Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
Физтех-школа аэрокосмических технологий
Кафедра математического моделирования и прикладной математики

Направление: 03.03.01 – «Прикладные математика и физика»,
Направленность (профиль) подготовки: «Математическое моделирование, вычислительная математика и физика»

Выпускная квалификационная бакалаврская работа

Применение прямого метода Ляпунова для проектирования траекторий с малой тягой

Выполнил студент
Самаров Сергей Евгеньевич

____

Научный руководитель:
к.ф.-м.н., доцент
Широбоков Максим Геннадьевич

____

Москва, 2025

Аннотация

Целью выпускной квалификационной работы является проектирование на базе прямого метода Ляпунова миссий космических аппаратов с малой тягой в околоземном пространстве.

Для выполнения поставленной цели в работе решаются две задачи: разработка методики проектирования траекторий межорбитальных околоземных перелётов и применение разработанной методики к реальной задаче перелёта.

Рассмотрены как случаи непрерывно работающего двигателя, так и случаи движения с пассивными участками.

Исследованы две функции Ляпунова: зависящая от всех целевых модифицированных равноденственных элементов и зависящая от трёх целевых орбитальных элементов – большой полуоси, эксцентриситета и наклонения орбиты.

Для проектирования траекторий с пассивными участками вводится так называемый коэффициент эффективности тяги, основанный на значениях функции Ляпунова за виток вдоль орбиты.

Разработанная методика применяется в задаче перелёта космического аппарата с низкой околоземной орбиты на высокоэллиптическую орбиту для исследования магнитосферы Земли.

Результаты расчетов верифицированы путем их сравнения с результатами применения широко известного Q – закона управления малой тягой и принципа максимума Понтрягина.

Оглавление

Обозначения и сокращения

КА – космический аппарат;

КЭТ – коэффициент эффективности тяги;

ПМП – принцип максимума Понтрягина;

ФЛ1 – функция Ляпунова в случае, когда целевая орбита задана пятью безразмерными модифицированными равноденственными элементами;

ФЛ2 – функция Ляпунова в случае, когда целевая орбита задана тремя орбитальными элементами;

$\mathbf{f}$ – вектор силы тяги КА;

L – истинная долгота;

m – масса КА;

N – мощность двигателя КА;

$O = \{a, e, i, \Omega, \omega, \theta\}$ – классические орбитальные элементы;

$\mathbf{r}$ – радиус-вектор КА;

$r = |\mathbf{r}|$ – модуль радиус-вектора КА;

S – радиальная компонента вектора реактивного ускорения КА;

T – трансверсальная компонента вектора реактивного ускорения КА;

t – время;

$\mathbf{U}$ – вектор реактивного ускорения КА,

V – функция Ляпунова;

V_{ex} – скорость истечения газов КА;

W – бинормальная компонента вектора реактивного ускорения КА;

$\Upsilon = \{h, e_x, e_y, i_x, i_y, L\}$ – модифицированные равноденственные элементы;

η – коэффициент эффективности тяги (КЭТ);

∇ – оператор градиента (считается строкой);

$(*,*)$ – обозначение скалярного произведения векторов;

$[*\times*]$ – обозначение векторного произведения векторов.

Введение

Применение малых космических аппаратов (КА) с электрореактивной двигательной установкой (ЭРДУ) для дистанционного зондирования Земли, исследований физических процессов в магнитосфере и ионосфере, а также для межорбитального движения показывает, что задача проектирования многовитковых траекторий перелёта между околоземными орбитами остаётся актуальной.

Межорбитальное околоземное движение КА с малой тягой, как правило, длится продолжительное время и является многовитковым, что приводит к необходимости решать задачи оптимального управления. Традиционно в орбитальной динамике это осуществляется с помощью принципа максимума Понтрягина (ПМП). Однако при использовании этого метода возникают трудности, связанные с высокой чувствительностью процедуры оптимизации к начальному приближению, многоэкстремальностью задачи и осложнениями, вызванными большим временем полёта и числом витков.

Предлагались различные способы решения этих проблем. Одним из них является метод продолжения по параметру, исследованный В.Г. Петуховым [1,2]. В работе К.С. Суслова, М.Г. Широбокова и С.П. Трофимова [3] предложено разложение функции управления в ряды Фурье и последующее осреднение уравнений движения. В.В. Ивашкин и И.В. Крылов предложили метод решения нелинейной двухточечной задачи ПМП с помощью модифицированного метода Ньютона [4]. Применение модели двигателя идеально регулируемой малой тяги для расчета и анализа траекторий перелета КА исследовано в работе Р.З. Ахметшина, Г.Б. Ефимова и Т.М. Энеева [5]. В работе А.С. Самохина, М.А. Самохиной, И.С. Григорьева и М.П. Заплетина разработана так называемая «лестница задач» для облегчения нахождения оптимальных траекторий перелёта с малой тягой [6]. В десятом очерке книги В.В. Белецкого описан метод транспортирующей траектории КА с малой тягой [7].

В последнее время при проектировании многовитковых траекторий всё большую популярность приобретают методы, позволяющие в каждой точке траектории находить оптимальный вектор управляющего реактивного ускорения с использованием функций Ляпунова. Такие исследования проводились А. Петропулосом, который ввёл для соответствующей функции Ляпунова термин «Q – закон» и применил коэффициент эффективности тяги для проектирования траекторий с пассивными участками [8, 9]. Р. В. Ельников исследовал локально–оптимальное управление вектором тяги ЭРДУ для КА, совершающего многовитковый межорбитальный переход с эллиптической на геостационарную орбиту [10]. Д. Атмака и М. Понтани исследовали функции Ляпунова с весами и разработали для численного моделирования траекторий базу данных, содержащую около 10000 весовых коэффициентов [11]. В работе М.Г. Широбокова, К.С. Суслова, М.Ю. Овчинникова и др., посвящённой исследованию перспективного проекта легкого лунного буксира с малой тягой, большая часть траектории строится на основе метода Ляпунова [12].

Целью данной работы является **проектирование на базе прямого метода Ляпунова миссий КА с малой тягой в околоземном пространстве**.

Для выполнения поставленной цели в работе решаются **две задачи**: **разработка методики проектирования траекторий межорбитальных околоземных перелётов,** и **применение разработанной методики к реальной задаче перелёта.**

Первый раздел работы посвящён постановке задачи межорбитального перелёта КА с двигателем малой тяги. Второй раздел посвящён разработке методики проектирования траекторий перелёта на базе прямого метода Ляпунова. Рассматриваются две функции Ляпунова: зависящая от всех модифицированных равноденственных элементов (ФЛ1) и зависящая от трёх орбитальных элементов – большой полуоси, эксцентриситета и наклонения орбиты (ФЛ2). Рассматриваются как случаи непрерывной тяги, так и случаи движения с пассивными участками. Для проектирования траекторий с пассивными участками вводится так называемый коэффициент эффективности тяги (КЭТ), основанный на значениях функции Ляпунова за виток вдоль орбиты. Добавление пассивных участков позволяет экономить топливо. Для предотвращения проблем, вызванных разрывами функции тяги, используется сглаживание с помощью сигмоиды. Третий раздел посвящён результатам численного моделирования и исследованию траекторий межорбитального перелёта. Проводится сравнительный анализ свойств траекторий, спроектированных с помощью ФЛ1 и ФЛ2, а также с помощью Q-закона А. Петропулоса [13]. Траектории сравниваются по затратам топлива на перелёт, времени перелёта и по точности достижения целевой орбиты. Также проводится сравнительный анализ траекторий с пассивными участками, спроектированными на основе изложенного метода Ляпунова, с траекториями, полученными с помощью ПМП.

Получены следующие **результаты:**

- доказано, что при проектировании траекторий на основе ФЛ1 целевая орбита асимптотически устойчива;
- доказано, что при проектировании траекторий на основе ФЛ2 целевая орбита не является асимптотически устойчивой;
- установлено, что КА, движущиеся по траекториям межорбитальных перелётов, спроектированным с помощью ФЛ2, расходуют меньше топлива, движутся до целевой орбиты меньшее количество времени и достигают целевой орбиты точнее по величине большой полуоси, наклонению и эксцентриситету, чем КА, движущиеся по траекториям, спроектированным на основе ФЛ1 и Q – закона;
- разработана методика проектирования траекторий с пассивными участками на основе прямого метода Ляпунова;

- выведена новая аналитическая оценка КЭТ снизу и на ее основе разработана формула управляющего ускорения для проектирования траекторий с пассивными участками;
- установлено, что траектории, оптимизированные с помощью ПМП, обладают ощутимым преимуществом по расходу топлива по сравнению с траекториями, спроектированными на основе расчета КЭТ на сетке и аналитической оценки КЭТ;
- установлено, что при оптимизации в рамках ПМП спроектированных траекторий, КА на траекториях на основе аналитической оценки КЭТ тратят меньше топлива, чем на траекториях на основе оценки КЭТ на сетке.

Выпускная квалификационная работа включает 6 таблиц и 7 рисунков, список литературы содержит 18 наименований.

Результаты работы докладывались на 67–й Всероссийской научной конференции МФТИ (31 марта 2025, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН), на 51–й Международной молодежной научной конференции «Гагаринские чтения» (16 апреля 2025, МАИ), на научном семинаре отдела №7 ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (29 апреля 2025, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН).

1. Постановка задачи

В работе рассматривается КА с ЭРДУ, движущийся в поле тяготения Земли, и две произвольные околоземные орбиты – исходная и целевая. Требуется найти управление, переводящее КА с исходной орбиты на целевую.

