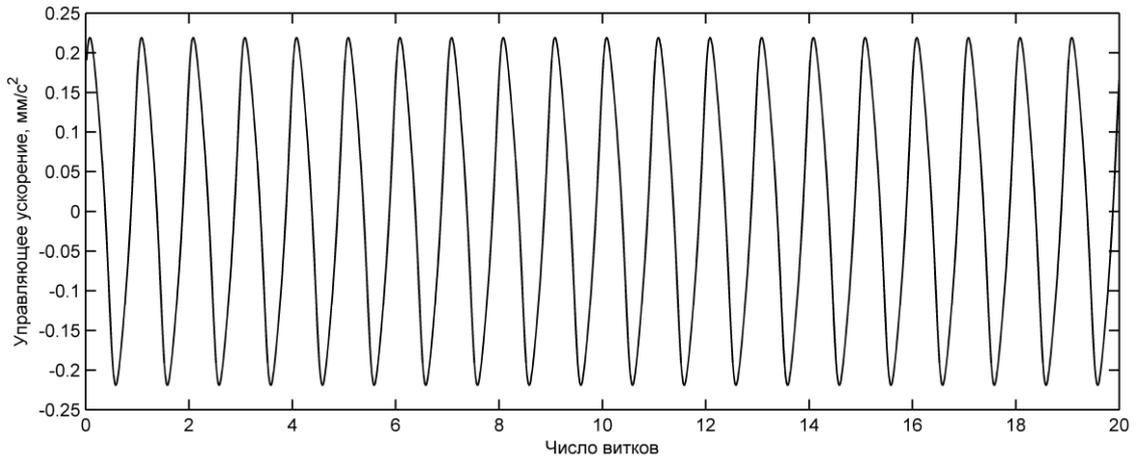


Рис. 3.1. Оптимальное управление для МДУ с постоянной эффективной мощностью

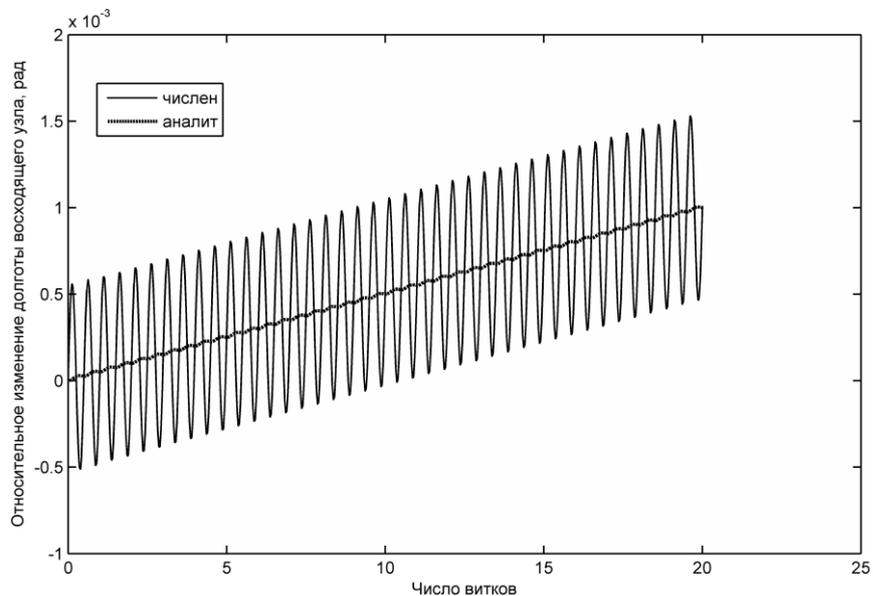


Рис. 3.2. Относительное изменение долготы восходящего узла как функция аргумента широты

На рис. 3.4 показан пример семейства годографов, полученного при следующих значениях параметров:  $i_0 = 35^\circ$ ,  $a_0 = 7000$  км,  $\theta_0 = 0^\circ$ ,  $\Delta\theta = 40\pi$  рад. Отметим, что если интервал коррекции  $\Delta\theta$  фиксирован, то радиус множества корректных краевых условий зависит лишь от величины  $\tilde{f}_{max}$ .

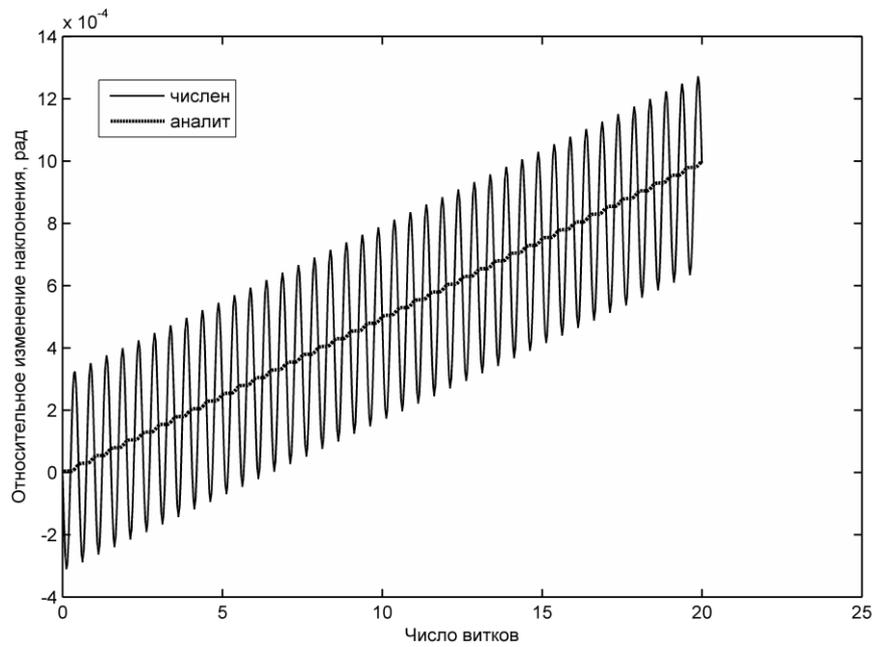


Рис. 3.3. Относительное изменение наклонения как функция аргумента широты

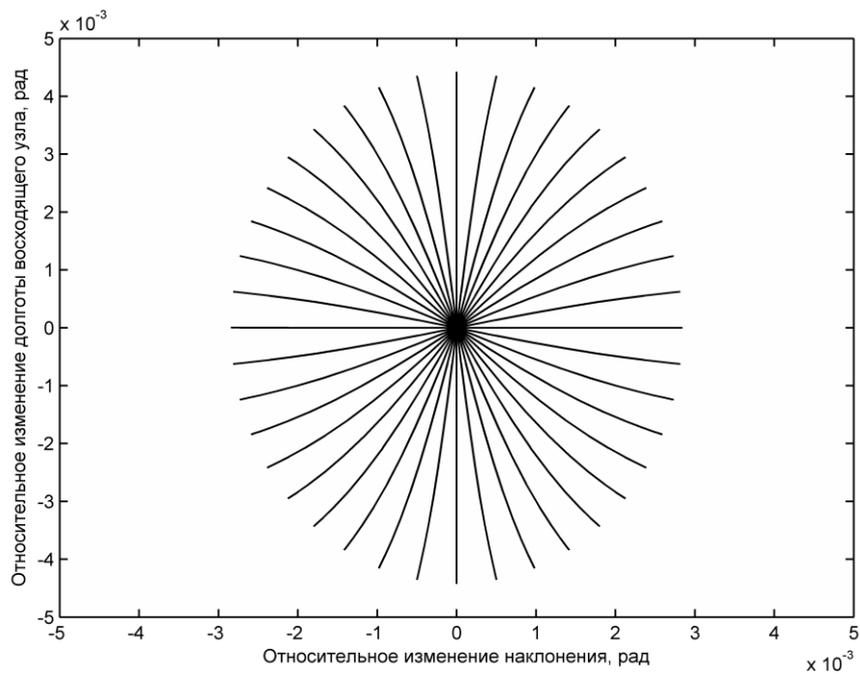


Рис. 3.4. Семейство годографов, формирующее множество корректных краевых условий

Подводя итог, сформулируем общий алгоритм построения одноосной коррекции плоскости орбиты:

- 1) перейти к задаче относительной коррекции, оставив в правой части уравнений Гаусса лишь член с управлением;
- 2) решить задачу относительной коррекции методами теории оптимального управления.

Этот подход применим и для задачи коррекции плоскостей орбит спутников, образующих распределенную спутниковую систему (созвездие или тесную формацию). Так, скажем, если требуется изменить расхождение двух близких плоскостей орбит по долготе восходящего узла на  $\Delta\Omega_{12}$  и по наклонению на  $\Delta i_{12}$ , то для соответствующей пары спутников можно сформулировать такую задачу относительной коррекции:

$$\Delta\Omega_{1,rel} = \alpha\Delta\Omega_{12} + \beta(\Delta\Omega_{2,J} - \Delta\Omega_{1,J}),$$

$$\Delta i_{1,rel} = \gamma\Delta i_{12},$$

$$\Delta\Omega_{2,rel} = -(1-\alpha)\Delta\Omega_{12} - (1-\beta)(\Delta\Omega_{2,J} - \Delta\Omega_{1,J}),$$

$$\Delta i_{2,rel} = -(1-\gamma)\Delta i_{12}.$$

Нетрудно убедиться, что в этом случае выполнение условий

$$\Delta\Omega_{12} = \Delta\Omega_1 - \Delta\Omega_2 = (\Delta\Omega_{1,J} + \Delta\Omega_{1,rel}) - (\Delta\Omega_{2,J} + \Delta\Omega_{2,rel}),$$

$$\Delta i_{12} = \Delta i_1 - \Delta i_2 = \Delta i_{1,rel} - \Delta i_{2,rel}$$

обеспечивается автоматически, а выбор констант  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  задает распределение затрат топлива/энергии между спутниками.

#### 4. Развертывание созвездия спутников для просвечивания ионосферы

Тренд в сторону создания группировок малых спутников (*satellite formation flying*) вместо использования одного большого аппарата, ясно наметившийся в последнее десятилетие в космонавтике, серьезно повлиял на развитие исследований Земли и околоземного космического пространства. В частности, нельзя не отметить появление новых, более эффективных, методов изучения ионосферы: стало возможным проведение просвечивания ионосферы по трассе спутник-спутник, когда оптический или радиосигнал передается с одного КА на другой на нескольких (обычно двух) близких частотах. По разности сдвигов фаз можно определить интегральную концентрацию электронов вдоль пути сигнала, а обработка большого массива полученных данных позволяет восстановить трехмерное распределение заряда в ионосфере.

С научной точки зрения представляет интерес распределение заряда лишь на некоторых высотах (интервалах высот) над поверхностью Земли. Это требует в свою очередь особой конфигурации КА в созвездии: трасса, соединяющая пару спутников, должна проходить в своей нижней точке на нужной исследователю высоте (рис. 4.1). Для простоты пренебрежем эффектом атмосферной рефракции и будем, следовательно, считать трассу прямой линией, а под ее высотой будем понимать в дальнейшем высоту ее нижней точки.

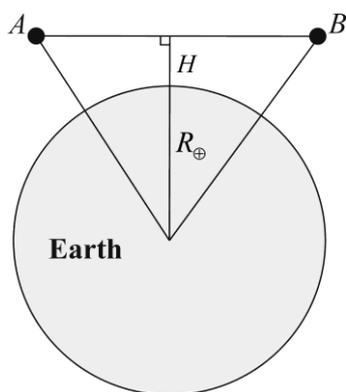


Рис. 4.1. Высота  $H$  трассы, соединяющей спутники  $A$  и  $B$

#### 4.1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу оптимального разведения двух спутников, предназначенных для радиопросвечивания ионосферы и снабженных ПМСУО. Изначально оба КА соединены между собой соосно и помещены в стартовую капсулу, которая выводится на заданную околокруговую орбиту. Далее капсула стабилизируется по ГМП, и в выбранной точке орбиты происходит разделение спутников пружинным толкателем, обеспечивающим нужную относительную скорость разведения. Массу и размеры обоих КА будем считать одинаковыми, а направление разделяющего импульса – совпадающим с направлением локального ГМП.

