

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(национальный исследовательский университет)

ФИЗТЕХ-ШКОЛА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
Кафедра математического моделирования и прикладной математики

Квалификационная работа на соискание степени бакалавра  
по направлению 03.03.01 «Прикладные математика и физика», профиль  
подготовки «Математическое моделирование, вычислительная математика и  
физика»

## **Разработка математической модели маховиков со статическим и динамическим дисбалансами**

Выполнил:

студент группы 771

*Каун Татьяна Васильевна*

---

Научный руководитель:

к.ф.-м.н., доцент

*Ткачёв Степан Сергеевич*

---

Москва, 2021

## **Аннотация**

Работа посвящена исследованию динамики космического аппарата с маховичной системой управления ориентацией. В такого рода системах существует проблема возмущений, вызванных неидеальностью маховиков, которая усложняет динамику системы. Эти возмущения возникают в результате различных причин, в данной работе рассмотрено влияние статического и динамического дисбалансов на точности стабилизации и ориентации, которыми обладают маховики. Выполнено моделирование для различных значений дисбалансов.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Введение.....</b>	<b>4</b>
<b>1. Постановка задачи.....</b>	<b>6</b>
1.1. Системы координат.....	6
1.2. Постановка задачи .....	6
<b>2. Модель движения спутника с маховиками.....</b>	<b>10</b>
2.1. Вывод уравнений движения .....	10
2.2. Влияние дисбалансов.....	14
<b>3. Моделирование движения .....</b>	<b>16</b>
3.1. Определение шага интегрирования .....	17
3.2. Влияние угловой скорости маховиков при постоянном динамическом дисбалансе.....	23
3.3. Влияние расположения маховиков при постоянном статическом дисбалансе.....	25
3.4. Влияние значений дисбалансов.....	26
<b>Заключение .....</b>	<b>32</b>
<b>Список использованных источников.....</b>	<b>33</b>

## Введение

Множество современных космических миссий требуют высокой точности ориентации и стабилизации аппаратов. Как правило, столь строгие требования могут быть удовлетворены лишь при использовании гироскопических систем. Они обеспечивают достаточно высокую точность и быстродействие, при этом не расходуют рабочее тело и не опираются на внешние поля. Наиболее распространёнными и простыми с технической точки зрения гироскопическими системами являются маховики. В настоящее время их используют в том числе и на малых космических аппаратах.

Маховик представляет собой осесимметричное тело, прикрепленное на ось вращения, которая установлена неподвижно в аппарате. При всех своих достоинствах, маховики обладают заметным недостатком – возникающими при их работе вибрациями, которые влияют как на аппаратуру, установленную на борту спутника, так и на точность ориентации и стабилизации. Второй проблеме и посвящена работа.

В целом возмущения обычно подразделяют на фундаментальные (основные) гармонические и субгармонические, первые вызваны динамическим и статическим дисбалансами маховика, вторые – неровностями подшипников и сбоями двигателя; вдобавок, неидеальная жесткость конструкции тоже вносит свой вклад. Оба типа возмущения приводят к появлению нежелательных сил и моментов сил [3], действующих на спутник. В дальнейшем нас будет интересовать первый тип, поскольку именно он считается основным источником микровибраций. Для исследования их влияния на динамику системы необходимо построить математическую модель, которая включала бы указанные возмущения.

Можно выделить три метода, используемых для получения динамической модели маховика, описывающей поведение системы: опытный, аналитический и смешанный. Опытные модели строятся следующим образом: маховик запускается при различных скоростях, и при обработке собранных данных определяются амплитуды и частоты возмущающих сил, имеющих

синусоидальную структуру. Основным недостатком этого метода является то, что для его проведения необходим уже изготовленный маховик, и в случае если микровибрации выходят за пределы желаемой величины, исправить этот недостаток непросто. [5]

Аналитический метод построения модели заключается в составлении математических уравнений, наиболее точно описывающих систему. В таком случае, в отличие от предыдущего варианта, можно на этапе производства учесть нужные замечания и добиться подходящего уровня микровибраций. В данном случае сложность возникает в том, что необходима значительно нелинейная модель. Её вывод достаточно сложен, а программная реализация приводит к возрастанию времени, требуемого на численное моделирование [6].

С учётом преимуществ и недостатков этих методик, значительная часть учёных склоняется к работе со смешанными моделями. Их получают разделением моделей на две части: для одной можно достаточно легко записать аналитическое представление, для другой, которую так просто не описать математически, проводятся экспериментальные исследования. [3-4], [6-8]. Если говорить о возмущениях, то интересующие нас дисбалансы можно задать аналитически с небольшими упрощениями; вклад, который даёт неровность подшипников, также можно описать с помощью формул. Возмущения от других источников, например, мотора и нежёсткости конструкций, добавляют в модель после проведения опытов.

Цель настоящей работы заключается в разработке аналитического метода, описывающего динамическую модель космического аппарата с маховичной системой управления ориентации, и исследовании с помощью полученной модели зависимость точности стабилизации и ориентации от параметров дисбалансов.

# 1. Постановка задачи

## 1.1. Системы координат

В работе используются следующие системы координат:

- ИСК – инерциальная система координат. Начало координат в центре Земли, одна ось направлена в точку весеннего равноденствия некоторой эпохи (например, J2000), вторая перпендикулярно ей в плоскости экватора, третья направлена вдоль оси вращения Земли.
- ССК – связанная со спутником система координат. Начало координат находится в центре масс спутника, оси системы совпадают с главными центральными осями аппарата.
- ССКм – связанная с маховиком система координат. Начало координат находится в центре масс маховика, оси системы совпадают с главными центральными осями.

## 1.2. Постановка задачи

В работе рассматривается задача исследования углового движения космического аппарата, оснащенного тремя маховиками.

Полагаем известными параметры спутника и маховиков, начальный вектор состояния спутника в ИСК и векторы состояния маховиков в ССК.

Наша задача – получить систему, описывающую движение аппарата с учётом возмущений, возникающих из-за наличия у маховиков статического и динамического дисбаланса. Для исследования влияния дисбалансов на ориентацию и угловую скорость спутника проводится численное моделирование с параметрами различных маховиков, представленных на рынке.

В одном из подходов [2-3], [6] дисбаланс определяется как смещение распределения массы в конструкции. Статический дисбаланс представим, как неоднородность распределения материала в плоскости вращения; динамический – как неоднородность в толщине диска. Обычно вводят

дополнительные массы  $m_s$  и  $m_d$ , закрепленные на диске, как указано на рисунке 1.

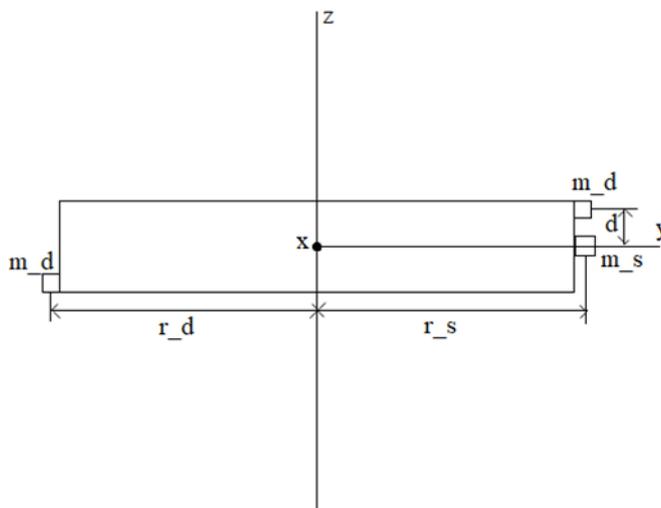


Рис. 1 – схема несбалансированного маховика.

В результате статический дисбаланс дает нам возмущающую силу  $\mathbf{F}_s$ , а динамический – возмущающий момент  $\mathbf{M}_d$ .

В ССК  $O_sxyz$  у диска есть три поступательные степени свободы (по  $O_sx$ ,  $O_sy$ ,  $O_sz$ ) и две вращательные (вокруг  $O_sx$ ,  $O_sy$ ). Если аккуратно расписать уравнения движения по координатам, получится, что дисбалансы дают вклад только в первые две компоненты силы и момента соответственно [6].

$$\mathbf{F}_s = \begin{pmatrix} U_s \Omega^2 \cos(\Omega t + \varphi_s) \\ U_s \Omega^2 \cos(\Omega t + \varphi_s) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U_s = m_s r_s. \quad (1)$$

$$\mathbf{M}_d = \begin{pmatrix} U_d \Omega^2 \cos(\Omega t + \varphi_d) \\ U_d \Omega^2 \cos(\Omega t + \varphi_d) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U_d = 2m_d r_d d. \quad (2)$$

Здесь  $U_s, U_d$  – выражения для статического и динамического дисбалансов,  $\varphi_s, \varphi_d$  – начальные фазовые углы,  $\Omega$  – угловая скорость диска.

Поскольку система должна находиться в состоянии равновесия, можно записать следующие уравнения движения для маховика:

$$\begin{pmatrix} m\ddot{x} \\ m\ddot{y} \\ m\ddot{z} \end{pmatrix} = \mathbf{F}_s + \mathbf{F}_b + \mathbf{F}_{gr}, \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} I_{rr}\ddot{\theta}^x + I_{zz}\Omega\dot{\theta}^y \\ I_{rr}\ddot{\theta}^y - I_{zz}\Omega\dot{\theta}^x \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{M}_d + \mathbf{M}_b, \quad (4)$$

где  $m, I_{rr}, I_{zz}$  - масса, радиальный и полярный моменты инерции маховика,  $\mathbf{F}_b, \mathbf{M}_b$  - возмущающие сила и момент сил из-за неровностей подшипника,  $\mathbf{F}_{gr}$  - гравитационная сила, присутствующая в случае нахождения системы в поле тяжести Земли или иного крупного объекта, оказывающего своё влияние. Для получения возмущающих сил и моментов, моделируют конструкцию с идеальными подшипниками, к которой подсоединена система из пружин и амортизаторов, которые за счёт жёсткости и трения создают возмущения.

