



Самарский государственный
аэрокосмический университет
им. Академика С.П. Королева

РАССЕИВАНИЕ ПО БОКОВОЙ ДАЛЬНОСТИ ДЛЯ СПУСКАЕМЫХ АППАРАТОВ, ВЫЗВАННОЕ ПЕРЕХОДНЫМИ РЕЖИМАМИ УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ НА ВЕРХНЕМ УЧАСТКЕ ТРАЕКТОРИИ СПУСКА

Тимбай И.А., Баринова Е.В.

Вид капсул с синусоидальной моментной характеристикой

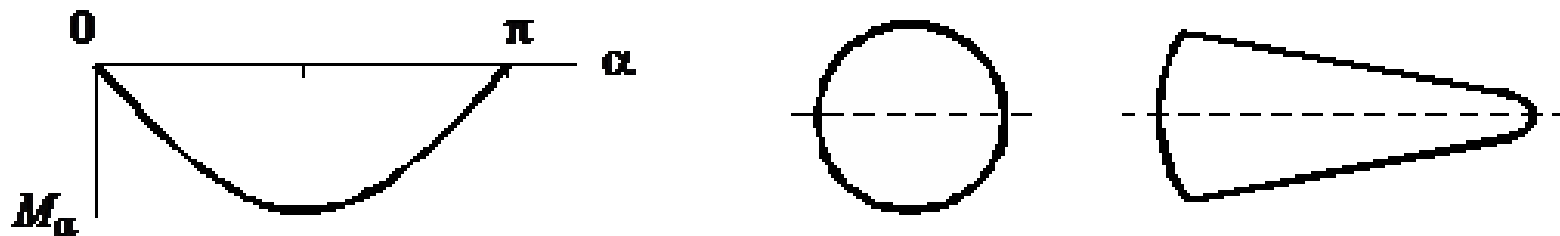
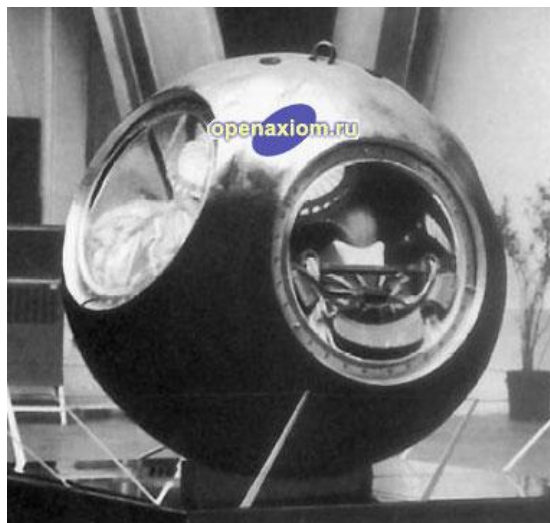


Рисунок 1 – Моментная характеристика и форма аппарата



Восход-2



Восток



Фотон

Вид капсул с бигармонической моментной характеристикой

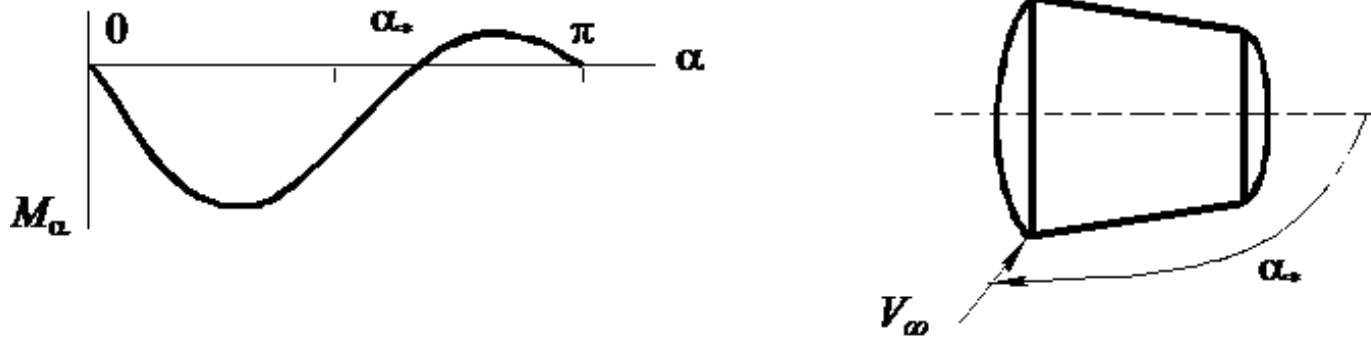
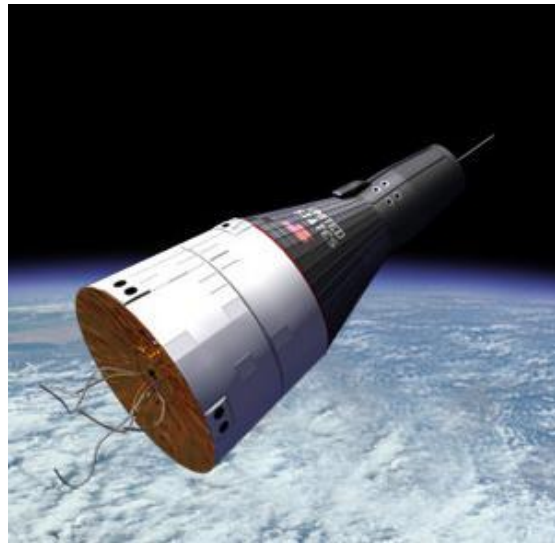


