



МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ ТРАЕКТОРИИ ВЫВЕДЕНИЯ КА НА ГСО ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ЭЛЕКТРОРАКЕТНОЙ ДВИГАТЕЛЬНОЙ УСТАНОВКИ

М.С. Константинов, Мин Тхейн

27.01. 2010



СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ
2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ. ПРИНЦИП МАКСИМУМА
3. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА
4. РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ
5. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ. ВЫВЕДЕНИЕ КА НА ГСО

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

- В работе анализируется метод оптимизации траектории выведения КА с электроракетной двигательной установкой на геостационарную орбиту. Основные усилия при этом направлены на регуляризацию процесса решения краевой задачи оптимального управления.
- Применение принципа максимума Понтрягина позволяет свести оптимизационную задачу к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Решение краевой задачи и составляет основную трудность при использовании подхода принципа максимума (как и многих других непрямых методов).
- Традиционно для решения задач оптимизации траекторий КА с двигательными установками малой тяги используются различные модификации метода Ньютона. В данной работе анализируется возможность использования гибридного метода, объединяющего метод Левенберга-Марквардта с модифицированным методом Ньютона, для решения нелинейных систем в задачах оптимального управления.
- Приводятся результаты численного анализа траектории выведения КА на ГСО и эффективности использования ЭРДУ для такого космического маневра. Как критерий оптимизации рассматривается или время выполнения космического маневра (оно минимизируется, задача быстродействия), или время работы двигателя (моторное время, оно минимизируется при фиксированном времени выведения).



1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Компоненты реактивного ускорения в орбитальной системе координат:

$$a_{\tau} = \delta \frac{P}{m} \cos(\theta) \cos(\psi), a_r = \delta \frac{P}{m} \sin(\theta) \cos(\psi), a_n = \delta \frac{P}{m} \sin(\psi)$$

где a_{τ} , a_r , a_n - трансверсальная, радиальная и бинормальная проекции реактивного ускорения соответственно.

– функция включения двигателя ($\delta = 1$ на активном участке траектории (при включенной ЭРДУ), и $\delta = 0$ при неработающей ЭРДУ);

P – тяга ЭРДУ;

m - масса КА;

θ - угол тангажа и ψ - угол рысканья.

Система равноденственных орбитальных элементов:

$$h = \sqrt{\frac{p}{\mu}}$$

$$e_x = e \cos(\Omega + \omega)$$

$$e_y = e \sin(\Omega + \omega)$$

$$i_x = tg \frac{i}{2} \cos \Omega$$

$$i_y = tg \frac{i}{2} \sin \Omega$$

$$F = v + \omega + \Omega$$

где μ – гравитационный параметр центрального тела;

p , e , i , Ω , ω , F – классические кеплеровские элементы, F – истинная долгота.

$$\frac{dh}{dt} = \delta \frac{P}{m} \frac{h}{\xi} h \cos \theta \cos \psi$$

$$\frac{de_x}{dt} = \delta \frac{P}{m} \frac{h}{\xi} \{ \xi \sin F \sin \theta \cos \psi + [(\xi + 1) \cos F] \cos \theta \cos \psi - e_y \eta \sin \psi \}$$

$$\frac{de_y}{dt} = \delta \frac{P}{m} \frac{h}{\xi} \{ -\xi \cos F \sin \theta \cos \psi + [(\xi + 1) \sin F + e_y] \cos \theta \cos \psi + e_x \eta \sin \psi \}$$

$$\frac{di_x}{dt} = \delta \frac{P}{m} \frac{h}{\xi} \frac{1}{2} \varphi \cos F \sin \psi$$

$$\frac{di_y}{dt} = \delta \frac{P}{m} \frac{h}{\xi} \frac{1}{2} \varphi \sin F \sin \psi$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\xi^2}{h^3} + \delta \frac{P}{m} \frac{h}{\xi} \xi \eta \sin \psi$$

$$\frac{dm}{dt} = -\delta \frac{P}{w}$$

$$\xi = 1 + e_x \cos F + e_y \sin F$$

$$\eta = i_x \sin F - i_y \cos F$$

$$\varphi = 1 + i_x^2 + i_y^2$$

w – скорость истечения.

Краевые условия:

Требуется перевести КА начальной массы m_0 с начальной орбиты:

$$h = h_0, e_x = e_{x0}, e_y = e_{y0}, i_x = i_{x0}, i_y = i_{y0}$$

на конечную орбиту:

$$h = h_k, e_x = e_{xk}, e_y = e_{yk}, i_x = i_{xk}, i_y = i_{yk}$$

за заданное или минимизируемое время T .

2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

функционал:

$$J = \int_0^T dt \rightarrow \min.$$

или

$$J = \int_0^T \delta \frac{P}{w} dt \rightarrow \min$$

Гамильтониан :

$$H = -\delta \frac{P}{w} (1 + p_m) + \frac{\xi^2}{h^2} p_F + \delta \frac{P}{m} \frac{h}{\xi} (A_\tau \cos \theta \cos \psi + A_r \sin \theta \cos \psi + A_n \sin \psi)$$

$$A_\tau = h p_h + [(\xi + 1) \cos F + e_x] p_{ex} + [(\xi + 1) \sin F + e_y] p_{ey}$$

$$A_r = \xi (\sin F \cdot p_{ex} - \cos F \cdot p_{ey})$$

$$A_n = \eta (-e_y p_{ex} + e_x p_{ey}) + \frac{1}{2} \varphi (\cos F \cdot p_{ix} + \sin F \cdot p_{iy}) + \xi \eta p_F$$

Оптимальное управление:

$$\cos(\theta) = \frac{A_\tau}{\sqrt{A_\tau^2 + A_r^2}}$$

$$\sin(\theta) = \frac{A_r}{\sqrt{A_\tau^2 + A_r^2}}$$

$$\cos(\psi) = \frac{\sqrt{A_\tau^2 + A_r^2}}{\sqrt{A_\tau^2 + A_r^2 + A_n^2}}$$

$$\sin(\psi) = \frac{A_n}{\sqrt{A_\tau^2 + A_r^2 + A_n^2}}$$

Функция выключения двигателя:

$$\delta = \begin{cases} 1, & \text{если } \psi_s > 0 \\ 0, & \text{если } \psi_s \leq 0 \end{cases}$$

$$\psi_s = -\frac{1 + p_m}{w} + \frac{h}{m\xi} (A_\tau^2 + A_r^2 + A_n^2)^{1/2}$$

