

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(национальный исследовательский университет)

ФИЗТЕХ-ШКОЛА АЭРОКОСМИЧЕСКИХ ТЕХНОЛОГИЙ
Кафедра математического моделирования и прикладной математики

Квалификационная работа на соискание степени магистра
по направлению 03.04.01 «Прикладные математика и физика», профиль
подготовки «Космические технологии»

Стратегии оптимизации накопления избыточного кинетического момента при межпланетном перелете

Выполнил:

студент группы М03-301

Леонов Валерий

Викторович

Научный руководитель:

к.ф.-м.н.

Маштаков Ярослав

Владимирович

Москва, 2025

Аннотация

Настоящая работа посвящена задаче предотвращения насыщения маховиков в системе управления ориентацией космического аппарата, что особенно актуально для межпланетных миссий, использующих двигатели малой тяги. Отсутствие магнитного поля не позволяет использовать магнитные катушки для разгрузки маховиков, а применение реактивных двигателей потребует дополнительных затрат топлива. В настоящей работе предлагается несколько новых подходов к синтезу углового движения, основанных на периодическом вращении аппарата вокруг вектора тяги. Такие маневры позволяют усреднять внешние возмущающие моменты и одновременно сохранять ориентацию на Солнце для эффективной работы солнечных панелей. В данной работе проведено моделирование перелета Земля–Марс, в ходе которого продемонстрирована эффективность предложенных методов и их потенциал для снижения расхода топлива и увеличения ресурса системы ориентации.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Обозначения и сокращения	4
Введение	5
1. Постановка задачи	7
1.1. Модель движения КА	7
2. Опорное движение КА	11
2.1. Опорное угловое движение и его связь с накоплением кинетического момента	11
2.2. Разгрузка маховиков при помощи двигателей	13
2.3. Построение опорного углового движения для уже существующего межпланетного перелета	14
3. Результаты моделирования.....	15
Заключение.....	24
Список использованных источников	25
Приложение А.....	26

Обозначения и сокращения

КА - космический аппарат

СП - солнечные панели

RW - индекс, соответствующий маховику

SP - индекс, соответствующий солнечной панели

ref - индекс, соответствующий опорному движению

Введение

В настоящей работе исследуется проблема насыщения маховиков, связанная с постоянной работой реактивного двигателя при межпланетном перелете. Стоит отметить, что в современных межпланетных миссиях все чаще используются ионные или плазменные двигатели, для которых характерен высокий удельный импульс, что позволяет существенно снижать затраты топлива на перелет [1–3]. К недостаткам же этих двигателей, в первую очередь, относится низкая тяга, что приводит к существенному увеличению моторного времени, вплоть до нескольких месяцев, на протяжении которых система управления ориентацией должна обеспечивать заданный режим углового движения. В этом режиме на ориентацию аппарата накладывается единственное условие: ось тяги двигателя должна совпадать со своим номинальным значением. Вторым важным недостатком такого класса двигателей является высокое энергопотребление: это означает, что для успешного выполнения миссии аппарат должен быть оснащен поворотными солнечными панелями, чтобы одновременно удовлетворить требованиям по ориентации оси тяги и максимизации токосъема с солнечных панелей.

Отметим также, что невозможно абсолютно точно установить двигатель на космический аппарат (КА) и правильно направить ось его тяги, чтобы она проходила через центр масс системы. Это приводит к возникновению паразитного постоянного момента в связанной с аппаратом системе координат. При его парировании маховичная система управления будет накапливать избыточный кинетический момент, который необходимо будет сбрасывать. В околоземном пространстве для этих целей могут эффективно использоваться магнитные катушки [4–7], однако в межпланетном пространстве магнитное поле отсутствует. Вторым способом решения проблемы является использование двигателей на

специальных поворотных платформах, которые позволяют во время полета менять направление оси тяги двигателя [3]. Однако такие системы являются достаточно тяжелыми и сложными в производстве, что усложняет их использование на борту. Поэтому единственной возможностью разгрузить избыточный кинетический момент является использование дополнительных реактивных двигателей, что приведет к дополнительному расходу рабочего тела. В связи с этим большой практический интерес представляют собой бестопливные методы разгрузки маховиков [8,9].

В настоящей работе предлагается подход к построению опорного углового движения КА, позволяющий одновременно обеспечить требуемое направление оси тяги двигателя, а также существенно уменьшить скорость накопления избыточного кинетического момента. Проведенное моделирование показало высокую эффективность предложенного подхода, а сам алгоритм является достаточно простым для реализации на борту.

Результаты работы были представлены на 67-й научной конференции МФТИ (Секция динамики управляемого движения космическими аппаратами).

Структура работы:

В первой главе описывается постановка задачи, модель движения, проводится анализ существующих методов решения и делаются необходимые предположения.

Во второй главе рассматриваются алгоритмы синтеза опорного углового движения.

В третьей главе приводятся результаты численного исследования и сравнение эффективности разных моделей.

1. Постановка задачи

В работе будут использоваться следующие системы координат:

$Sx_1x_2x_3$ – инерциальная система координат (ИСК). Точка S расположена в барицентре солнечной системы, оси Sx_1 направлена в точку весеннего равноденствия эпохи $J2000$, Sx_3 направлена по нормали к эклиптике, Sx_2 дополняет систему до правой тройки;

$Oy_1y_2y_3$ – опорная система координат (ОСК). O соответствует центру масс корпуса КА, положение осей будет определено далее в работе.

$OY_1Y_2Y_3$ – связанная с аппаратом система координат. Оси являются главными центральными осями корпуса аппарата.

Рассматривается задача обеспечения требуемого углового движения при межпланетном перелете. Предполагается, что аппарат оснащен двумя поворотными солнечными панелями и набором двигателей-маховиков. Требуемое направление вектора тяги в ИСК задано с некоторой периодичностью. Вектор состояния КА известен точно, то есть не рассматривается задача идентификации движения.

Требуется синтезировать опорное движение КА, обеспечивающее заданное направление вектора тяги, а также минимизирующее накопление избыточного кинетического момента.

1.1. Модель движения КА

Космический аппарат рассматривается как система, состоящая из корпуса, пары вращающихся солнечных панелей и набора маховиков. Для анализа его движения сначала выводятся уравнения движения всей системы, основанные на общем уравнении динамики:

$$\sum_l (m_l \ddot{\mathbf{R}}_l - \mathbf{F}_l)^T \delta \mathbf{R}_l = 0$$

Здесь \mathbf{R}_i — радиус-вектор некоторой точки спутника, m_i — её масса, \mathbf{F}_i — сила, действующая на эту точку, а $\delta\mathbf{R}_i$ — виртуальное перемещение. Для жёстких тел суммирование можно заменить интегрированием.