Исходя из целевого назначения спутников, ключевым параметром в данной задаче является высота межспутниковой трассы над поверхностью Земли. Возможны два следующих способа разведения:

- разведение с последующим торможением;
- разведение без торможения.

В первом случае, подразумевающем наличие на спутниках тормозной ДУ, естественно потребовать наибо́льшего разведения до достижения нужной высоты трассы. Последующий тормозной импульс обеспечит прекращение расхождения аппаратов по аргументу широты и устрани́т возникшее вследствие разделяющего импульса различие в наклоне́нии орбиты. Второй случай является особо перспективным в плане простоты реализации и минимальности затрат ввиду необязательности наличия тормозной ДУ. Оптимальное разведение заключается в максимизации времени, в течение которого значение высоты трассы находится в заданном диапазоне, пригодном для проведения исследований ионосферы.

Более подробно особенности каждого способа разведения спутников анализируются ниже. Пока же нужно отметить, что в обоих случаях будут рассматриваться лишь вековые эффекты, влияющие на высоту межспутниковой трассы. Подобный подход вполне

естественен с учетом большой величины временных интервалов, характерных для процесса разведения спутников (от нескольких сотен до нескольких тысяч витков).

#### 4.2. Высота трассы: нулевое приближение

Для описания движения КА на околокруговой орбите введем полярные координаты  $r$  и  $\theta$  в плоскости близкой к ней круговой орбиты, которую назовем опорной. Под  $\theta$  будем понимать аргумент широты. Смещение вдоль нормали к плоскости опорной орбиты в направлении орбитального момента КА обозначим через  $z$ . Тем самым мы фактически определили цилиндрическую систему координат (ЦСК). Также нам понадобится орбитальная система координат (ОСК). Ее центр  $O$  движется по опорной орбите, ось  $Oz$  совпадает с соответствующей осью ЦСК, а ось  $Ox$  направлена вдоль радиус-вектора.  $Oy$  дополняет систему до правой тройки.

Будем считать управляющее воздействие и внешние возмущения малыми. Тогда для обезразмеренных отклонений от опорной круговой орбиты, возникших вследствие приложения разделяющего импульса

$$\Delta \mathbf{V} = (\Delta V_x \quad \Delta V_y \quad \Delta V_z)^T,$$

можно записать в линейном приближении [7]:

$$\frac{\Delta r}{r_0} = \frac{\Delta V_x}{V_0} \sin \omega_0 t + 2 \frac{\Delta V_y}{V_0} (1 - \cos \omega_0 t), \quad (4.1)$$

$$\Delta \theta = -2 \frac{\Delta V_x}{V_0} (1 - \cos \omega_0 t) - \frac{\Delta V_y}{V_0} (3\omega_0 t - 4 \sin \omega_0 t), \quad (4.2)$$

$$\frac{z}{r_0} = \frac{\Delta V_z}{V_0} \sin \omega_0 t. \quad (4.3)$$

Здесь  $r_0$  и  $V_0$  – радиус и круговая скорость для опорной круговой орбиты,  $r_0 \omega_0 = V_0$ . Как нетрудно заметить из (4.1), для большой полуоси справедливо

$$\frac{\Delta a}{r_0} = 2 \frac{\Delta V_y}{V_0}. \quad (4.4)$$

Впоследствии будем пользоваться выражениями (4.1)-(4.4) для учета влияния разделяющего импульса на орбиты спутников.

Для представления геомагнитного поля воспользуемся осредненной моделью – одной из упрощенных моделей, применяемых в аналитических исследованиях [8]. В этой модели вектор магнитной индукции равномерно вращается в ОСК вокруг нормали к плоскости орбиты, образуя прямой круговой конус с углом полураствора, равным наклонению орбиты  $i$  (рис. 4.2). Модуль вектора индукции при движении вдоль орбиты

полагается постоянным и равным, к примеру, полусумме наибольшего и наименьшего из принимаемых им в дипольном приближении значений

$$B = \frac{\mu_m}{2r_0^3} \left(1 + \sqrt{1 + 3 \sin^2 i}\right),$$

либо интегральному среднему значению за виток (опять же в дипольном приближении)

$$B = \frac{\mu_m}{2r_0^3} \int_0^\pi (1 + 3 \sin^2 i \sin^2 \theta)^{1/2} d\theta.$$

Здесь  $\mu_m = 7.812 \cdot 10^{22} \text{ А} \cdot \text{м}^2$  – магнитный дипольный момент Земли. Проекции вектора магнитной индукции на оси ОСК в осредненной модели равны

$$\begin{aligned} B_x &= -B \sin i \sin \theta, \\ B_y &= B \sin i \cos \theta, \\ B_z &= B \cos i. \end{aligned} \tag{4.5}$$

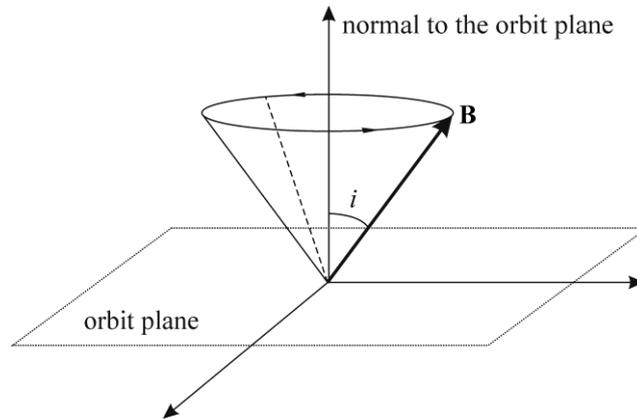


Рис. 4.2. Интерпретация осредненной модели геомагнитного поля

Как и условились ранее, считаем, что разделяющий импульс сообщается спутникам вдоль направления локального ГМП. Тогда, в соответствии с (4.5) и предположением о равенстве масс спутников, компоненты разделяющего импульса  $\Delta \mathbf{V}$  на оси ОСК равны

$$\Delta V_x = \mp \Delta V \sin i_0 \sin \theta_s, \quad \Delta V_y = \pm \Delta V \sin i_0 \cos \theta_s, \quad \Delta V_z = \pm \Delta V \cos i_0,$$

где  $i_0$  – наклонение опорной орбиты,  $\theta_s$  – аргумент широты точки разделения; верхние и

нижние знаки относятся к разным спутникам. Параметр  $\varepsilon = \frac{\Delta V}{V_0}$  может быть оценен,

исходя из типичной для пружинных толкателей скорости разделения:

$$\varepsilon \approx \frac{1 \text{ м/с}}{10^4 \text{ м/с}} = 10^{-4}.$$

Отметим, что при характерной продолжительности процесса разведения спутников порядка нескольких недель (число витков  $N \approx 200-300$ ) справедливо двойное неравенство  $\varepsilon \ll N\varepsilon \ll 1$ .

Проследим за эволюцией высоты межспутниковой трассы с течением времени, которое будем отсчитывать от момента разделения. Основной вклад здесь вносит эффект расхождения спутников по аргументу широты. Из формулы (4.2) получаем, что за  $N$  оборотов

$$\Delta\theta = -6\pi N \frac{\Delta V_y}{V_0} = \mp 6\pi N \varepsilon \sin i_0 \cos \theta_s.$$

Действительно, из-за трансверсальной составляющей разделяющего импульса изменятся большие полуоси орбит спутников (см. формулу (4.4)), а значит, и периоды обращения. Один аппарат будет опережать по аргументу широты на  $|\Delta\theta|$ , а другой – на  $|\Delta\theta|$  отставать от их барицентра, продолжающего движение по опорной круговой орбите. Далее под  $\Delta\theta$  будем понимать абсолютную величину такого опережения (отставания). Для высоты трассы  $H$  имеем (рис. 4.3):

$$H = r_0 \cos \Delta\theta - R_{\oplus}. \quad (4.6)$$

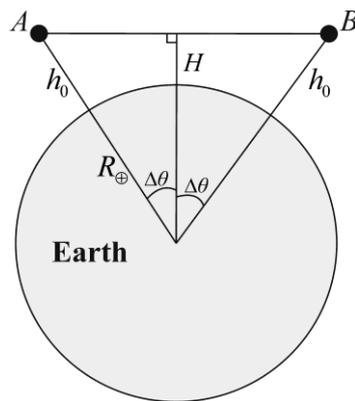


Рис. 4.3. Геометрическая связь высоты трассы и расхождения спутников вдоль орбиты

### 4.3. Высота трассы: эффекты первого порядка

Скорректируем формулу (4.6) для высоты трассы, чтобы учесть влияние различных возмущающих эффектов. Все такие эффекты могут быть разделены на две группы в зависимости от того, к какому смещению спутников от опорной круговой орбиты, радиальному или боковому, они приводят.

#### 4.3.1. Радиальное смещение

Пусть расстояние от притягивающего центра до первого КА стало  $r_1 = R_{\oplus} + h_1 = r_0 + \Delta r_1$ , а до второго –  $r_2 = R_{\oplus} + h_2 = r_0 + \Delta r_2$ . Без ограничения общности можно считать, что  $\Delta r_1 \leq \Delta r_2 \ll r_0$ . Расхождение между спутниками по аргументу широты будем, как и прежде, полагать равным  $2\Delta\theta$ . Соответствующие центральные углы уже не

являются одинаковыми и равны  $\Delta\theta - \delta$  и  $\Delta\theta + \delta$ , где  $\delta$  – некоторый малый угол (рис. 4.4). Поскольку  $\sin \delta \approx \delta$  и  $\cos \delta \approx 1$ , очевидное тождество

$$R_{\oplus} + H + \Delta H = (R_{\oplus} + h_1) \cos(\Delta\theta - \delta) = (R_{\oplus} + h_2) \cos(\Delta\theta + \delta)$$

может быть переписано в виде

$$r_0 \cos \Delta\theta + \Delta H = (r_0 + \Delta r_1) (\cos \Delta\theta + \delta \sin \Delta\theta) = (r_0 + \Delta r_2) (\cos \Delta\theta - \delta \sin \Delta\theta).$$

Из второй его части имеем:

$$\delta \sin \Delta\theta = \frac{\Delta r_2 - \Delta r_1}{2r_0 + \Delta r_1 + \Delta r_2} \cos \Delta\theta.$$

Подстановка в первую часть тождества и деление на  $r_0$  дает

$$\cos \Delta\theta + \frac{\Delta H}{r_0} = \left(1 + \frac{\Delta r_1}{r_0}\right) \left(1 + \frac{\Delta r_2}{r_0}\right) \left(1 + \frac{\Delta r_1 + \Delta r_2}{2r_0}\right)^{-1} \cos \Delta\theta.$$

Используя тот факт, что

$$\frac{\Delta r_1}{r_0} \ll 1, \quad \frac{\Delta r_2}{r_0} \ll 1,$$

можем раскрыть скобки в правой части, отбросив члены выше первого порядка малости.

Для изменения высоты трассы  $\Delta H$  получим:

$$\Delta H = \frac{\Delta r_1 + \Delta r_2}{2} \cos \Delta\theta. \quad (4.7)$$

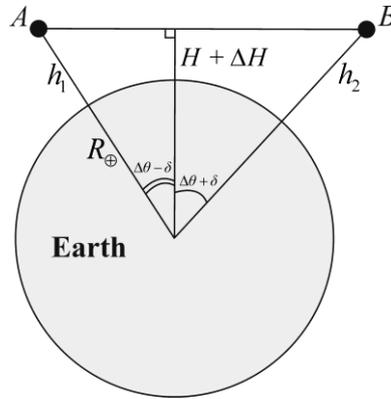


Рис. 4.4. Изменение высоты трассы ввиду радиального смещения спутников

Применим полученную формулу при последовательном анализе всех типов эффектов, приводящих к радиальному смещению спутников. Можно выделить три причины такого смещения:

- 1) изменение эксцентриситета орбит КА после приложения разделяющего импульса;
- 2) изменение аргумента перигея как следствие возникающей ввиду несферичности Земли прецессии орбиты;

3) атмосферное торможение.