Уравнения оптимального движения

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \delta P \left[k \left(A_\tau \frac{\partial A_\tau}{\partial \mathbf{p}} + A_r \frac{\partial A_r}{\partial \mathbf{p}} + A_n \frac{\partial A_n}{\partial \mathbf{p}} \right) A^{-1} \right],$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_F} = \delta P \left[k \left(A_\tau \frac{\partial A_\tau}{\partial p_F} + A_r \frac{\partial A_r}{\partial p_F} + A_n \frac{\partial A_n}{\partial p_F} \right) A^{-1} \right] + \frac{\partial H_F}{\partial p_F},$$

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_m} = \delta P \frac{\partial b}{\partial p_m},$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = -\delta P \left[\frac{\partial k}{\partial \mathbf{x}} A + k \left(A_\tau \frac{\partial A_\tau}{\partial \mathbf{x}} + A_r \frac{\partial A_r}{\partial \mathbf{x}} + A_n \frac{\partial A_n}{\partial \mathbf{x}} \right) A^{-1} \right] - \frac{\partial H_F}{\partial \mathbf{x}},$$

$$\frac{dp_F}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial F} = -\delta P \left[\frac{\partial k}{\partial F} A + k \left(A_\tau \frac{\partial A_\tau}{\partial F} + A_r \frac{\partial A_r}{\partial F} + A_n \frac{\partial A_n}{\partial F} \right) A^{-1} \right] - \frac{\partial H_F}{\partial F},$$

$$\frac{dp_m}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial m} = -\delta P \frac{\partial k}{\partial m} A,$$

где $\mathbf{x} = [h \ e_x \ e_y \ i_x \ i_y]^T$, $\mathbf{p} = [p_h \ p_{ex} \ p_{ey} \ p_{ix} \ p_{iy}]^T$.

$$k = \frac{1}{m} \frac{h}{\xi}$$

$$A = (A_\tau^2 + A_r^2 + A_n^2)^{1/2}$$

$$b = -\frac{1 + p_m}{w}$$

$$H_F = \frac{\xi^2}{h^3} p_F$$

3. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА

В задаче с фиксированным временем T уравнение невязок краевой задачи имеет вид:

$$f = \begin{pmatrix} h(T) - h_k \\ e_x(T) - e_{xk} \\ e_y(T) - e_{yk} \\ i_x(T) - i_{xk} \\ i_y(T) - i_{yk} \\ p_m(T) \end{pmatrix} = 0$$

Это уравнение должно быть решено относительно неизвестных начальных значений сопряженных переменных $p(0)$ и $p_m(0)$.

В задаче оптимального быстродействия $\delta \equiv 1$ и дифференциальные уравнения для переменных m и p_m можно исключить из рассмотрения, используя явную зависимость массы КА m от времени

$m = m_o - (P/w).t$. Уравнение невязок краевой задачи имеет вид :

$$f = \begin{pmatrix} h(T) - h_k \\ e_x(T) - e_{xk} \\ e_y(T) - e_{yk} \\ i_x(T) - i_{xk} \\ i_y(T) - i_{yk} \\ H(T) \end{pmatrix} = 0$$

Это уравнение должно быть решено относительно неизвестных начальных значений сопряженных переменных $p(0)$ и времени перелета T .



4. РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Гибридный метод

Пусть необходимо решить систему нелинейных уравнений

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0.$$

Решение записанной системы уравнений можно свести к нахождению нулевого значения минимума следующей квадратичной функции $F(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{x}^* = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x}} \{F(\mathbf{x})\},$$

Где

$$F(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (f_i(\mathbf{x}))^2 = \frac{1}{2} \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|^2 = \frac{1}{2} \mathbf{f}(\mathbf{x})^T \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

Такой минимум предлагается находить, используя гибридный метод , объединяющий метод Левенберга - Марквардта с квазиньютоновским методом.

Левенберг-Марквардт метод

Градиентный метод

$$z_{i+1} = z_i - \alpha \frac{\partial F}{\partial z(z_i)}$$

Метод Ньютона

$$z_{i+1} = z_i - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2(z_i)} \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial z(z_i)}$$

Идея метода Левенберга



$$z_{i+1} = z_i - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2(z_i)} + \alpha E \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial z(z_i)}$$

Модификация Марквардта



$$z_{i+1} = z_i - \left(H(z_i) + \alpha \text{diag}(H(z_i)) \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial z(z_i)}$$

Где, E – единичная матрица размерности j (в нашем случае $j = 6$),
 α – параметр, управляющий итерационным процессом.

$$H(z_i) = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2(z_i)}$$

Квазиньютоновский метод

$$Bh_{qn} = -F'(z)$$

где,

$$B \approx \frac{\partial^2 F}{\partial z^2(z_i)}$$

формула BFGS (Broyden, Fletcher, Goldfarb and Shanno)

$$B_{new} = B + \frac{1}{h^T y} y y^T - \frac{1}{h^T u} u u^T$$

$$h = z_{new} - z$$

$$u = B h$$

$$y = J_{new}^T J_{new} h + (J_{new} - J)^T f(z_{new})$$

$$(J(z))_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial f_j}(z)$$

- Итерация начинается с ряда шагов по методу Левенберга-марквардта.
- Если оказывается, что значение $F(\mathbf{x}^*)$ значительно отлично от нуля, то переключаемся к квазиньютоновскому методу.
- Использование квазиньютоновского метода происходит, если удовлетворено следующее условие в трех последовательных, успешных итеративных шагах.