Некоторые авторы для дальнейших исследований описывают поправку к моменту инерции, который дают дисбалансы  $\tilde{I} = 2m_d r_d^2 + m_s r_s^2$  [3][4], хотя она достаточно незначительна, и ей чаще всего пренебрегают.

Описанный подход имеет следующие недостатки: во-первых, в нём рассматривает лишь линейное приближение; во-вторых, при его применении не учитывается взаимное влияние динамики маховиков и спутника.

Другой подход к описанию модели состоит в записи кинетической энергии с учетом этих дополнительных масс [1][7]. В таком случае становится возможно записать лагранжиан системы, и уже с его помощью вывести окончательные уравнения движения. Недостатком этого метода является громоздкость и запутанность выкладок.

В задаче мы полагаем известными  $U_s, U_d$  из (1), (2). Наш подход заключается в выводе полных уравнений движения спутника с учетом динамического и статического дисбаланса в маховиках.

## 2. Модель движения спутника с маховиками

### 2.1. Вывод уравнений движения

Для моделирования движения космического аппарата с маховиками, обладающими дисбалансами, сперва необходимо получить аналитическую модель движения спутника с маховичной системой управления ориентации в общем виде. На данном этапе полагается, что маховиков произвольное количество.

Рассмотрим общую схему нашей системы, представленную на рисунке 2.

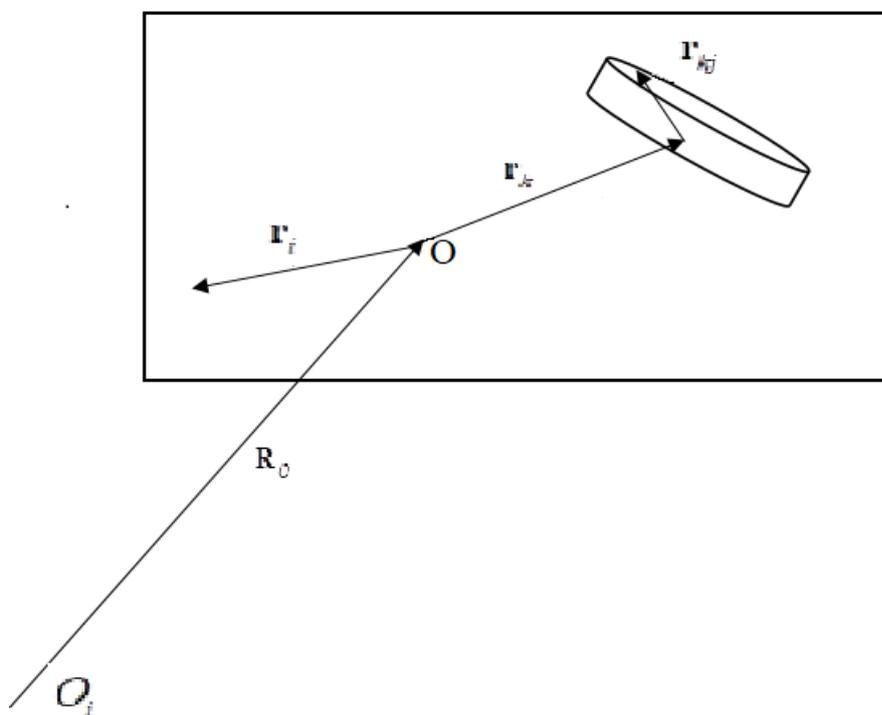


Рис. 2 – схема спутник-маховик.

Положение точки спутника можно выразить как

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_o + \mathbf{r}_i,$$

а положение точки k-го маховика – как

$$\mathbf{R}_{kj} = \mathbf{R}_o + \mathbf{r}_k + \mathbf{r}_{kj},$$

где  $\mathbf{R}_o$  – радиус-вектор некоторой фиксированной точки спутника в ИСК;

$\mathbf{r}_i$  – радиус-вектор некоторой точки спутника относительно точки O в ССК.

$\mathbf{r}_k$  – радиус-вектор точки пересечения оси маховика и плоскости вращающейся массы относительно точки О в ССК,

$\mathbf{r}_{kj}$  – радиус-вектор точек маховика относительно выбранной точки маховика в ССКм.

Для вывода уравнений используем основной принцип механики для системы с идеальными связями:

$$\sum_i (m_i \ddot{\mathbf{R}}_i - \mathbf{F}_i) \delta \mathbf{R}_i + \sum_k \sum_j (m_{kj} \ddot{\mathbf{R}}_{kj} - \mathbf{F}_{kj}) \delta \mathbf{R}_{kj} = \sum_k M_k \delta \varphi_k, \quad (5)$$

где первое суммирование проводится по всем точкам спутника, второе – по всем точкам маховика,  $m_i$  и  $m_{kj}$  – массы элемента спутника и маховика, соответственно,  $\delta \mathbf{R}_i$  и  $\delta \mathbf{R}_{kj}$  – возможные перемещения точек спутника и маховика, соответственно,  $M_k$  – момент в оси k-го спутника,  $\varphi_k$  – элементарный относительный поворот маховика.

Для возможных перемещений можно записать

$$\delta \mathbf{R}_i = \delta \mathbf{R}_O + \delta \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_i, \quad (6)$$

$$\delta \mathbf{R}_{kj} = \delta \mathbf{R}_O + \delta \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_k + (\boldsymbol{\theta} + \delta \varphi_k \mathbf{e}_k) \times \mathbf{r}_{kj}, \quad (7)$$

где  $\delta \boldsymbol{\theta}$  – элементарный абсолютный поворот КА,  $\mathbf{e}_k$  – орт оси вращения маховика.

Рассчитаем ускорения точек спутника и маховика:

$$\ddot{\mathbf{R}}_i = \ddot{\mathbf{R}}_O + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_i + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{R}}_{kj} = \ddot{\mathbf{R}}_O + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_k + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_k + (\dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\boldsymbol{\Omega}}_k + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Omega}_k) \times \mathbf{r}_{kj} + \\ + (\dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\boldsymbol{\Omega}}_k) \times (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}_k) \times \mathbf{r}_{kj}, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\boldsymbol{\omega}$  – абсолютная угловая скорость КА,  $\boldsymbol{\Omega}$  – собственная относительная угловая скорость маховика.

Подставив (6-9) в (5), и учитывая независимость возможных перемещений, можем записать уравнения для каждой переменной.

Для  $\delta \mathbf{R}_O$

$$\sum_i (m_i \ddot{\mathbf{R}}_i - \mathbf{F}_i) + \sum_k \sum_j (m_{kj} \ddot{\mathbf{R}}_{kj} - \mathbf{F}_{kj}) = 0.$$

С учётом того, что  $\sum_i m_i = m_s + \sum_k m_k$ ,  $\sum_j m_{kj} = m_k$  где  $m_s$  и  $m_k$  – массы спутника без маховиков и  $k$ -го маховика соответственно,  $\sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_s$ ,  $\sum_j \mathbf{F}_{kj} = \mathbf{F}_k$ , где  $\mathbf{F}_s$  – главный вектор сил, действующих на спутник,  $\mathbf{F}_k$  – главный вектор сил, действующих на  $k$ -й маховик.

$$\begin{aligned} & \left( m_s + \sum_k m_k \right) \ddot{\mathbf{R}}_O + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \left( m_s \mathbf{r}_s + \sum_k m_k (\mathbf{r}_k + \mathbf{r}_{kc}) \right) + \sum_k m_k (\dot{\boldsymbol{\Omega}}_k + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Omega}_k) \times \mathbf{r}_{kc} + \\ & + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \left( m_s \mathbf{r}_s + \sum_k m_k \mathbf{r}_k \right) + \sum_k m_k (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}_k) \times (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}_k) \times \mathbf{r}_{kc} = \mathbf{F}_s + \sum_k \mathbf{F}_k. \end{aligned}$$

Здесь  $\mathbf{r}_s$  – радиус-вектор центра масс спутника относительно точки  $O$ ,  $\mathbf{r}_{kc}$  – радиус-вектор центра масс маховика относительно выбранной точки маховика.

Для удобства разумно выбрать точку  $O$  в центре масс, чтобы выполнялось

$$m_s \mathbf{r}_s + \sum_k m_k \mathbf{r}_k = 0 \quad (10)$$

В таком случае получим выражение

$$\begin{aligned} m \ddot{\mathbf{R}}_O + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \sum_k m_k \mathbf{r}_{kc} + \sum_k m_k (\dot{\boldsymbol{\Omega}}_k + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Omega}_k) \times \mathbf{r}_{kc} + \\ + \sum_k m_k (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}_k) \times (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}_k) \times \mathbf{r}_{kc} = \mathbf{F}_s + \sum_k \mathbf{F}_k. \end{aligned}$$

Здесь обозначили  $m_s + \sum_k m_k = m$  – масса спутника вместе с маховиками.

Если полностью расписать уравнение для углового движения, то получим следующее.

$$\begin{aligned}
& \left( m_s + \sum_k (\mathbf{r}_k + \mathbf{r}_{kc}) \right) \times \ddot{\mathbf{R}}_C + \\
& + \left( \mathbf{J}_s + \sum_k (m_k \mathbf{K}_k (\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_{kc}) + m_k \mathbf{K}_k (\mathbf{r}_{kc}, \mathbf{r}_k) + m_k \mathbf{K}_k (\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_k) + \mathbf{I}_k) \right) \dot{\boldsymbol{\omega}} + \\
& + \sum_k (m_k \mathbf{K}_k (\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_{kc}) + \mathbf{I}_k) \dot{\boldsymbol{\Omega}}_k + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}_s \boldsymbol{\omega} + \\
& + \sum_k (m_k (\mathbf{r}_k + \mathbf{r}_{kc}) \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_k + (m_k \mathbf{K}_k (\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_{kc}) + \mathbf{I}_k) \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Omega}_k + \\
& + m_k \mathbf{r}_k \times (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}_k) \times (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}_k) \times \mathbf{r}_{kc} + (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}_k) \times \mathbf{I}_k (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}_k)) = \mathbf{M}_s + \sum_k \mathbf{M}_{kc}.
\end{aligned}$$

Здесь  $\mathbf{J}_s$  – тензор инерции спутника без маховиков (в ССК),  $\mathbf{I}_k$  – тензор инерции маховика в ССКМ,  $\mathbf{M}_s$  – главный момент всех действующих на спутник относительно точки О сил,  $\mathbf{M}_{kc} = \sum_j (\mathbf{r}_k + \mathbf{r}_{kc}) \times \mathbf{F}_{kj}$  – главный момент всех сил, действующих на k-й маховик относительно точки О, введено обозначение  $\mathbf{K}_k (\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) \boldsymbol{\omega} = \mathbf{r}_i \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_j$ .