Рисунок 2 – Моментная характеристика и форма аппарата



Аполлон



Джемени



Союз

Вид капсул с тригармонической моментной характеристикой

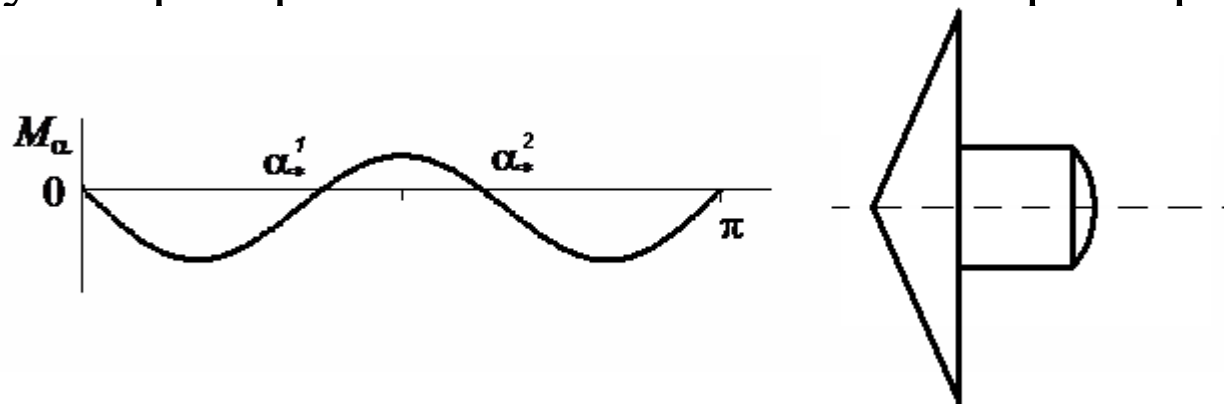


Рисунок 3 – Моментная характеристика и форма аппарата



Марс-3



ВИКИНГ

Система уравнений относительного движения
спускаемой капсулы:

$$\ddot{\alpha} + F(\alpha) = 0, \tag{1}$$

$$F(\alpha) = \frac{(G - R \cos \alpha)(R - G \cos \alpha)}{\sin^3 \alpha} + a \sin \alpha + b \sin 2\alpha + c \sin 3\alpha,$$

$$\dot{\psi} = \frac{G - R \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}, \tag{2}$$

где $R = \frac{K \cos \alpha_K}{I_{non}}$, $G = \frac{K \cos \alpha_V}{I_{non}}$, $a = a_0 z$, $b = b_0 z$, $c = c_0 z$,

α — угол атаки,

ψ — угол прецессии,

K — значение кинетического
момента,

I_{non} — поперечный момент инерции,

α_K — угол между вектором
кинетического момента
и осью симметрии,

α_V — угол между вектором
кинетического момента
и вектором скорости,

z — медленно меняющийся параметр.

$$a_0 = m_a S l \rho_0 V_0^2 / 2I_{non},$$

$$b_0 = m_b S l \rho_0 V_0^2 / 2I_{non},$$

$$c_0 = m_c S l \rho_0 V_0^2 / 2I_{non},$$

$$z = \exp \beta t,$$

$$\beta = \lambda V_0 |\sin \theta_0|,$$

$$\rho_0 = 5,549 \cdot 10^{-7} \cdot e^{-\frac{H_0 - 100000}{\lambda}},$$

где m_a, m_b, m_c — постоянные коэффициенты,

S — характерная площадь,

l — характерный размер,

λ — логарифмический градиент плотности по высоте,

V_0 — скорость полета,

ρ_0 — плотность атмосферы в момент времени $t = t_0$,

θ_0 — угол наклона траектории,

H_0 — начальная высота.