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{z}(\mathbf{z})} < 0.02 * F(\mathbf{z})$$

- Квазиньютоновский метод, разумеется, тоже не гарантирует сходимости.
- Он хорошо работает, пока быстро уменьшается значение производной нормы $\partial F / \partial \mathbf{z}(\mathbf{z})$.
- Если это значение не уменьшается достаточно быстро, следует перейти к использованию метода Левенберга-Марквардта.

задача оптимального быстродействия

Гибридный метод

показал высокую эффективность в задачах перелета на конечную круговую орбиту при простом начальном приближении для вектора неизвестных параметров краевой задачи:

$$p_h = 1, p_{ex} = p_{ey} = p_{ix} = p_{iy} = 0, T = 500$$

где, T – безразмерное время (за единицу времени принимается время прохождения 1 радиана на конечной круговой орбите)

Задача с фиксированным временем перелета

$$T_f = T_{fmin} * C_{tf}$$

$$C_{tf} \geq 1$$

Когда C_{tf} равняется единице, то рассматриваемая задача есть задача оптимального быстродействия.

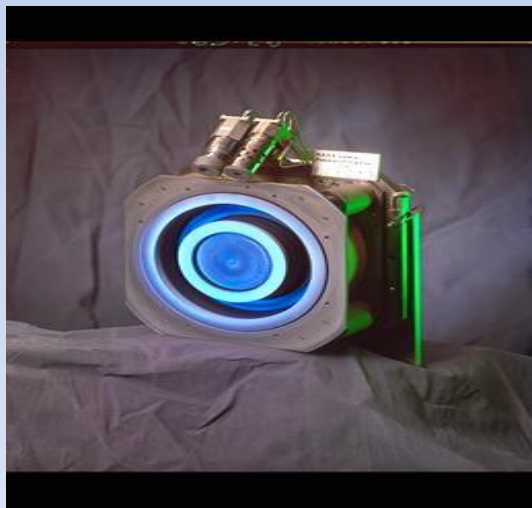
Начальное приближение для вектора параметров краевой задачи выбирается как полученное ранее решение задачи оптимального быстродействия.

В задаче минимизации характеристической скорости при фиксированном времени использование гибридного метода оказалось неэффективным. Численный анализ показал, что более эффективным оказывается модифицированный метод Ньютона.

5. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ ВЫВЕДЕНИИ НА ГСО

- Рассматриваются траектории перелета на ГСО при использовании двух космических транспортных систем Союз / Фрегат и Рокот / Бриз.
- СПД-140 был рассмотрен в качестве электроракетной двигательной установки.

Характеристики стационарного плазменного двигателя СПД – 140



тяга	0.28 Н
Удельный импульс	1650 сек
Входная мощность	3.5 кВт

Перелет на ГСО с использованием «Рокот/Бриз» + СПД 140

промежуточная орбита :

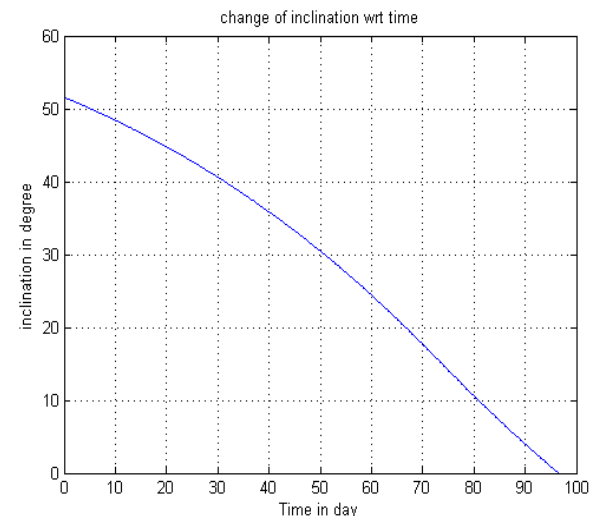
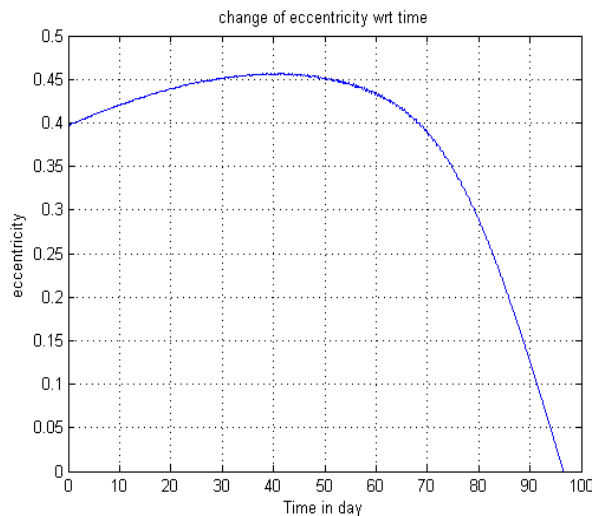
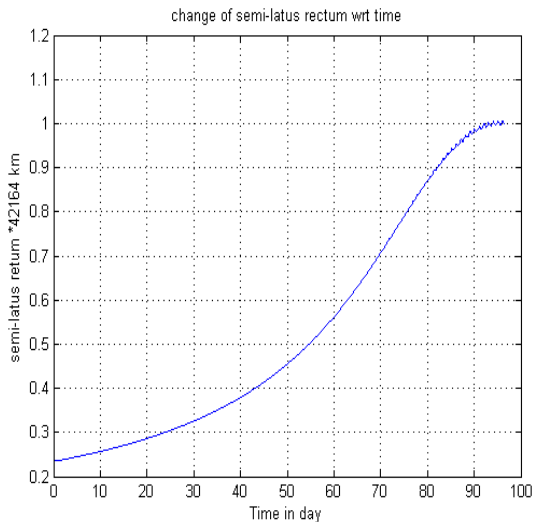
высота перигея - 700 км,
высота апогея - 10000 км,
наклонение 51.6 градусов.

Масса космического аппарата в момент старта ЭРДУ – 520 кг.