Если учесть условие (10) и обозначить

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_s + \sum_k (m_k \mathbf{K}_k (\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_{kc}) + m_k \mathbf{K}_k (\mathbf{r}_{kc}, \mathbf{r}_k) + m_k \mathbf{K}_k (\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_k) + \mathbf{I}_k),$$

то получим

$$\begin{aligned}
& \sum_k m_k \mathbf{r}_{kc} \times \ddot{\mathbf{R}}_C + \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \sum_k (m_k \mathbf{K}_k (\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_{kc}) + \mathbf{I}_k) \dot{\boldsymbol{\Omega}}_k + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} + \\
& + \sum_k ((m_k \mathbf{K}_k (\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_{kc}) + \mathbf{I}_k) \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Omega}_k + m_k \mathbf{r}_k \times \boldsymbol{\Omega}_k \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{kc} + m_k \mathbf{r}_k \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Omega}_k \times \mathbf{r}_{kc} + \\
& + m_k \mathbf{r}_k \times \boldsymbol{\Omega}_k \times \boldsymbol{\Omega}_k \times \mathbf{r}_{kc} + \boldsymbol{\Omega}_k \times \mathbf{I}_k \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}_k \boldsymbol{\Omega}_k + \boldsymbol{\Omega}_k \times \mathbf{I}_k \boldsymbol{\Omega}_k) = \mathbf{M}_s + \sum_k \mathbf{M}_{kc}.
\end{aligned}$$

Наконец, распишем уравнение для углового движения маховика

$$\begin{aligned}
& \mathbf{e}_k^T (m_k \mathbf{r}_{kc} \times (\ddot{\mathbf{R}}_C + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_k + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_k) + \mathbf{I}_k (\dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\boldsymbol{\Omega}}_k + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Omega}_k) + \\
& + (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}_k) \times \mathbf{I}_k (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}_k)) = M_k + \mathbf{e}_k^T \mathbf{M}_k
\end{aligned}$$

Здесь  $\mathbf{M}_k$  – главный момент всех сил, действующих на k-й маховик относительно выбранной точки маховика.

Поскольку в ССК ось вращения маховика фиксирована, то можно записать  $\boldsymbol{\Omega}_k = \Omega_k \mathbf{e}_k$ .

Для удобства записи перепишем уравнения в векторно-матричной форме

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} m\mathbf{E}_{3 \times 3} & -\left[\sum_k m_k \mathbf{r}_{kc}\right]_{\times} & -m_k \mathbf{r}_{kc} \times \mathbf{e}_k \\ \left[\sum_k m_k \mathbf{r}_{kc}\right]_{\times} & \mathbf{J} & (m_k \mathbf{K}_k(\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_{kc}) + \mathbf{I}_k) \mathbf{e}_k \\ -(m_k \mathbf{r}_{kc} \times \mathbf{e}_k)^T & \mathbf{e}_k^T (m_k \mathbf{K}_k(\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_{kc}) + \mathbf{I}_k)^T & \mathbf{e}_k^T \mathbf{I}_k \mathbf{e}_k \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_s + \sum_k \mathbf{F}_k - \sum_k m_k (\dot{\boldsymbol{\Omega}}_k + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Omega}_k) \times \mathbf{r}_{kc} - \sum_k m_k (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}_k) \times (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}_k) \times \mathbf{r}_{kc} \\ \mathbf{N}_{\omega} \\ M_k + \mathbf{e}_k^T \mathbf{M}_k - \mathbf{e}_k^T (m_k \mathbf{r}_{kc} \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_k + \mathbf{I}_k (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Omega}_k) + (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}_k) \times \mathbf{I}_k (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}_k)) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{N}_{\omega} = \mathbf{M}_s + \sum_k \mathbf{M}_{kc} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} - \sum_k \left( (m_k \mathbf{K}_k(\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_{kc}) + \mathbf{I}_k) \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Omega}_k + m_k \mathbf{r}_k \times \boldsymbol{\Omega}_k \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{kc} + m_k \mathbf{r}_k \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Omega}_k \times \mathbf{r}_{kc} + m_k \mathbf{r}_k \times \boldsymbol{\Omega}_k \times \boldsymbol{\Omega}_k \times \mathbf{r}_{kc} + \boldsymbol{\Omega}_k \times \mathbf{I}_k \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}_k \boldsymbol{\Omega}_k + \boldsymbol{\Omega}_k \times \mathbf{I}_k \boldsymbol{\Omega}_k \right)$$

В конечном итоге получаем уравнения движения следующего вида:

$$\mathbf{S} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{R}}_c \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} \\ \dot{\boldsymbol{\Omega}}_k \end{pmatrix} = \mathbf{N}. \quad (11)$$

Полученная система используется для моделирования движения с учетом возмущений со стороны системы маховиков.

## 2.2. Влияние дисбалансов

Как уже говорилось выше, статический дисбаланс объясняется смещением центра масс по горизонтали от оси вращения, динамический – по вертикали, что приводит к наклону оси вращения относительно оси симметрии. Поэтому зная значения дисбаланса, мы можем учесть их и найти положение центра масс и тензор инерции.

Смещение центра масс k-го маховика  $r_{ck} = \frac{U_s}{m_k}$ .

Тензор инерции диска маховика

$$I = \begin{pmatrix} I_{rr} & 0 & 0 \\ I_{rr} \cdot \cos \alpha^2 + I_{zz} \cdot \sin \alpha^2 & (I_{rr} - I_{zz}) \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha & \\ 0 & (I_{rr} - I_{zz}) \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha & I_{rr} \cdot \sin \alpha^2 + I_{zz} \cdot \cos \alpha^2 \end{pmatrix}.$$

Для динамического дисбаланса важно учесть, что если его значение слишком большое, то выражение для тензора инерции лишено смысла. Поэтому требуется проверка, вытекающая из выражения  $(I_{zz} - I_{rr}) \sin \alpha \cos \alpha = U_d$ , где осевой и экваториальный моменты инерции мы рассчитали для диска, вращающегося вокруг оси перпендикулярной ему, а  $\alpha$  – существующий угол между осями симметрии и вращения. Тогда логично следует ограничение  $\sin 2\alpha = \frac{2U_d}{I_{zz} - I_{rr}} \leq 1$ . Если оно выполняется, то отсюда находится угол  $\alpha$ , который затем появится в записи тензора инерции диска с учетом наклона.

Далее эти выражения пересчитываются с учетом вращения маховика и полученные таким образом значения используются при записи выведенных ранее (11) уравнений движения.

### 3. Моделирование движения

Для численного решения полученного в предыдущей главе уравнения движения была написана программа в среде MATLAB. С её помощью проводится исследование зависимости точности стабилизации и ориентации от угловой скорости и расположения, а также от величины параметров, определяющих статический и динамический дисбалансы.

При моделировании на вход подаются следующие данные: промежуток времени от 0 до 200 сек., начальный вектор состояния из величин, представленных в Табл.1, а также массы спутника и маховиков, тензор инерции для спутника без маховиков относительно общего центра масс и тензоры инерции маховиков будь они идеальными, и вдобавок положения маховиков и направления их осей.

Табл.1 – Начальный вектор состояния

Элемент вектора состояния	Значение
$\mathbf{r}_0$	$[7 \cdot 10^6; 0; 0]$
$\mathbf{v}_0$	$[0; \sqrt{\frac{\mu}{r_0(1)}}; 0]$
$\boldsymbol{\omega}_0$	$[0; 0; 0]$
$\Omega_0$	14,371 (кроме п.3.1)
$\mathbf{q}_0$	$[0.5; 0.5; 0.5; 0.5]$

Параметры маховиков, для которых проводится моделирование представлены в Табл.2.

Табл.2 – значения статического и динамического дисбалансов.

№ вида маховика	$U_s, \text{г} \cdot \text{см.}$	$U_d, \text{г} \cdot \text{см}^2$
1	0,067	0,018
2	0,217	0,130
3	0,716	29,54

### 3.1. Определение шага интегрирования

Для численного интегрирования системы (11) используется метод Рунге-Кутты 4 порядка с постоянным шагом. Подберём подходящее значение шага интегрирования.

Поскольку принцип работы маховиков основан на законе сохранения суммарного кинетического момента системы «спутник-система маховиков», то это является основным из первых интегралов, который должен сохраняться при моделировании. Дополнительно рассматриваются импульс и энергия. Для выбора шага интегрирования осуществлялся запуск программы с разными величинами шага и изучалось, при каком значении относительная погрешность первых интегралов окажется достаточно мала. Здесь мы работаем с угловыми скоростями маховиков, составляющими 10% и 50% от максимально возможного значения для данных видов маховиков.

Для маховиков первого типа при  $\Omega_0 = 14,371 \text{ рад/с}$ . (10% от максимума) достаточно малым шагом, при котором сохраняются нужные нам значения, является значение  $10^{-3} \text{ с}$ . В таком случае относительные погрешности первых интегралов имеют порядок  $\sim 10^{-11}$  для импульса,  $\sim 10^{-13}$  для кинетического момента и  $\sim 10^{-14}$  для энергии (Рис.3.1-3.3). При увеличении шага в два раза наблюдается увеличение погрешности на порядок; при уменьшении шага в два раза погрешности значительно не меняются. При  $\Omega_0 = 71,855 \text{ рад/с}$  (50% от максимума) достаточным оказывается значение шага  $10^{-4} \text{ с}$ . В таком случае относительные погрешности первых интегралов имеют порядок  $\sim 10^{-10}$  для импульса,  $\sim 10^{-13}$  для кинетического момента и  $\sim 10^{-14}$  для энергии (Рис.4.1-4.3). При увеличении шага в два раза наблюдается увеличение погрешности на порядок.