Таким образом, можем записать  $\Delta H = \Delta H_{sep} + \Delta H_{per} + \Delta H_{atm}$ .

Из формулы (4.1) видно, что вековое смещение  $\Delta r$  отсутствует. Значит,  $\Delta H_{sep} = 0$ . Нетрудно также показать, что и  $\Delta H_{per} = 0$ . Действительно, изменение  $\delta\omega$  аргумента перигея  $\omega$  орбиты с наклоном  $i$  и параметром орбиты  $p$  за один оборот, обусловленное зональной гармоникой  $J_2$  гравитационного поля Земли, определяется выражением [9]

$$\delta\omega = \frac{3\pi}{2} \left( \frac{R_{\oplus}}{p} \right)^2 J_2 (5 \cos^2 i - 1).$$

Расстояние от притягивающего центра до точки орбиты с аргументом широты  $\theta$  изменится за оборот на величину

$$\Delta r = - \frac{pe \sin(\theta - \omega)}{(1 + e \cos(\theta - \omega))^2} \delta\omega.$$

Так как возникающий после приложения разделяющего импульса эксцентриситет  $e$  у орбит спутников имеет порядок  $\varepsilon$ , то в выражении для  $\delta\omega$  следует оставить только члены нулевого порядка малости, одинаковые для обоих КА. Орбиты спутников могут считаться прецессирующими с одинаковой скоростью и не меняющими относительного положения. Следовательно, вековое (точнее, долгопериодическое) радиальное смещение отсутствует:  $\Delta H_{per} = 0$ .

Что касается влияния атмосферы, то здесь придется выполнить некоторые оценочные расчеты. Относительное снижение спутника за виток орбиты приближенно вычисляется по формуле

$$\frac{|\Delta r|}{r} \approx 4\pi \frac{F_{atm}}{mg}, \quad (4.8)$$

где  $F_{atm} = C_d A \frac{\rho V^2}{2}$  – сила лобового сопротивления атмосферы,  $r$  – радиус орбиты,  $m$  – масса аппарата [9]. Возьмем для примера опорную орбиту высотой  $h_0 = 550$  км. Плотность атмосферы на этой высоте  $\rho \approx 3 \cdot 10^{-13}$  кг/м<sup>3</sup>. Для спутника массой  $m = 20$  кг с коэффициентом лобового сопротивления  $C_d = 2$  и площадью миделева сечения  $A = 0.1$  м<sup>2</sup> формула (4.8) дает

$$\frac{|\Delta r|}{r_0} \approx 10^{-7}.$$

Таким образом, уменьшение расстояния до притягивающего центра за несколько сотен витков будет порядка  $\varepsilon$ . Это означает, что торможение в атмосфере – единственный из приводящих к радиальному смещению эффектов, который необходимо учитывать.

После  $N$  оборотов по орбите имеем следующую оценку снизу для снижения  $|\Delta r| = |\Delta r_1| = |\Delta r_2|$  обоих КА:

$$|\Delta r| \approx 2\pi N \frac{C_d A \rho_0}{mg} \mu.$$

Здесь  $\rho_0 = \rho(h_0)$ ,  $\mu$  – гравитационный параметр Земли. Подставляя в (4.7), получим окончательную формулу для уменьшения  $|\Delta H|$  высоты трассы:

$$|\Delta H| = |\Delta H_{atm}| \approx 2\pi N \frac{C_d A \rho_0}{mg} \mu \cos \Delta \theta. \quad (4.9)$$

#### 4.3.2. Боковое смещение

Перейдем к рассмотрению эффектов, приводящих к боковому смещению спутников из плоскости опорной круговой орбиты. Причин бокового смещения, очевидно, две:

- 1) разница в наклонении и долготе восходящего узла орбит спутников после приложения разделяющего импульса;
- 2) неодинаковая скорость прецессии плоскостей орбит КА как следствие разницы в наклонении и размере орбит.

Приложение разделяющего импульса приводит к периодическому выходу спутника из плоскости опорной орбиты, не давая вековых эффектов. Это ясно следует из формулы (4.3). Поэтому обратимся сразу ко второй причине бокового смещения.

Изменение  $\delta\Omega$  долготы восходящего узла  $\Omega$  орбиты с наклонением  $i$  и параметром орбиты  $p$  за один оборот, обусловленное зональной гармоникой  $J_2$  гравитационного поля Земли, определяется выражением [9]

$$\delta\Omega = -3\pi \left( \frac{R_\oplus}{p} \right)^2 J_2 \cos i.$$

Удобно ввести обозначение

$$\tilde{J}_2 = 3\pi \left( \frac{R_\oplus}{r_0} \right)^2 J_2.$$

Изменение наклонения орбиты при приложении разделяющего импульса равно [7]

$$\Delta i = \frac{\Delta V_z}{V_0} \cos \theta_s.$$

Используя эту формулу и формулу (4.4), найдем разность в скорости изменения долготы восходящего узла для опорной орбиты и орбит спутников:

$$\delta\Omega_{1,2} - \delta\Omega_{ref} = \pm\tilde{J}_2 \left( 4 \frac{\Delta V_y}{V_0} + \frac{\Delta V_z}{V_0} \tan i_0 \cos \theta_s \right) = \pm 5\varepsilon\tilde{J}_2 \sin i_0 \cos \theta_s.$$

После  $N$  оборотов по орбите имеем:

$$\Delta\Omega_{1,2} - \Delta\Omega_{ref} = \pm 5N\varepsilon\tilde{J}_2 \sin i_0 \cos \theta_s.$$

Рассмотрим, какое влияние оказывает боковое смещение на высоту трассы. Пусть орбиты обоих спутников отклонились по долготе восходящего узла от опорной на  $\Delta\Omega$  (рис. 4.5). Это приведет к изменению  $\delta\theta$  расхождения КА по аргументу широты. Применяя теорему косинусов для сферического треугольника

$$\cos(\Delta\theta - \delta\theta) = \cos \Delta\theta \cos \Delta\Omega + \sin \Delta\theta \sin \Delta\Omega \cos i_0$$

и отбрасывая члены выше первого порядка малости, получим:

$$\delta\theta = \Delta\Omega \cos i_0 = 5N\varepsilon\tilde{J}_2 \sin i_0 \cos i_0 \cos \theta_s. \quad (4.10)$$

В соответствии с формулой (4.6) для нулевого приближения поправка к высоте межспутниковой трассы из-за бокового смещения определяется как

$$\Delta H = -r_0 \sin \Delta\theta \cdot \delta\theta.$$

После подстановки (4.10) окончательно имеем:

$$\Delta H = 5Nr_0\varepsilon\tilde{J}_2 \sin i_0 \cos i_0 \cos \theta_s \sin \Delta\theta. \quad (4.11)$$

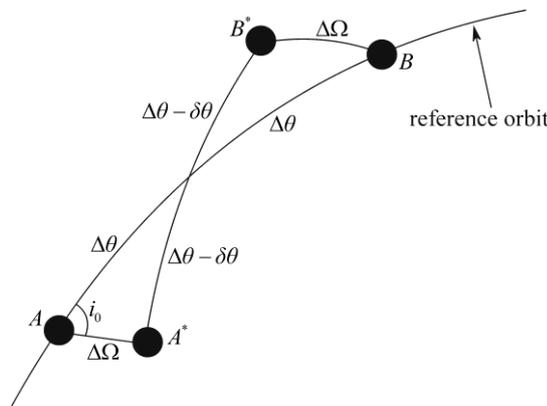


Рис. 4.5. Изменение высоты трассы ввиду бокового смещения спутников

#### 4.4. Оптимизация для двух способов разведения

В итоге для высоты трассы получаем окончательную формулу с учетом всех заслуживающих рассмотрения эффектов:

$$H = r_0 \cos \Delta\theta - R_{\oplus} - 2\pi N \frac{C_d A \rho_0}{mg} \mu \cos \Delta\theta + 5Nr_0\varepsilon\tilde{J}_2 \sin i_0 \cos i_0 \cos \theta_s \sin \Delta\theta. \quad (4.12)$$

Здесь под  $\Delta\theta$  обозначено

$$\Delta\theta = 6\pi N\varepsilon \sin i_0 \cos \theta_s.$$

Проанализируем выражение (4.12) в свете особенностей каждого из двух способов разведения, обозначенных при постановке задачи.

Начнем с варианта разведения с последующим торможением. Тормозящий импульс, равный по величине и противоположный по направлению разделяющему, выполняется для обоих КА в момент, когда высота межспутниковой трассы достигает нужного значения. Естественно потребовать в таком случае наискорейшего процесса разведения спутников.

Положим для примера наклонение и высоту опорной круговой орбиты равными соответственно  $56^\circ$  и 550 км. Пусть требуемая высота трассы составляет 250 км, что отвечает значению  $\Delta\theta \approx 17^\circ$ . Сделаем оценку величины  $\Delta V$  разделяющего импульса скорости, необходимой для разведения аппаратов за  $N = 200$  витков. В первом слагаемом в формуле (4.12) достаточно оставить три члена тейлоровского разложения:

$$\cos \Delta\theta \approx 1 - \frac{(\Delta\theta)^2}{2} + \frac{(\Delta\theta)^4}{24}.$$

В двух других слагаемых можно положить  $\sin \Delta\theta \approx \Delta\theta$ ,  $\cos \Delta\theta \approx 1$ . Группируя подобные члены, получим:

$$H = h_0 - 18r_0 \left[ 1 - \frac{5\tilde{J}_2}{3\pi} \cos i_0 - 3(\pi N\varepsilon \sin i_0 \cos \theta_s)^2 \right] (\pi N\varepsilon \sin i_0 \cos \theta_s)^2 - 2\pi N \frac{C_d A \rho_0}{mg} \mu.$$

Основной эффект, влияющий на высоту трассы, – расхождение спутников вдоль орбиты – определяется формулой

$$\frac{h_0 - H}{r_0} = 18(\pi N\varepsilon \sin i_0 \cos \theta_s)^2. \quad (4.13)$$

Из (4.13) видно, что минимальное  $\varepsilon$  достигается при  $\theta_s = 0$  (разделение спутников над экватором). После подстановки указанных выше числовых значений получаем в таком случае  $\varepsilon \approx 0.94 \cdot 10^{-4}$ , что соответствует  $\Delta V \approx 71$  см/с. Среди поправочных членов наибольший – второй член из тейлоровского разложения  $\cos \Delta\theta$  – достигает 0.8% от величины основного эффекта. Боковое смещение дает постоянный вклад в 0.3%. Влияние атмосферного торможения пренебрежимо мало: всего лишь 0.1%.

Теперь рассмотрим второй вариант разведения – без последующего торможения. Этот способ, не требующий, что существенно, наличия тормозной ДУ, эффективен, если целью миссии является сканирование определенного диапазона высот. Так, к примеру, для задач зондирования ионосферы важно, чтобы высота межспутниковой трассы была не менее 100 км над поверхностью Земли [10]. Для данного типа разведения КА цель

состоит в максимизации времени, в течение которого значение высоты трассы находится в пределах требуемого диапазона.

Из (4.13) следует, что медленность процесса разведения можно обеспечить двумя путями: увеличением аргумента широты точки разделения или уменьшением величины разделяющего импульса. Разумней использовать последнее: наряду с нужной скоростью разведения достигается уменьшение периодических отклонений от плоскости опорной орбиты, которые, как следует из формулы (4.3), в линейном приближении пропорциональны малому параметру  $\varepsilon$ .

Пусть необходимое время работы миссии (период, в течение которого трасса лежит выше высоты в 100 км) составляет около полутора лет или, через число оборотов,  $N \approx 8740$ . Проводя аналогичные вычисления, что и для предыдущего способа разведения, получим для разделения над экватором  $\varepsilon \approx 2.64 \cdot 10^{-6}$ , что соответствует  $\Delta V \approx 2$  см/с. Если пружинный толкатель не способен обеспечить столь малую скорость разделения, то медленности разведения можно добиться надлежащим выбором точки разделения КА. Так, для толкателя с минимальным пределом в 10 см/с нужно выбрать точку с аргументом широты  $\theta_s \approx 78.5^\circ$  ( $\cos \theta_s \approx 0.2$ ). На столь значительном промежутке времени в полтора года вклад атмосферного торможения в уменьшение высоты трассы составляет около 1.6%.