Для решения поставленной задачи введём инерциальную систему координат $Ox_1x_2x_3$ с началом в центре Земли, ось Ox_1 которой направлена в точку весеннего равноденствия, а ось Ox_3 перпендикулярна плоскости экватора. Введём также классическую орбитальную систему координат с началом в центре масс КА и базисными векторами:

$$\frac{\mathbf{r}}{r}, \qquad \frac{\left[[\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}]\times\mathbf{r}\right]}{\left|\left[[\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}]\times\mathbf{r}\right]\right|}, \qquad \frac{[\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}]}{|[\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}]|}, \tag{1}$$

где $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)^T$ и $\dot{\mathbf{r}} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)^T$ – радиус–вектор и вектор скорости КА. В формулах (1) первый вектор отвечает за направление вдоль радиус–вектора КА, второй – за направление движения КА, а третий – за направление вдоль орбитального момента КА.

Для описания движения КА используем классические орбитальные элементы

$$O = \{a, e, i, \Omega, \omega, \theta\}, \tag{2}$$

где a – большая полуось, e – эксцентриситет, i – наклонение, Ω – долгота восходящего узла, ω – аргумент перицентра, θ – истинная аномалия.

Все аналитические и численные расчёты в работе проводятся в системе безразмерных модифицированных равноденственных элементов

$$\Upsilon = \left\{h, e_x, e_y, i_x, i_y, L\right\}, \tag{3}$$

где буквой L обозначена истинная долгота. Модифицированные равноденственные элементы (3) выражаются через классические орбитальные элементы (2) по формулам [14]:

$$a = \frac{h^2}{1 - {e_x}^2 - {e_y}^2},$$
$$e = \sqrt{{e_x}^2 + {e_y}^2},$$
$$i = 2\mathrm{arctg}\sqrt{{i_x}^2 + {i_y}^2}, \qquad (4)$$
$$\Omega = \mathrm{atan2}(i_y, i_x),$$
$$\omega = \mathrm{atan2}(e_y, e_x) - \Omega,$$
$$\theta = L - \omega - \Omega.$$

В формулы (4) входит функция $\mathrm{atan2}(y, x)$, представляющая собой аргумент комплексного числа $x + iy$ и носящая название «двуаргументный арктангенс».

Орбитальное движение КА описывается в элементах (3) системой дифференциальных уравнений [14]:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{h^2}{\sigma} \cdot T,$$
$$\frac{de_x}{dt} = h\left\{\sin L \cdot S + \left[\left(1 + \frac{1}{\sigma}\right)\cos L + \frac{e_x}{\sigma}\right] \cdot T - \frac{e_y \zeta}{\sigma} \cdot W\right\},$$
$$\frac{de_y}{dt} = h\left\{-\cos L \cdot S + \left[\left(1 + \frac{1}{\sigma}\right)\sin L + \frac{e_y}{\sigma}\right] \cdot T + \frac{e_x \zeta}{\sigma} \cdot W\right\}, \qquad (5)$$
$$\frac{di_x}{dt} = h\frac{\varphi \cos L}{2\sigma} \cdot W,$$
$$\frac{di_y}{dt} = h\frac{\varphi \sin L}{2\sigma} \cdot W,$$
$$\frac{dL}{dt} = \frac{\sigma^2}{h^3} + h\frac{\zeta}{\sigma} \cdot W,$$

где

$$\sigma = 1 + e_x \cos L + e_y \sin L,$$
$$\zeta = i_x \sin L - i_y \cos L,$$
$$\varphi = 1 + i_x^2 + i_y^2.$$

В правую часть системы (5) входят 3 числовых параметра – координаты вектора реактивного ускорения $\mathbf{U}$ в орбитальной системе координат (1):

$$\mathbf{U} = (S, \quad T, \quad W)^{\mathrm{T}}.$$

Другими словами,

$$\mathbf{U} = S\frac{\mathbf{r}}{r} + T\frac{[[\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}]\times\mathbf{r}]}{|[[\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}]\times\mathbf{r}]|} + W\frac{[\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}]}{|[\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}]|},$$

где S – радиальная, T – трансверсальная, а W – бинормальная координаты вектора $\mathbf{U}$.

Вектор $\mathbf{U}$ связан с вектором реактивной тяги $\mathbf{f}$ и массой m КА по формуле

$$\mathbf{U} = \frac{\mathbf{f}}{m}, \tag{6}$$

причём $|\mathbf{f}| \le f_{max}$, где f_{max} – максимальное значение силы тяги двигателя КА.

Дополнив систему (5) уравнением

$$\dot{m} = -\frac{|\mathbf{U}|}{V_{ex}}\cdot m, \tag{7}$$

описывающим динамику массы КА, получаем замкнутую систему уравнений (5), (7), где V_{ex} – эффективная скорость истечения газов КА [15].

Таким образом, в каждой точке траектории требуется найти вектор тяги $\mathbf{f}$, позволяющий переместить КА с ЭРДУ, движение которого задаётся системой уравнений (5), с заданной исходной орбиты на заданную целевую орбиту.

Перейдём к описанию методики проектирования управления для решения поставленной задачи.

2. Методика проектирования траекторий перелёта на базе прямого метода Ляпунова

2.1. Построение управления на основе прямого метода Ляпунова

В данном подразделе описывается общая методика проектирования управления орбитальным движением КА на основе прямого метода Ляпунова.

Перепишем правую часть системы из первых пяти уравнений (5) в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dh}{dt} \\ \dfrac{de_x}{dt} \\ \dfrac{de_y}{dt} \\ \dfrac{di_x}{dt} \\ \dfrac{di_y}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & h^2\sigma^{-1} & 0 \\ h\sin L & h\left[\left(1+\dfrac{1}{\sigma}\right)\cos L + \dfrac{e_x}{\sigma}\right] & -h\dfrac{e_y\zeta}{\sigma} \\ -h\cos L & h\left[\left(1+\dfrac{1}{\sigma}\right)\sin L + \dfrac{e_y}{\sigma}\right] & h\dfrac{e_x\zeta}{\sigma} \\ 0 & 0 & h\dfrac{\varphi\cos L}{2\sigma} \\ 0 & 0 & h\dfrac{\varphi\sin L}{2\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S \\ T \\ W \end{pmatrix} \tag{8}$$

В системе уравнений (8) участвует истинная долгота L, удовлетворяющая шестому уравнению системы (5).

Введем для вектора-столбца из первых пяти равноденственных элементов (3) обозначение

$$\mathbf{P} = \left(h, e_x, e_y, i_x, i_y\right)^T \tag{9}$$

Если обозначить буквой **A** матрицу, входящую в правую часть системы уравнений (8), то систему (8) с помощью (9) и (5) можно записать в виде

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{A}(\mathbf{P}, L) \cdot \mathbf{U} \tag{10}$$

Рассмотрим вектор-функцию

$$\mathbf{Q}(\mathbf{P}) = \left(q_1(\mathbf{P}), \dots, q_n(\mathbf{P})\right)^T,$$

имеющую n координат, где $n \leq 5$. Будем считать, что $\mathbf{Q}(\mathbf{P})$ удовлетворяет следующим трём условиям:

1. Функция $\mathbf{Q}(\mathbf{P})$ обращается в нуль только в точках целевой орбиты:
$$\mathbf{Q}\big(\mathbf{P}(t)\big) = \mathbf{0} \iff t = t_{\text{кон}}.$$
2. Функции $q_j(\mathbf{P})$ дифференцируемы при всех значениях j, т. ч. $1 \leq j \leq n$.
3. Ранг матрицы Якоби
$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial q_1}{\partial h} & \dfrac{\partial q_1}{\partial e_x} & \dfrac{\partial q_1}{\partial e_y} & \dfrac{\partial q_1}{\partial i_x} & \dfrac{\partial q_1}{\partial i_y} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial q_n}{\partial h} & \dfrac{\partial q_n}{\partial e_x} & \dfrac{\partial q_n}{\partial e_y} & \dfrac{\partial q_n}{\partial i_x} & \dfrac{\partial q_n}{\partial i_y} \end{pmatrix},$$
равен n.

Введем функцию (кандидат на роль функции Ляпунова) по формуле
$$V = V\big(\mathbf{Q}(\mathbf{P})\big) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} q_j^2(\mathbf{P})\,. \tag{11}$$

Заметим, что функция (11) обращается в нуль только в точках целевой орбиты, а во всех остальных точках положительна.

Покажем, что в каждый момент времени можно так выбрать тягу $\mathbf{f}$, что производная функции V по времени в силу системы уравнений (8) будет отрицательной или равной нулю. Действительно, для производной функции V по времени в силу системы (8) справедливо равенство
$$\dot{V} = \sum_{j=1}^{n} q_j(\mathbf{P})\frac{d}{dt}q_j(\mathbf{P}) = \nabla_{\mathbf{Q}}V \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{Q}(\mathbf{P}) = \mathbf{Q}^T(\mathbf{P}) \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{Q}(\mathbf{P}). \tag{12}$$
Воспользовавшись равенством
$$\frac{d}{dt}\mathbf{Q}(\mathbf{P}) = \mathbf{J} \cdot \dot{\mathbf{P}},$$
преобразуем формулу (12) к виду
$$\dot{V} = \mathbf{Q}^T(\mathbf{P}) \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{Q}(\mathbf{P}) = \mathbf{Q}^T(\mathbf{P}) \cdot \mathbf{J} \cdot \dot{\mathbf{P}},$$

откуда с помощью равенства (11) получаем

$$\dot{V} = \mathbf{Q}^T(\mathbf{P}) \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{U}. \tag{13}$$

Формулу (13) можно переписать с помощью скалярного произведения векторов в виде

$$\dot{V} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{J}^T \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{P}), \mathbf{U}). \tag{14}$$

Минимизируем полученное выражение относительно вектора $\mathbf{U}$, при

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{J}^T \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{P}) \neq 0$$

получим соответствующий вектор реактивного ускорения

$$\mathbf{U} = -\frac{f_{max}}{m} \cdot \frac{\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{J}^T \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{P})}{|\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{J}^T \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{P})|}\ . \tag{15}$$

В этом случае вектор $\mathbf{U}$ противоположно направлен вектору $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{J}^T \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{P})$, а его длина

$$|\mathbf{U}| = \frac{f_{max}}{m}.$$

При

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{J}^T \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{P}) = 0$$

производная функции V в силу системы (8) равна нулю и не зависит от $\mathbf{U}$. В этом случае полагаем управление $\mathbf{U} = 0$.