Важно отметить, что спутник состоит из нескольких жёстких тел: корпуса, солнечных панелей и маховиков. Соответственно, суммирование можно разбить на три составляющие, соответствующие точкам, связанным с корпусом, солнечными панелями (СП) и маховиками. Виртуальные перемещения этих точек определяются следующим образом (см. рис. 1):

$$\delta\mathbf{R}_i = \delta\mathbf{R}_O + \delta\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_i$$

$$\delta\mathbf{R}_{ki}^{SP} = \delta\mathbf{R}_O + \delta\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{a}_k^{SP} + (\delta\boldsymbol{\theta} + \mathbf{e}_k^{SP} \delta\varphi_k) \times (\mathbf{b}_k^{SP} + \mathbf{r}_{ki}^{SP})$$

$$\delta\mathbf{R}_{ki}^{RW} = \delta\mathbf{R}_O + \delta\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{a}_k^{RW} + (\delta\boldsymbol{\theta} + \mathbf{e}_k^{RW} \delta\psi_k) \times (\mathbf{b}_k^{RW} + \mathbf{r}_{ki}^{RW})$$

Здесь \mathbf{R}_O — центр масс корпуса, $\delta\boldsymbol{\theta}$ — вектор элементарного поворота корпуса, \mathbf{a}_k^{SP} — вектор от центра масс КА до точки крепления солнечной панели, \mathbf{b}_k^{SP} — вектор от точки крепления до центра масс солнечной панели, \mathbf{r}_{ki} — вектор от центра масс солнечной панели до рассматриваемой точки на панели, \mathbf{e}_k^{SP} — ось вращения солнечной панели, а $\delta\varphi_k$ — элементарный поворот панели относительно КА. Нижний индекс обозначает k -ю солнечную панель, а i — конкретную точку. Переменные для маховиков $\mathbf{a}_k^{RW}, \mathbf{b}_k^{RW}, \mathbf{e}_k^{RW}, \delta\psi_k, \mathbf{r}_{ki}$ определяются аналогичным образом.

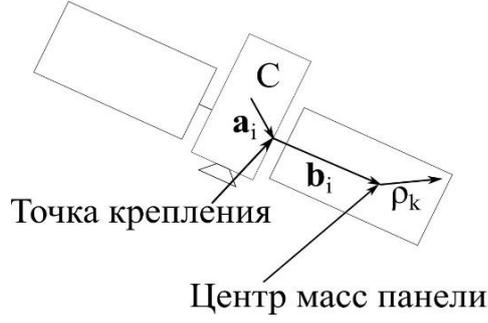


Рис. 1. КА и солнечные панели

Вторые производные координат точек спутника по времени задаются выражениями:

$$\begin{aligned}
 \ddot{\mathbf{R}}_i &= \ddot{\mathbf{R}}_O + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_i + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i, \\
 \ddot{\mathbf{R}}_{ki}^{SP} &= \ddot{\mathbf{R}}_O + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{a}_k^{SP} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}_k^{SP} \\
 &\quad + \left(\dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\boldsymbol{\Omega}}_k^{SP} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Omega}_k^{SP} \right) \times \left(\mathbf{b}_k^{SP} + \mathbf{r}_{kj} \right) \\
 &\quad + \left(\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}_k^{SP} \right) \times \left(\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}_k^{SP} \right) \times \left(\mathbf{b}_k^{SP} + \mathbf{r}_{kj} \right), \\
 \ddot{\mathbf{R}}_{ki}^{RW} &= \ddot{\mathbf{R}}_O + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{a}_k^{SP} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}_k^{SP} \\
 &\quad + \left(\dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\boldsymbol{\Omega}}_k^{SP} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Omega}_k^{SP} \right) \times \left(\mathbf{b}_k^{SP} + \boldsymbol{\rho}_{ki} \right) \\
 &\quad + \left(\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}_k^{SP} \right) \times \left(\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}_k^{SP} \right) \times \left(\mathbf{b}_k^{SP} + \boldsymbol{\rho}_{ki} \right),
 \end{aligned}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость спутника относительно инерциальной системы отсчёта, а $\boldsymbol{\Omega}_k^{SP} = \dot{\varphi}_k \mathbf{e}_k^{SP}$ и $\boldsymbol{\Omega}_k^{RW} = \dot{\psi}_k \mathbf{e}_k^{RW}$ — угловые скорости маховиков и солнечных панелей относительно корпуса КА.

Общее уравнение динамики можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 \sum_i \left(m_i \ddot{\mathbf{R}}_i - \mathbf{F}_i \right)^T \delta \mathbf{R}_i + \sum_k \sum_i \left(m_{kj} \ddot{\mathbf{R}}_{ki}^{SP} - \mathbf{F}_{ki}^{SP} \right)^T \delta \mathbf{R}_{ki}^{SP} + \\
 + \sum_k \sum_i \left(m_{kj} \ddot{\mathbf{R}}_{ki}^{RW} - \mathbf{F}_{ki}^{RW} \right)^T \delta \mathbf{R}_{ki}^{RW} - \\
 - \sum_k M_k^{SP} \delta \varphi_k - \sum_k M_k^{RW} \delta \psi_k = 0
 \end{aligned}$$

Здесь M_k^{SP} и M_k^{RW} — внутренние моменты, создаваемые на оси вращения k -й солнечной панели и маховика соответственно. Для получения уравнений движения необходимо приравнять к нулю все слагаемые, соответствующие одним и тем же виртуальным перемещениям. Хотя в этом разделе процесс полного вывода опущен, далее приводится конечная форма уравнений. Также сделаны следующие упрощения: предполагается, что солнечные панели и маховики управляются идеально, что приводит к следующим уравнениям их движения:

$$\ddot{\varphi}_k = u_k^{SP}, \quad \ddot{\psi} = u_k^{RW}.$$

Введём обозначение для матрицы векторного произведения (матрицы кососимметричного оператора):

$$[\mathbf{a}]_{\times} := \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ таким образом } \mathbf{a} \times \mathbf{b} \equiv [\mathbf{a}]_{\times} \mathbf{b}.$$

Тензор инерции корпуса относительно точки O обозначим как $\mathbf{J}_s = -\sum_i [\mathbf{r}_i]_{\times} [\mathbf{r}_i]_{\times} m_i$. Тензоры инерции солнечных панелей \mathbf{I}_k^{SP} и маховиков \mathbf{I}_k^{RW} определяются аналогично. Массы корпуса, k -й солнечной панели и k -го маховика обозначаются как m_s, m_k^{SP}, m_k^{RW} соответственно. Предполагается, что тензор инерции маховика сферически симметричен, а его центр масс находится на оси вращения. Главные векторы сил и моментов (относительно соответствующих центров масс), действующие на корпус, маховики и солнечные панели, задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_s &= \sum_i \mathbf{F}_i, \quad \mathbf{F}_k^{SP} = \sum_i \mathbf{F}_{ki}^{SP}, \quad \mathbf{F}_k^{RW} = \sum_i \mathbf{F}_{ki}^{RW} \\ \mathbf{M}_s &= \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i, \quad \mathbf{M}_k^{SP} = \sum_i \mathbf{r}_{ki}^{SP} \times \mathbf{F}_{ki}^{SP}, \quad \mathbf{M}_k^{RW} = \sum_i \mathbf{r}_{ki}^{RW} \times \mathbf{F}_{ki}^{RW} \end{aligned}$$

Если имеется M солнечных панелей и N маховиков, уравнения движения всего спутника записываются в виде:

$$\mathbf{S} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{v}}_O \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} \\ \dot{\Omega}_1^{SP} \\ \vdots \\ \dot{\Omega}_M^{SP} \\ \dot{\Omega}_1^{RW} \\ \vdots \\ \dot{\Omega}_N^{RW} \end{pmatrix} = \mathbf{N}.$$

Определение матрицы \mathbf{S} и вектора \mathbf{N} см. в Приложении А. Эти уравнения дополняются кинематическими соотношениями:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}}_O &= \mathbf{V}_O, \\ \dot{q}_0 &= -\frac{1}{2} \mathbf{q}^T \boldsymbol{\omega}, \\ \dot{\mathbf{q}} &= \frac{1}{2} (q_0 \boldsymbol{\omega} + \mathbf{q} \times \boldsymbol{\omega}), \\ \dot{\phi}_k &= \Omega_k^{SP}, \\ \dot{\psi}_k &= \Omega_k^{RW}. \end{aligned}$$

Поскольку уравнения движения не зависят от угла поворота маховика ψ_k (предполагается, что маховики сферически симметричны), последнее уравнение можно опустить.