Время перелета – 96.5 сутки

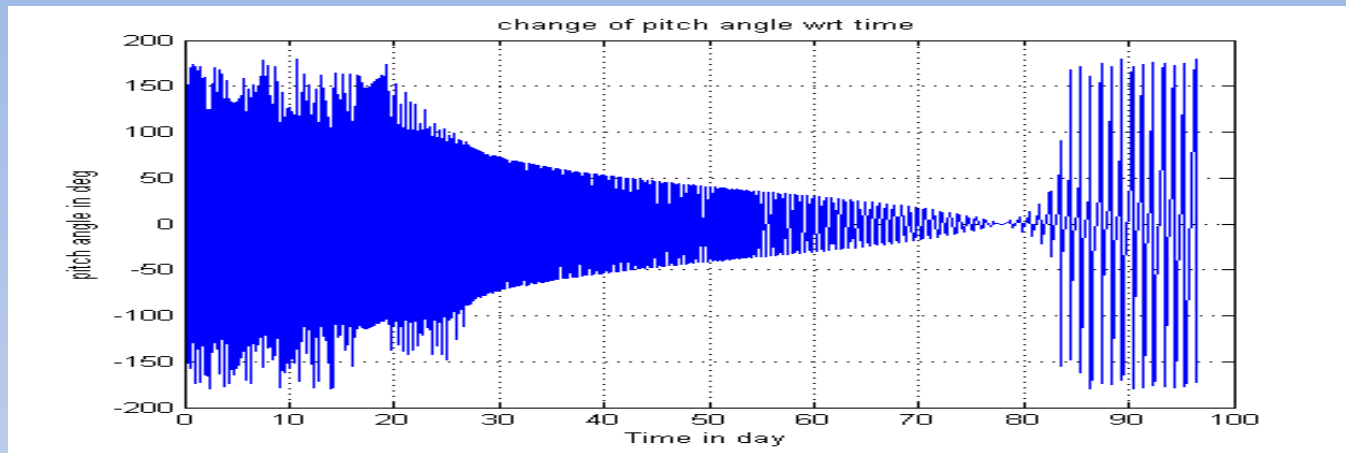
Конечная масса КА – 375.7 кг



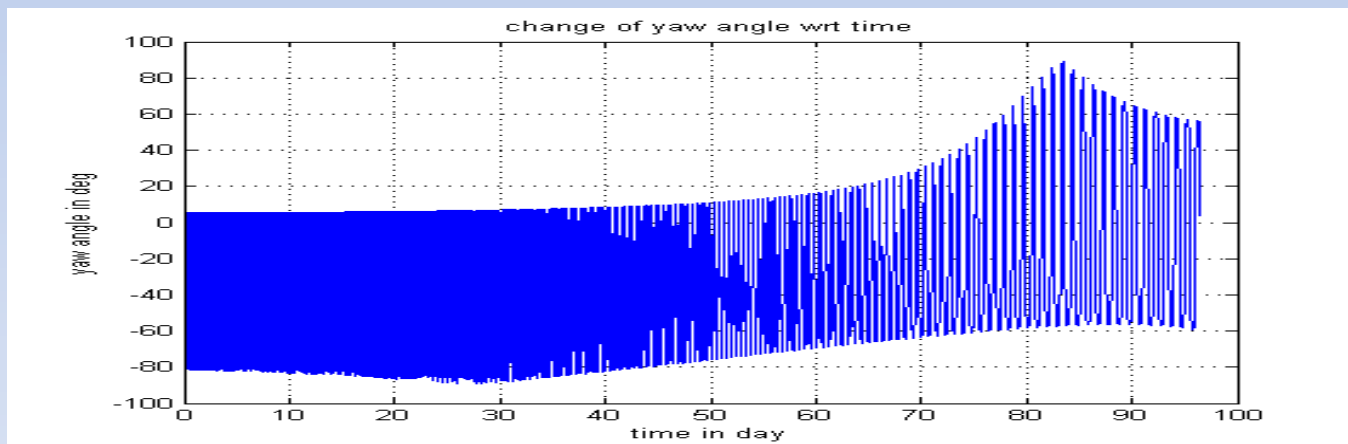
Изменение фокального параметра [42164 км] как функции времени перелета [сутки].

Изменение эксцентриситета как функции времени перелета [сутки].

Изменение наклонения [град] как функции времени перелета [сутки].



Изменение угла тангажа [град] как функции времени полета [сутки]



Изменение угла рыскания [град] как функции времени полета [сутки]



Перелет на ГСО с использованием «Союз/Фрегат» + СПД 140

Ракета – носитель Союз/Фрегат

ЭРДУ

4 СПД – 140 (4 запасные)