Таким образом, в случае, когда реактивное ускорение удовлетворяет равенству (15), формула (14) принимает вид

$$\dot{V} = -\frac{f_{max}}{m} \cdot |\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{J}^T \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{P})|, \tag{16}$$

причем функция $\dot{V}$ не положительна.

Отсюда следует, что функция (11) является функцией Ляпунова системы уравнений (8), и по теореме Ляпунова об устойчивости целевая орбита устойчива по Ляпунову. При этом в случае, когда реактивное ускорение определяется формулой (15) и отлично от нуля, функция Ляпунова V убывает с наибольшей скоростью.

2.2. Функция Ляпунова в случае, когда целевая орбита задана пятью первыми орбитальными элементами

Рассмотрим частный случай, когда целевая орбита задана с помощью первых пяти равноденственных элементов: $h^{ц}$, $e_x^{ц}$, $e_y^{ц}$, $i_x^{ц}$, $i_y^{ц}$. Тогда, если положить

$$\mathbf{Q}(\mathbf{P}) = \left(q_1(\mathbf{P}), q_2(\mathbf{P}), q_3(\mathbf{P}), q_4(\mathbf{P}), q_5(\mathbf{P})\right)^T =$$
$$= \left(h - h^{ц},\quad e_x - e_x^{ц},\quad e_y - e_y^{ц},\quad i_x - i_x^{ц},\quad i_y - i_y^{ц}\right)^T,$$

то функция Ляпунова (11) примет вид

$$V = \frac{1}{2}\left\{(h - h^{ц})^2 + (e_x - e_x^{ц})^2 + \left(e_y - e_y^{ц}\right)^2 + (i_x - i_x^{ц})^2 + \left(i_y - i_y^{ц}\right)^2\right\}. \quad (17)$$

В соответствии с (17) функция V представляет собой половину квадрата невязки между мгновенными и целевыми орбитальными элементами КА.

В дальнейшем для функции Ляпунова (17) будем использовать сокращение ФЛ1. Для ФЛ1 матрица Якоби $\mathbf{J}$ является единичной, и формула для реактивного ускорения (15) принимает при условии

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{P}) \neq 0$$

вид

$$\mathbf{U} = -\frac{f_{max}}{m} \cdot \frac{\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{P})}{|\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{P})|}\,, \quad (18)$$

а формула (16) принимает вид

$$\dot{V} = -\frac{f_{max}}{m} \cdot |\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{P})|. \quad (19)$$

Докажем теперь, что при проектировании траекторий на основе ФЛ1 целевая орбита является асимптотически устойчивой. Для этого докажем, что $\dot{V}$ обращается в нуль только на целевой орбите. Рассмотрим множество фазовых точек, на которых $\dot{V} = 0$:

$$\dot{V} = 0 \;\Leftrightarrow\; |\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{P})| = 0.$$

Равенство

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{P}) = (0 \quad 0 \quad 0)^{\boldsymbol{T}},$$

записанное покомпонентно, имеет вид

$$h\begin{pmatrix} (e_x - e_x^{\text{ц}})\sin L - (e_y - e_y^{\text{ц}})\cos L \\ \dfrac{(h - h^{\text{ц}})h}{\sigma} + (e_x - e_x^{\text{ц}})\left[\left(1 + \dfrac{1}{\sigma}\right)\cos L + \dfrac{e_x}{\sigma}\right] + (e_y - e_y^{\text{ц}})\left[\left(1 + \dfrac{1}{\sigma}\right)\sin L + \dfrac{e_y}{\sigma}\right] \\ -(e_x - e_x^{\text{ц}})\dfrac{e_y\zeta}{\sigma} + (e_y - e_y^{\text{ц}})\dfrac{e_x\zeta}{\sigma} + (i_x - i_x^{\text{ц}})\dfrac{\varphi\cos L}{2\sigma} + (i_y - i_y^{\text{ц}})\dfrac{\varphi\sin L}{2\sigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Равенство нулю первой компоненты матрицы

$$(e_x - e_x^{\text{ц}})\, h\sin L - (e_y - e_y^{\text{ц}})\, h\cos L = 0$$

должно быть выполнено для любых L . Поскольку мы не рассматриваем прямолинейное движение ($h = 0$), то отсюда следуют равенства

$$e_x = e_x^{\text{ц}}; \quad e_y = e_y^{\text{ц}}.$$

Подставляя эти выражения во второе уравнение, получаем

$$(h - h^{\text{ц}})h^2\sigma^{-1} = 0,$$

откуда

$$h = h^{\text{ц}}.$$

В результате третье уравнение принимает вид

$$(i_x - i_x^{\text{ц}})h\frac{\varphi\cos L}{2\sigma} + (i_y - i_y^{\text{ц}})h\frac{\varphi\sin L}{2\sigma} = 0.$$

Поскольку это равенство должно выполняться для любых L, то

$$i_x = i_x^{\text{ц}}; \quad i_y = i_y^{\text{ц}}.$$

Таким образом, $\dot{V}$ обращается в нуль только на целевой орбите, откуда по теореме Барбашина – Красовского следует асимптотическая устойчивость целевой орбиты. Это означает, что под действием управления текущие элементы орбиты КА с увеличением времени движения гарантировано сходятся к целевым элементам, какими бы ни были исходная и целевая орбиты.

2.3. Функция Ляпунова в случае, когда целевая орбита задана тремя орбитальными элементами

В данном подразделе решается задача проектирования управления межорбитального перелёта в случае, когда целевая орбита задаётся тремя орбитальными элементами $a^{ц}, i^{ц}, e^{ц}$, причем не является круговой или экваториальной. Для решения этой задачи в качестве функции $\mathbf{Q}(\mathbf{P})$, описанной в подразделе 2.1, используем функцию

$$\mathbf{Q}(\mathbf{P}) = \begin{pmatrix} q_1(\mathbf{P}) \\ q_2(\mathbf{P}) \\ q_3(\mathbf{P}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{a - a^{ц}}{a^{ц}} \\ \dfrac{i - i^{ц}}{i^{ц}} \\ \dfrac{e^2 - (e^{ц})^2}{(e^{ц})^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\dfrac{h^2}{1 - e_x^2 - e_y^2} - a^{ц}\right)\dfrac{1}{a^{ц}} \\ \left(2\,\mathrm{arctg}\sqrt{i_x^2 + i_y^2} - i^{ц}\right)\dfrac{1}{i^{ц}} \\ \left(e_x^2 + e_y^2 - (e^{ц})^2\right)\dfrac{1}{(e^{ц})^2} \end{pmatrix}.$$

В компоненте $q_3(\mathbf{P})$ в отличие от компонент $q_1(\mathbf{P})$ и $q_2(\mathbf{P})$ вместо соответствующей формулы системы (7) применяется формула для квадрата эксцентриситета целевой орбиты, что позволяет избежать проблем с дифференцируемостью при $e_x = e_y = 0$. Это важно, поскольку исходные орбиты перелёта могут быть круговыми. Кроме того, выбор введённых в координаты вектора $\mathbf{Q}(\mathbf{P})$ весовых коэффициентов, как показали численные эксперименты, существенен для эффективности решения задачи.

В качестве кандидата на роль функции Ляпунова выбираем функцию

$$V = \frac{1}{2}\left(q_1^2(\mathbf{P}) + q_2^2(\mathbf{P}) + q_3^2(\mathbf{P})\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{(a - a^{ц})^2}{(a^{ц})^2} + \frac{(i - i^{ц})^2}{(i^{ц})^2} + \frac{(e^2 - (e^{ц})^2)^2}{(e^{ц})^4}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\left(\dfrac{h^2}{1 - e_x^2 - e_y^2} - a^{ц}\right)^2}{(a^{ц})^2} + \frac{\left(2\,\mathrm{arctg}\sqrt{i_x^2 + i_y^2} - i^{ц}\right)^2}{(i^{ц})^2} + \frac{\left(e_x^2 + e_y^2 - (e^{ц})^2\right)^2}{(e^{ц})^4}\right) \quad (20)$$

В дальнейшем для функции Ляпунова (20) будем использовать обозначение ФЛ2.