2. Опорное движение КА

2.1. Опорное угловое движение и его связь с накоплением кинетического момента

Основным требованием к ориентации спутника является выравнивание оси тяги \mathbf{n}_{thr} с заданным направлением \mathbf{n}_{ref} . Такое выравнивание оставляет вращение вокруг этой оси неопределённым, что даёт возможность свободно выбирать его. В результате, опорная

ориентация может быть представлена в виде произведения двух кватернионов:

$$Q_{ref} = Q_1 \circ Q_2.$$

Первый кватернион соответствует матрице направляющих косинусов, определяемой следующим образом (см. рис. 2):

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1^T \\ \mathbf{y}_2^T \\ \mathbf{y}_3^T \end{pmatrix}, \mathbf{y}_1 = -\frac{\mathbf{n}_{ref}}{\|\mathbf{n}_{ref}\|},$$

$$\mathbf{y}_2 = \frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{y}_1(\mathbf{y}_1, \mathbf{r}_s)}{\|\mathbf{r}_s - \mathbf{y}_1(\mathbf{y}_1, \mathbf{r}_s)\|}, \mathbf{y}_3 = \mathbf{y}_1 \times \mathbf{y}_2.$$

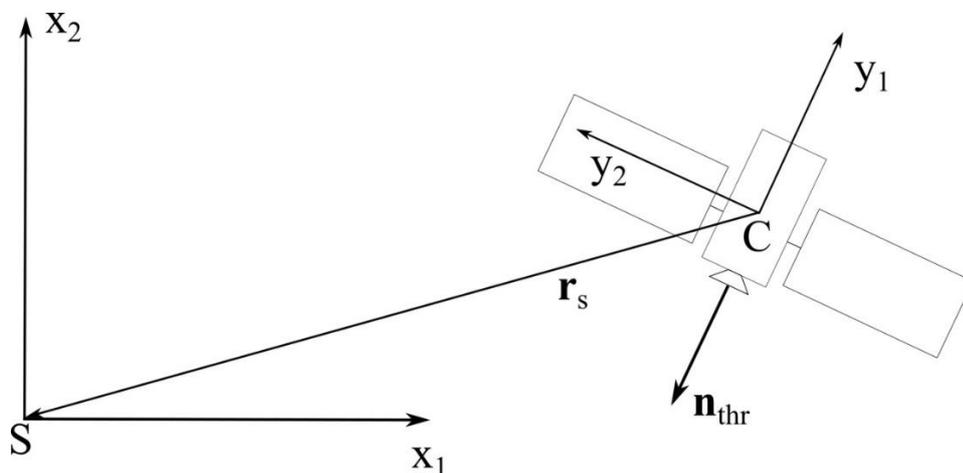


Рис. 2. Опорная ориентация

Второй кватернион задаётся как $Q_2 = \begin{pmatrix} \cos(\gamma / 2) \\ \mathbf{y}_1 \sin(\gamma / 2) \end{pmatrix}$. Рассмотрим три различных стратегии (алгоритма) построения Q_2 :

1. $\gamma = const$. В отсутствие вращения КА в условиях межпланетного перелета из-за возмущений на маховиках неизбежно будет накапливаться кинетический момент, который необходимо сбрасывать при помощи двигателей.

2. $\gamma = \Omega t$. КА вращается с постоянной угловой скоростью, усредняя возмущения, что снижает скорость накопления кинетического момента.
3. $\gamma = \pm \pi / 2$. КА вращается периодически на $\pi / 2$, усредняя внешние возмущения, что снижает скорость накопления кинетического момента.

Стоит отметить, что алгоритмы 2 и 3, как и алгоритм 1 с течением времени накапливают кинетический момент, и разгрузка при помощи двигателей им также необходима.

2.2. Разгрузка маховиков при помощи двигателей

Во время работы спутника маховики накапливают кинетический момент \mathbf{H} , компенсируя внешние возмущения. С ростом $|\mathbf{H}|$ возникает необходимость в **разгрузке**, чтобы избежать насыщения. Полный угловой момент КА выражается как $\mathbf{L}_{total} = \mathbf{K} + \mathbf{H}$, где \mathbf{K} — угловой момент корпуса, солнечных панелей и неподвижных маховиков, \mathbf{H} — суммарный момент маховиков относительно корпуса, вычисляемый как

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1}^3 I_i^{RW} \Omega_i^{RW} \mathbf{e}_i,$$

где I_i^{RW} — момент инерции i -го маховика относительно его оси вращения, Ω_i^{RW} — угловая скорость вращения i -го маховика, \mathbf{e}_i — единичный вектор направления оси вращения i -го маховика.

Разгрузка осуществляется при помощи реактивных двигателей: они создают возмущающий момент, при парировании которого снижается запас кинетического момента маховиков. Отметим, что в работе моделирование этого режима не проводилось: считалось, что при включении разгрузки одномоментно изменялись относительные угловые скорости маховиков

Ω_i^{RW} таким образом, чтобы $\mathbf{K} = -\mathbf{H}$, то есть суммарный кинетический момент системы становился равным нулю.

2.3. Построение опорного углового движения для уже существующего межпланетного перелета

Для синтеза опорного углового движения, как уже упоминалось в разделе 2.1, необходимо знать \mathbf{n}_{ref} — направление движение КА. Рассмотрим случай, когда вектор состояний КА в отдельных точках траектории для некоторого космического перелета содержит массив требуемых ускорений \mathbf{a} , которые должны сообщить двигатели КА для обеспечения требуемого орбитального движения, тогда \mathbf{n}_{ref} по направлению совпадает с \mathbf{a} . В связи с тем, что для моделировании орбитального движения сетка по времени часто делается грубее, чем для углового (поминутное разбиение против посекундного), для определения требуемого \mathbf{n}_{ref} в каждую секунду полета необходимо построить сплайн для массива векторов \mathbf{a} . В этом случае для интерполяции значений функции целесообразно использовать сплайн Эрмита. Пусть заданы ускорения \mathbf{a}_0 и \mathbf{a}_1 в два момента времени t_0 и t_1 , а также соответствующие производные $\dot{\mathbf{a}}_0$ и $\dot{\mathbf{a}}_1$. Обозначим нормированную независимую переменную как $\tau = \frac{t - t_0}{t_1 - t_0}$,

тогда интерполяция Эрмита задаётся выражением:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\tau) = & (2\tau^3 - 3\tau^2 + 1)\mathbf{a}_0 + (\tau^3 - 2\tau^2 + \tau)(t_1 - t_0)\dot{\mathbf{a}}_0 \\ & + (-2\tau^3 + 3\tau^2)\mathbf{a}_1 + (\tau^3 - \tau^2)(t_1 - t_0)\dot{\mathbf{a}}_1, \quad \tau \in [0, 1] \end{aligned}$$

Производные вектора ускорений могут быть найдены численно, например используя схему первого или второго порядка.