Для валидации полученных аналитических результатов было проведено следующее численное моделирование: непосредственным интегрированием определялись орбиты двух КА после приложения разделяющего импульса с аналитически рассчитанными параметрами. Учитывались атмосферное торможение и гармоники геопотенциала до десятой степени и порядка. Как следует из рис. 4.6, для первого типа разведения формула (4.13), задающая параболическую зависимость высоты межспутниковой трассы от числа пройденных витков, описывает реальную эволюцию высоты трассы с высокой точностью. Этот предсказуемый результат объясняется неспособностью внешних возмущений произвести значительный эффект на коротком интервале времени.

Картина меняется, когда мы переходим к рассмотрению второго способа разведения. Как показано на рис. 4.7, межспутниковая трасса опускается до высоты 100 км за  $N \approx 7020$  витков. 20%-процентное расхождение с аналитической оценкой может быть объяснено влиянием тессеральных гармоник геопотенциала: поскольку подспутниковые трассы двух КА не совпадают, возникает дифференциальный возмущающий эффект. Он приводит к разбеганию плоскостей орбит КА, что ускоряет снижение высоты межспутниковой трассы. Доказательством этой гипотезы служат результаты численного моделирования, изображенные на рис. 4.8, когда из внешних возмущений учитывались

лишь сопротивление атмосферы и влияние  $J_2$  гармоники. В этом случае  $N \approx 8660$ , и расхождение с аналитической оценкой составляет менее 1%.

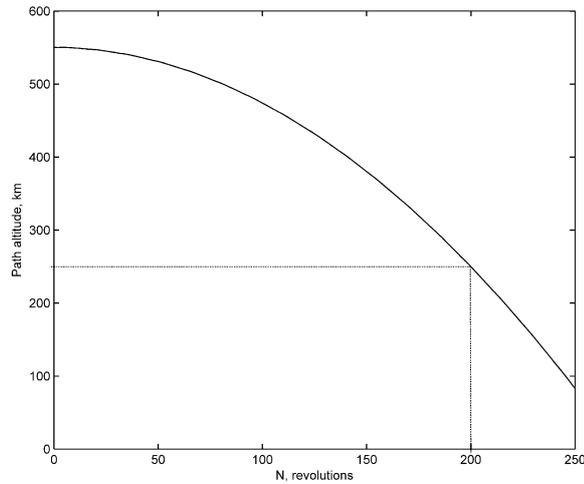


Рис. 4.6. Эволюция высоты трассы при разведении с последующим торможением

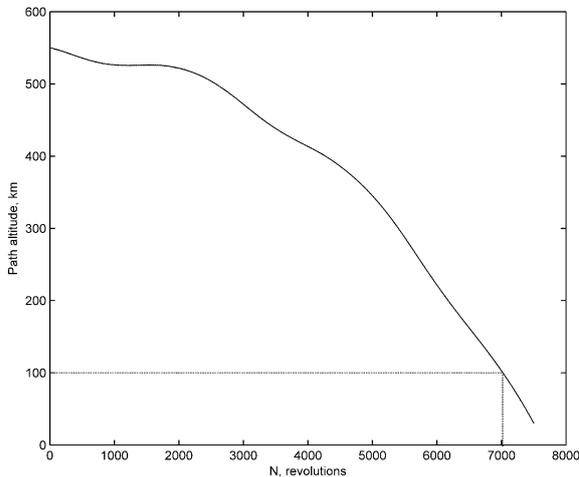


Рис. 4.7. Эволюция высоты трассы при разведении без торможения. Учитываются гармоники до десятой степени и порядка

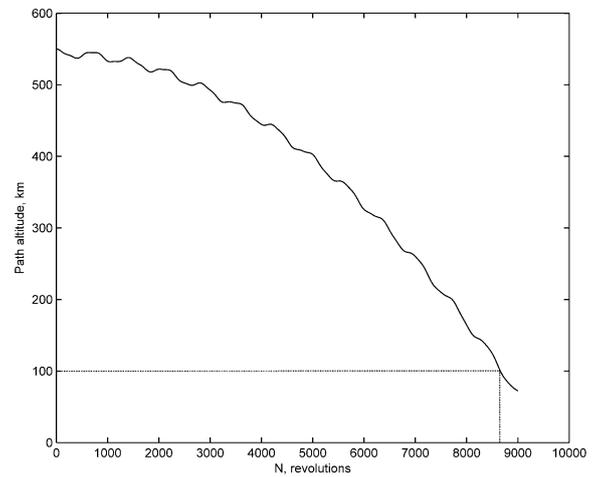


Рис. 4.8. Эволюция высоты трассы при разведении без торможения. Учитывается только вторая зональная гармоника

В заключение упомянем один любопытный факт. Как следует из формулы (4.2), наблюдается периодический эффект «относительной остановки»:

$$\frac{d(\Delta\theta)}{dt} = 0, \text{ если } \operatorname{ctg} \omega_0 t = \frac{1}{2} \frac{\Delta V_x}{\Delta V_y}.$$

В эти моменты относительное расстояние между спутниками почти не меняется и компонента относительной скорости вдоль межспутниковой трассы зануляется. Это приводит к исчезновению доплеровского смещения частоты для сигнала, передаваемого с одного КА на другой. В некоторых прикладных задачах наличие такого смещения является нежелательным. Поэтому для проведения соответствующих измерений могут быть рекомендованы именно моменты «относительной остановки».

## 5. Одноосное управление относительным движением формации из двух спутников на околокруговых орбитах

Исследуем возможность использования одноосного управления для выполнения еще одной стандартной для группового полета орбитальной операции – поддержания пространственной конфигурации группы спутников. Ограничимся здесь важным и актуальным с практической точки зрения случаем тесной формации двух малых КА на близких околокруговых орбитах. Нашей целью будет являться построение замкнутых траекторий периодического относительного движения спутников. Период такого движения должен совпадать или, по крайней мере, быть сопоставимым с периодом орбитального движения. Чтобы доказать существование замкнутых траекторий, будет показано наличие управляемости динамической системы, моделирующей относительное движение КА с одноосным управлением.

### 5.1. Линеаризованные уравнения относительного движения

Понятие *тесной формации* или *кластера* подразумевает, что взаимное расстояние между спутниками много меньше больших полуосей их орбит. В этом случае для описания динамики логично воспользоваться уравнениями относительного движения КА. Для произвольного типа орбит, однако, эти нелинейные уравнения громоздки и сложны для аналитического исследования. Поэтому их, как правило, линеаризуют относительно некоторой опорной орбиты, близкой к орбитам спутников в формации.

Наиболее известный тип линеаризованных уравнений относительного движения – *уравнения Хилла-Клохесси-Уилтшира* (ХКУ) – соответствует случаю движения двух спутников (назовем их *главным* и *дочерним*) по близким околокруговым орбитам в центральном поле [11,12]. ХКУ-уравнения имеют простой и компактный вид

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2n\dot{y} - 3n^2x &= 0, \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} &= 0, \\ \ddot{z} + n^2z &= 0,\end{aligned}$$

где  $x$ ,  $y$  и  $z$  – координаты в орбитальной СК  $Oxyz$ , центр  $O$  которой движется по опорной круговой орбите радиуса  $r_0$  с угловой скоростью

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{r_0^3}},$$

ось  $Ox$  направлена вдоль радиус-вектора,  $Oz$  – по нормали к плоскости опорной орбиты в направлении орбитального момента КА, а  $Oy$  дополняет систему до правой тройки. ХКУ-уравнения легко интегрируются, и их решение записывается в виде конечных формул.

Основным недостатком ХКУ-уравнений является их низкая точность при описании относительного движения на длительных интервалах времени, что обусловлено неучетом внешних возмущений. Главную роль здесь играет влияние  $J_2$  гармоника геопотенциала: поскольку элементы орбит спутников в формации хоть и близки, но все же различны, скорости прецессии плоскостей орбит тоже различаются. Это приводит к постепенному удалению спутников друг относительно друга – «разбеганию» кластера.

Чтобы учесть влияние второй зональной гармоника, ХКУ-уравнения были модифицированы Швайгартом и Седвиком [13]. Эти модифицированные уравнения, которые впоследствии стали называться *уравнениями Швайгарта-Седвика* (ШС), записываются как

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2nc\dot{y} - (5c^2 - 2)n^2x &= 0, \\ \ddot{y} + 2nc\dot{x} &= 0, \\ \ddot{z} + q^2z &= 2lq \cos(qt + \phi).\end{aligned}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}c &= \sqrt{1 + \frac{3J_2 R_\oplus^2}{8r_0^2} (1 + 3 \cos 2i_0)}, \\ q &= nc + \frac{3nJ_2 R_\oplus^2}{2r_0^2} \left( \cos^2 i_2 - \frac{(\cos i_1 - \cos i_2)(\operatorname{ctg} i_1 \sin i_2 \cos \Delta\Omega_0 - \cos i_2)}{\sin^2 \Delta\Omega_0 + (\operatorname{ctg} i_1 \sin i_2 - \cos i_2 \cos \Delta\Omega_0)^2} \right), \\ l &= -\frac{3nJ_2 R_\oplus^2}{2r_0} \frac{(\cos i_1 - \cos i_2) \sin i_1 \sin i_2 \sin \Delta\Omega_0}{\sqrt{1 - (\cos i_1 \cos i_2 + \sin i_1 \sin i_2 \cos \Delta\Omega_0)^2}}, \\ \Delta\Omega_0 &= \frac{y_0}{r_0 \sin i_0}, \\ y_0 &= y(0).\end{aligned}$$

Наклонения опорной орбиты и орбит главного и дочернего спутников обозначены соответственно за  $i_0$ ,  $i_1$  и  $i_2$ . Фаза  $\phi$  может быть определена из уравнения

$$l \sin \phi + qy_0 \operatorname{ctg} \phi = \dot{y}_0,$$

где  $\dot{y}_0 = \dot{y}(0)$ .

Без ограничения общности предположим, что движение главного спутника неуправляемо, в то время как дочерний спутник пассивно стабилизирован и имеет одну или две маршевых ДУ, расположенных вдоль единственной стабилизированной оси. Для описания относительного движения будем использовать ШС-уравнения, которые при наличии одноосного управления приобретают вид

$$\begin{aligned}
\ddot{x} - 2nc\dot{y} - (5c^2 - 2)n^2x &= e_x(\mathbf{r}_2, t)f, \\
\ddot{y} + 2nc\dot{x} &= e_y(\mathbf{r}_2, t)f, \\
\ddot{z} + q^2z &= 2lq \cos(qt + \phi) + e_z(\mathbf{r}_2, t)f.
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Вектор-функция

$$\mathbf{e}(\mathbf{r}_2, t) = (e_x(\mathbf{r}_2, t) \ e_y(\mathbf{r}_2, t) \ e_z(\mathbf{r}_2, t))^T \tag{5.2}$$

задает направление тяги,  $f \equiv a_{cont}$  – величина тяги,  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2(t)$  – положение дочернего спутника. Как было условлено ранее, знак  $f$  показывает коллинеарность или антиколлинеарность векторов  $\mathbf{a}_{cont}$  и  $\mathbf{e}$ .

Поскольку движение дочернего спутника – управляемое, его положение в каждый момент времени не может быть определено заранее. Поэтому сделаем упрощающее предположение и будем считать, что радиус-вектор  $\mathbf{r}_2$  в (5.2) совпадает с радиус-вектором  $\mathbf{r}_0$  центра  $O$  орбитальной СК, движение которого априори известно.