Градиент функции (20) имеет вид

$$\mathbf{Q}^T(\mathbf{P}) = \left(\frac{\dfrac{h^2}{1-e_x^2-e_y^2} - a^{ц}}{a^{ц}}, \frac{2\,\mathrm{arctg}\sqrt{i_x^2+i_y^2} - i^{ц}}{i^{ц}}, \frac{e_x^2+e_y^2-(e^{ц})^2}{(e^{ц})^2} \right), \quad (21)$$

а матрица Якоби

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{24} & J_{25} \\ 0 & J_{32} & J_{33} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (22)$$

где

$$J_{11} = \frac{2h}{a^{ц}\left(1-e_x^2-e_y^2\right)}, \quad J_{12} = \frac{2h^2 e_x}{a^{ц}\left(1-e_x^2-e_y^2\right)}, \quad J_{13} = \frac{2h^2 e_y}{a^{ц}\left(1-e_x^2-e_y^2\right)},$$

$$J_{24} = \frac{2i_x}{i^{ц}\left(1+i_x^2+i_y^2\right)\sqrt{i_x^2+i_y^2}}, \quad J_{25} = \frac{2i_y}{i^{ц}\left(1+i_x^2+i_y^2\right)\sqrt{i_x^2+i_y^2}},$$

$$J_{32} = \frac{2e_x}{\left(e^{ц}\right)^2}, \quad J_{33} = \frac{2e_y}{\left(e^{ц}\right)^2}.$$

Расчет реактивного ускорения осуществляется по общей формуле (15):

$$\mathbf{U} = -\frac{f_{max}}{m} \cdot \frac{\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{J}^T \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{P})}{|\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{J}^T \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{P})|}.$$

Докажем теперь, что при проектировании траекторий на основе ФЛ2 целевая орбита не является асимптотически устойчивой. С этой целью заметим, что производная по времени функции ФЛ2 обращается в нуль не только на целевой орбите, но и на других орбитах, в частности, на экваториальной круговой орбите радиуса $a^{ц}$. Действительно, на этой орбите по формуле (21)

$$\mathbf{Q}^T(\mathbf{P}) = (0, -1, -1),$$

и $\sigma = 1, \zeta = 0, \varphi = 1$.

По формуле (22)

$$
\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \frac{2h}{a^{\text{ц}}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

а по формуле (8)

$$
\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & h^2 & 0 \\ h\sin L & 2h\cos L & 0 \\ -h\cos L & 2h\sin L & 0 \\ 0 & 0 & h\frac{\cos L}{2} \\ 0 & 0 & h\frac{\sin L}{2} \end{pmatrix}.
$$

Следовательно,

$$
\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{J}^T \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{P}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{2h^3}{a^{\text{ц}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

В соответствии с теоремой Барбашина – Красовского отсюда получаем, что целевая орбита не является асимптотически устойчивой. Аналогично можно проверить, что производная по времени функции Ляпунова обращается в нуль также и на круговой орбите радиуса $a^{\text{ц}}$ и наклонения $i^{\text{ц}}$.

2.4. Проектирование траекторий с пассивными участками на основе коэффициента эффективности тяги

До сих пор в работе проектировалось управление движением КА, когда двигатель КА работал постоянно. Однако в реальной ситуации движение КА без отключения тяги является неэкономичным с точки зрения расхода топлива и невозможно по техническим причинам. В данном подразделе описывается способ экономии топлива путём введения пассивных участков, чтобы не тратить топливо там, где это неэффективно. Введение пассивных участков осуществляется в работе с помощью критерия, основанного на функции Ляпунова, суть которого заключается в том, чтобы отключать управление в случаях, когда производная функции Ляпунова мала по абсолютной величине по сравнению с её значениями на витке. Для формализации критерия отключения тяги в работе вводится *коэффициент эффективности тяги* (КЭТ):

$$\eta = \frac{\dot{V}}{\min\limits_{L\epsilon[0,2\pi]} \dot{V}} = \frac{(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{J}^T \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{P}), \boldsymbol{U})}{\min\limits_{L\epsilon[0,2\pi]} (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{J}^T \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{P}), \boldsymbol{U})} = \frac{|\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{J}^T \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{P})|}{\max\limits_{L\epsilon[0,2\pi]} |\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{J}^T \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{P})|} \,. \quad (23)$$

Из (23) следует, что КЭТ определён в случае, когда величина $|\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{J}^T \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{P})|$ не равна 0 на целом витке, и удовлетворяет неравенству

$$0 \leq \eta \leq 1 \,.$$

Если же $\max\limits_{L\epsilon[0,2\pi]} |\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{J}^T \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{P})| = 0$, то будем считать $\eta = 0$.

Для проектирования траекторий в работе вводится *параметр переключения тяги* $\eta_{\text{кр}}$ и используется следующая модель управления:

- если $\eta > \eta_{\text{кр}}$, то

$$\mathbf{U} = -\frac{f_{max}}{m} \cdot \frac{\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{J}^T \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{P})}{|\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{J}^T \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{P})|};$$

- если $\eta \leq \eta_{\text{кр}}$ или если $|\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{J}^T \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{P})| = 0$, то $\mathbf{U} = 0$.

Введённая таким образом функция управления является разрывной, что негативно сказывается на точности интегрирования уравнения движения. Для решения этой проблемы функция индикатора события $\eta > \eta_{\text{кр}}$ сглаживается с помощью функции

$$\Sigma(x, c, d) = \frac{1}{1 + e^{-(x-c)\cdot d}}$$

с аргументом x, зависящей от двух числовых параметров c и d, причём параметр $d \gg 1$. Эту функцию называют *сигмоидой*. Сигмоида монотонно возрастает на всей числовой прямой, стремится к 0 при $x \to -\infty$, стремится к 1 при $x \to +\infty$, и в точке $x = c$ принимает значение 0,5.

Сглаженное управляющее ускорение имеет вид:

$$\mathbf{U} = -\Sigma(\eta, c, d) \cdot \frac{f_{max}}{m} \cdot \frac{\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{J}^T \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{P})}{|\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{J}^T \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{P})|} \,. \quad (24)$$

Для вычисления величины $\max_{L\epsilon[0,2\pi]}|\mathbf{A}^T\cdot\mathbf{J}^T\cdot\mathbf{Q}(\mathbf{P})|$ в работе используются два метода. Первый метод заключается в расчёте этой величины на сетке значений L. Второй метод аналитически оценивает сверху на множестве $L\epsilon[0,2\pi]$ величину $|\mathbf{A}^T\cdot\mathbf{J}^T\cdot\mathbf{Q}(\mathbf{P})|$ и вместо максимума этой величины используется полученная оценка сверху. Отметим, что, как и ожидается, первый метод при достаточно мелком разбиении позволяет достаточно точно оценить максимум, но требует большого объёма вычислений. Второй метод оценивается максимум быстрее, но менее точно.

Опишем метод оценки сверху величины

$$|\mathbf{A}^T\cdot\mathbf{J}^T\cdot\mathbf{Q}(\mathbf{P})|^2.$$

Для простоты рассмотрим только случай ФЛ1. Введём для координат вектора $\mathbf{Q}^T(\mathbf{P})$ в системе модифицированных равноденственных элементов обозначение

$$\mathbf{Q}^T(\mathbf{P}) = (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5).$$

Тогда

$$\mathbf{Q}^T(\mathbf{P})\cdot\mathbf{A} = (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5)\begin{pmatrix} 0 & h^2\sigma^{-1} & 0 \\ h\sin L & h\left[\left(1+\dfrac{1}{\sigma}\right)\cos L+\dfrac{e_x}{\sigma}\right] & -h\dfrac{e_y\zeta}{\sigma} \\ -h\cos L & h\left[\left(1+\dfrac{1}{\sigma}\right)\sin L+\dfrac{e_y}{\sigma}\right] & h\dfrac{e_x\zeta}{\sigma} \\ 0 & 0 & h\dfrac{\varphi\cos L}{2\sigma} \\ 0 & 0 & h\dfrac{\varphi\sin L}{2\sigma} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} q_2\,h\sin L - q_3\,h\cos L \\ q_1h^2\sigma^{-1} + q_2h\left[\left(1+\dfrac{1}{\sigma}\right)\cos L+\dfrac{e_x}{\sigma}\right] + q_3h\left[\left(1+\dfrac{1}{\sigma}\right)\sin L+\dfrac{e_y}{\sigma}\right] \\ -q_2h\dfrac{e_y\zeta}{\sigma} + q_3h\dfrac{e_x\zeta}{\sigma} + q_4h\dfrac{\varphi\cos L}{2\sigma} + q_5h\dfrac{\varphi\sin L}{2\sigma} \end{pmatrix}^T$$

Следовательно,

$$|\mathbf{Q}^T(\mathbf{P})\cdot\mathbf{A}|^2 = A^2 + B^2 + C^2,$$

где

$$A = q_2\, h\sin L - q_3\, h\cos L,$$

$$B = q_1 h^2 \sigma^{-1} + q_2 h\left[\left(1+\frac{1}{\sigma}\right)\cos L + \frac{e_x}{\sigma}\right] + q_3 h\left[\left(1+\frac{1}{\sigma}\right)\sin L + \frac{e_y}{\sigma}\right],$$

$$C = -q_2 h\frac{e_y \zeta}{\sigma} + q_3 h\frac{e_x\zeta}{\sigma} + q_4 h\frac{\varphi\cos L}{2\sigma} + q_5 h\frac{\varphi\sin L}{2\sigma}\,.$$

Далее получаем

$$A^2 = (q_2\, h\sin L - q_3\, h\cos L)^2 = h^2(q_2^2+q_3^2)\sin^2(L+\alpha) \le h^2\,(q_2^2+q_3^2),$$

где α – вспомогательный угол,

$$B^2 = \left(q_1 h^2\sigma^{-1} + q_2 h\left[\left(1+\frac{1}{\sigma}\right)\cos L + \frac{e_x}{\sigma}\right] + q_3 h\left[\left(1+\frac{1}{\sigma}\right)\sin L + \frac{e_y}{\sigma}\right]\right)^2 =$$

$$= h^2\left(\frac{1}{\sigma}\left(q_1 h + q_2 e_x + q_3 e_y\right) + \left(1+\frac{1}{\sigma}\right)(q_2^2+q_3^2)^{\frac{1}{2}}\sin(L+\alpha)\right)^2$$

$$\le \frac{2h^2}{\sigma^2}\left(q_1 h + q_2 e_x + q_3 e_y\right)^2 + 2h^2\left(1+\frac{1}{\sigma}\right)^2(q_2^2+q_3^2).$$