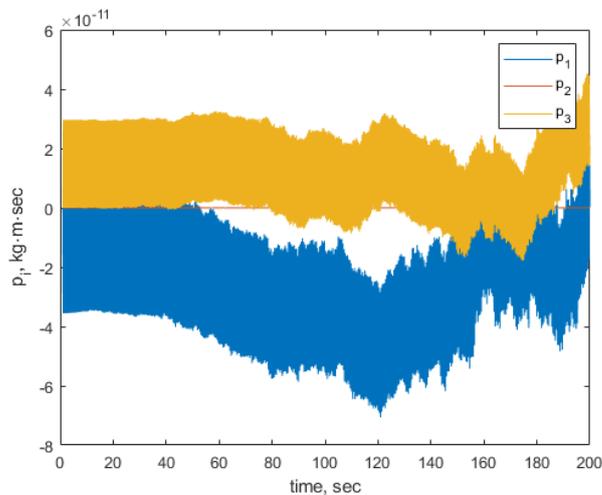


Рис.3.1 – Зависимость импульса спутника от времени при  $\Omega_0 = 14,371 \text{ рад/с}$ .

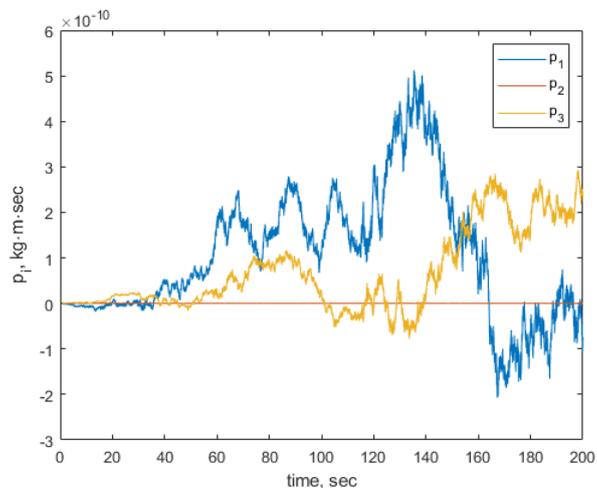


Рис.4.1 – Зависимость импульса спутника от времени при  $\Omega_0 = 71,855 \text{ рад/с}$ .

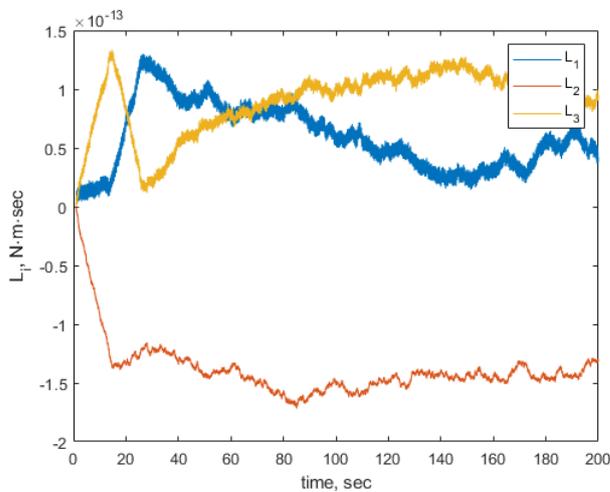


Рис.3.2 – Зависимость кинетического момента спутника от времени при  $\Omega_0 = 14,371 \text{ рад/с}$ .

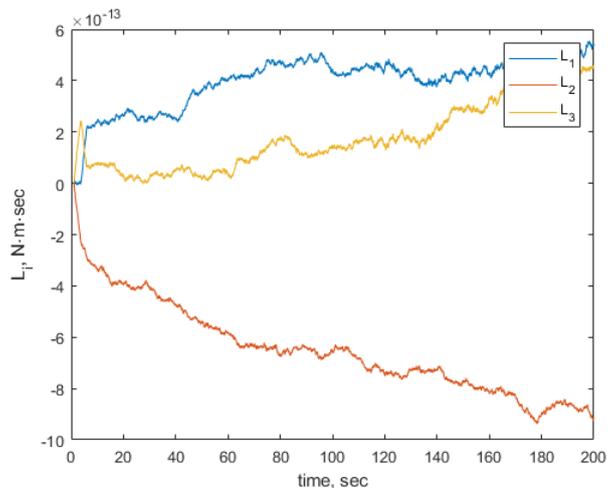


Рис.4.2 – Зависимость кинетического момента спутника от времени при  $\Omega_0 = 71,855 \text{ рад/с}$ .

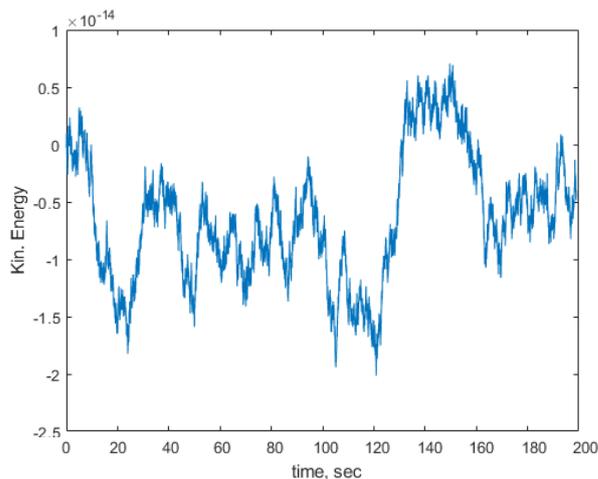


Рис.3.3 – Зависимость энергии спутника от времени при  $\Omega_0 = 14,371 \text{ рад/с}$ .

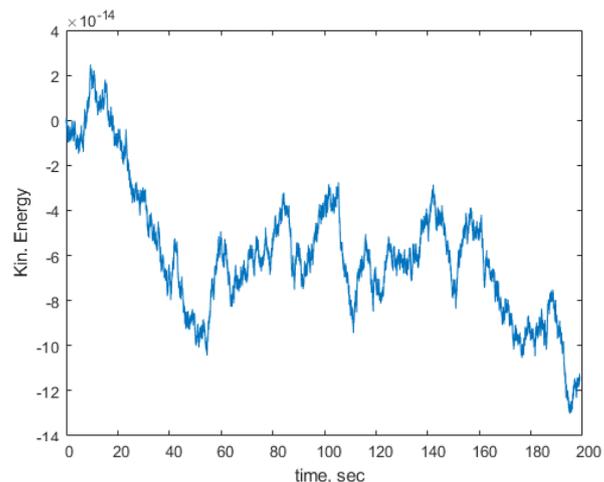


Рис.4. 3 – Зависимость энергии спутника от времени при  $\Omega_0 = 71,855 \text{ рад/с}$ .

Для маховиков второго типа при  $\Omega_0 = 29,94 \text{ рад/с}$  (10% от максимума) достаточно малым шагом является значение  $10^{-3} \text{ с}$ . В таком случае относительные погрешности первых интегралов имеют порядок  $\sim 10^{-11}$  для импульса и  $\sim 10^{-14}$  для кинетического момента и энергии (Рис.5.1-5.3). При увеличении шага в два раза наблюдается увеличение погрешности на порядок; при уменьшении шага в два раза погрешности значительно не меняются. При  $\Omega_0 = 149,7 \text{ рад/с}$  (50% от максимума) достаточным шагом является значение  $5 \cdot 10^{-4} \text{ с}$ . В таком случае относительные погрешности первых интегралов имеют порядок  $\sim 10^{-10}$  для импульса,  $\sim 10^{-13}$  для кинетического момента и  $\sim 10^{-14}$  для энергии (Рис.6.1-6.3). При увеличении шага в два раза наблюдается увеличение погрешности на порядок.

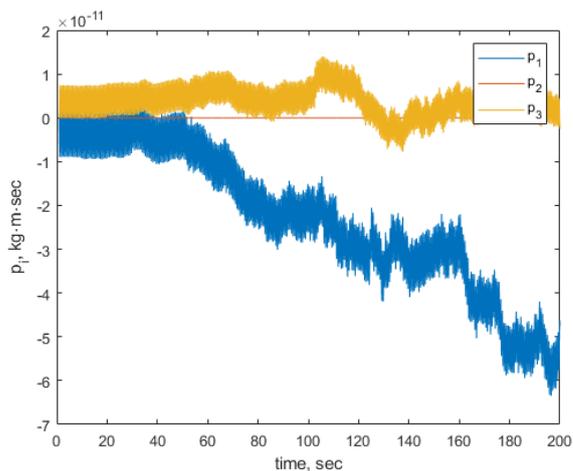


Рис.5.1 – Зависимость импульса спутника от времени при  $\Omega_0 = 29,94 \text{ рад/с}$ .

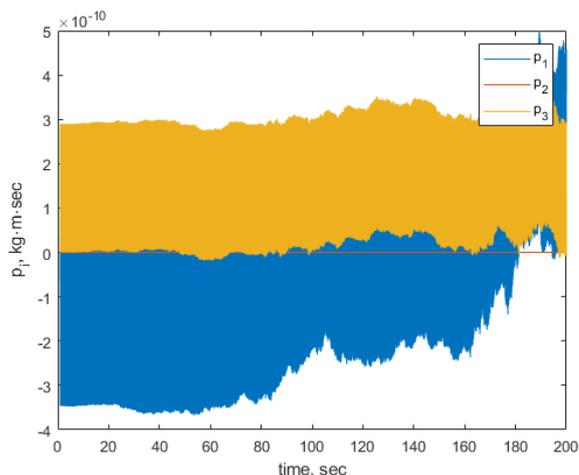


Рис.6.1 – Зависимость импульса спутника от времени при  $\Omega_0 = 149,7 \text{ рад/с}$ .

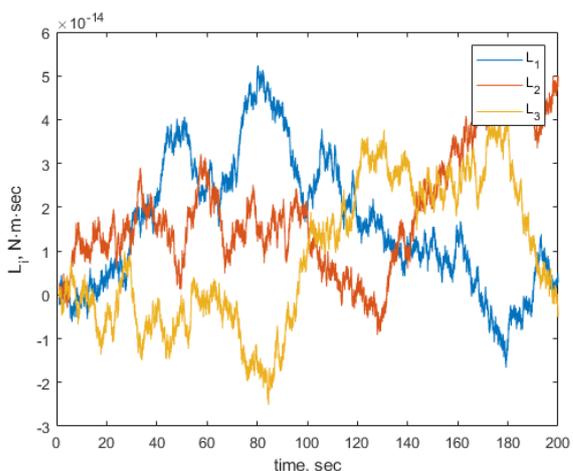


Рис.5.2 – Зависимость кинетического момента спутника от времени при  $\Omega_0 = 29,94 \text{ рад/с}$ .