3. Результаты моделирования

Для демонстрации работоспособности закона управления и стратегий разгрузки маховиков используется численное моделирование. Рассматривается сценарий, в котором масса космического аппарата составляет около 400 кг, а тензор инерции приближён к $\mathbf{J}_\Sigma = \text{diag}(170, 140, 250)$ кг · м². Сила тяги составляет 0.1 Н, а плечо момента (несовпадение точки приложения вектора тяги и главной оси инерции КА) — около 3 см. Предполагается, что солнечные панели идеальны, то есть центр масс панели точно совпадает с осью вращения. Угол поворота солнечных панелей φ_k постоянно подстраивается для максимального тока съема: для этого необходимо максимизировать проекцию нормали к солнечной панели на направление на солнце:

$$(\mathbf{r}_s, \mathbf{n}_{sp}) \rightarrow \max \quad (1.1)$$

У этой функции есть два экстремума:

$$\varphi_k = \begin{cases} -\arctg\left(-\frac{\text{ctg}(\alpha)}{\sin(\gamma)}\right) \\ \pi + \arctg\left(-\frac{\text{ctg}(\alpha)}{\sin(\gamma)}\right) \end{cases},$$

где $\alpha = \text{atan2}((\mathbf{r}_s, \mathbf{y}_2), (\mathbf{r}_s, \mathbf{y}_1)) - \pi/2$ (угол между осью \mathbf{y}_2 и \mathbf{r}_s), γ — текущий угол поворота спутника вокруг оси тяги. Они соответствуют максимальной и минимальной проекции нормали на радиус-вектор КА. Выбирается то значение, которое доставляет максимум функционала (1.1). Дополнительно предполагается наличие внешних возмущений — помимо силы и момента тяги, создаваемых двигателем, учитываются также гравитационный момент и солнечное давление.

Межпланетный перелет, на основе которого было произведено моделирование опорного движения в соответствии со стратегиями 1-3 из

раздела 2.1, представляет собой оптимизированный перелет Земля — Марс продолжительностью 421 день, траектория перелета представлена на рис. 3.

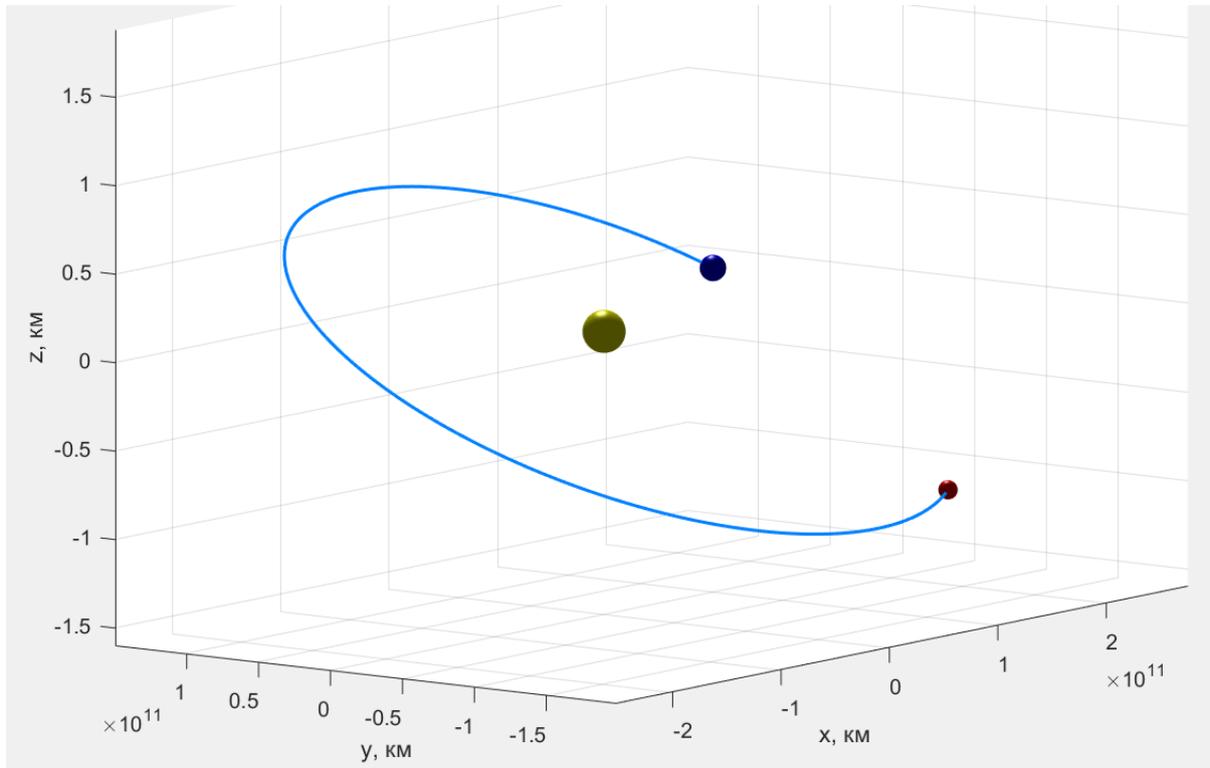


Рис. 3. Траектория перелета Земля — Марс

Результаты моделирования, иллюстрирующие поведение КА при использовании стратегий 1-3 на интервале продолжительностью в 48 часов, представлены на рис. 4-6.

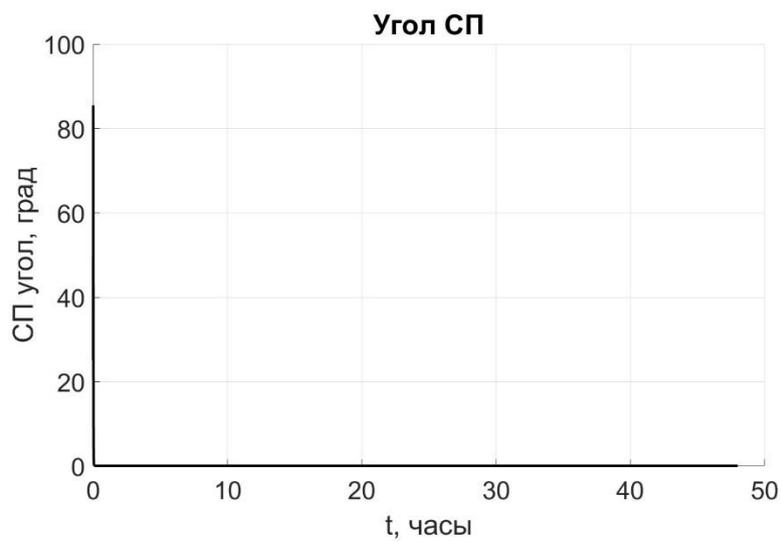
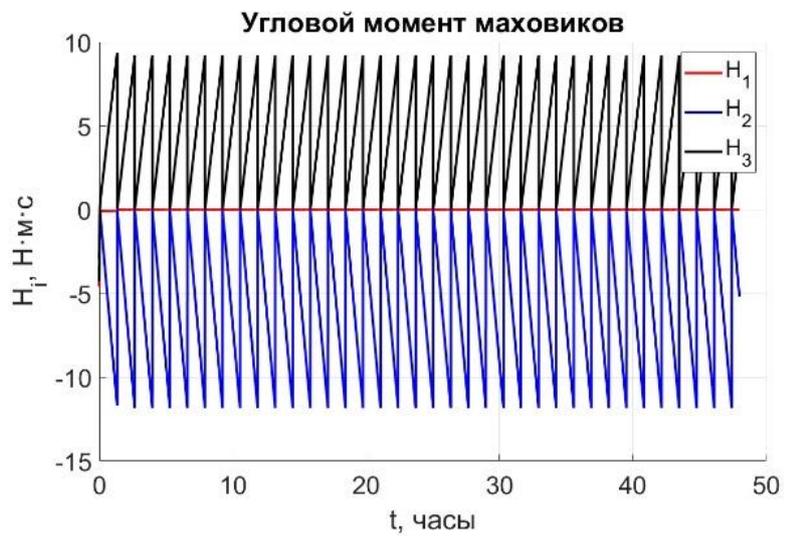
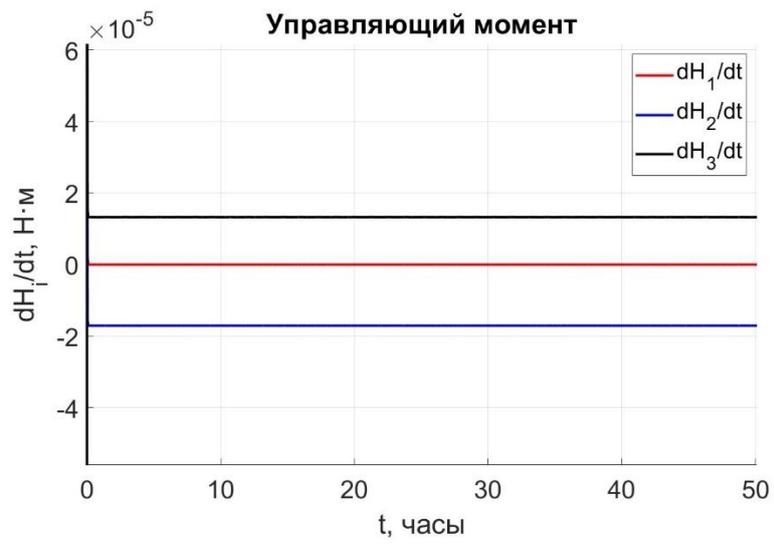