Интеграл энергии невозмущенной системы:

$$E = \frac{\dot{\alpha}^2}{2} + W(\alpha) = h, \quad (3)$$

$$W(\alpha) = \frac{R^2 + G^2 - 2RG \cos \alpha}{2 \sin^2 \alpha} - (a - c) \cos \alpha - b \cos^2 \alpha - \frac{4}{3} c \cos^3 \alpha.$$

Исследование невозмущенного плоского движения

Уравнение движения :

$$\ddot{\alpha} + W'(\alpha) = 0, \quad (4)$$

$$W(\alpha) = a \sin \alpha + b \sin 2\alpha + c \sin 3\alpha,$$

Положения равновесия:

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \pi, \quad (5)$$

$$\alpha_3 = \arccos \frac{-2b - \sqrt{D}}{8c}, \quad \alpha_4 = \arccos \frac{-2b + \sqrt{D}}{8c}.$$

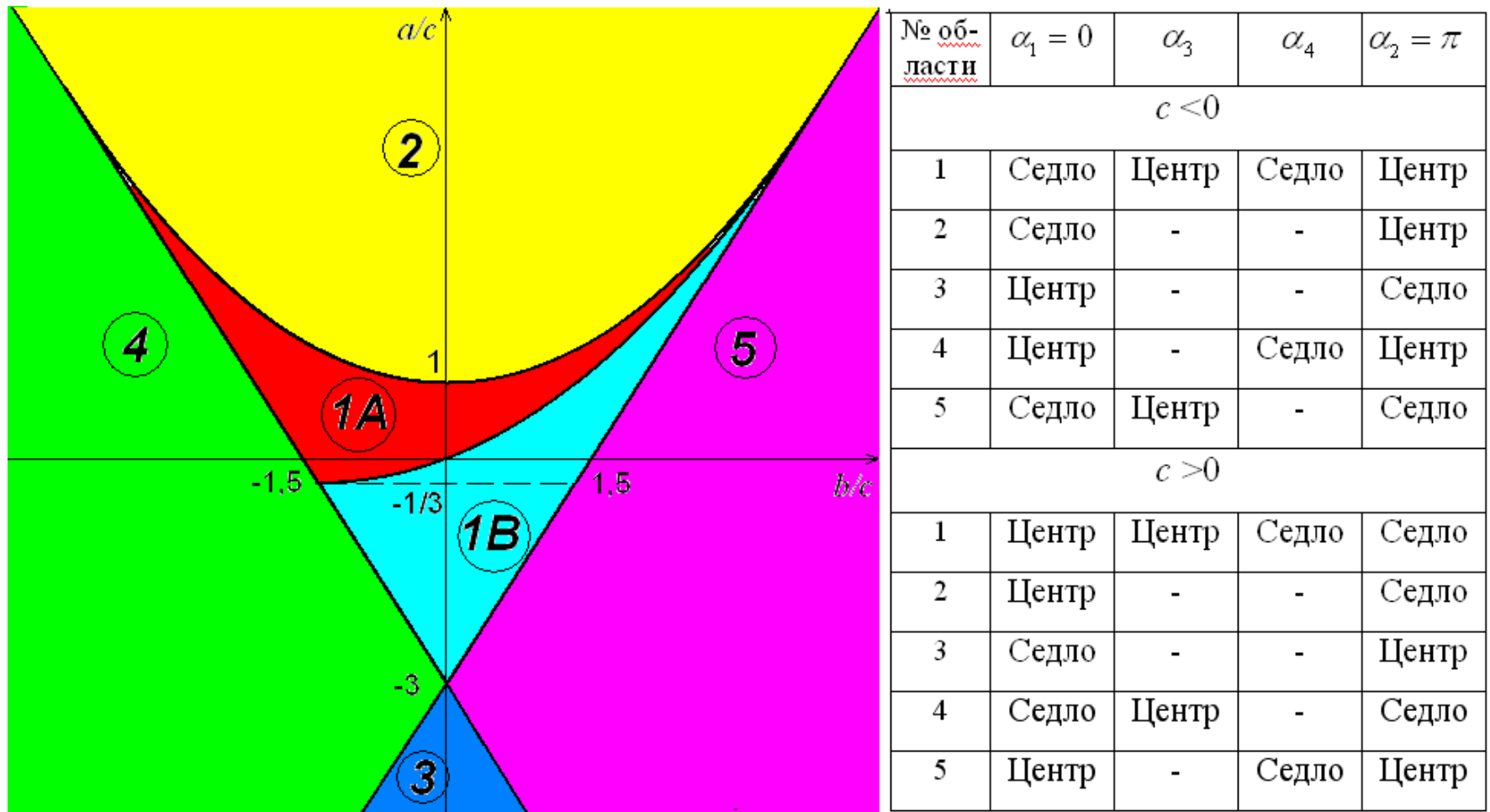


Рисунок 4 – Номограмма для определения числа и типа особых точек фазового портрета

Исследование возмущенного плоского движения

Вычисление адиабатического инварианта:

$$\dot{\alpha} = \sqrt{h + 2 \left((a - c) \cos \alpha + b \cos^2 \alpha + \frac{4}{3} c \cos^3 \alpha \right)}, \quad (6)$$

$$I = \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \dot{\alpha} d\alpha = \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \sqrt{h + 2 \left((a - c) \cos \alpha + b \cos^2 \alpha + \frac{4}{3} c \cos^3 \alpha \right)} d\alpha, \quad (7)$$