Промежуточная орбита

Высота апогея

45500 км

Высота перигея

290 км

Наклонение

51.8 градусов

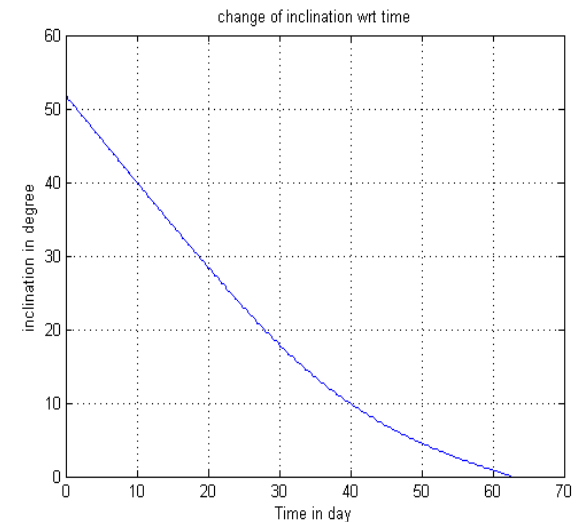
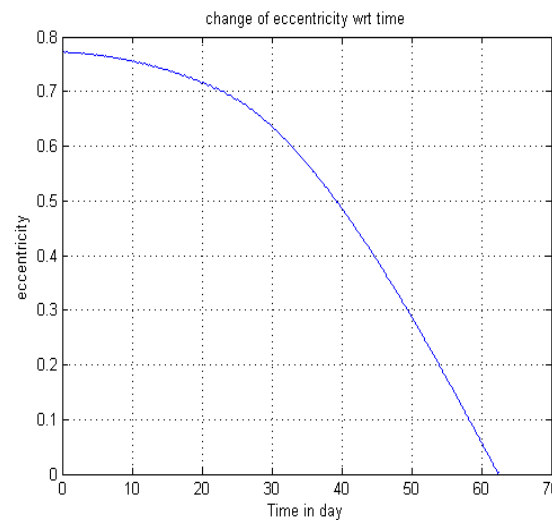
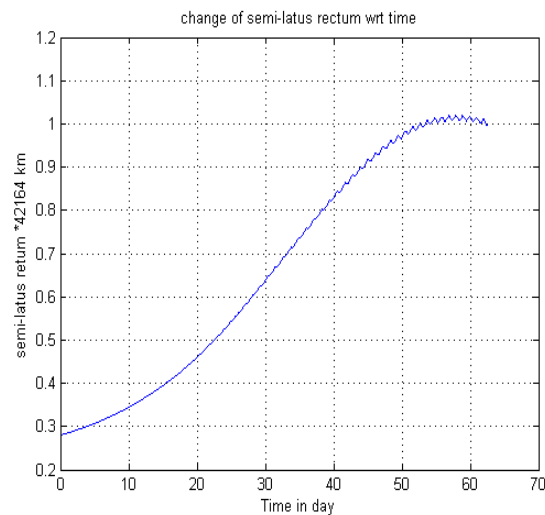
Начальная масса КА

2141 кг



Минимальное время перелета – 62.5 суток

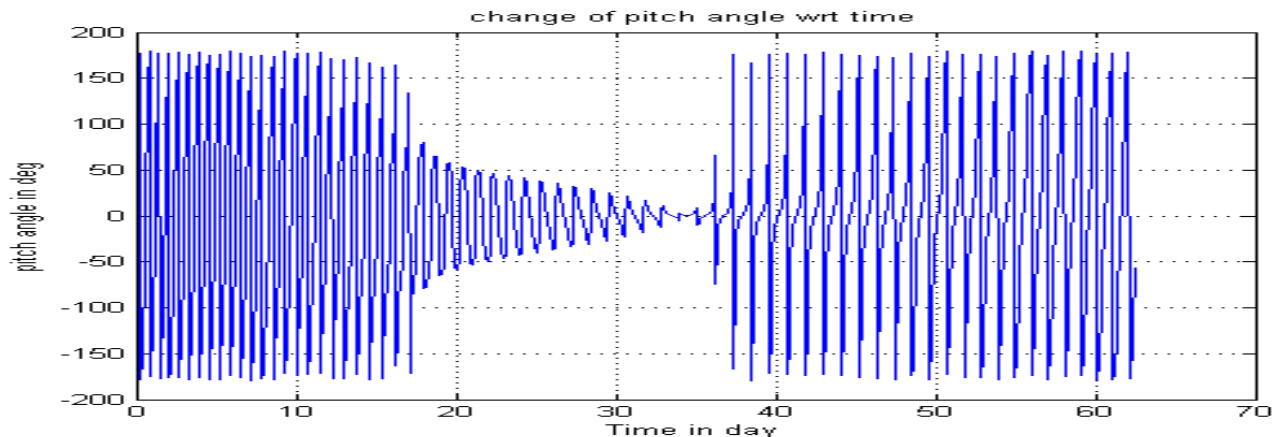
Конечная масса КА – 1767.4 кг



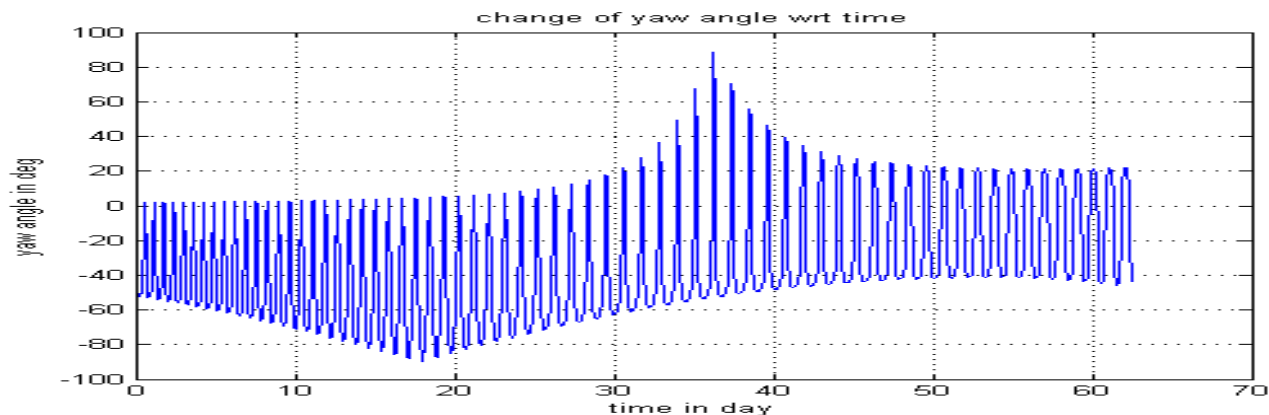
Изменение фокального параметра [42164 км] как функции времени перелета [сутки].

Изменение эксцентриситета как функции времени перелета [сутки].

Изменение наклонения [град] как функции времени перелета [сутки].