Рис. 4. 1-я стратегия, $\gamma = const$

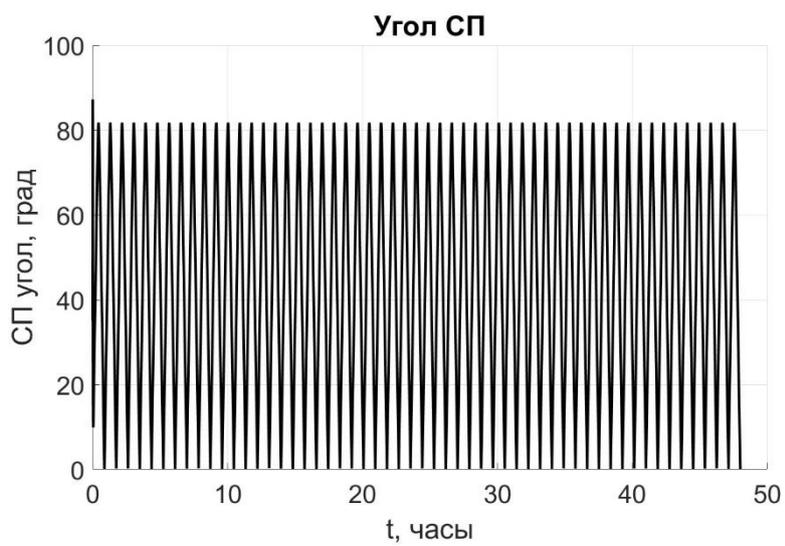
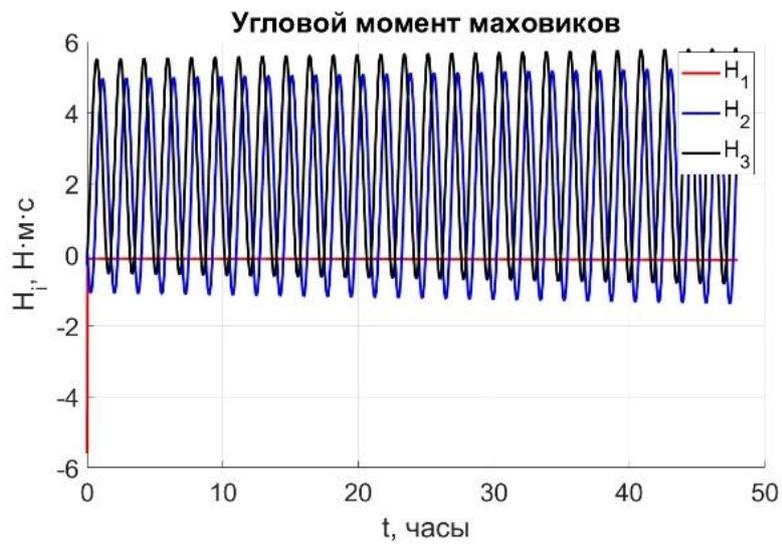
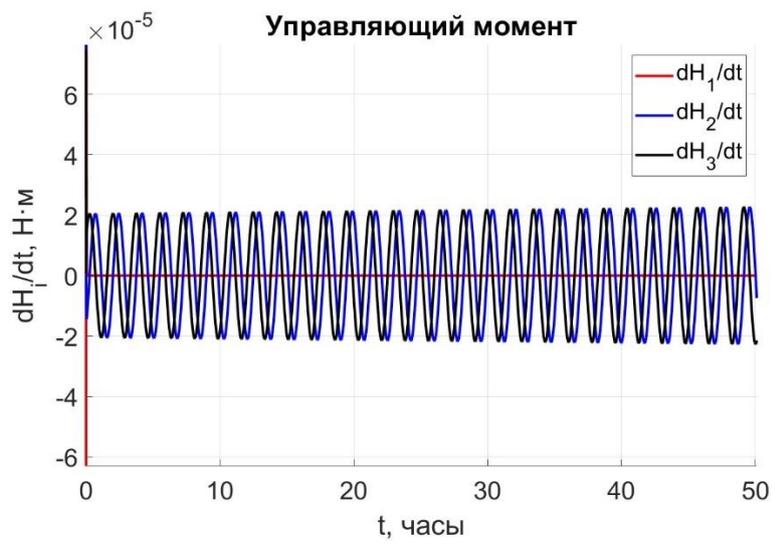