При выводе оценки для B^2 использовалось неравенство

$$(a+b)^2 \le 2a^2 + 2b^2.$$

Кроме того,

$$C^2 = \left(-q_2 h\frac{e_y\zeta}{\sigma} + q_3 h\frac{e_x\zeta}{\sigma} + q_4 h\frac{\varphi\cos L}{2\sigma} + q_5 h\frac{\varphi\sin L}{2\sigma}\right)^2 =$$

$$= \frac{h^2}{\sigma^2}\left(-q_2 e_y\zeta + q_3 e_x\zeta + q_4\frac{\varphi\cos L}{2} + q_5\frac{\varphi\sin L}{2}\right)^2 \le$$

$$\le \frac{2h^2\zeta^2}{\sigma^2}\left(-q_2 e_y + q_3 e_x\right)^2 + \frac{h^2\varphi^2}{2\sigma^2}(q_4^2+q_5^2).$$

Поскольку справедливы соотношения

$$\zeta^2 \leq \left(i_x^2 + i_y^2\right) = \operatorname{tg}^2 \frac{i}{2},$$

$$\sigma^2 = \left(1 + \left(e_x^2 + e_y^2\right)^{\frac{1}{2}} \sin(L + \alpha)\right)^2 = (1 + e \sin(L + \alpha))^2 \geq (1 - e)^2,$$

$$\varphi = 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{i}{2},$$

то верна оценка

$$|\mathbf{Q}^T(\mathbf{P}) \cdot \mathbf{A}|^2 \leq h^2(q_2^2 + q_3^2) + \frac{2h^2}{(1-e)^2}\left(q_1 h + q_2 e_x + q_3 e_y\right)^2 +$$

$$+ \frac{2h^2(2-e)^2}{(1-e)^2}(q_2^2 + q_3^2) + \frac{2h^2 \operatorname{tg}^2 \frac{i}{2}}{(1-e)^2}\left(-q_2 e_y + q_3 e_x\right)^2 +$$

$$+ \frac{h^2\left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{i}{2}\right)}{2(1-e)^2}(q_4^2 + q_5^2).$$

Если ввести обозначение

$$K = \left(h^2(q_2^2 + q_3^2) + \frac{2h^2}{(1-e)^2}\left(q_1 h + q_2 e_x + q_3 e_y\right)^2 + \frac{2h^2(2-e)^2}{(1-e)^2}(q_2^2 + q_3^2)\right.$$

$$\left. + \frac{2h^2 \operatorname{tg}^2 \frac{i}{2}}{(1-e)^2}\left(-q_2 e_y + q_3 e_x\right)^2 + \frac{h^2\left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{i}{2}\right)}{2(1-e)^2}(q_4^2 + q_5^2)\right)^{\frac{1}{2}},$$

то получаем неравенство

$$|\mathbf{Q}^T(\mathbf{P}) \cdot \mathbf{A}| \leq K,$$

причем *K* не зависит от истинной долготы *L*.

Следовательно, справедливы неравенства

$$\min_L \left(-\frac{f_{max}}{m}|\mathbf{Q}^T(\mathbf{P})\cdot\mathbf{A}|\right) = -\frac{f_{max}}{m}\max_L(|\mathbf{Q}^T(\mathbf{P})\cdot\mathbf{A}|) \geq -\frac{f_{max}}{m}\cdot K,$$

$$\max_L(|\mathbf{Q}^T(\mathbf{P})\cdot\mathbf{A}|) \leq K\ ,$$

откуда вытекает оценка для КЭТ снизу

$$\eta \geq \frac{|\mathbf{Q}^T(\mathbf{P})\cdot\mathbf{A}|}{K}.$$

Если ввести обозначение

$$\tilde{\eta} = \frac{|\mathbf{Q}^T(\mathbf{P})\cdot\mathbf{A}|}{K}\ , \tag{26}$$

то для проектирования траекторий с пассивными участками будем вычислять управляющее ускорение на основе аналитической оценки КЭТ по формуле

$$\mathbf{U} = -\Sigma(\tilde{\eta}, c, d)\cdot\frac{f_{max}}{m}\cdot\frac{(\mathbf{Q}^T(\mathbf{P})\cdot\mathbf{A})^T}{|(\mathbf{Q}^T(\mathbf{P})\cdot\mathbf{A})^T|}\ . \tag{27}$$

3. Результаты численного моделирования

3.1. Параметры космического аппарата и орбит перелёта

Перейдем к применению разработанной методики на практическом примере. Для этого рассмотрим задачу перелета КА с круговой солнечно-синхронной приполярной орбиты на высокоэллиптическую орбиту для исследования магнитосферы Земли [16]. Параметры орбит приведены в табл.1.

Таблица 1 – Исходная и целевая орбиты в орбитальных элементах

Исходная орбита	
Высота	$H^0 = 800$ км
Радиус	$a^0 = 800 + 6371$ (радиус Земли) $= 7171$ км
Наклонение	$i^0 = 98°$
Эксцентриситет	$e^0 = 0$
$\Omega^0, \omega^0, \theta^0$	В расчетах приняты равными 0°
Целевая орбита	
Высота апоцентра	$H_a{}^{ц} = 120000$ км
Высота перицентра	$H_p{}^{ц} = 12000$ км
Большая полуось	$a^{ц} = 0,5 \cdot \left(H_a{}^{ц} + H_p{}^{ц} \right) + 6371 = 72731$ км
Наклонение	$i^{ц} = 98°$
Эксцентриситет	$e^{ц} = \dfrac{H_a{}^{ц} - H_p{}^{ц}}{2a^{ц}} = 0,742462$
$\Omega^{ц}, \omega^{ц}, \theta^{ц}$	В расчетах на основе ФЛ1 приняты равными 0°, в расчетах на основе ФЛ2 могут принимать любые значения.

Для простоты будем считать перелет компланарным. КА оснастим ЭРДУ ПлаС34 компании Факел [17]. Параметры КА с двигателем ПлаС34 приведены в табл. 2.

Таблица 2 – Параметры КА с двигателями ПлаС34

Начальная масса КА	$m_0 = 90$ кг
Сила тяги	$f_{max} = 22$ мН
Эффективная скорость истечения газов	$V_{ex} = 1300 \cdot g = 12,753$ км/с

3.2. Сравнение траекторий, спроектированных на основе функций Ляпунова

В данном подразделе приведены характеристики траекторий, полученных при проектировании межорбитального перелёта КА с двигателем малой тяги с помощью ФЛ1, ФЛ2 и Q – закона Петропулоса. Термином Q – закон в зарубежной литературе называют введённую А. Петропулосом эвристическую функцию Ляпунова, выраженную в орбитальных элементах и равную сумме квадратов времён до коррекции каждого орбитального элемента [8].

В отличие от ФЛ1 и ФЛ2 функция Q помимо текущих и целевых орбитальных элементов зависит также и от максимума скорости изменения каждого орбитального элемента на витке траектории при условии, что направление вектора тяги является оптимальным в каждой точке траектории.

Для расчетов траекторий на основе Q – закона в работе использовано программное обеспечение [13].

Проектирование траекторий проводилось в предположении о том, что двигатель КА активен на всей траектории межорбитального перелёта, причем вектор силы реактивной тяги КА постоянен по модулю в течение всего движения, т.е. выполнено равенство

$$|\mathbf{f}| = f_{max} = \mathrm{const}.$$

Результаты численного моделирования показали, что КА, движущиеся по траекториям межорбитальных перелётов, спроектированным с помощью ФЛ2, расходуют меньше топлива, движутся до целевой орбиты меньшее количество времени и достигают целевой орбиты с более высокой точностью по величине большой полуоси, наклонению и эксцентриситету, чем КА, движущиеся по траекториям, спроектированным на основе ФЛ1 и Q – закона.

Сравнительные характеристики траекторий, спроектированных на основе ФЛ1, ФЛ2 и Q – закона, представлены в табл. 3.

Таблица 3 – Результаты расчетов основных показателей перелёта

	ФЛ1	ФЛ2	Q – закон
Время перелета, дни	247.02	236.40	240.22
Число витков	1360	1136	1149
Расход топлива, кг	36.71	35.24	36.00
Точность достижения целевой орбиты (в орбитальных элементах)			
Большая полуось, км	72731 ± 411	72731 ± 1	72731 ± 439
Наклонение, град.	98 ± 0.07	98 ± 0	98 ± 0.0065
Эксцентриситет	0.742 ± 10^{-3}	0.742462 ± 10^{-6}	$0.74246 \pm 2.5 \cdot 10^{-5}$

На рис. 1 изображены графики изменения эксцентриситета в зависимости от времени полёта для траекторий межорбитального перелёта, спроектированных на основе ФЛ1, ФЛ2 и Q – закона.