## 5.2. Управляемость и существование замкнутых траекторий относительного движения

Чтобы переписать систему ШС-уравнений (5.1) в канонической форме, введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
\xi &= (x \ y \ z \ \dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z})^T, \\
\mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ (5c^2 - 2)n^2 & 0 & 0 & 0 & 2nc & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2nc & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -q^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{b} &= (0 \ 0 \ 0 \ e_x \ e_y \ e_z)^T, \\
\mathbf{c} &= (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2lq \cos(qt + \phi))^T.
\end{aligned}$$

В результате линейная динамическая система, моделирующая относительное движение КА с одноосным управлением, определяется следующим набором дифференциальных уравнений:

$$\dot{\xi}(t) = \mathbf{A}\xi(t) + \mathbf{b}(t)f(t) + \mathbf{c}(t), \quad \xi(t) \in \mathbb{R}^6, \quad f(t) \in \mathbb{R}. \tag{5.3}$$

Если одноосное управление – одностороннее, то  $f(t) \geq 0$ . Система

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = -\mathbf{A}^T \mathbf{p}(t), \quad (5.4)$$

описывающая эволюцию вектора сопряженных переменных  $\mathbf{p} = (p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4 \ p_5 \ p_6)^T$ ,

в покоординатной записи имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= -(5c^2 - 2)n^2 p_4, \\ \dot{p}_2 &= 0, \\ \dot{p}_3 &= q^2 p_6, \\ \dot{p}_4 &= -p_1 + 2ncp_5, \\ \dot{p}_5 &= -p_2 - 2ncp_4, \\ \dot{p}_6 &= -p_3. \end{aligned}$$

Ее общее решение легко находится и может быть записано как

$$\begin{aligned} p_1(t) &= p_1^0 - A_4 \frac{(5c^2 - 2)n}{\sqrt{2 - c^2}} \sin(\sqrt{2 - c^2}nt + \phi_4) + 2nc \frac{5c^2 - 2}{2 - c^2} p_2^0 t, \\ p_2(t) &= p_2^0, \\ p_3(t) &= A_3 \cos(qt + \phi_3), \\ p_4(t) &= A_4 \cos(\sqrt{2 - c^2}nt + \phi_4) - \frac{2cp_2^0}{(2 - c^2)n}, \\ p_5(t) &= \frac{p_1^0}{2nc} - A_4 \frac{2c}{\sqrt{2 - c^2}} \sin(\sqrt{2 - c^2}nt + \phi_4) + \frac{5c^2 - 2}{2 - c^2} p_2^0 t, \\ p_6(t) &= -\frac{A_3}{q} \sin(qt + \phi_3). \end{aligned}$$

Здесь  $p_1^0$ ,  $p_2^0$ ,  $A_3$ ,  $A_4$ ,  $\phi_3$  и  $\phi_4$  – произвольные константы.

Обозначим через  $F$  множество допустимых управлений  $f(\cdot)$ , состоящее из локально интегрируемых функций. Общее решение системы (5.3) задается формулой Коши

$$\xi(t) = e^{At} \xi_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} (\mathbf{b}(s) f(s) + \mathbf{c}(s)) ds, \quad \xi_0 = \xi(0).$$

Будем говорить, что система (5.3) имеет  $T$ -замкнутую траекторию  $\xi(\cdot)$ , удовлетворяющую соотношению  $\xi_0 = \xi(0)$ , если существует такое допустимое управление  $f_{\xi_0}(\cdot)$ , что

$$\xi_0 = e^{AT} \xi_0 + \int_0^T e^{A(T-t)} (\mathbf{b}(t) f_{\xi_0}(t) + \mathbf{c}(t)) dt. \quad (5.5)$$

Введем множество  $K_T$ . Определим его как

$$K_T = \left\{ \int_0^T e^{A(T-t)} \mathbf{b}(t) f(t) dt \mid f(\cdot) \in F \right\}.$$

$K_T$  является подпространством в случае двустороннего одноосного управления и выпуклым конусом – в случае одностороннего управления. Если  $K_T = \mathbb{R}^6$ , то, как легко заметить, для любого состояния  $\xi_0 = \xi(0)$  существует допустимое управление  $f_{\xi_0}(\cdot)$ , удовлетворяющее (5.5). Более того, для любых начального  $\xi_1$  и конечного  $\xi_2$  состояний существует допустимое управление  $f_{\xi_1, \xi_2}$  такое, что

$$\xi_2 = e^{AT}\xi_1 + \int_0^T e^{A(T-t)}(\mathbf{b}(t)f_{\xi_1, \xi_2}(t) + \mathbf{c}(t))dt.$$

Другими словами, условие  $K_T = \mathbb{R}^6$ , эквивалентное наличию полной управляемости динамической системы (5.3), является достаточным для существования  $T$ -замкнутых траекторий.

Чтобы доказать полную управляемость системы с двусторонним одноосным управлением, будем пользоваться следующим утверждением.

**Теорема 1.**

*Если не существует нетривиального решения сопряженной системы*

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = -\mathbf{A}^T \mathbf{p}(t),$$

*удовлетворяющего условию*

$$\mathbf{p}(t) \cdot \mathbf{b}(t) = 0, \quad t \in [0, T], \tag{5.6}$$

*то справедливо  $K_T = \mathbb{R}^6$ .*

□ Предположим, что  $K_T \neq \mathbb{R}^6$ . Тогда существует ненулевой вектор  $\mathbf{p}_0$ , ортогональный всем векторам  $e^{A(T-t)}\mathbf{b}(t)$ ,  $t \in [0, T]$ . Это может быть записано также в виде

$$e^{A^T(T-t)}\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{b}(t) = 0, \quad t \in [0, T].$$

Таким образом, существует нетривиальная вектор-функция

$$\mathbf{p}(t) = e^{A^T(T-t)}\mathbf{p}_0,$$

удовлетворяющая условию (5.6) и являющаяся решением (5.4). ■

Для случая одностороннего одноосного управления ситуация более сложная. Будем в дальнейшем рассматривать только периодические функции  $\mathbf{b}(\cdot)$ , а для их периода использовать обозначение  $\tau$ . Это допущение, вполне оправданное с практической точки зрения, существенно облегчает исследование. Действительно, из свойства периодичности  $\mathbf{b}(t + \tau) = \mathbf{b}(t)$  вытекает

**Лемма 1.**

Если функция  $\mathbf{b}(t)$   $\tau$ -периодична, то имеет место включение  $K_{M\tau} \subset K_{(M+1)\tau}$ , где  $M$  – произвольное натуральное число.

□ Пусть  $\zeta \in K_{M\tau}$ . Тогда существует такое допустимое управление  $u(\cdot)$ , что

$$\zeta = \int_0^{M\tau} e^{A(M\tau-t)} \mathbf{b}(t) u(t) dt.$$

Введем обозначение

$$w(s) = \begin{cases} 0, & s \in [0, \tau), \\ u(s-\tau), & s \in [\tau, (M+1)\tau]. \end{cases}$$

Имеем:

$$\zeta = \int_{-\tau}^{M\tau} e^{A(M\tau-t)} \mathbf{b}(t) w(\tau+t) dt = \int_0^{M\tau+\tau} e^{A(M\tau+\tau-s)} \mathbf{b}(s-\tau) w(s) ds = \int_0^{(M+1)\tau} e^{A((M+1)\tau-s)} \mathbf{b}(s) w(s) ds.$$

Следовательно,  $K_{M\tau} \subset K_{(M+1)\tau}$ . ■

Для доказательства управляемости системы с односторонним одноосным управлением будет использоваться

**Теорема 2.**

Если не существует нетривиального решения сопряженной системы

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = -\mathbf{A}^T \mathbf{p}(t),$$

удовлетворяющего условию

$$\mathbf{p}(t) \cdot \mathbf{b}(t) \geq 0, \quad t \geq 0, \quad (5.7)$$

то справедливо  $K_\infty = \bigcup_M K_{M\tau} = \mathbb{R}^6$ .

□ Как следует из леммы 1, множество  $K_\infty$  является выпуклым конусом. Предположим, что  $K_\infty \neq \mathbb{R}^6$ . Тогда можем заключить, что существует вектор  $\mathbf{p}_\infty \neq \mathbf{0}$ , удовлетворяющий неравенству  $\zeta \cdot \mathbf{p}_\infty \geq 0$  для любого  $\zeta \in K_\infty$ . Следовательно,

$$\zeta \cdot \mathbf{p}_\infty \geq 0, \quad \forall \zeta \in K_{M\tau}, \quad \forall M \in \mathbb{N}. \quad (5.8)$$

Рассмотрим последовательность вектор-функций

$$\mathbf{p}_M(t) = \frac{\exp(\mathbf{A}^T(M\tau-t)) \mathbf{p}_\infty}{\|\exp(\mathbf{A}^T M\tau) \mathbf{p}_\infty\|}, \quad M = 1, 2, \dots$$

Для каждой такой функции в силу соотношения (5.8) можно записать:

$$\mathbf{p}_M(t) \cdot \mathbf{b}(t) \geq 0, \quad t \in [0, M\tau].$$

Последовательность единичных векторов  $\mathbf{p}_M(0)$  сходится к некоторому единичному вектору, который обозначим  $\mathbf{p}_0$ . Поэтому имеем:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \mathbf{p}_M(t) = \exp(-\mathbf{A}^T t) \mathbf{p}_0, \quad t \in [0, M\tau].$$

Таким образом, существует нетривиальная вектор-функция

$$\mathbf{p}(t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \mathbf{p}_M(t),$$

удовлетворяющая условию (5.7) и являющаяся решением (5.4). ■

Докажем еще одну несложную, но важную теорему.

### Теорема 3.

Если для монотонной последовательности выпуклых конусов  $K_{M\tau}$  справедливо

$$\bigcup_M K_{M\tau} = \mathbb{R}^6, \text{ то существует такое натуральное } M^*, \text{ что } K_{M^*\tau} = \mathbb{R}^6.$$

□ Пусть  $\zeta_k$ ,  $k=1, \dots, 7$  – вершины некоторого симплекса  $\Xi$ , по отношению к которому нуль-вектор является внутренней точкой. Тогда для любого  $\zeta \in \mathbb{R}^6$  можно записать

$$\zeta = \sum_{k=1}^7 \lambda_k \zeta_k, \text{ где } \lambda_k, \quad k=1, \dots, 7 \text{ – однозначным образом определяемые неотрицательные}$$

коэффициенты. Поскольку  $\bigcup_M K_{M\tau} = \mathbb{R}^6$ , то для каждого  $\zeta_k$  существует натуральное  $M_k$  и

допустимое управление  $u_k(\cdot)$  такие, что

$$\zeta_k = \int_0^{M_k\tau} e^{\mathbf{A}(M_k\tau-t)} \mathbf{b}(t) u_k(t) dt.$$

В силу монотонности последовательности  $K_{M\tau}$  верно также и

$$\zeta_k = \int_0^{M^*\tau} e^{\mathbf{A}(M^*\tau-t)} \mathbf{b}(t) w_k(t) dt,$$

где  $M^* = \max\{M_k \mid k=1, \dots, 7\}$ , а  $w_k(\cdot)$  – некоторое допустимое управление. Таким

образом, для любого  $\zeta \in \mathbb{R}^6$  можно записать

$$\zeta = \int_0^{M^*\tau} e^{\mathbf{A}(M^*\tau-t)} \mathbf{b}(t) \left( \sum_{k=1}^7 \lambda_k w_k(t) \right) dt,$$

что и означает  $K_{M^*\tau} = \mathbb{R}^6$ . ■

Доказательство теоремы 3 является конструктивным, так как предлагает простой подход к нахождению натурального числа  $M^*$ , а следовательно, и к доказательству существования  $M^*$   $\tau$ -замкнутых траекторий.

### 5.3. Достаточные условия существования замкнутых траекторий для разных типов одноосного управления

Сформулируем достаточные условия существования замкнутых траекторий относительного движения для конкретных типов одноосного управления. Рассмотрим уже знакомый по предыдущим главам случай пассивной стабилизации вдоль геомагнитного поля (соответствующее одноосное управление будем называть **В-управлением**), а также случай стабилизации собственным вращением (**S-управление**).