Рис. 5. 2-я стратегия, $\gamma = \Omega t$

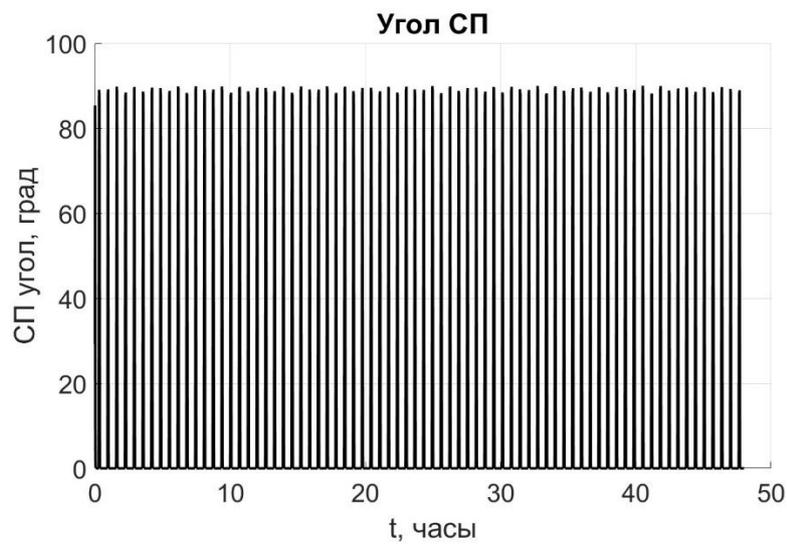
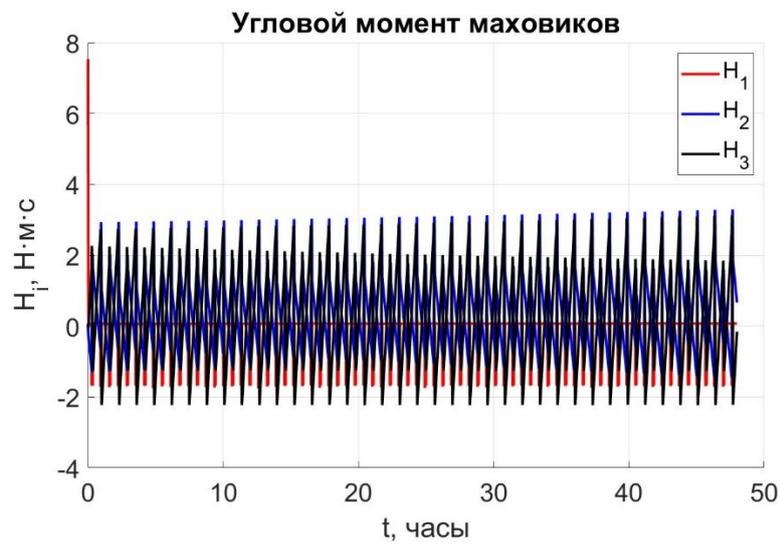
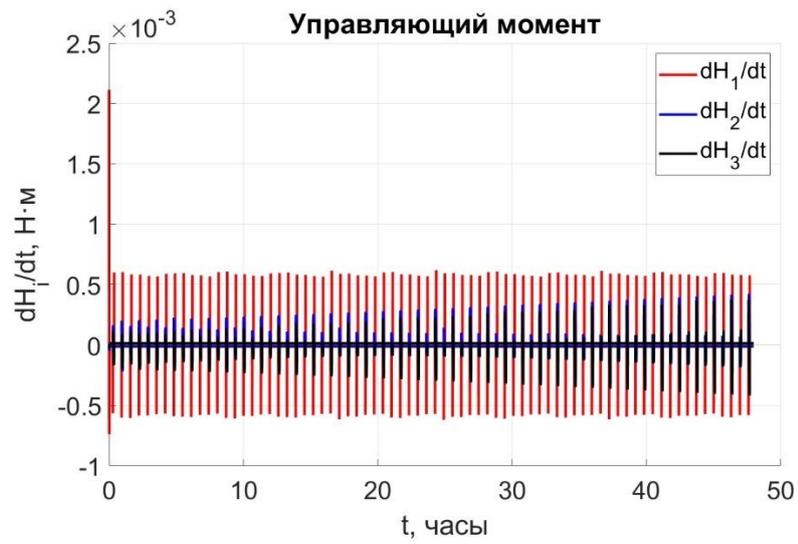


Рис. 6. 3-я стратегия, $\gamma = \pm\pi / 2$

Как видно из результатов, представленные режимы углового движения учитывают влияние внешних возмущений, таких как момент давления солнечной радиации и гравитационный момент от Солнца. Несмотря на эти факторы, угловой момент маховиков для стратегий 2 и 3 остаётся периодическим, что предотвращает их быстрое насыщение. Напротив, в случае со стратегией 1, в которой не используется вращение КА вокруг опорного вектора направления, можно наблюдать регулярное насыщение маховиков и последующие разгрузки. График разгрузок кинетического момента за 48 часов можно наблюдать на рис. 7.

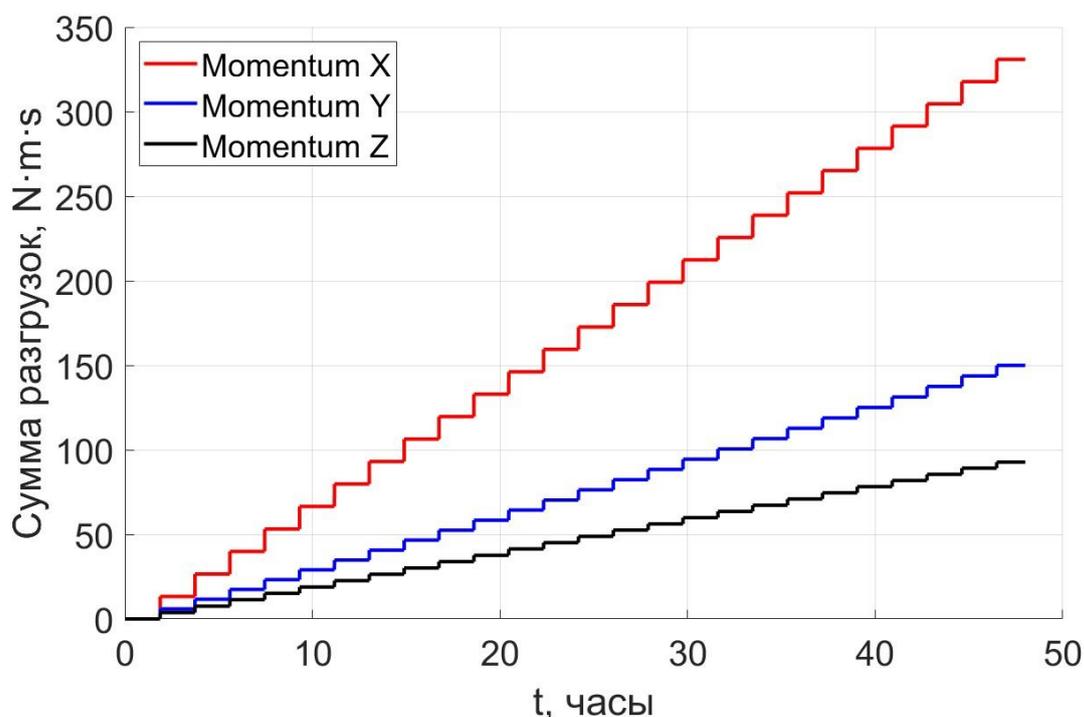


Рис. 7. График суммы разгрузок углового кинетического момента маховиков для стратегии 1.

Как было упомянуто ранее, преимуществом режимов с вращением является скорость накопления кинетического момента на маховиках. Чем она меньше, тем меньше разгрузок двигателями потребуется, и, как следствие, будет потрачено меньше топлива. Разгрузки производились при превышении нормы угловых кинетических моментов маховиков максимально допустимого момента $H_{max} = 15 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$ на всем протяжении маневрирования во время перелета. Результаты моделирования представлены на рис. 8-10.