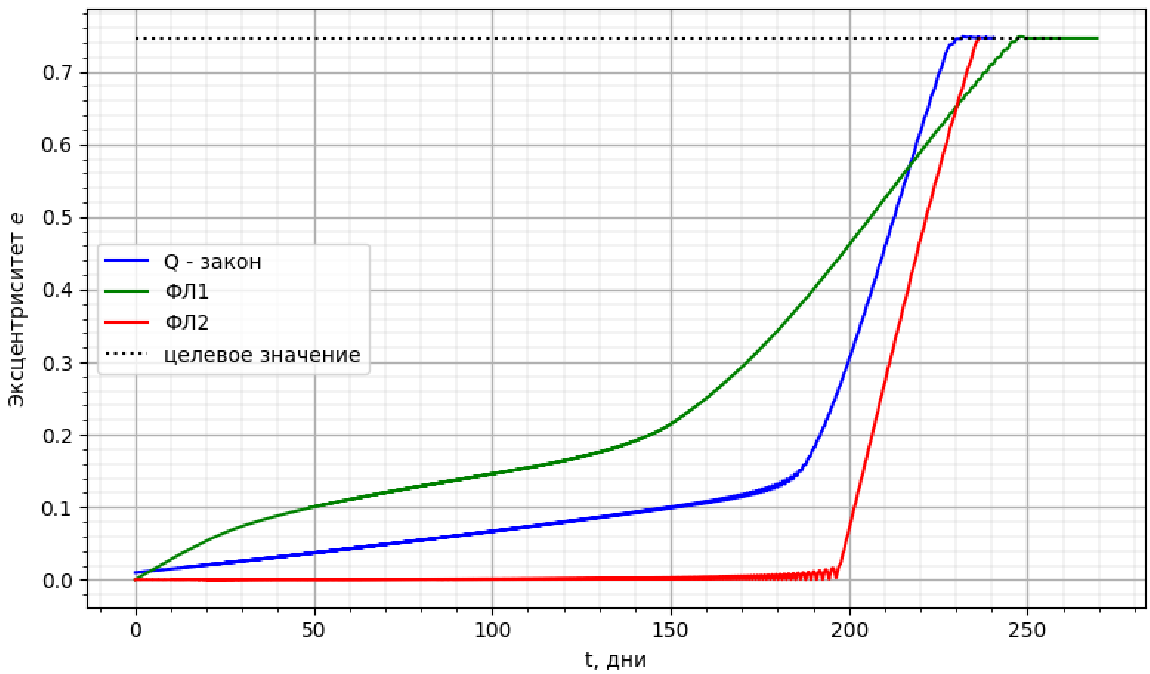

Рис. 1 – Графики изменения эксцентриситета для траекторий межорбитального перелёта, спроектированных на основе ФЛ1, ФЛ2 и Q – закона

На рис. 2 изображены графики изменения наклонения в зависимости от времени полёта для траекторий межорбитального перелёта, спроектированных на основе ФЛ1, ФЛ2 и Q – закона.

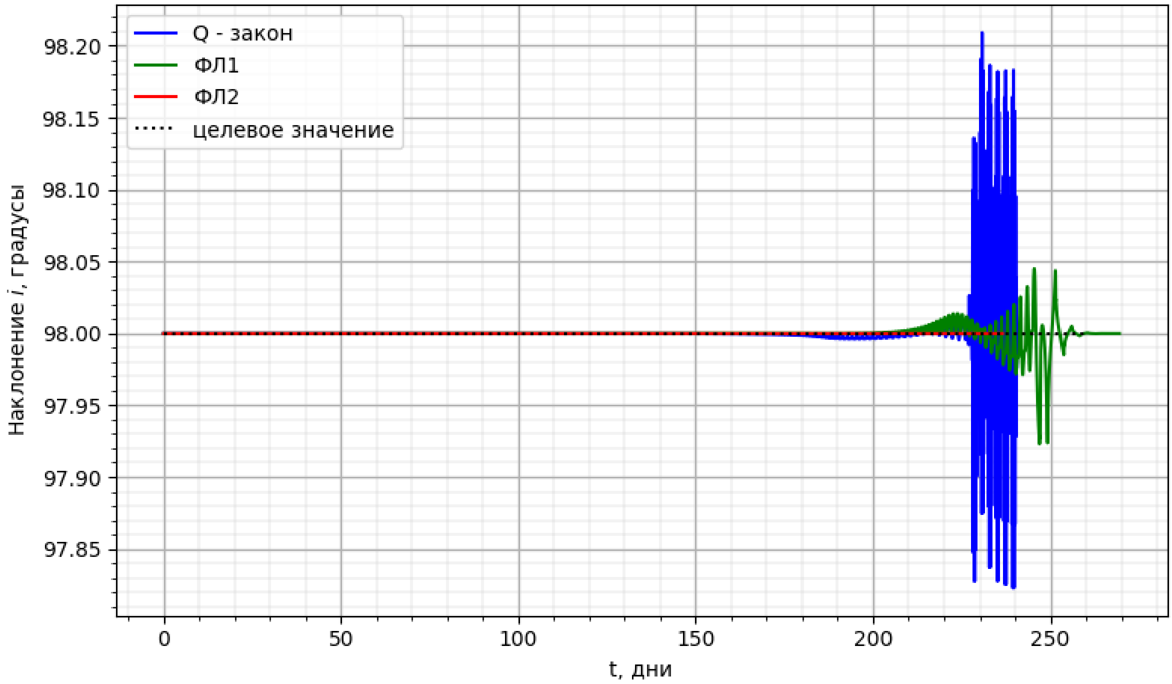

Рис. 2 – Графики изменения наклонения для траекторий межорбитального перелёта, спроектированных на основе ФЛ1, ФЛ2 и Q – закона

Как показано на рис. 1, примерно в интервале 140 – 190 дней полета происходят значительные изменения структуры траекторий. До этого момента траектория на каждом витке была почти круговой. Затем эксцентриситет начинает резко увеличиваться. Это приводит, как показывает численное моделирование, к изменению бинормальной компоненты реактивного ускорения, и, как следствие, к колебаниям наклонения траектории межорбитального перелета. Однако при проектировании межорбитальной траектории с помощью ФЛ2, как видно на рис. 2, колебания наклонения незначительны.

Траектория межорбитального перелёта в целом, спроектированная на основе ФЛ1, представлена в виде пространственного графика на рис. 3.

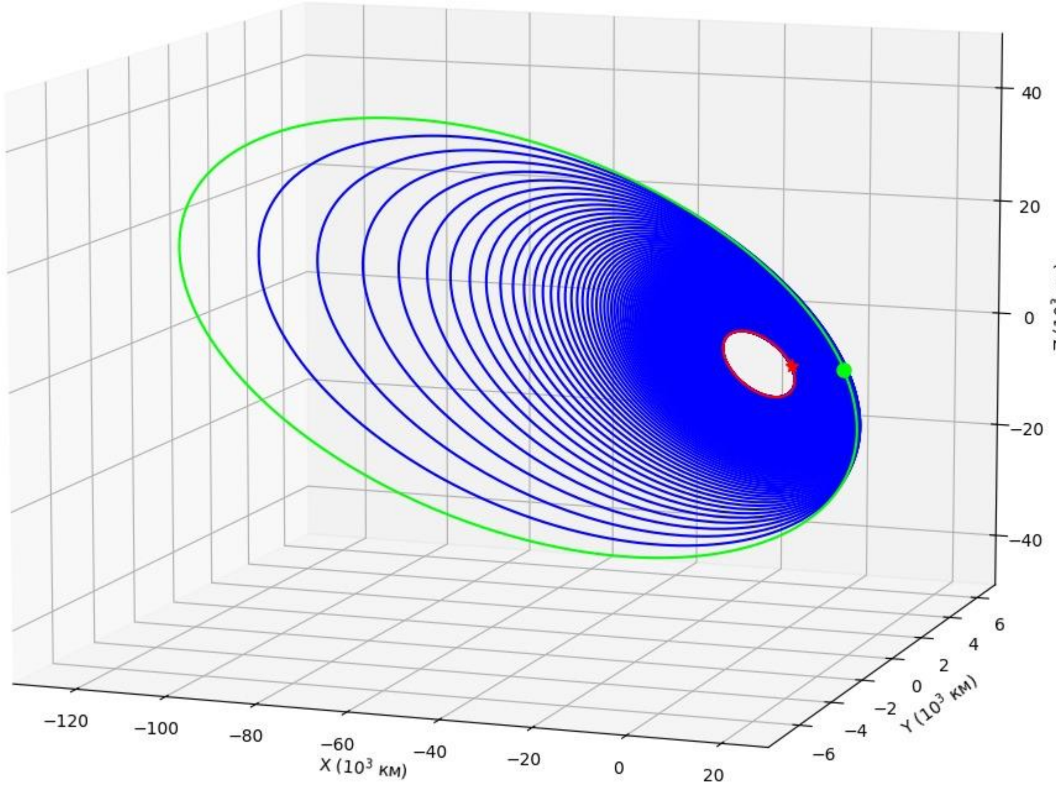

Рис. 3 – Пространственный график межорбитальной траектории в целом, спроектированной на основе ФЛ1

3.3. Сравнение траекторий, спроектированных на основе аналитической оценки КЭТ и оценки КЭТ на сетке

В данном подразделе изучается влияние введения пассивных участков на экономию топлива. Результаты численного моделирования получены для случая ФЛ1.

В табл. 4 приведены характеристики траекторий с пассивными участками, спроектированными на основе непосредственного вычисления КЭТ на сетке и аналитической оценки КЭТ снизу.

Моторным временем, данные о котором входят, в частности, в табл. 4 называют суммарное время движения КА на активных участках, т.е. когда двигатель включён.

Таблица 4 – Результаты расчета траекторий с пассивными участками

Величина $\eta_{кр}$	Время полёта, дни		Моторное время, дни		Затраты топлива, кг	
	Оценка КЭТ на сетке	Аналит. оценка КЭТ	Оценка КЭТ на сетке	Аналит. оценка КЭТ	Оценка КЭТ на сетке	Аналит. оценка КЭТ
0	247.02		247.02		36.71	
0.05	255.15	265.68	252.83	256.96	35.69	34.08
0.09	260.00	277.04	249.83	261.31	34.24	31.81
0.15	269.16	317.60	244.96	252.28	32.30	29.14
0.20	287.03	364.42	243.86	233.96	31.05	27.69
0.25	297.72	477.01	238.56	225.29	29.98	26.58

На рис. 4 изображены графики зависимости расхода топлива от величины $\eta_{кр}$ в случаях аналитической оценки КЭТ и оценки КЭТ на сетке.