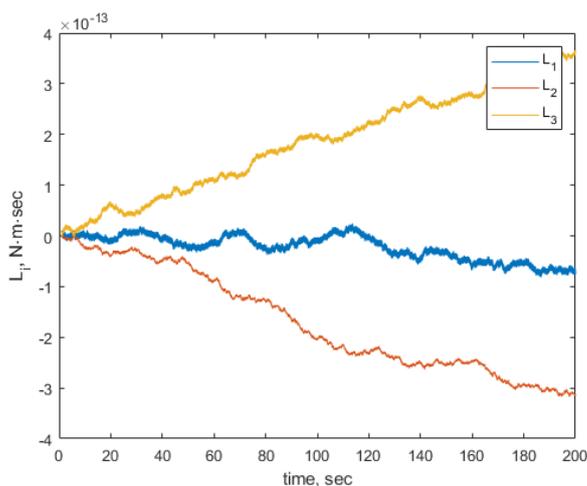


Рис.6.2 – Зависимость кинетического момента спутника от времени при  $\Omega_0 = 149,7 \text{ рад/с}$ .

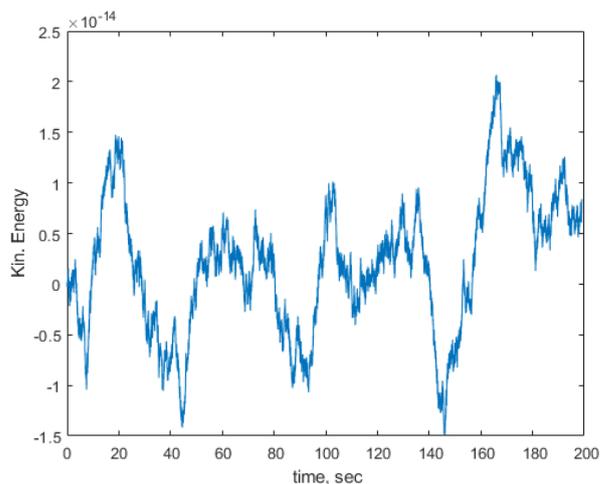


Рис.5.3 – Зависимость энергии  
спутника от времени  
при  $\Omega_0 = 29,94 \text{ рад/с}$ .

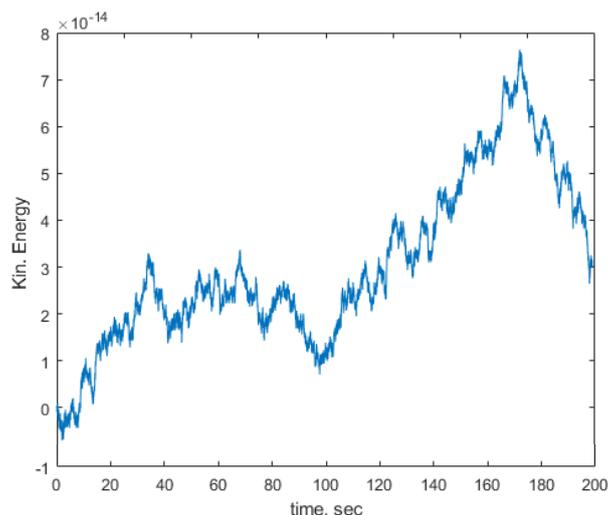


Рис.6.3 – Зависимость энергии  
спутника от времени  
при  $\Omega_0 = 149,7 \text{ рад/с}$ .

Для маховиков третьего типа при  $\Omega_0 = 10,167 \text{ рад/с}$  (10% от максимума) достаточно малым шагом является значение  $10^{-3} \text{ с}$ . В таком случае относительные погрешности первых интегралов имеют порядок  $\sim 10^{-10}$  для импульса,  $\sim 10^{-13}$  для кинетического момента и  $\sim 10^{-14}$  для энергии (Рис.7.1-7.3). При увеличении шага в два раза наблюдается увеличение погрешности на порядок; при уменьшении шага в два раза погрешности значительно не меняются. При  $\Omega_0 = 50,835 \text{ рад/с}$  (50% от максимума) достаточным шагом является значение  $10^{-4} \text{ с}$ . В таком случае относительные погрешности первых интегралов имеют порядок  $\sim 10^{-10}$  для импульса,  $\sim 10^{-12}$  для кинетического момента и  $\sim 10^{-13}$  для энергии (Рис.8.1-8.3). При увеличении шага в два раза наблюдается увеличение погрешности на порядок.

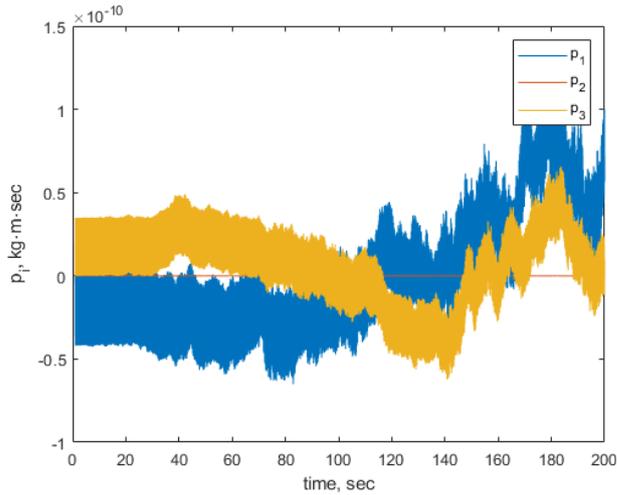


Рис.7.1– Зависимость импульса спутника от времени при  $\Omega_0 = 10,167 \text{ рад/с}$ .

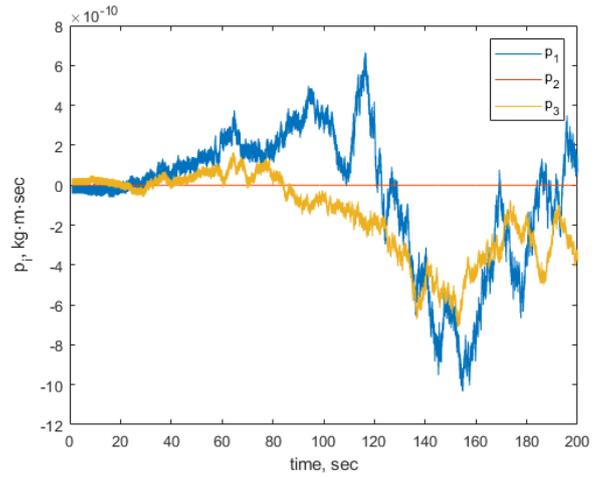


Рис.8.1– Зависимость импульса спутника от времени при  $\Omega_0 = 50,835 \text{ рад/с}$ .

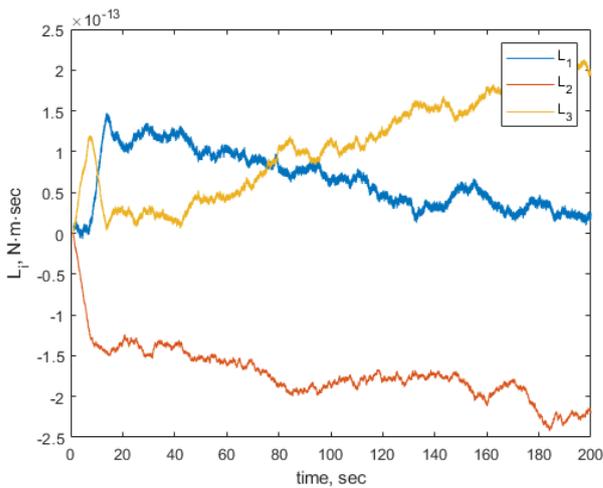


Рис.7.2– Зависимость кинетического момента спутника от времени при  $\Omega_0 = 10,167 \text{ рад/с}$ .

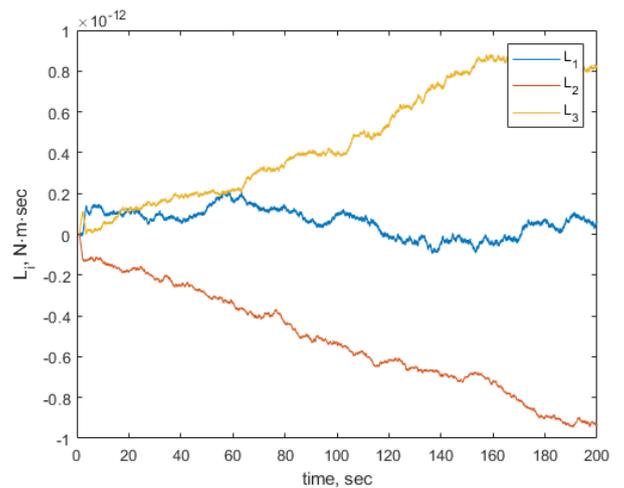


Рис.8.2– Зависимость кинетического момента спутника от времени при  $\Omega_0 = 50,835 \text{ рад/с}$ .

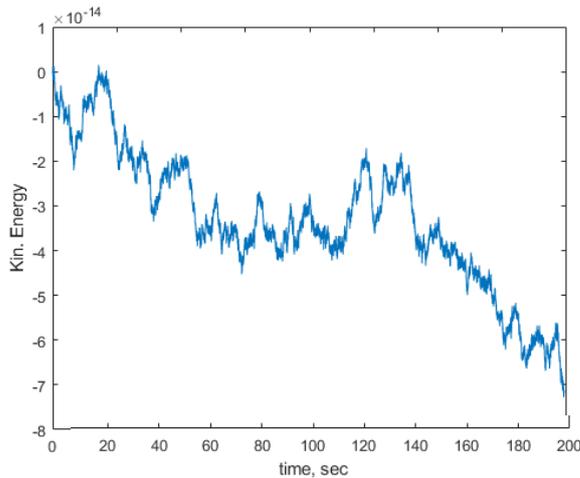


Рис.7.3 – Зависимость энергии спутника от времени при  $\Omega_0 = 10,167 \text{ рад/с}$ .