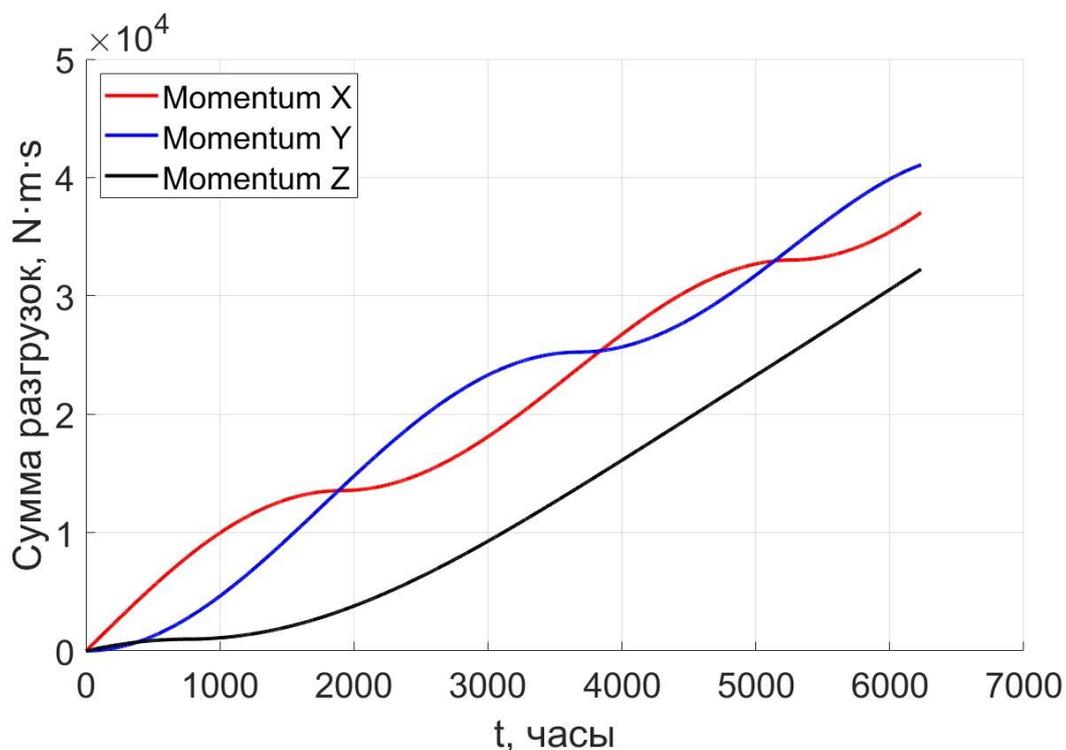


Рис. 8. 1-я стратегия, $\gamma = const$

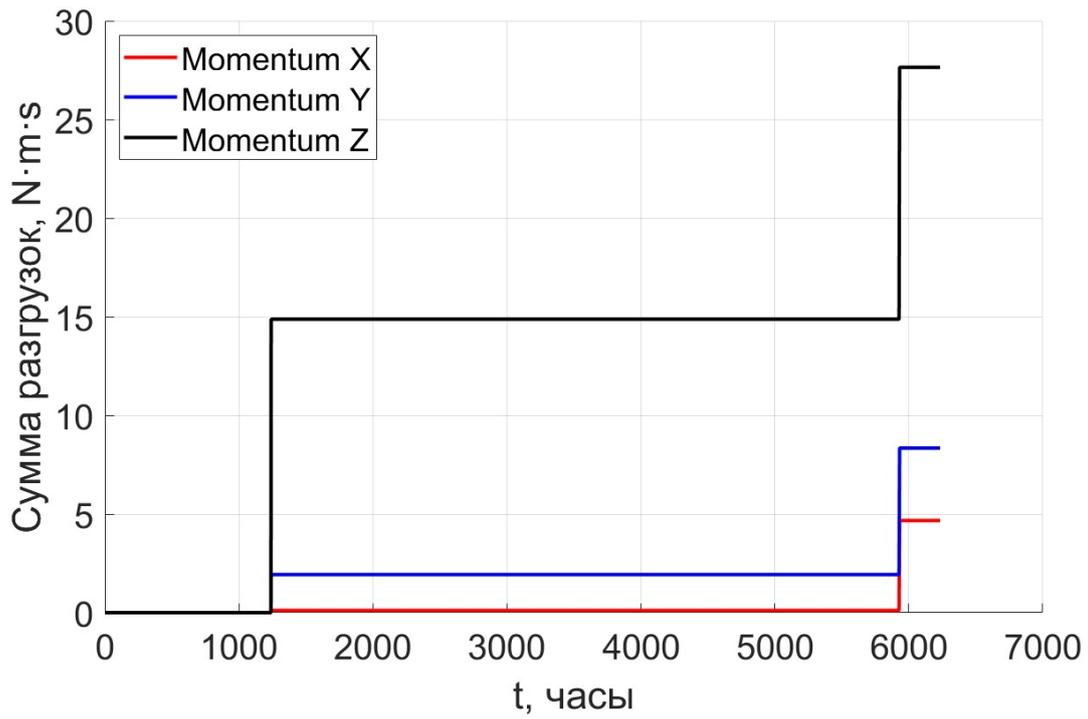


Рис. 9. 2-я стратегия, $\gamma = \Omega t$

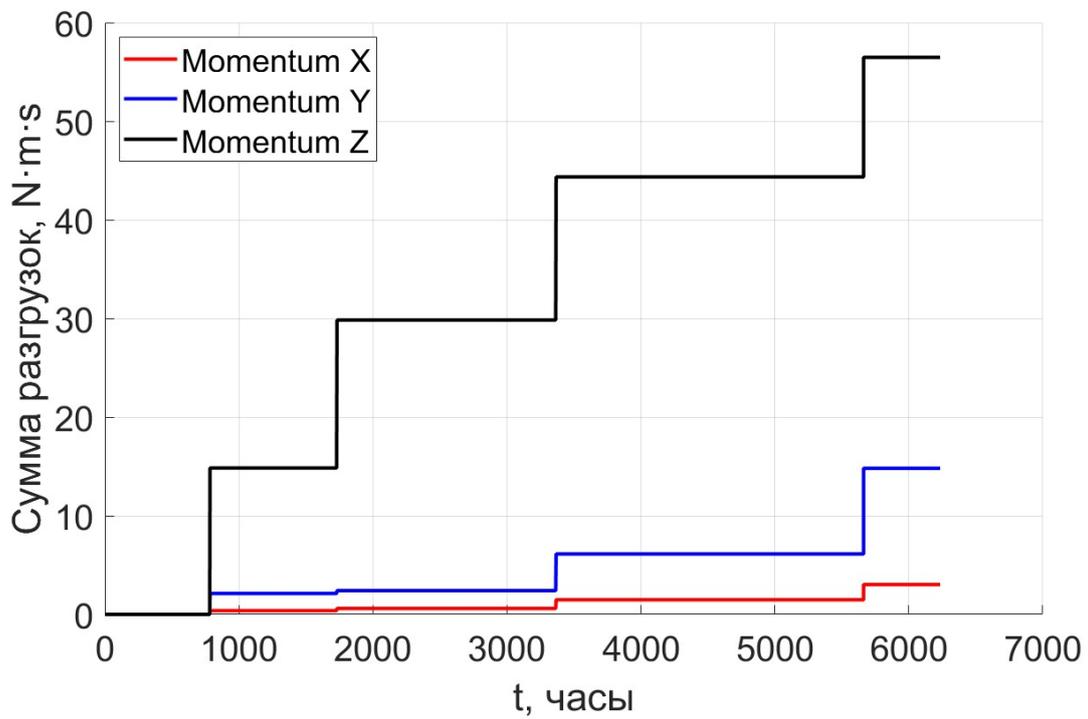


Рис. 10. 3-я стратегия, $\gamma = \pm\pi/2$

Результаты моделирования демонстрируют, что режим постоянного вращения позволяет сделать всего 2 разгрузки за все время полета и скомпенсировать момент величиной около $30 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$, режим периодического вращения — 4 разгрузки и скомпенсировать $60 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$, в то время как при отсутствии вращения двигатели вынуждены скомпенсировать около $60000 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$. Отсюда можно сделать вывод о возможности существенной экономии топлива при использовании представленных алгоритмов.

Несмотря на большее число разгрузок, одним из ключевых преимуществ режима периодического вращения является возможность управлять уровнем насыщения маховиков за счёт изменения скорости вращения или интервала между переключениями ориентации, в то время как режим постоянного вращения, например, обладает сниженной эффективностью сбора солнечной энергии, особенно в те моменты, когда вектор y_2 близко сходится с вектором направления на Солнце r_s (см. рис. 2). Это ограничение делает режим периодического вращения более практичным решением, поскольку он обеспечивает эффективную разгрузку маховиков при сохранении стабильной генерации электроэнергии.