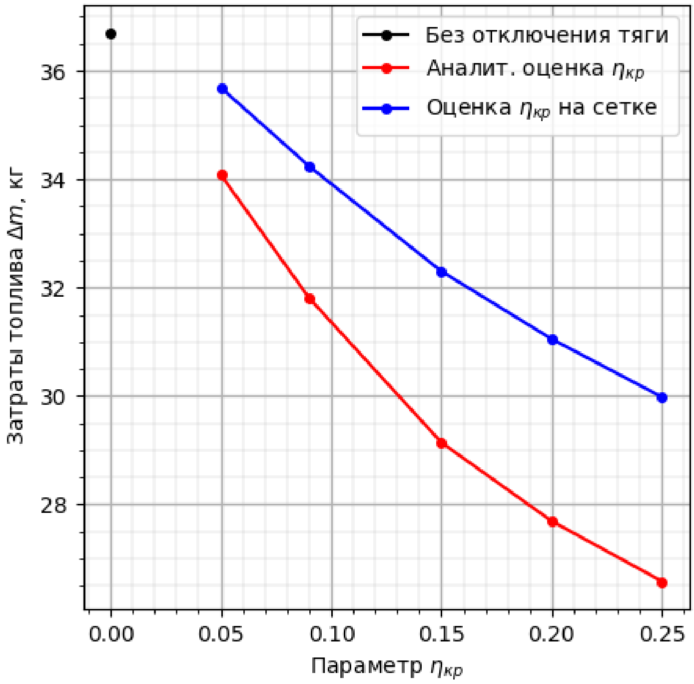

Рис. 4 – Графики расхода топлива в зависимости от величины $\eta_{кр}$

На рис. 5 изображены графики зависимости времени перелёта от величины $\eta_{кр}$ в случаях аналитической оценки КЭТ и оценки КЭТ на сетке.

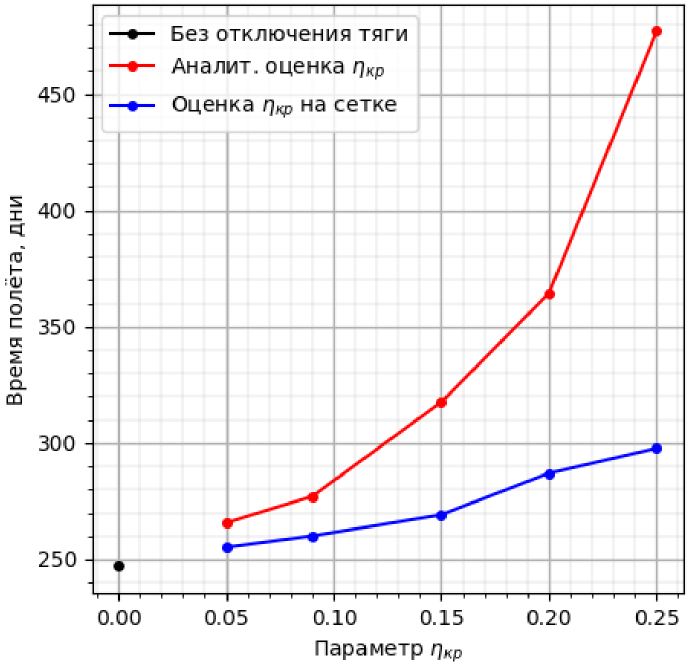

Рис. 5 – Графики времени перелёта в зависимости от величины $\eta_{кр}$

Как показано на рис. 4 и 5 с увеличением $\eta_{кр}$ затраты топлива уменьшаются, а время перелёта растёт.

На рис. 6 изображены графики зависимости расхода топлива от времени полета в случаях аналитической оценки КЭТ и оценки КЭТ на сетке.

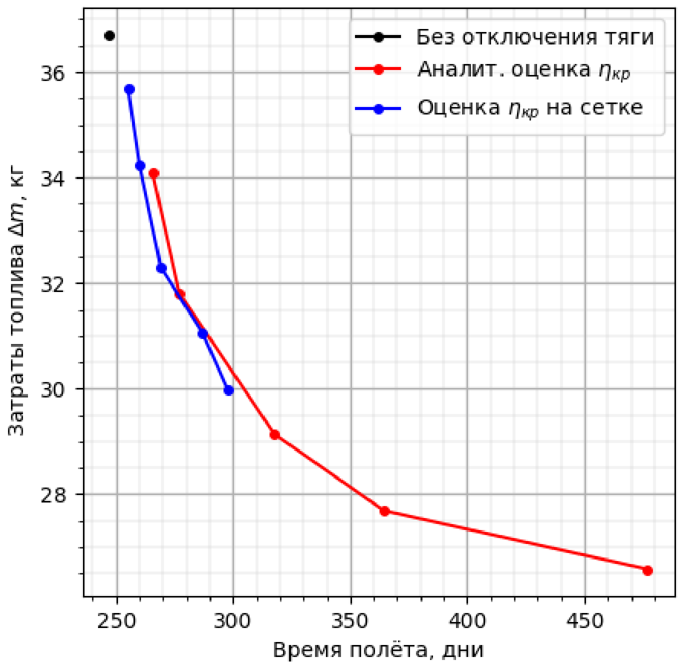

Рис. 6 – Графики расхода топлива в зависимости от времени полета

Как видно из рис. 6, на каждом из графиков расход топлива уменьшается при увеличении времени полёта, однако, как показано на графике красного цвета, при перелётах длительностью свыше 320 дней затраты топлива уменьшаются уже не так сильно по сравнению с более короткими перелётами.

На рис. 7 изображены графики зависимости расхода топлива от моторного времени в случаях аналитической оценки КЭТ и оценки КЭТ на сетке.

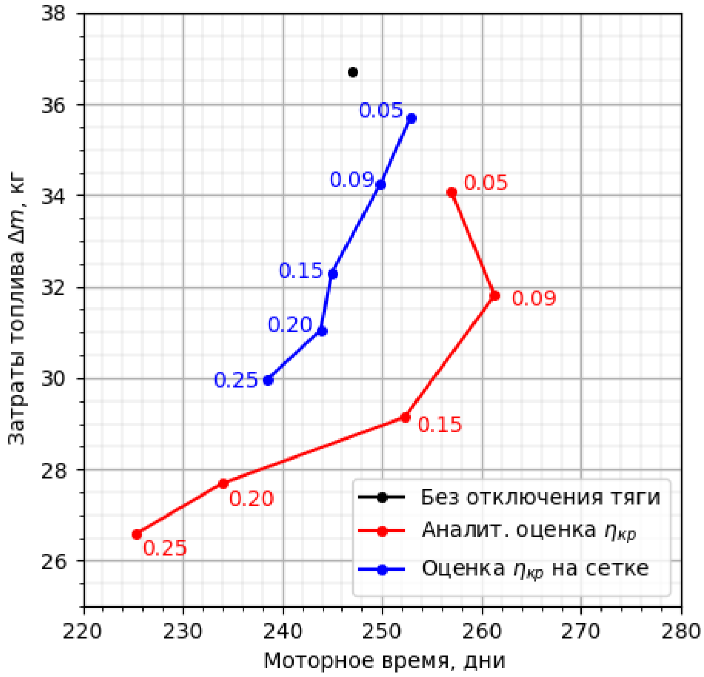

Рис. 7 – Графики расхода топлива в зависимости от моторного времени

На рис. 7 наиболее характерным участком графика красного цвета является участок между точками с $\eta_{кр} = 0.05$ и $\eta_{кр} = 0.09$. На этом участке графика затраты топлива уменьшаются несмотря на рост моторного времени. На графике синего цвета показано, что затраты топлива уменьшаются с уменьшением моторного времени.

3.4. Сравнение траекторий, имеющих пассивные участки, и оптимальных траекторий

Траектории, спроектированные на основе прямого метода Ляпунова, в данном разделе оптимизируются на основе ПМП. Для этого применяется пакет Optimal из библиотеки KIAM Astrodynamics Toolbox [18], основанный на методе продолжения по параметру, разработанному В.Г. Петуховым [1, 2]. Входными параметрами являются число дней полёта КА, число витков траектории перелета, параметры исходной и целевой орбит, выраженные шестимерным вектором «положение-скорость», а также параметры КА.

Для подсчета расхода топлива применяется следующая модель.

Считаем, что справедливо равенство

$$N = \frac{|\mathbf{f}| \cdot V_{ex}}{2} = const,$$

где N – мощность двигателя, $\mathbf{f}$ – вектор силы тяги, а V_{ex} – скорость истечения.

Поскольку сила тяги КА связана с его массой m по формуле

$$|\mathbf{f}| = m \cdot |\mathbf{U}|,$$

где $\boldsymbol{U}$ – реактивное ускорение, то, воспользовавшись формулой (6)

$$\dot{m} = -\frac{|\mathbf{f}|}{V_{ex}},$$

получаем

$$\dot{m} = -\frac{|\mathbf{f}|}{V_{ex}} = -\frac{|\mathbf{f}|^2}{|\mathbf{f}| \cdot V_{ex}} = -\frac{|\mathbf{f}|^2}{2N} = -\frac{m^2 \cdot |\mathbf{U}|^2}{2N}.$$

Следовательно, справедливо равенство

$$-\frac{\dot{m}}{m^2} = \frac{|\mathbf{U}|^2}{2N},$$

и для подсчета расхода топлива при межорбитальном перелёте КА нужно решить дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{|\mathbf{U}|^2}{2N}. \tag{24}$$

Численное интегрирование дифференциального уравнения (24) осуществляется в работе с помощью метода прямоугольников.