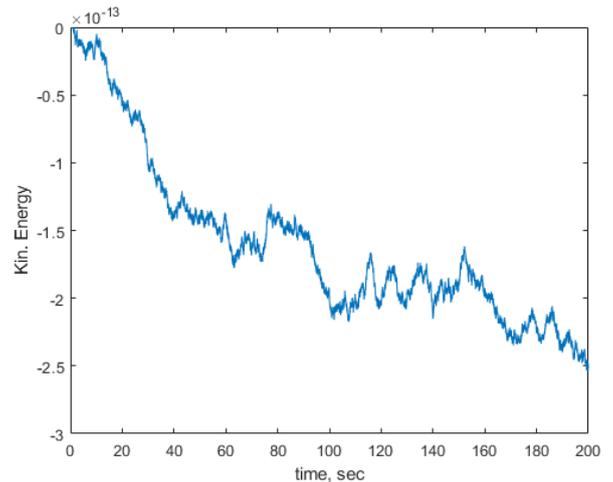


Рис.8.3 – Зависимость энергии спутника от времени при  $\Omega_0 = 50,835 \text{ рад/с}$ .

На основании этих результатов можно сказать, что модель реализована верно и работает корректно. Подтверждением этому является то, что три первых интеграла сохраняются с высокой точностью.

### 3.2. Влияние угловой скорости маховиков при постоянном динамическом дисбалансе.

Исследуем влияние на ориентацию и угловую скорость аппарата начальной угловой скорости маховика при учёте только динамического дисбаланса. Рассматриваем случай, когда вращается только какой-то один из трёх маховиков. Запустим программу на значениях, использованных в п.3.1 для маховиков первого типа. Получим следующие графики эволюции угловой скорости спутника (Рис.9.1, 9.2) и векторной части кватерниона, описывающего его ориентацию (Рис.10.1, 10.2) при работе маховика с осью, направленной вдоль  $O_s z$ .

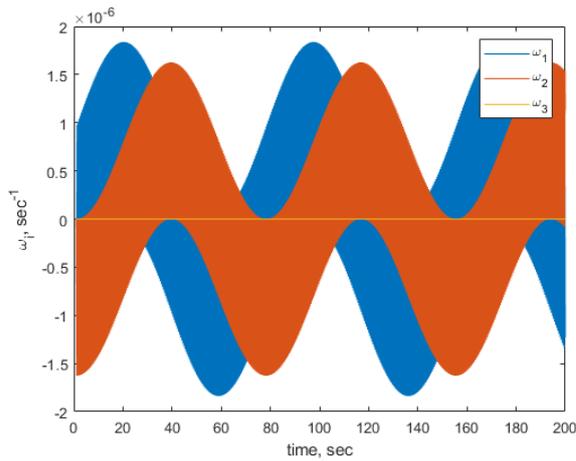


Рис.9.1 – Зависимость угловой скорости спутника от времени при  $\Omega_0 = 14,371 \text{ рад/с}$ .

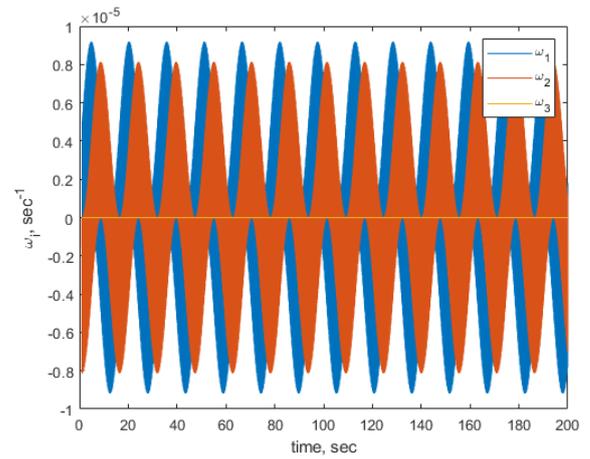


Рис.9.2 – Зависимость угловой скорости спутника от времени при  $\Omega_0 = 71,855 \text{ рад/с}$ .

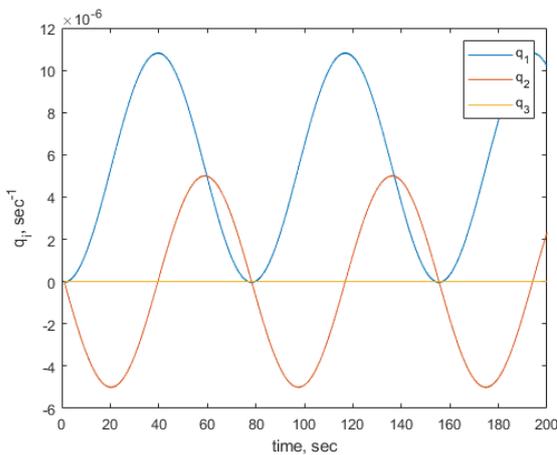


Рис.10.1 – Зависимость векторной части кватерниона, задающего ориентацию спутника, от времени при  $\Omega_0 = 14,371 \text{ рад/с}$ .

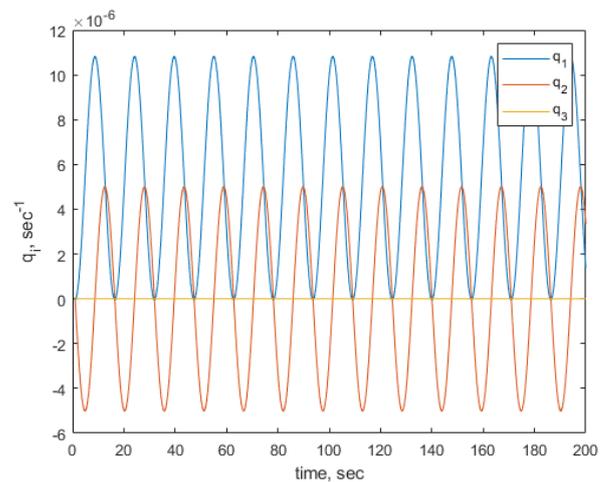


Рис.10.2 – Зависимость векторной части кватерниона, задающего ориентацию спутника, от времени при  $\Omega_0 = 71,855 \text{ рад/с}$ .

По графикам можно отметить следующее: наблюдается прямая зависимость между угловой скоростью маховика и частотой колебаний угловой скорости и задающего ориентацию кватерниона аппарата. При увеличении  $\Omega_0$  в пять раз частота увеличивается порядка пяти раз. Для

угловой скорости также наблюдается увеличения амплитуды угловой скорости на порядок (см.Табл.3).

### 3.3. Влияние расположения маховиков при постоянном статическом дисбалансе.

Исследуем, как меняется ориентация аппарата при изменении расстояния между началами отсчёта ССК и ССКм при учёте только статического дисбаланса. Запустим программу при значениях 5 см и 10 см. Получим следующие графики изменения угловой скорости спутника (Рис.11.1, 11.2) и векторной части кватерниона, описывающего его ориентацию (Рис.12.1, 12.2).

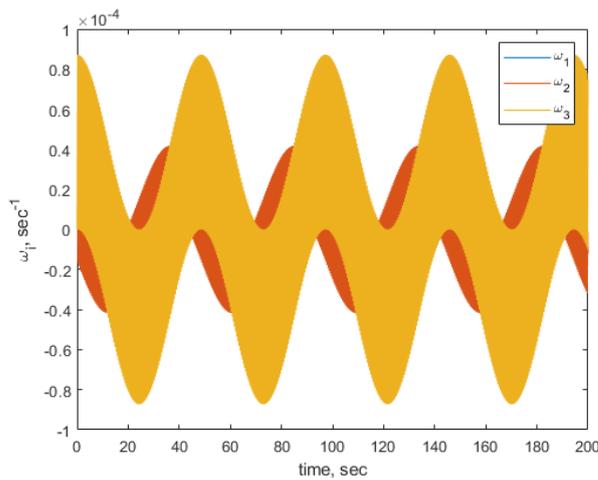


Рис.11.1 – Зависимость угловой скорости спутника от времени при расстоянии 5 см.

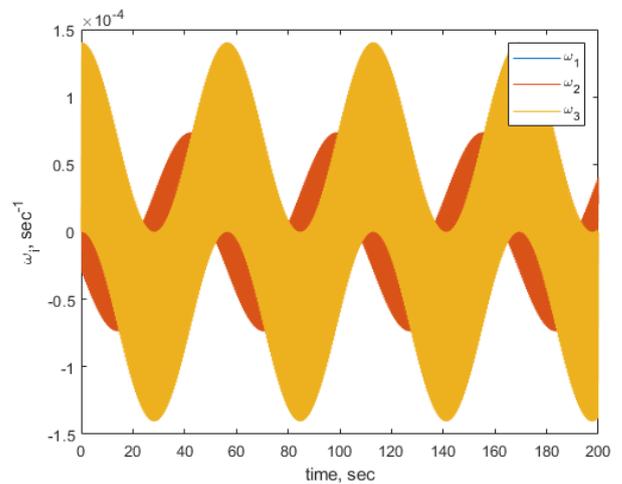


Рис.11.2 – Зависимость угловой скорости спутника от времени при расстоянии 10 см.

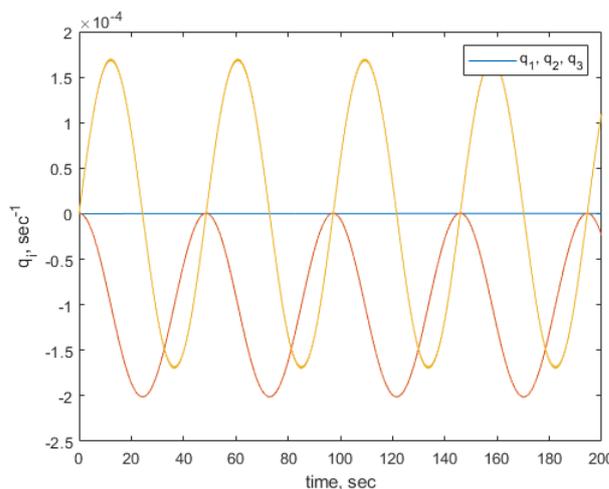


Рис.12.1 – Зависимость векторной части кватерниона, задающего ориентацию спутника, от времени при расстоянии 5 см.