Заключение

Данная работа посвящена решению критической проблемы насыщения маховиков в системах управления ориентацией космических аппаратов, особенно актуальной для межпланетных миссий. Произведено сравнение трех различных методов синтеза углового движения, основанных на периодическом вращении вокруг вектора тяги. Эти подходы позволяют эффективно компенсировать внешние возмущающие моменты, оптимизировать работу маховиков и одновременно поддерживать высокую эффективность генерации энергии.

Важно отметить, что предложенные решения также способствуют экономии топлива, снижая необходимость использования двигателей на рабочем теле для разгрузки, что, в свою очередь, увеличивает срок службы аппарата и повышает общую эффективность миссии. Представленные аналитические модели и результаты численного моделирования подтверждают эффективность методов и вносят существенный вклад в разработку алгоритмов управления ориентацией для перспективных межпланетных КА.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Kawaguchi Jun'ichiro, Kominato T., Shirakawa Ken'ichi. Attitude Control Flight Experience: Coping with Solar Radiation and Ion Engines Leak Thrust in Hayabusa (MUSES-C). 2007. 24–28 p.
2. Bellerose J. et al. Double Asteroid Redirection Test (DART): Navigating to obliteration // *Acta Astronaut.* 2024. Vol. 219.
3. MacKenzie R., Salvador D., Milligan D. Orbit Determination for the SMART-1 mission. 2004. Vol. 548. P. 181.
4. McInnes C.R. Large angle slew maneuvers with autonomous sun vector avoidance // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics.* 1994. Vol. 17, № 4. P. 875–877.
5. Hogan E.A., Schaub H. Three-Axis Attitude Control Using Redundant Reaction Wheels with Continuous Momentum Dumping // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics.* 2015. Vol. 38, № 10. P. 1865–1871.
6. Giulietti F., Quarta A.A., Tortora P. Optimal Control Laws for Momentum-Wheel Desaturation Using Magnetorquers // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics.* 2006. Vol. 29, № 6. P. 1464–1468.
7. Tregouet J.-F. et al. Reaction Wheels Desaturation Using Magnetorquers and Static Input Allocation // *IEEE Transactions on Control Systems Technology.* 2015. Vol. 23, № 2. P. 525–539.
8. Mashtakov Y., Tkachev S., Ovchinnikov M. Use of External Torques for Desaturation of Reaction Wheels // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics.* 2018. Vol. 41, № 8. P. 1663–1674.
9. Mashtakov Y., Tkachev S. Reaction wheels' angular momentum management during interplanetary flight // 74 th International Astronautical Congress (IAC). 2023.

Приложение А.

Определение матрицы \mathbf{S} и вектора \mathbf{N} :

$$\mathbf{S}_{1-3,1-3} = \mathbf{E}_3 \left(m_s + \sum_i m_i^{RW} + \sum_i m_i^{SP} \right),$$

$$\mathbf{S}_{4-6,1-3} = \sum_i \left[\mathbf{a}_i^{RW} + \mathbf{b}_i^{RW} \right]_x m_i^{RW} + \sum_i \left[\mathbf{a}_i^{SP} + \mathbf{b}_i^{SP} \right]_x m_i^{SP},$$

$$\mathbf{S}_{1-3,4-6} = \mathbf{S}_{4-6,1-3}^T,$$

$$\mathbf{S}_{4-6,4-6} = \mathbf{J}_S + \sum_{k=1}^N \left(\mathbf{I}_k^{RW} - \left[\mathbf{a}_k^{RW} + \mathbf{b}_k^{RW} \right]_x \left[\mathbf{a}_k^{RW} + \mathbf{b}_k^{RW} \right]_x m_k^{RW} \right)$$

$$+ \sum_{k=1}^M \left(\mathbf{I}_k^{SP} - \left[\mathbf{a}_k^{SP} + \mathbf{b}_k^{SP} \right]_x \left[\mathbf{a}_k^{SP} + \mathbf{b}_k^{SP} \right]_x m_k^{SP} \right)$$

$$\mathbf{S}_{1-3,6+k} = -\mathbf{b}_k^{SP} \times \mathbf{e}_k^{SP} m_k^{SP}, k = 1, \dots, M$$

$$\mathbf{S}_{1-3,6+M+k} = \mathbf{0}, k = 1, \dots, N$$

$$\mathbf{S}_{4-6,6+k} = \mathbf{I}_k^{SP} \mathbf{e}_k^{SP} - \mathbf{b}_k^{SP} \times \mathbf{e}_k^{SP} m_k^{SP}, k = 1, \dots, M$$

$$\mathbf{S}_{4-6,6+M+k} = \mathbf{I}_k^{RW} \mathbf{e}_k^{RW}, k = 1, \dots, N$$

$$\mathbf{S}_{7-6+M+N,1-3} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{S}_{7-6+M+N,7-6+M+N} = \mathbf{E}_{M+N}$$

$$\mathbf{N}_{1-3} = \mathbf{F}_S + \sum_{k=1}^M \mathbf{F}_k^{SP} + \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k^{RW}$$

$$- \sum_{k=1}^M m_k^{SP} \left(\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}_k^{SP}) + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Omega}_k^{SP}) \times \mathbf{b}_k^{SP} + (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}_k^{SP}) \times \left[(\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}_k^{SP}) \times \mathbf{b}_k^{SP} \right] \right)$$

$$- \sum_{k=1}^N m_k^{RW} \left(\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}_k^{RW}) + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Omega}_k^{RW}) \times \mathbf{b}_k^{RW} + (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}_k^{RW}) \times \left[(\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}_k^{RW}) \times \mathbf{b}_k^{RW} \right] \right)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_{4-6} &= -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}_S \boldsymbol{\omega} + \mathbf{M}_S + \sum_{k=1}^M \mathbf{M}_k^{SP} + \sum_{k=1}^N \mathbf{M}_k^{RW} \\
&- \sum_{k=1}^M \left[(\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}_k^{SP}) \times \mathbf{I}_k^{SP} (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}_k^{SP}) + \mathbf{I}_k^{SP} (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Omega}_k^{SP}) \right] \\
&- \sum_{k=1}^N \left[(\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}_k^{RW}) \times \mathbf{I}_k^{RW} (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}_k^{RW}) + \mathbf{I}_k^{RW} (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Omega}_k^{RW}) \right] \\
&- \sum_{k=1}^M (\mathbf{a}_k^{SP} + \mathbf{b}_k^{SP}) \times \left[\mathbf{F}_k^{SP} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}_k^{SP}) \right] m_k^{SP} \\
&+ m_k^{SP} (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}_k^{SP}) \times \left[(\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}_k^{SP}) \times \mathbf{b}_k^{SP} \right] + m_k^{SP} (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Omega}_k^{SP}) \times \mathbf{b}_k^{SP} \\
&- \sum_{k=1}^N (\mathbf{a}_k^{RW} + \mathbf{b}_k^{RW}) \times \left[\mathbf{F}_k^{RW} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}_k^{RW}) \right] m_k^{RW} \\
&+ m_k^{RW} (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}_k^{RW}) \times \left[(\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}_k^{RW}) \times \mathbf{b}_k^{RW} \right] + m_k^{RW} (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Omega}_k^{RW}) \times \mathbf{b}_k^{RW} \\
\mathbf{N}_{7,6+M} &= (\mathbf{u}_1^{SP}, \dots, \mathbf{u}_M^{SP}), \mathbf{N}_{7+M,6+M+N} = (\mathbf{u}_1^{RW}, \dots, \mathbf{u}_N^{RW})
\end{aligned}$$