Для верификации управления межорбитальным перелётом КА с малой тягой, основанного на использовании сигмоиды, в которую входит КЭТ, посчитанный по формулам (23) и (26), возьмём $d = 160$ и $c = \eta_{кр} = 0.09$, поскольку именно в этом случае достигается компромисс между затратами топлива и временем перелёта.

В работе проведено сравнение траекторий с пассивными участками, спроектированных на основе расчета КЭТ на сетке, и оптимизированных траекторий. Расчёты осуществлялись на компьютере, оснащённом процессором Intel(R) Core (TM) i7-10875H CPU @ 2.30GHz с оперативной памятью 16 ГБ. Программа использует для расчёта 8 ядер, пакет Optimal написан на Фортране, программа ляпуновского управления написана на Python версии 3.13.0.

Параметры сравниваемых траекторий приведены в табл. 5.

Таблица 5 – Параметры траекторий, спроектированных на основе ПМП и расчета КЭТ на сетке

	ПМП	**Расчет КЭТ на сетке**
Время расчёта на ПК, мин	1417	24.35
Время полета, дни	t = 260.0	t = 260.0
Число витков	1391	1391
Расход топлива, кг	$\Delta m = 23.75$	$\Delta m = 34.24$
Невязка для большой полуоси, км	$\lvert a_{кон} - a^{ц}\rvert = 24553.8$	$\lvert a_{кон} - a^{ц}\rvert = 3.33$
Невязка для наклонения орбиты, град.	$\lvert i_{кон} - i^{ц}\rvert = 2.77 \cdot 10^{-7}\,°$	$\lvert i_{кон} - i^{ц}\rvert = 0.0026°$
Невязка для эксцентриситета	$\lvert e_{кон} - e^{ц}\rvert = 0.1148$	$\lvert e_{кон} - e^{ц}\rvert = 2.4 \cdot 10^{-5}$

Как показано в табл. 5, КА на траектории, оптимизированной на основе ПМП, расходует намного меньше топлива, чем на траектории, спроектированной на основе расчета КЭТ на сетке. При этом КА на траектории, оптимизированной по ПМП, точнее достигает целевой орбиты по наклонению, однако показывает значительно более низкую точность достижения целевой орбиты по большой полуоси и по эксцентриситету. Следует отметить, что оптимизация по ПМП занимает примерно в 60 раз больше времени, чем проектирование на основе метода Ляпунова, хотя она производится на компилируемом языке, а интегрирование в методе Ляпунова осуществляется на интерпретируемом языке Python.

В работе проведено сравнение траекторий с пассивными участками, спроектированными на основе аналитической оценки КЭТ, и оптимизированных траекторий. Параметры сравниваемых траекторий приведены в табл. 6.

Таблица 6 – Параметры траекторий, спроектированных на основе ПМП и аналитической оценки КЭТ

	ПМП	**Аналит. оценка КЭТ**
Время расчёта на ПК, мин	1417	0.967
Время полета, дни	$t = 277.04$	$t = 277.04$
Число витков	1419	1419
Расход топлива, кг	$\Delta m = 23.12$	$\Delta m = 31.81$
Невязка для большой полуоси, км	$\lvert a_{кон} - a^{ц}\rvert = 22228.11$	$\lvert a_{кон} - a^{ц}\rvert = 8.77$
Невязка для наклонения орбиты, град.	$\lvert i_{кон} - i^{ц}\rvert = 3.33 \cdot 10^{-7}\,°$	$\lvert i_{кон} - i^{ц}\rvert = 0.0176°$
Невязка для эксцентриситета	$\lvert e_{кон} - e^{ц}\rvert = 0.096$	$\lvert e_{кон} - e^{ц}\rvert = 2.92 \cdot 10^{-5}$

Из табл. 6 видно, что КА на траектории, спроектированной на основе ПМП, расходует намного меньше топлива и точнее достигает целевой орбиты по наклонению, чем на траектории, спроектированной на основе аналитической оценки КЭТ, однако показывает значительно более низкую точность достижения целевой орбиты по большой полуоси и по эксцентриситету.

Заключение

В работе представлена методика проектирования межорбитальных траекторий перелёта КА с ЭРДУ на основе прямого метода Ляпунова. Рассматриваются траектории перелёта как с непрерывной работой двигателя, так и с пассивными участками для экономии топлива. При проектировании траекторий с пассивными участками вводится коэффициент эффективности тяги на основе значений производной функции Ляпунова и её максимального значения на витке. КА, движущиеся по траекториям, спроектированным с помощью функции Ляпунова, зависящей только от трех целевых орбитальных элементов, расходуют меньше топлива и быстрее достигают целевой орбиты, чем КА, движущиеся по траекториям, спроектированным на основе функции Ляпунова, зависящей от всех элементов, а также спроектированных на основе Q – закона. КА, движущиеся по траекториям, спроектированным с помощью аналитической оценки коэффициента эффективности тяги, расходуют меньше топлива, однако тратят больше времени на перелёт, чем КА, движущиеся по траекториям, спроектированным на основе оценки коэффициента эффективности тяги на сетке. При оптимизации спроектированных траекторий в рамках принципа максимума Понтрягина КА на траекториях на основе аналитической оценки коэффициента эффективности тяги тратят меньше топлива, чем на траекториях на основе оценки коэффициента эффективности тяги на сетке. Оптимизация траекторий по ПМП занимает примерно в 60 раз больше времени, чем проектирование траекторий на основе метода Ляпунова.

Список литературы

[1] Петухов В.Г. *Метод продолжения для оптимизации межпланетных траекторий с малой тягой* // Космические исследования. 2012. Т. 50, №. 3. С. 258–258.

[2] Петухов В.Г. *Оптимальные многовитковые траектории выведения космического аппарата с малой тягой на высокую эллиптическую орбиту* // Космические исследования. 2009. Т. 47, № 3, С. 271–279.

[3] Suslov, K., Shirobokov, M., Trofimov, S. *Approximate Finite Fourier Solution to the Periodically Perturbed Two-Body Problem* // Journal of Guidance and Dynamics, 2024, Vol. 47, No. 8. DOI: https://doi.org/10.2514/1.G007900.

[4] Ивашкин В.В., Крылов И.В. *Оптимизация траекторий космического аппарата с электроракетным двигателем малой тяги* // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2020. 094, 32 с. DOI: https://doi.org/10.20948/prepr-2020-94.

[5] Ахметшин Р.З., Ефимов Г.Б., Энеев Т.М., *Траектории экспедиций космических аппаратов с двигателем малой тяги по доставке образцов грунта с астероидов Главного пояса и Фобоса* // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2008. 040, 23 с.

[6] Samokhin A., Samokhina M., Grigoriev I., Zapletin M. *The optimization of interplanetary flight to Phobos with a jet engine of combined low and high limited thrust* // Advances in the Astronautical sciences. 2020. Vol. 170, P. 213–227.

[7] Белецкий В.В. *Очерки о движении космических тел*. Изд. 3-е, испр. и доп. М.: Издательство ЛКИ, 2009. – 432 с., очерк десятый.

[8] Petropoulos, A.E. *Low-thrust orbit transfers using candidate Lyapunov functions with a mechanism for coasting* // AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit, Rhode Island, USA, August 16-19, 2004. Paper AIAA 2004-5089. DOI: https://doi.org/10.2514/6.2004-5089.

[9] Petropoulos, A.E. *Refinements to the Q-law for Low-Thrust Orbit Transfers* // AAS Space Flight Mechanics Conference, Copper Mountain, Colorado, USA, January 23–27, 2005. Paper AAS 05-162.

[10] Ельников Р.В. *Использование функции Ляпунова для вычисления локально-оптимального управления вектором тяги при межорбитальном перелёте с малой тягой* // Космические исследования. 2021. Т. 59, № 3, С. 255‑264. DOI: 10.31857/S0023420621030043.

[11] Atmaca, D., and Pontani, M. *Near-Optimal Feedback Guidance for Low-Thrust Orbit Transfers* // Aerotecnica Missili & Spazio. 2024. Vol. 103, P. 245-253. DOI: https://doi.org/10.1007/s42496-023-00193-2.

[12] М. Г. Широбоков, К. С. Суслов, М. Ю. Овчинников, П. А. Дронов, С. Ю. Приданников, А. Н. Нестеренко, О. В. Толстель, *Анализ траекторий легкого лунного буксира с электрореактивной двигательной установкой* // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2024. 028, 23 с. DOI: https://doi.org/https://doi.org/10.20948/prepr-2024-28.

[13] Q-law Guidance for Orbital transfer in Python: https://github.com/Yuricst/pyqlaw (дата обращения: 06.04.2025).

[14] Широбоков М.Г. *Лекции и задачи по численным методам в механике космического полёта* : учебное пособие. – Москва : МФТИ, 2023. – 112 с. ISBN: 978-5-7417-0833-0.

[15] Суханов А.А. *Астродинамика* – М: ИКИ РАН, 2010. С. 48 – 49.

[16] Suslov, K. S., Shirobokov, M. G., Bogachev, S. A. *Ballistic Analysis of a Small Spacecraft Mission for Studying the Earth’s Magnetosphere* // Cosmic Research. 2024. Vol. 62, P. 632–642. DOI: https://doi.org/10.1134/S0010952524600987.

[17] Интернет-ресурс https://fakel-russia.com/produkciya (дата обращения: 06.04.2025).

[18] Широбоков М.Г., Трофимов С.П. *Библиотека KIAM Astrodynamics Toolbox для проектирования орбитального движения* // Программирование. 2024. №1, С. 53–65. DOI: https://doi.org/10.31857/S0132347424010058.