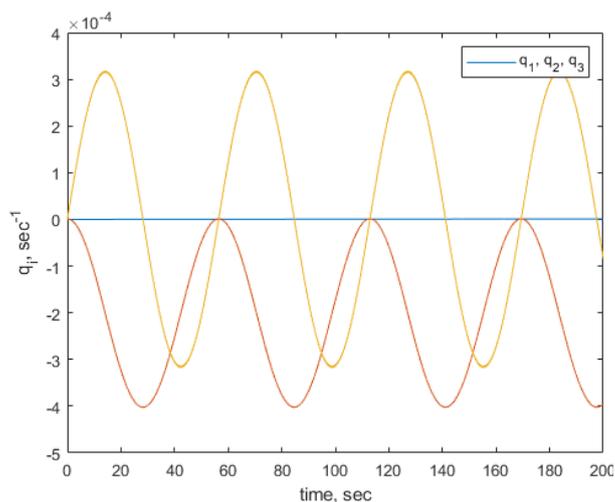


Рис.12.2 – Зависимость векторной части кватерниона, задающего ориентацию спутника, от времени при расстоянии 10 см.

Из графиков можно заметить, что наблюдается прямая зависимость между расположением маховиков и амплитудой колебаний угловой скорости и задающего ориентацию кватерниона аппарата. При увеличении расстояния в два раза наблюдается увеличение амплитуды порядка двух раз (см.Табл.3).

### 3.4. Влияние значений дисбалансов.

Исследуем, как меняется ориентация аппарата при изменении значения одного из дисбалансов при отсутствии второго. Запустим программу при значениях из Табл.2. Получим следующие графики изменения угловой скорости спутника при изменении динамического (Рис.13.1-13.3) и статического дисбалансов (Рис.14.1-14.3), а также графики векторной части кватерниона, описывающего его ориентацию, соответственно (Рис.15.1-15.3) и (Рис.16.1-16.3).

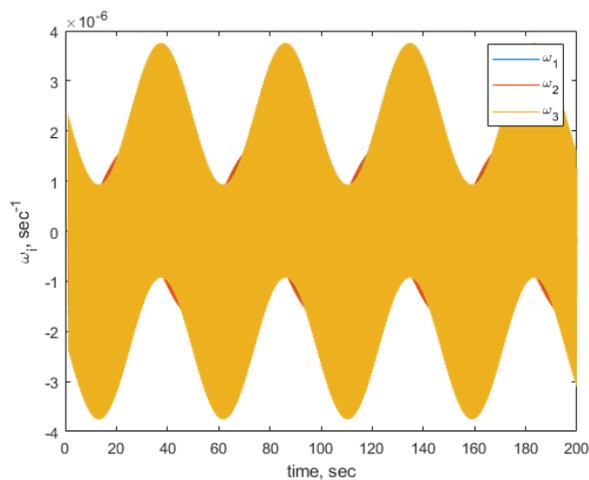


Рис.13.1 – Зависимость угловой скорости спутника от времени при  $U_d = 0,018 \text{ г} \cdot \text{см}^2$ .

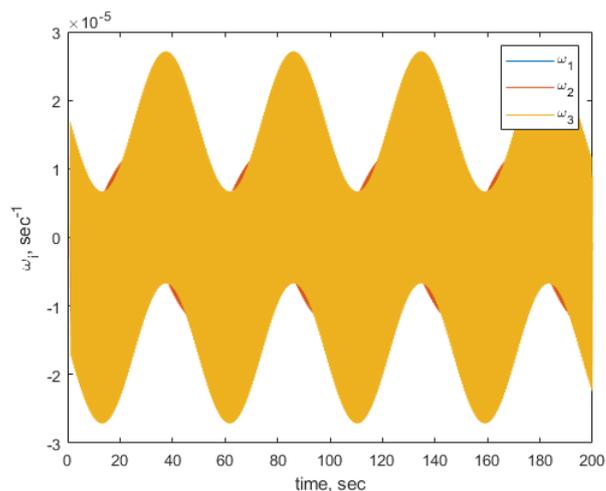


Рис.13.2 – Зависимость угловой скорости спутника от времени при  $U_d = 0,13 \text{ г} \cdot \text{см}^2$ .

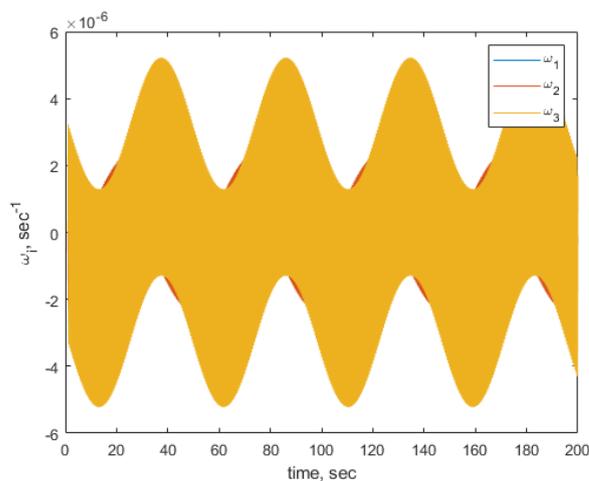


Рис.13.3 – Зависимость угловой скорости спутника от времени при  $U_d = 0,025 \text{ г} \cdot \text{см}^2$ .

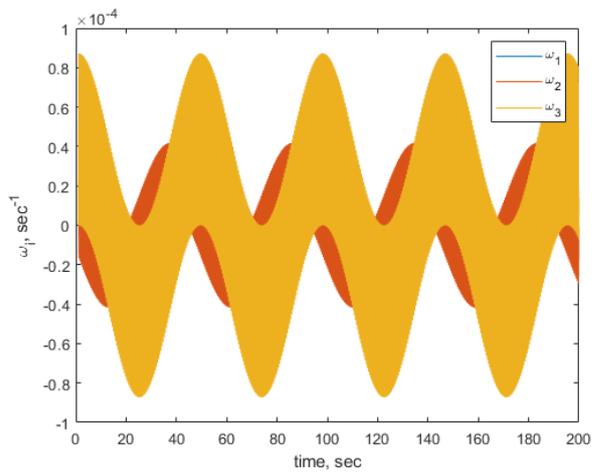


Рис.14.1 – Зависимость угловой скорости спутника от времени при  $U_s = 0,067 \text{ г} \cdot \text{см}$ .

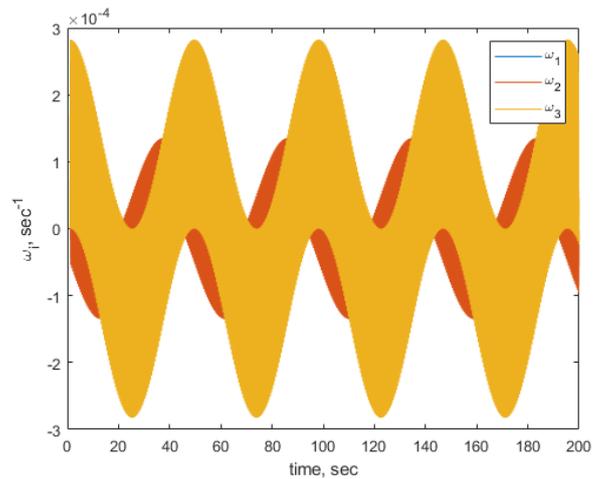


Рис.14.2 – Зависимость угловой скорости спутника от времени при  $U_s = 0,217 \text{ г} \cdot \text{см}$ .

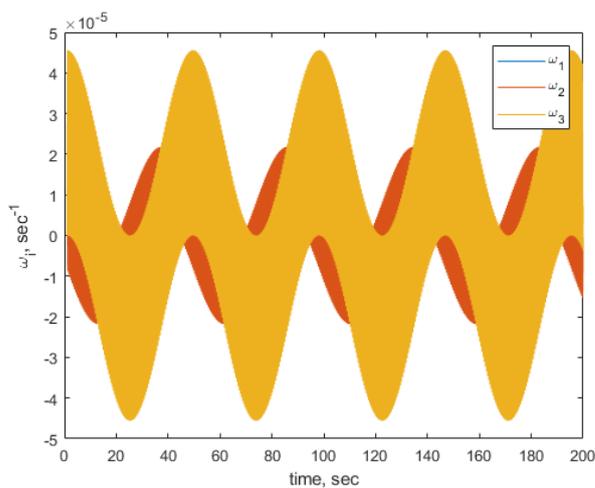


Рис.14.3 – Зависимость угловой скорости спутника от времени при  $U_s = 0,035 \text{ г} \cdot \text{см}$ .

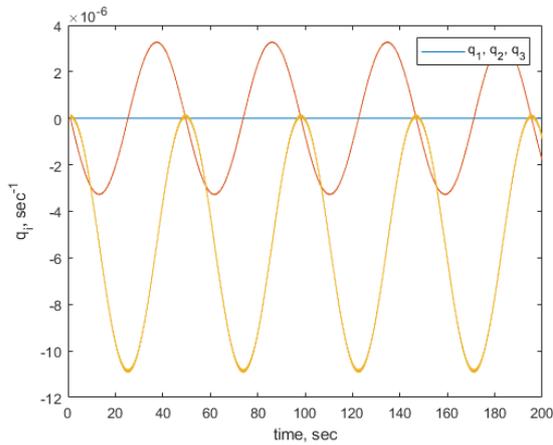


Рис.15.1 – Зависимость векторной части кватерниона, задающего ориентацию спутника, от времени при  $U_d = 0,018 \text{ г} \cdot \text{см}^2$ .