Чтобы воспользоваться теоремами 1 и 2, перепишем условия (5.6) и (5.7) в покомпонентной форме:

$$p_4(t)e_x(t) + p_5(t)e_y(t) + p_6(t)e_z(t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (5.9)$$

$$p_4(t)e_x(t) + p_5(t)e_y(t) + p_6(t)e_z(t) \geq 0, \quad t \in [0, \infty). \quad (5.10)$$

Для **В-управления**

$$\begin{aligned} e_x(t) &= -\frac{2 \sin i_2 \sin \theta_2(t)}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 i_2 \sin^2 \theta_2(t)}}, \\ e_y(t) &= \frac{\sin i_2 \cos \theta_2(t)}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 i_2 \sin^2 \theta_2(t)}}, \\ e_z(t) &= \frac{\cos i_2}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 i_2 \sin^2 \theta_2(t)}}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Как и условились ранее, в качестве неизвестного аргумента широты  $\theta_2(t)$  дочернего КА подставим справедливое для аргумента широты центра ОСК соотношение  $\theta_0(t) = nct$ .

В случае **S-управления** будем считать, что дочерний спутник стабилизирован собственным вращением вдоль постоянного в инерциальном пространстве направления. Удобно ввести два следующих угла, задающих это направление:  $\varepsilon$  – угол между плоскостью земного экватора и плоскостью, содержащей ось вращения и направление на точку весеннего равноденствия;  $\lambda$  – угол, отсчитываемый в указанной плоскости против часовой стрелки от направления на точку весеннего равноденствия до направления оси вращения. Такой выбор углов объясним с практической точки зрения: зачастую КА стабилизируется собственным вращением так, чтобы ось вращения указывала на Солнце. В этом случае  $\varepsilon \approx 23^\circ 27'$  – наклон плоскости земного экватора к плоскости эклиптики, а  $\lambda$  – эклиптическая долгота Солнца.

В геоцентрической инерциальной СК  $OXYZ$ , где ось  $OX$  указывает на точку весеннего равноденствия, а  $OZ$  – на северный полюс мира, направление оси вращения задается вектором  $(\cos \lambda \sin \lambda \cos \varepsilon \sin \lambda \sin \varepsilon)^T$ . После перехода в ОСК компоненты этого вектора приобретают вид

$$\begin{aligned} e_x(t) &= -\sigma_x \cos \theta_2(t) - \sigma_z \sin \theta_2(t), \\ e_y(t) &= -\sigma_y \cos \theta_2(t) - \sigma_x \sin \theta_2(t), \\ e_z(t) &= -\sigma_z. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Постоянный орт  $\sigma = (\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z)^T$  определяет направление оси вращения, когда дочерний КА находится в восходящем узле орбиты с долготой  $\Omega_2$ :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \cos \Omega_2 \cos \lambda + \sin \Omega_2 \sin \lambda \cos \varepsilon, \\ \sigma_y &= \cos \Omega_2 \cos i_2 \sin \lambda \cos \varepsilon - \sin \Omega_2 \cos i_2 \cos \lambda + \sin i_2 \sin \lambda \sin \varepsilon, \\ \sigma_z &= -\cos \Omega_2 \sin i_2 \sin \lambda \cos \varepsilon + \sin \Omega_2 \sin i_2 \cos \lambda + \cos i_2 \sin \lambda \sin \varepsilon. \end{aligned}$$

Как и прежде,  $\theta_2(t) = nct$ .

Покажем справедливость следующей важной леммы, которая будет использована в дальнейшем для доказательства достаточных условий существования замкнутых траекторий относительного движения.

### Лемма 2.

Если  $2i_0 \neq \arccos(-1/3)$ , то значения четырех частот

$$\begin{aligned} \omega_0 &= nc, \\ \omega_1 &= q, \\ \omega_2 &= (\sqrt{2-c^2} - c)n, \\ \omega_3 &= (\sqrt{2-c^2} + c)n, \end{aligned}$$

отличны от нуля, причем выполняется  $\omega_2 < \omega_0 < \omega_1 < \omega_3$ .

□ По определению

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{1 + \frac{3J_2 R_\oplus^2}{8r_0^2} (1 + 3 \cos 2i_0)}, \\ q &= nc + \frac{3nJ_2 R_\oplus^2}{2r_0^2} \left( \cos^2 i_2 - \frac{(\cos i_1 - \cos i_2)(\operatorname{ctg} i_1 \sin i_2 \cos \Delta\Omega_0 - \cos i_2)}{\sin^2 \Delta\Omega_0 + (\operatorname{ctg} i_1 \sin i_2 - \cos i_2 \cos \Delta\Omega_0)^2} \right). \end{aligned}$$

Очевидно, что  $\omega_2$  – наименьшая, а  $\omega_3$  – наибольшая из частот. Осталось показать, что  $\omega_0 < \omega_1$  и  $\omega_2 \neq 0$ .

Поскольку орбиты спутников близки и разность  $i_2 - i_1$  мала, можно приближенно записать:

$$q \approx nc + \frac{3nJ_2R_\oplus^2}{2r_0^2} \cos^2 i_2.$$

Отсюда ясно следует, что  $\omega_0 < \omega_1$ . Кроме того, так как по условию леммы  $2i_0 \neq \arccos(-1/3)$ , то  $c \neq 1$ , и значит,  $\omega_2 \neq 0$ . ■

Для случаев двустороннего **B**-управления и двустороннего **S**-управления достаточные условия существования  $T$ -замкнутых траекторий имеют схожую формулировку и доказываются одинаковым образом.

#### Теорема 4.

Пусть  $T > 0$ . Если  $\sin 2i_2 \neq 0$ , то для любого  $\xi_0 = \xi(0)$  существует  $T$ -замкнутая траектория системы (5.3).

□ Условие (5.9) с учетом (5.11) может быть переписано как

$$\Pi(t) = \tilde{g}t \cos \omega_0 t + \sum_{k=0}^3 (g_k \cos \omega_k t + h_k \sin \omega_k t) \equiv 0, \quad t \in [0, T],$$

где коэффициенты квазиполинома  $\Pi(t)$  имеют следующий вид:

$$\tilde{g} = \frac{5c^2 - 2}{2 - c^2} p_2^0 \sin i_2,$$

$$g_0 = \frac{p_1^0}{2nc} \sin i_2,$$

$$h_0 = \frac{4cp_2^0}{(2 - c^2)n} \sin i_2,$$

$$g_1 = -\frac{A_3}{q} \cos i_2 \cos \phi_3,$$

$$h_1 = -\frac{A_3}{q} \cos i_2 \sin \phi_3,$$

$$g_2 = A_4 \left( 1 - \frac{c}{\sqrt{2 - c^2}} \right) \sin i_2 \sin \phi_4,$$

$$h_2 = A_4 \left( 1 - \frac{c}{\sqrt{2 - c^2}} \right) \sin i_2 \cos \phi_4,$$

$$g_3 = -A_4 \left( 1 + \frac{c}{\sqrt{2 - c^2}} \right) \sin i_2 \sin \phi_4,$$

$$h_3 = -A_4 \left( 1 + \frac{c}{\sqrt{2 - c^2}} \right) \sin i_2 \cos \phi_4.$$

В силу того, что, согласно лемме 2, все частоты  $\omega_k$  попарно различны и ненулевые, тождественное равенство квазиполинома  $\Pi(t)$  нулю на отрезке  $[0, T]$  возможно, только если все его коэффициенты равны нулю. Учитывая  $\sin 2i_2 \neq 0$ , приходим к выводу, что  $p_1^0 = p_2^0 = A_3 = A_4 = 0$ , и следовательно,  $\mathbf{p}(t) \equiv 0$ ,  $t \in [0, T]$ . Используя теорему 1, можем заключить, что  $K_T = \mathbb{R}^6$ , а значит, для любого  $\xi_0 = \xi(0)$  существует  $T$ -замкнутая траектория системы (5.3). ■

### Теорема 5.

Пусть  $T > 0$ . Если  $\sigma_x^2 + \sigma_y^2 \neq 0$  и  $\sigma_z \neq 0$ , то для любого  $\xi_0 = \xi(0)$  существует  $T$ -замкнутая траектория системы (5.3).

□ Условие (5.9) с учетом (5.12) может быть переписано как

$$\Pi(t) = \tilde{g}t \cos \omega_0 t + \tilde{h}t \sin \omega_0 t + \sum_{k=0}^3 (g_k \cos \omega_k t + h_k \sin \omega_k t) \equiv 0, \quad t \in [0, T],$$

где коэффициенты квазиполинома  $\Pi(t)$  имеют следующий вид:

$$\tilde{g} = -\frac{5c^2 - 2}{2 - c^2} p_2^0 \sigma_y,$$

$$\tilde{h} = \frac{5c^2 - 2}{2 - c^2} p_2^0 \sigma_x,$$

$$g_0 = -\frac{p_1^0}{2nc} \sigma_y + \frac{2cp_2^0}{(2 - c^2)n} \sigma_x,$$

$$h_0 = \frac{p_1^0}{2nc} \sigma_x + \frac{2cp_2^0}{(2 - c^2)n} \sigma_y,$$

$$g_1 = \frac{A_3}{q} \sigma_z \sin \phi_3,$$

$$h_1 = \frac{A_3}{q} \sigma_z \cos \phi_3,$$

$$g_2 = -A_4 \left( \frac{1}{2} + \frac{c}{\sqrt{2 - c^2}} \right) (\sigma_x \cos \phi_4 - \sigma_y \sin \phi_4),$$

$$h_2 = A_4 \left( \frac{1}{2} + \frac{c}{\sqrt{2 - c^2}} \right) (\sigma_y \cos \phi_4 + \sigma_x \sin \phi_4),$$

$$g_3 = -A_4 \left( \frac{1}{2} - \frac{c}{\sqrt{2 - c^2}} \right) (\sigma_x \cos \phi_4 + \sigma_y \sin \phi_4),$$

$$h_3 = A_4 \left( \frac{1}{2} - \frac{c}{\sqrt{2 - c^2}} \right) (\sigma_x \sin \phi_4 - \sigma_y \cos \phi_4).$$

В силу того, что, согласно лемме 2, все частоты  $\omega_k$  попарно различны и ненулевые, тождественное равенство квазиполинома  $\Pi(t)$  нулю на отрезке  $[0, T]$  возможно, только если все его коэффициенты равны нулю. Учитывая  $\sigma_x^2 + \sigma_y^2 \neq 0$  и  $\sigma_z \neq 0$ , приходим к выводу, что  $p_1^0 = p_2^0 = A_3 = A_4 = 0$ , и следовательно,  $\mathbf{p}(t) \equiv 0$ ,  $t \in [0, T]$ . Используя теорему 1, можем заключить, что  $K_T = \mathbb{R}^6$ , а значит, для любого  $\xi_0 = \xi(0)$  существует  $T$ -замкнутая траектория системы (5.3). ■

Несколько по-другому обстоит дело с односторонним  $\mathbf{V}$ -управлением. Период  $\tau$  функции  $\mathbf{b}(t)$  равен в этом случае  $\frac{2\pi}{nc}$ .

### Теорема 6.

Если  $\sin 2i_2 \neq 0$ , то найдется такое натуральное число  $M^*$ , что для любого  $\xi_0 = \xi(0)$  существует  $M^*$ - $\tau$ -замкнутая траектория системы (5.3).

□ Условие (5.10) с учетом (5.11) может быть записано как

$$\Pi(t) = \tilde{g}t \cos \omega_0 t + \sum_{k=0}^3 (g_k \cos \omega_k t + h_k \sin \omega_k t) \geq 0, \quad t \in [0, \infty),$$

где квазиполином  $\Pi(t)$  совпадает с тем, что был определен в доказательстве теоремы 4.