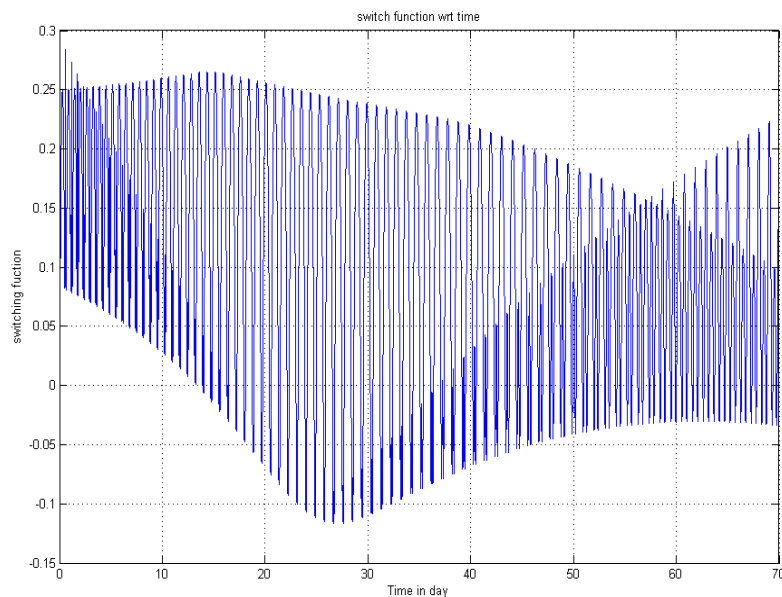
Изменение угла тангажа [град] как функции времени полета [сутки].



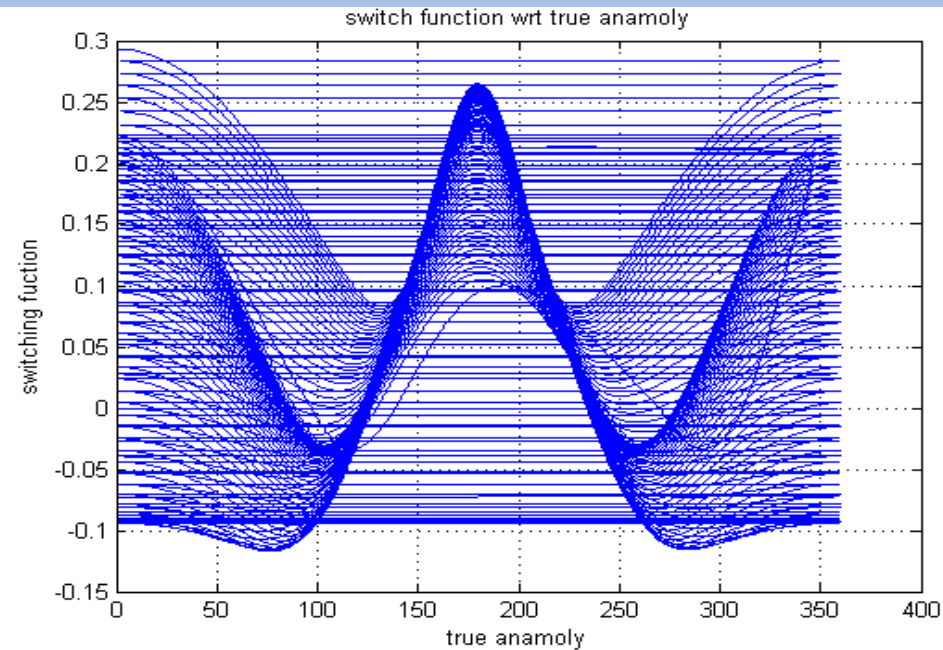
Изменение угла рыскания [град] как функции времени полета [сутки].

Анализ увеличения выводимой на рабочую орбиту массы при
увеличении времени перелета (от минимально возможного времени)

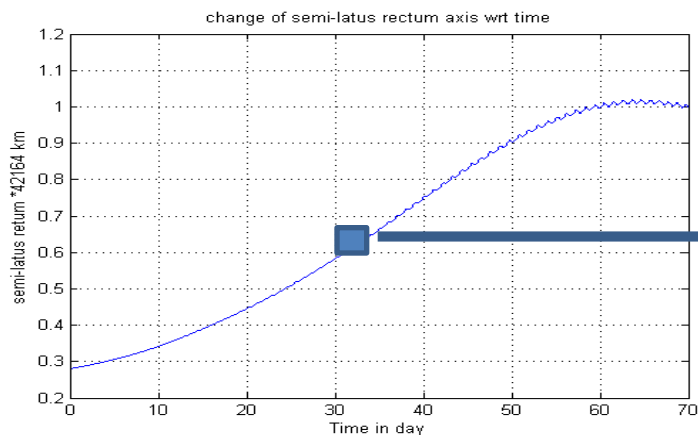
Время перелета [сутки]	Моторное время [сутки]	Время перелета / Моторное время [C_{tf}]	Конечная масса КА [кг]
62.464	62.464	1	1767.44
63	61.299	1.0086	1774.41
64	60.098	1.0246	1781.59
65	59.269	1.0406	1786.55
66	58.841	1.0566	1789.11
67	58.154	1.0726	1793.22
68	57.459	1.0886	1797.16
69	57.07	1.1046	1799.70
70	56.645	1.1206	1802.24



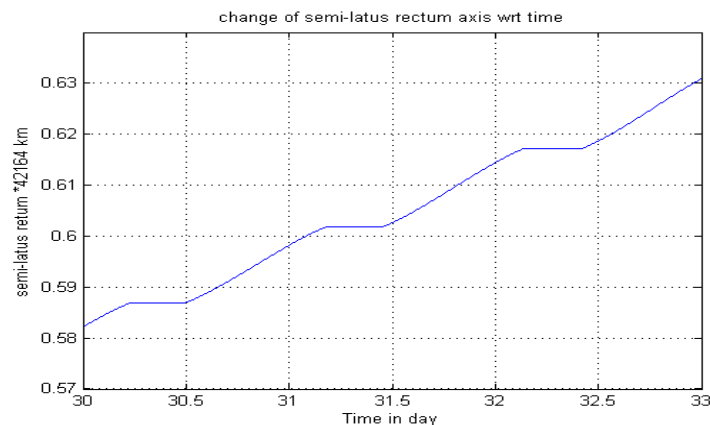
Функция переключения вдоль всей траектории перелета для фиксированного времени перелета [70 суток]