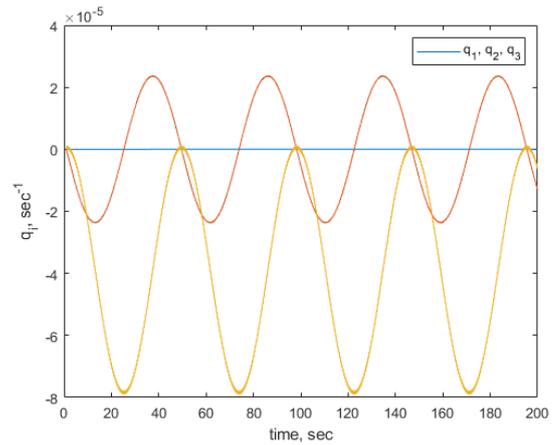


Рис.15.2 – Зависимость векторной части кватерниона, задающего ориентацию спутника, от времени при  $U_d = 0,13 \text{ г} \cdot \text{см}^2$ .

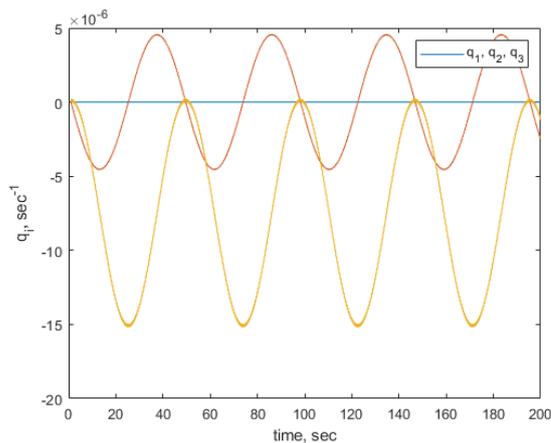


Рис.15.3 – Зависимость векторной части кватерниона, задающего ориентацию спутника, от времени при  $U_d = 0,025 \text{ г} \cdot \text{см}^2$ .

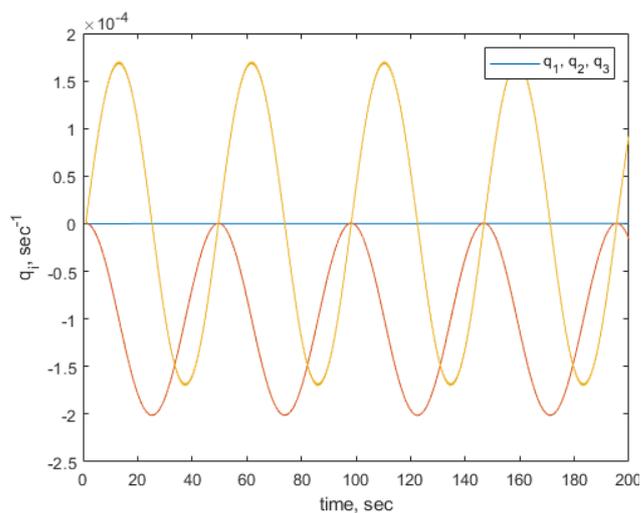


Рис.16.1 – Зависимость векторной части кватерниона, задающего ориентацию спутника, от времени при  $U_s = 0,067 \text{ г} \cdot \text{см}$ .

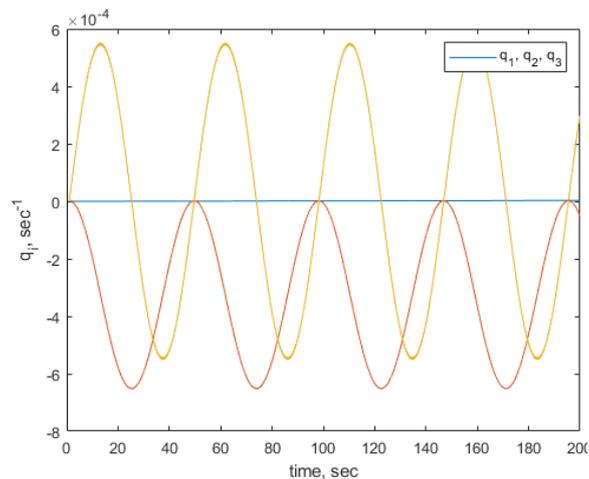


Рис.16.2 – Зависимость векторной части кватерниона, задающего ориентацию спутника, от времени при  $U_s = 0,217 \text{ г} \cdot \text{см}$ .

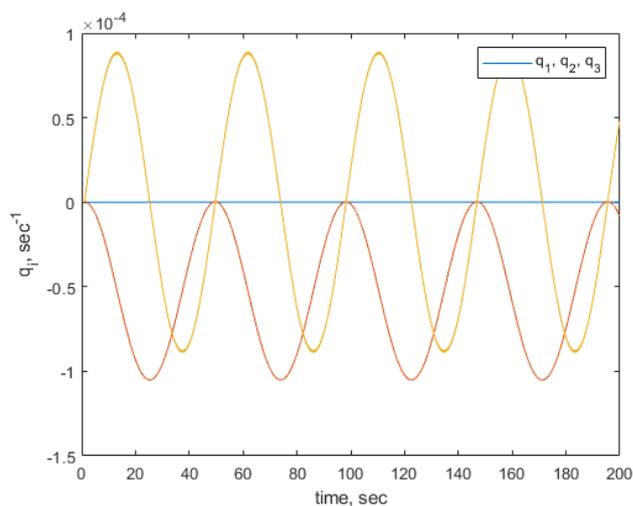


Рис.16.3 – Зависимость векторной части кватерниона, задающего ориентацию спутника, от времени при  $U_s = 0,035 \text{ г} \cdot \text{см}$ .

По графикам можно отметить, что наблюдается прямая зависимость между значениями динамического и статического дисбалансов и амплитудой колебаний угловой скорости и задающего ориентацию кватерниона аппарата. Наибольшему значению динамического дисбаланса соответствует наибольшее значение амплитуды угловой скорости (Рис.13.2), аналогично для статического (Рис.14.2). При рассмотрении данных (см.Табл.3) можно заметить закономерность, что во сколько раз изменяется значение дисбаланса  $U_d, U_s$ , примерно во столько же изменяется и исследуемая нами точность.

Данные по значениям точностей стабилизации и ориентации, полученные в п.3.1-3.3, для наглядности представлены в сводной таблице 3.

Таблица 3 – Сводные данные

	Точность стабилизации, $рад/с$	Точность ориентации
$\Omega_0 = 14,371 \text{ рад/с}$	$10^{-6}$	$12 \cdot 10^{-6}$
$\Omega_0 = 71,855 \text{ рад/с}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$12 \cdot 10^{-6}$
$r_k = 5 \text{ см}$	$10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$
$r_k = 10 \text{ см}$	$1,5 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-4}$
$U_d = 0,018 \text{ г} \cdot \text{см}^2$	$4 \cdot 10^{-6}$	$1,2 \cdot 10^{-5}$
$U_d = 0,025 \text{ г} \cdot \text{см}^2$	$6 \cdot 10^{-6}$	$1,5 \cdot 10^{-5}$
$U_d = 0,13 \text{ г} \cdot \text{см}^2$	$3 \cdot 10^{-5}$	$8 \cdot 10^{-5}$
$U_s = 0,035 \text{ г} \cdot \text{см}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$10^{-4}$
$U_s = 0,067 \text{ г} \cdot \text{см}$	$10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$
$U_s = 0,217 \text{ г} \cdot \text{см}$	$3 \cdot 10^{-4}$	$6 \cdot 10^{-4}$

## **Заключение**

В работе проведено моделирование движения спутника с гироскопической системой управления ориентацией, состоящей из трех маховиков. Математическая модель включает динамический и статический дисбалансы указанных актюаторов. Рассмотрены зависимость точности ориентации и стабилизации от значения угловой скорости маховика при наличии динамического дисбаланса; от расположения маховиков в аппарате при наличии статического дисбаланса; от значений параметров, определяющих дисбалансы. В результате было установлено, что при росте указанных величин увеличивается и амплитуда колебаний; при росте угловой скорости маховиков увеличивается и частота, но не меняется точность ориентации. При этом в большинстве случаев наблюдаемые изменения происходят прямо пропорционально, за исключением амплитуды в случае изменения угловой скорости маховиков.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- [1] Aghalari, A., & Shahravi, M. (2017). Nonlinear electromechanical modelling and dynamical behavior analysis of a satellite reaction wheel. *Acta Astronautica*, 141, 143–157. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2017.10.010>
- [2] Alkomy, H., & Shan, J. (2021). Modeling and validation of reaction wheel microvibrations considering imbalances and bearing disturbances. *Journal of Sound and Vibration*, 492, 115766. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115766>
- [3] Kim, D.-K. (2014). Micro-vibration model and parameter estimation method of a reaction wheel assembly. *Journal of Sound and Vibration*, 333(18), 4214–4231. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2014.04.032>
- [4] Le, M. P., Ellenbroek, M. H. M., Seiler, R., van Put, P., & Cottaar, E. J. E. (2014, August 17). A Full Disturbance Model for Reaction Wheels. Volume 8: 26th Conference on Mechanical Vibration and Noise. <https://doi.org/10.1115/DETC2014-34480>
- [5] Masterson, R. A., Miller, D. W., & Grogan, R. L. (2002). Development and validation of reaction wheel disturbance models: Empirical model. *Journal of Sound and Vibration*, 249(3), 575–598. <https://doi.org/10.1006/jsvi.2001.3868>
- [6] Wang, H., Han, Q., Luo, R., & Qing, T. (2017). Dynamic modeling of moment wheel assemblies with nonlinear rolling bearing supports. *Journal of Sound and Vibration*, 406, 124–145. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2017.06.019>
- [7] Zhang, Z., Aglietti, G. S., & Zhou, W. (2011). Microvibrations Induced by a Cantilevered Wheel Assembly with a Soft-Suspension System. *AIAA Journal*, 49(5), 1067–1079. <https://doi.org/10.2514/1.J050791>
- [8] Zhou, W., Li, D., Luo, Q., & Liu, K. (2012). Analysis and Testing of Microvibrations Produced by Momentum Wheel Assemblies. *Chinese Journal of Aeronautics*, 25(4), 640–649. [https://doi.org/10.1016/S1000-9361\(11\)60430-5](https://doi.org/10.1016/S1000-9361(11)60430-5)