Покажем, что неотрицательность квазиполинома  $\Pi(t)$  на луче  $[0, \infty)$  требует, чтобы все его коэффициенты равнялись нулю. Действительно, имеем:

$$0 \leq \frac{\Pi(t)}{t} = \tilde{g} \cos \omega_0 t + O\left(\frac{1}{t}\right), \quad t \rightarrow \infty.$$

Отсюда очевидно следует, что  $\tilde{g} = 0$ . Остается

$$\sum_{k=0}^3 (g_k \cos \omega_k t + h_k \sin \omega_k t) \geq 0. \quad (5.13)$$

Согласно лемме 2, все частоты  $\omega_k$  попарно различны и ненулевые. Поэтому можем домножить обе части неравенства (5.13) на  $1 \pm \cos \omega_j t$ ,  $j = 0, 1, 2, 3$  и, осредняя на промежутке  $[0, T]$ , длину которого устремляем к бесконечности, получим:

$$0 \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \Pi(t) (1 \pm \cos \omega_j t) dt = \pm \frac{g_j}{2}.$$

Значит, одновременно верно  $g_j \leq 0$  и  $g_j \geq 0$ , что приводит к выводу  $g_j = 0$ ,  $j = 0, 1, 2, 3$ . Аналогично, заменив лишь  $1 \pm \cos \omega_j t$  на  $1 \pm \sin \omega_j t$ , можно показать, что  $h_j = 0$ ,  $j = 0, 1, 2, 3$ . Следовательно,  $\mathbf{p}(t) \equiv 0$ ,  $t \in [0, \infty)$ . Как утверждает теорема 2, в этом случае  $\bigcup_M K_{M\tau} = \mathbb{R}^6$ . Доказательство завершается применением теоремы 3. ■

Соответствующая теорема справедлива и для одностороннего **S**-управления. Однако, если в этом случае найти число  $M^*$ , воспользовавшись предложенным в доказательстве теоремы 3 методом (будем в дальнейшем называть его *симплекс-экспериментом*), то это число оказывается очень велико, а значит, период замкнутых траекторий относительного движения гораздо превосходит орбитальный. С практической точки зрения такой результат не представляет никакой ценности. Кроме того, на длительных временных интервалах применение ШС-уравнений не вполне корректно ввиду характерного для линеаризованных уравнений линейного роста ошибок с течением времени.

Для одностороннего **B**-управления симплекс-эксперимент дает  $M^* = 2$ . Более подробно об этом будет сказано в следующем разделе.

#### 5.4. Численное построение замкнутых траекторий относительного движения

Чтобы подтвердить выводы проведенного аналитического исследования, для трех рассмотренных типов одноосного управления построим замкнутые траектории линеаризованной системы (5.3), решив численно интегральное уравнение (5.5). После разбиения интервала  $[0, T]$  на  $N$  равных частей оно преобразуется к линейному уравнению

$$\frac{T}{N} \sum_{i=1}^N e^{A(T-t_i)} \mathbf{b}(t_i) f_i = \boldsymbol{\xi}_0 - e^{AT} \boldsymbol{\xi}_0 + \frac{T}{N} \sum_{i=1}^N e^{A(T-t_i)} \mathbf{c}(t_i)$$

относительно неизвестных  $f_i = f_{\boldsymbol{\xi}_0}(t_i)$ , где  $t_i = \frac{T}{N}(i-1)$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Из бесконечного множества решений этого уравнения выберем минимальное в смысле  $L_2$ -нормы:

$$\sum_{i=1}^N (f_i)^2 \rightarrow \min.$$

Как было показано в главе 2, такой закон управления минимизирует затраты рабочего тела для МДУ с постоянной эффективной мощностью.

Подставим найденный закон управления в уравнения Гаусса орбитального движения дочернего КА и проинтегрируем их с учетом возмущающего влияния второй зональной гармоники геопотенциала. Вычитая из полученной траектории дочернего спутника

известную траекторию главного спутника (она также может быть определена непосредственным интегрированием уравнений Гаусса) и переходя в ОСК, найдем «истинную», не совсем замкнутую, траекторию относительного движения. Сравнивая ее с замкнутой траекторией линеаризованной системы, можно оценить ошибку линеаризации.

Результаты всех описанных выше численных процедур изображены на рис. 5.1 – 5.9, где для трех типов одноосного управления – двустороннего **В**-управления, двустороннего **S**-управления и одностороннего **В**-управления – показаны оптимальный закон управления, соответствующая замкнутая траектория линеаризованной системы ШС-уравнений и ее покоординатные ошибки как функции времени. Начальные условия во всех случаях одинаковы: при  $t = 0$  орбита главного спутника круговая,

$$\mathbf{r}_1(0) = \mathbf{r}_0(0), r_0 = 7000 \text{ км}, i_0 = i_1 = 35^\circ, \theta_0(0) = \theta_1(0) = 0^\circ,$$

относительные положение и скорость дочернего спутника

$$x_0 = x(0) = 35.36 \text{ м}, y_0 = y(0) = 70.71 \text{ м}, z_0 = z(0) = 70.71 \text{ м},$$

$$\dot{x}_0 = \dot{x}(0) = -38.07 \text{ мм/с}, \dot{y}_0 = \dot{y}(0) = 76.25 \text{ мм/с}, \dot{z}_0 = \dot{z}(0) = 76.32 \text{ мм/с}.$$

Для **S**-управления направление оси вращения задается углами  $\varepsilon = 23^\circ 27'$ ,  $\lambda = 45^\circ$ , что гипотетически может соответствовать направлению на Солнце.

В обоих случаях двустороннего управления период замкнутых траекторий выбран совпадающим с орбитальным:

$$T = \tau = 2\pi(nc)^{-1}.$$

Для одностороннего **В**-управления симплекс-эксперимент, детальное описание которого приведено в таблице 1, дает  $M^* = 2$ . Поэтому было взято  $T = 2\tau$ . Для каждой вершины выбранного симплекса был найден оптимальный в смысле  $L_2$ -нормы закон управления, который реализует  $2\tau$ -замкнутую траекторию, проходящую через эту вершину. В последних двух строках таблицы указаны значения  $L_1$ -нормы

$$\|f\|_1 = \int_0^{2\tau} |f(t)| dt$$

и квадрата  $L_2$ -нормы

$$\|f\|_2 = \int_0^{2\tau} |f(t)|^2 dt$$

соответствующего управления.

Отметим, что основным источником ошибки линеаризации является линейный по времени эффект разбегания спутников вдоль орбиты вследствие несовпадения больших полуосей их орбит, а следовательно, и орбитальных периодов.

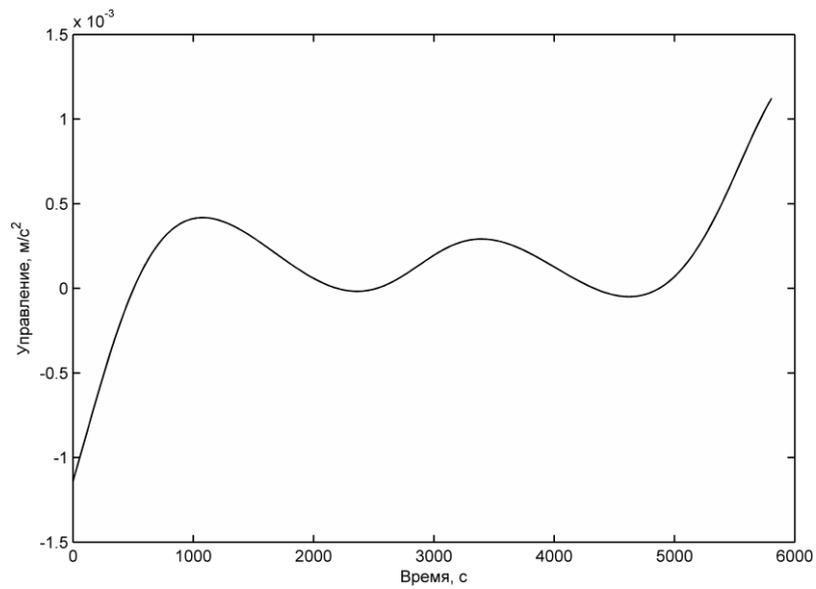


Рис. 5.1. Закон оптимального двустороннего **V**-управления

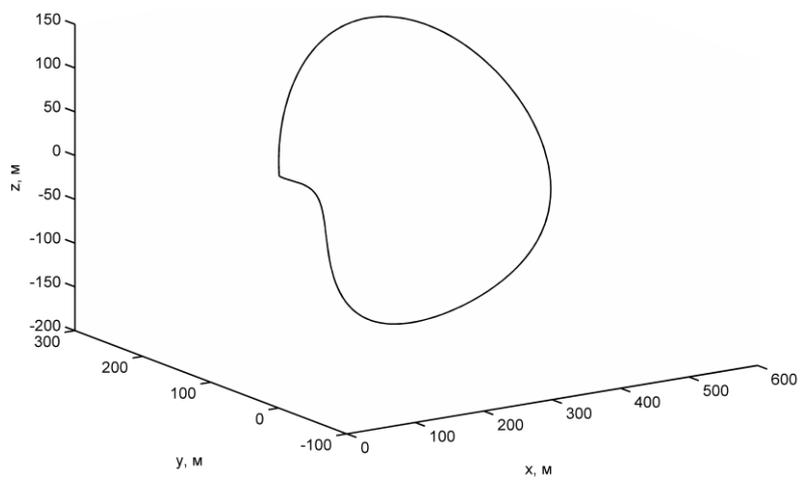


Рис.5.2. Замкнутая траектория системы с двусторонним **V**-управлением

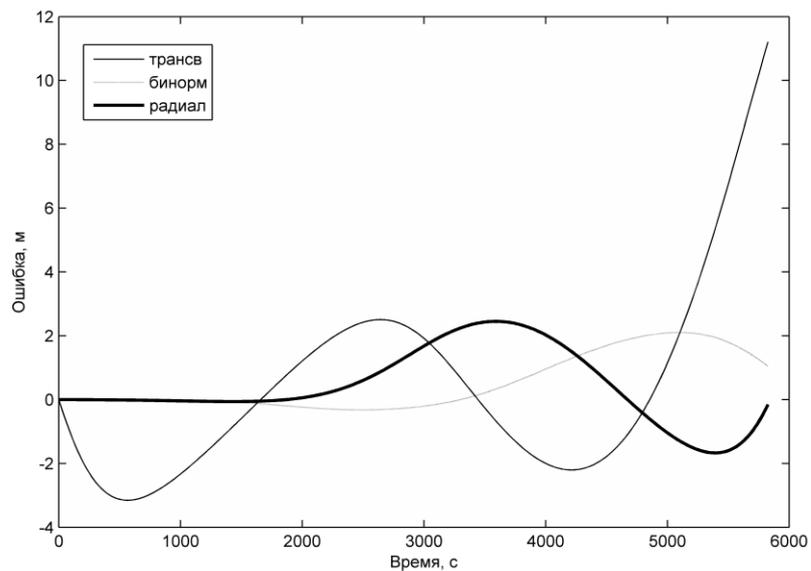


Рис. 5.3. Покоординатные ошибки траектории линеаризованной системы с двусторонним **V**-управлением