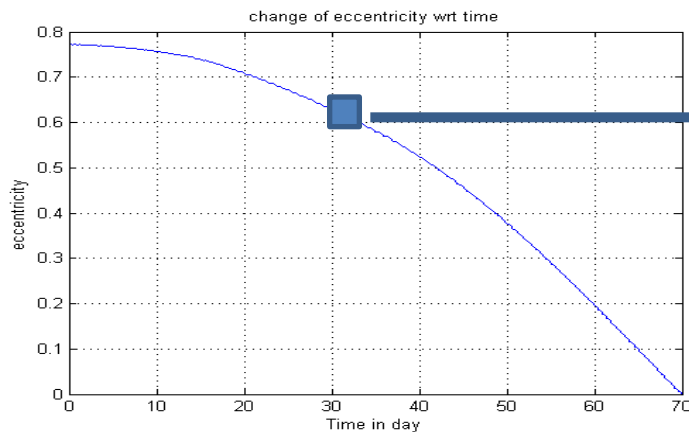
Функция переключения как функция истинной аномалии для фиксированного времени перелета [70 суток]



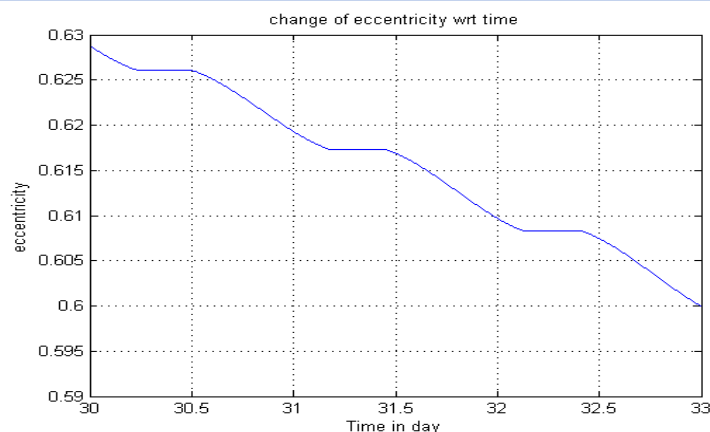
Изменение фокального параметра [42164 км] как функции времени перелета [сутки]



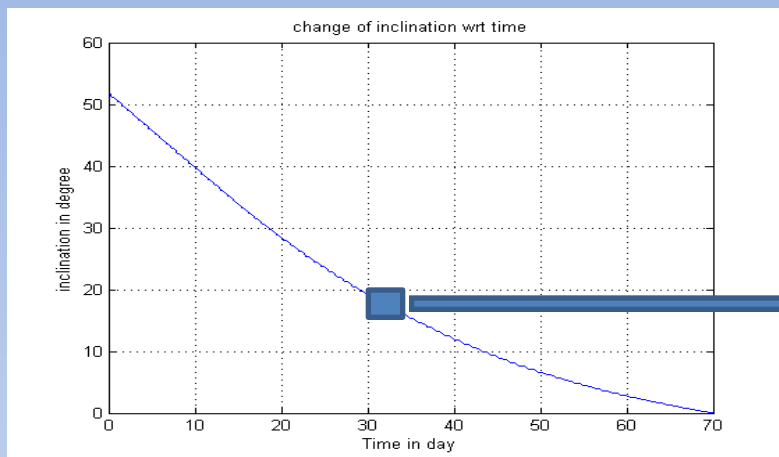
Изменение фокального [42164 км] как функции времени перелета в диапазоне 30...33 суток перелета.



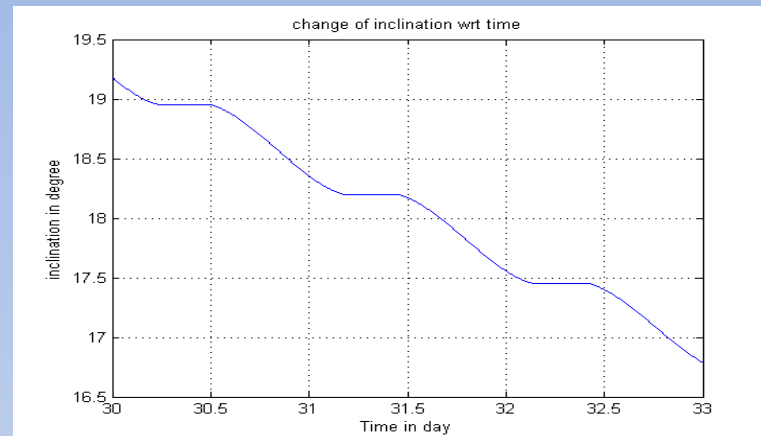
Изменение эксцентриситета как функции времени перелета [сутки].



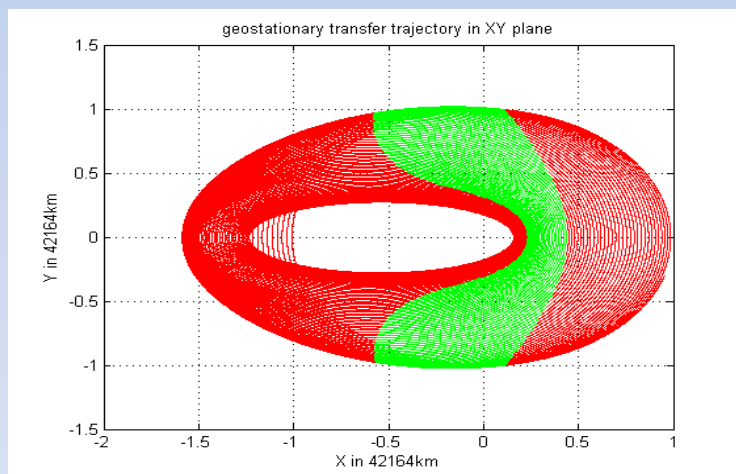
Изменение эксцентриситета как функции времени перелета в диапазоне 30...33 суток перелета.



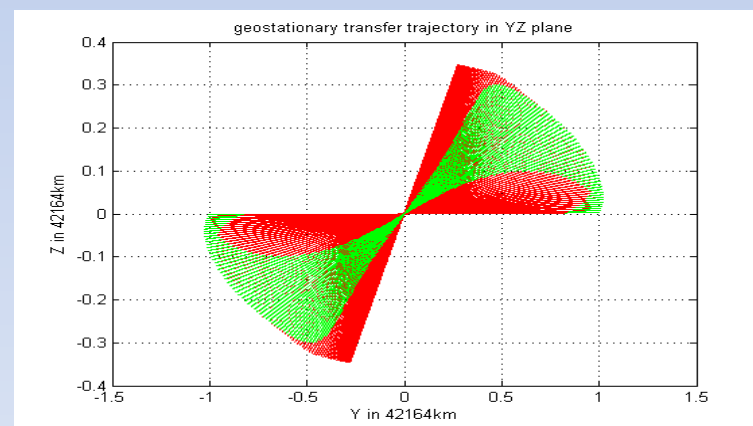
Изменение наклонения [град] как функции времени перелета [сутки].



Изменение наклонения [град] как функции времени перелета в диапазоне 30...33 суток перелета.

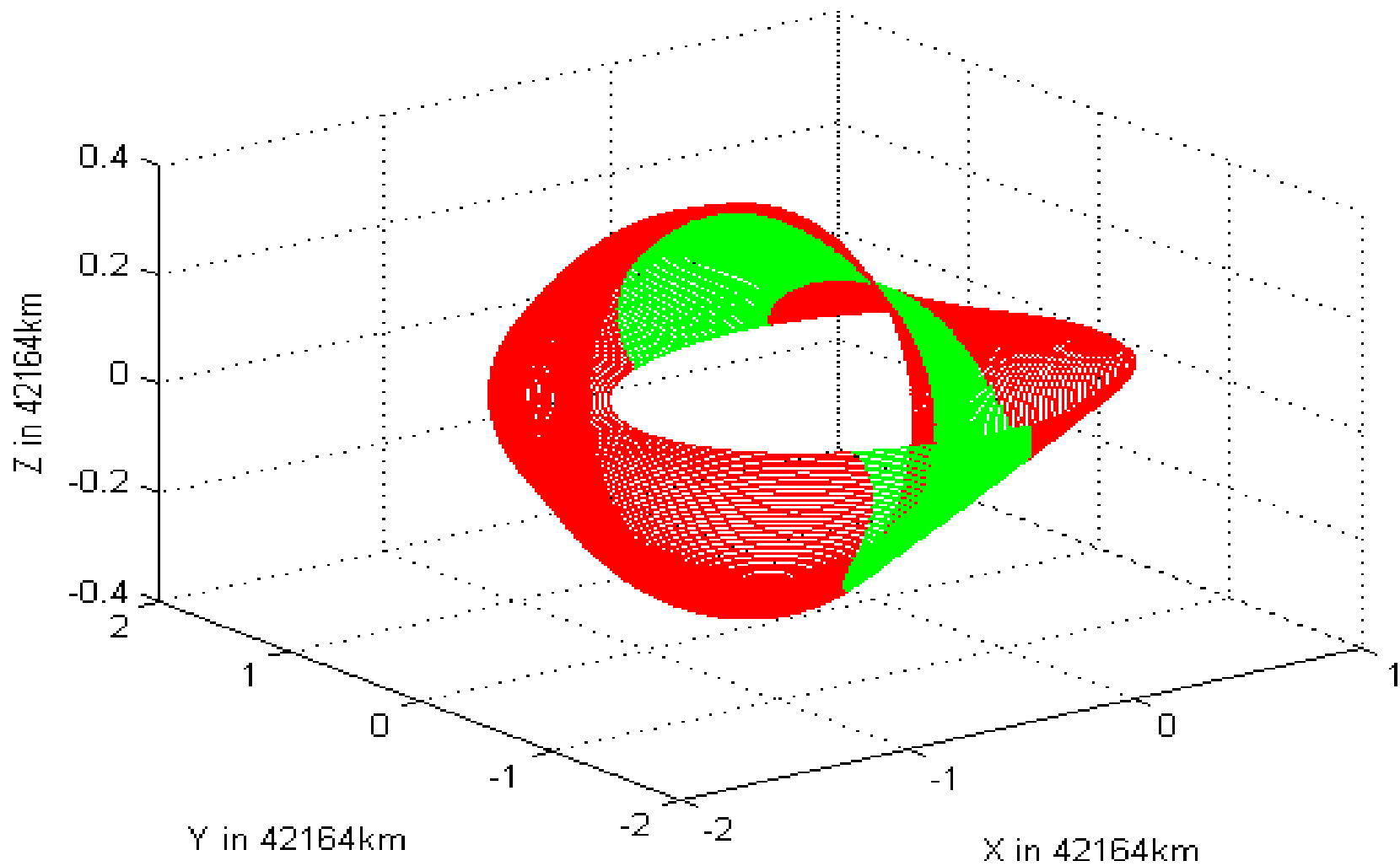


Проекция траектории перелета КА на ГСО на плоскость экватора.



Проекция траектории перелета КА на ГСО на плоскость YZ.

3D geostationary transfer trajectory



Траектория перелета КА на ГСО в пространстве.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- Рассмотрен метод оптимизации схемы выведения КА с двигателем малой тяги с эллиптической на пространственную круговую орбиту.
- Представлены результаты использования разработанного метода и результаты анализа оптимальной траектории выведения КА с ЭРДУ на ГСО, оптимального управления движением КА при этом выведении.
- Решена не только задача оптимального управления по минимуму времени выведения (задача быстрогодействия), но и задача оптимального управления по минимуму характеристической скорости при фиксированном времени выведения (задача с использованием пассивных участков на траектории выведения).
- Предлагаемая методика может быть использована для оптимизации многовитковых перелетов с эллиптической начальной орбиты на произвольную пространственную круговую орбиту.



Благодарю за внимание

Мин Тхейн