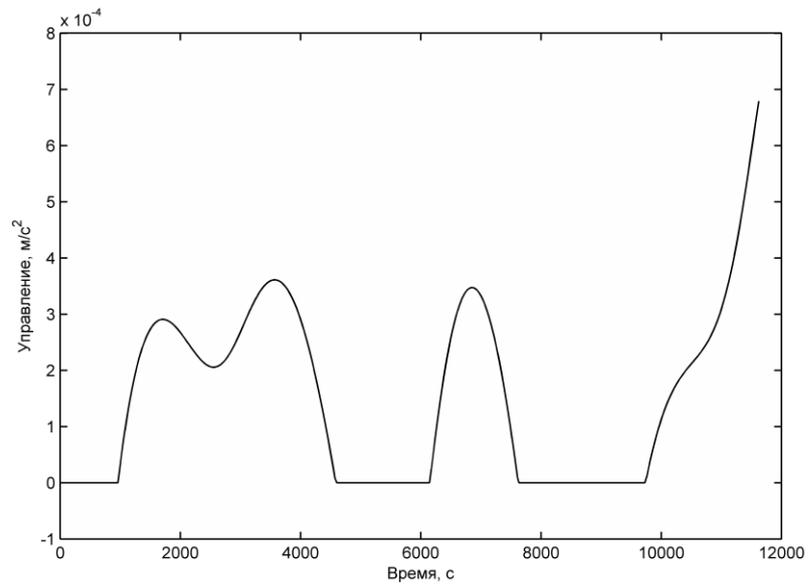


Рис. 5.4. Закон оптимального одностороннего **V**-управления

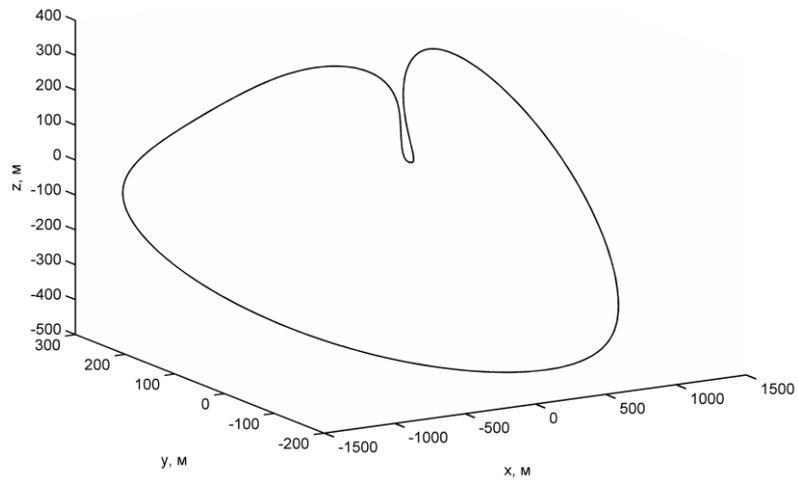


Рис. 5.5. Замкнутая траектория системы с односторонним **V**-управлением

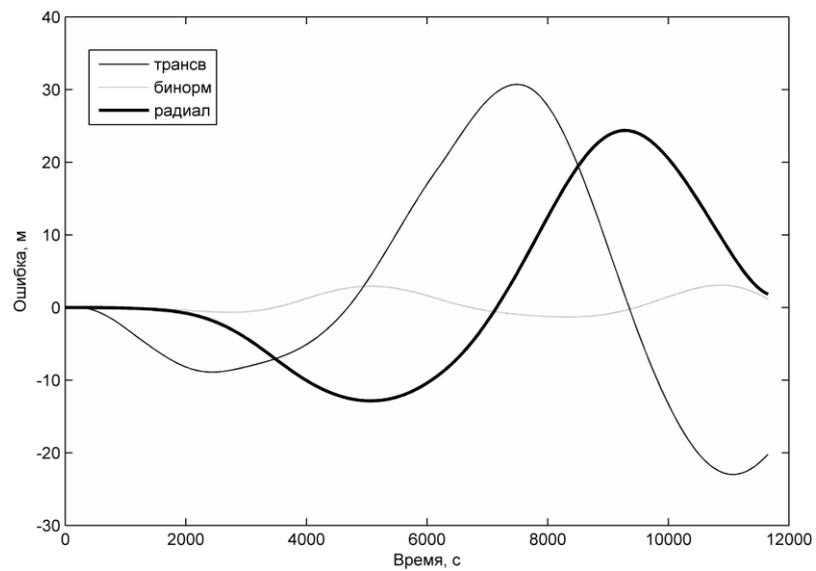


Рис. 5.6. Покоординатные ошибки траектории линеаризованной системы с односторонним **V**-управлением

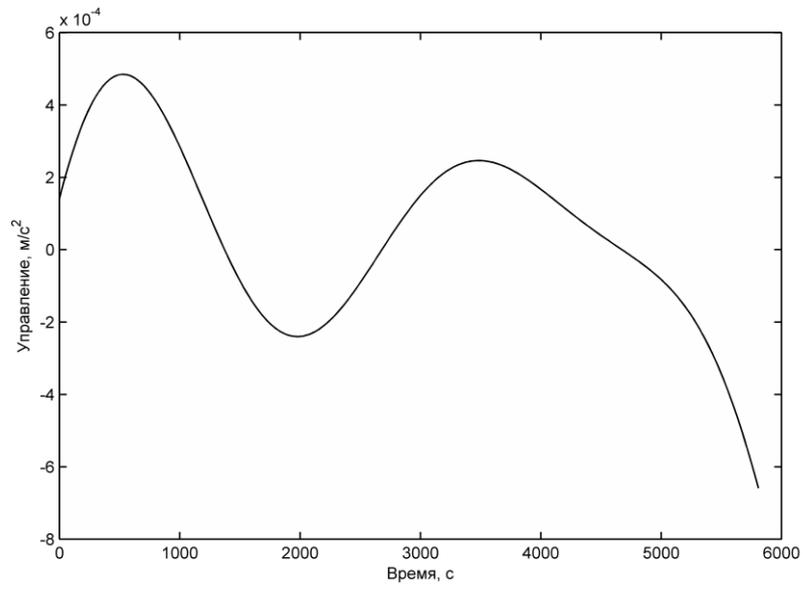


Рис. 5.7. Закон оптимального двустороннего S-управления

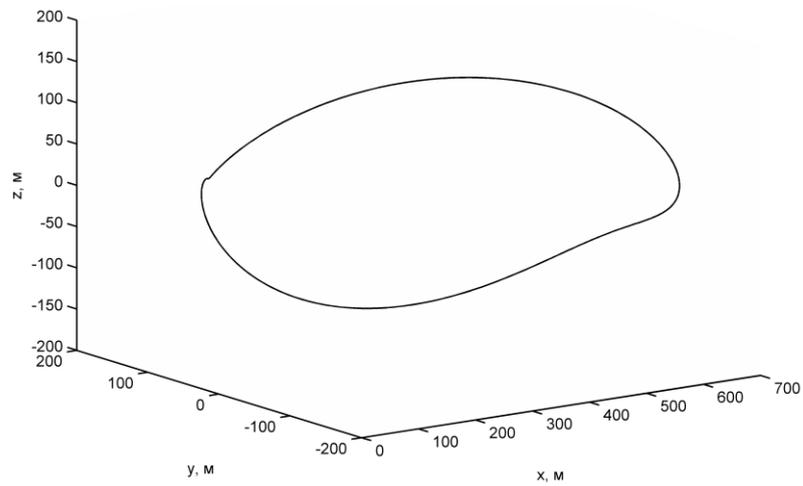


Рис. 5.8. Замкнутая траектория системы с двусторонним S-управлением

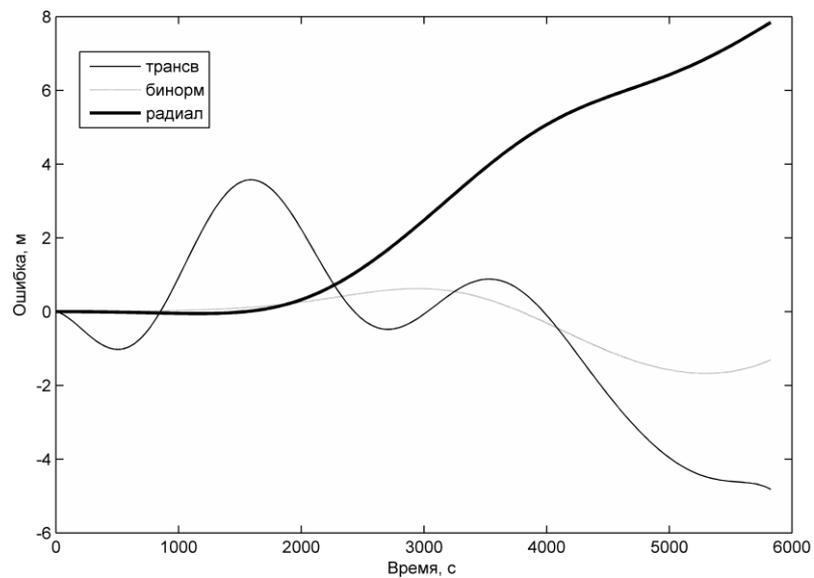


Рис. 5.9. Покоординатные ошибки траектории линеаризованной системы с двусторонним S-управлением

Таблица 1. Результаты симплекс-эксперимента

Номер вершины	1	2	3	4	5	6	7
$x_0$ , м	35.36	35.36	35.36	-70.71	35.36	35.36	35.36
$y_0$ , м	70.71	-141.42	70.71	70.71	70.71	70.71	70.71
$z_0$ , м	70.71	70.71	-141.42	70.71	70.71	70.71	70.71
$\dot{x}_0$ , мм/с	-38.07	-38.07	-38.07	-38.07	-38.07	-38.07	76.15
$\dot{y}_0$ , мм/с	76.25	76.25	76.25	76.25	-152.51	76.25	76.25
$\dot{z}_0$ , мм/с	76.32	76.32	76.32	76.32	76.32	-152.64	76.32
$T/\tau$	2	2	2	2	2	2	2
$\ f\ _1$ , м/с	0.16	0.16	0.14	0.18	0.08	0.15	0.16
$\ f\ _2$ , $10^{-4}$ м <sup>2</sup> /с <sup>3</sup>	6.83	6.84	5.35	7.93	1.64	5.59	6.84

## Заключение

Подводя общий итог, можно отметить, что проведенное в настоящей работе исследование продемонстрировало потенциальные возможности одноосного управления для выполнения некоторых стандартных задач орбитального маневрирования как в одиночном (коррекция плоскости орбиты), так и в групповом полете (развертывание созвездия спутников, поддержание пространственной конфигурации тесной спутниковой формации). Это открывает дорогу к использованию простых и экономичных систем пассивной одноосной стабилизации. Их преимущества – небольшой вес и нулевое потребление топлива/энергии – становятся особенно важными в свете современных тенденций к миниатюризации КА.

Следующим принципиальным шагом в изучении проблемы наличия ограничений на направление вектора тяги станет, вероятнее всего, разработка методов построения оптимального/квазиоптимального одноосного управления в условиях неопределенности. Основными источниками неопределенности являются погрешности моделей внешней среды и невысокая точность пассивной одноосной стабилизации. В совокупности это приводит к тому, что заданное извне направление вектора тяги известно в каждый момент времени с некоторой ошибкой.

Решение проблемы неопределенности сделает реальным бортовую реализацию алгоритмов одноосного управления и придаст логическую завершенность работам по данной тематике.

## Литература

1. Суханов А.А., Прадо А.Ф.Б. де А. Оптимизация перелетов при ограничениях на направление тяги. I // *Космические исследования*, 2007, т. 45, № 5, с. 443-449.
2. Суханов А.А., Прадо А.Ф.Б. де А. Оптимизация перелетов при ограничениях на направление тяги. II // *Космические исследования*, 2008, т. 46, № 1, с. 51-60.
3. Guerman A.D., Ovchinnikov M., Smirnov G.V. Use of Solar Radiation Pressure to Maintain a Spatial Satellite Formation // *Acta Astronautica*, 2007, V. 61, No. 7-8, pp. 724-728.
4. Ovchinnikov M., Smirnov G.V., Zaramenskikh I. Orbital Corrections by a Single-Input Impulsive Control Applied Along the Geomagnetic Field // *Acta Astronautica*, 2009, V. 65, No. 11-12, pp. 1826-1830.
5. Lawden D.F. Optimal trajectories for space navigation. London: Butterwort, 1963.
6. Яновский Б.М. Земной магнетизм. Л.: Издательство Ленинградского университета, 1978.
7. Эльясберг П.Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. М.: Наука, 1965.
8. Белецкий В.В., Новогребельский А.Б. Существование устойчивых относительных равновесий искусственного спутника в модельном магнитном поле // *Астрономический журнал*, 1973, т. 50, № 2, с. 327-335.
9. Fundamentals of Astrodynamics and Applications / под ред. D.A. Vallado. El Segundo: Microcosm, Inc., 2001, 2-е изд.
10. Альперт Я.Л. Распространение электромагнитных волн и ионосфера. М.: Наука, 1972.
11. Hill G.W. Researches in Lunar Theory // *American Journal of Mathematics*, 1878, V. 1, pp. 5-26.
12. Clohessy W.H., Wiltshire R.S. Terminal Guidance System for Satellite Rendezvous // *Journal of the Astronautical Sciences*, 1960, V. 27, No. 9, pp. 653-678.
13. Schweighart S., Sedwick R.J. High-Fidelity Linearized J2 Model for Satellite Formation Flight // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2002, V. 25, No. 6, pp. 1073-1080.