замена $u = \cos \alpha$

$$I = \int_{u_{\min}}^{u_{\max}} \frac{\sqrt{h(1-u^2) + 2 \left((a-c)u + bu^2 + \frac{4}{3}cu^3 \right) (1-u^2)}}{1-u^2} du. \quad (8)$$

Значения энергий, вычисленных на сепаратрисах:

$$h_1 = - \left((a - c) \cos \pi + b \cos^2 \pi + \frac{4}{3} c \cos^3 \pi \right),$$

$$h_2 = - \left((a - c) \cos \alpha_4 + b \cos^2 \alpha_4 + \frac{4}{3} c \cos^3 \alpha_4 \right).$$

Дополнительные коэффициенты:

$$m = \sqrt{b^2 - 4ac + c^2}, \quad f = \sqrt{16c^2 + 48ac}.$$

Вычисление вероятностей

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\Theta_1}{\Theta_2}, \quad (9)$$

$$P_1 + P_2 = 1,$$

$$\Theta_i = - \oint_{l_i} \frac{\partial [H(\dot{\alpha}, \alpha, z) - H(0, \alpha_4, z)]}{\partial z} \Phi_z dt, \quad i = \overline{1, 2}, \quad (10)$$

где $H = \frac{\dot{\alpha}^2}{2} - (a - c) \cos \alpha - b \cos^2 \alpha - \frac{4}{3} c \cos^3 \alpha$ - гамильтониан,

$$\Phi_z = \dot{z} = \beta z,$$

$\dot{\alpha} = 0, \alpha = \alpha_4$ - координаты седловой особой точки на фазовом портрете.

$$\dot{z} = \beta t > 0.$$

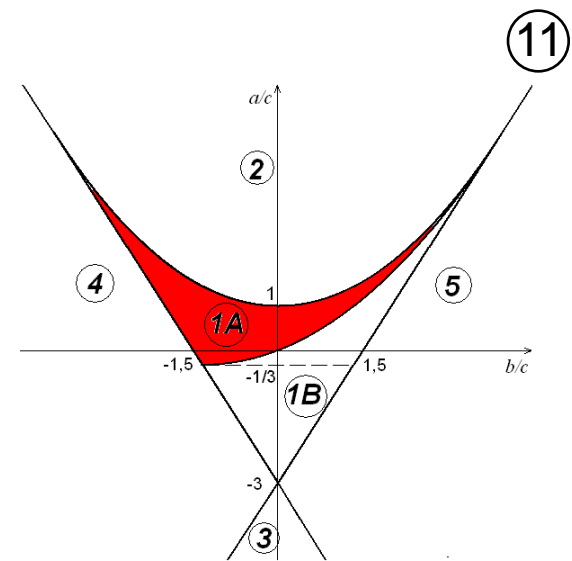
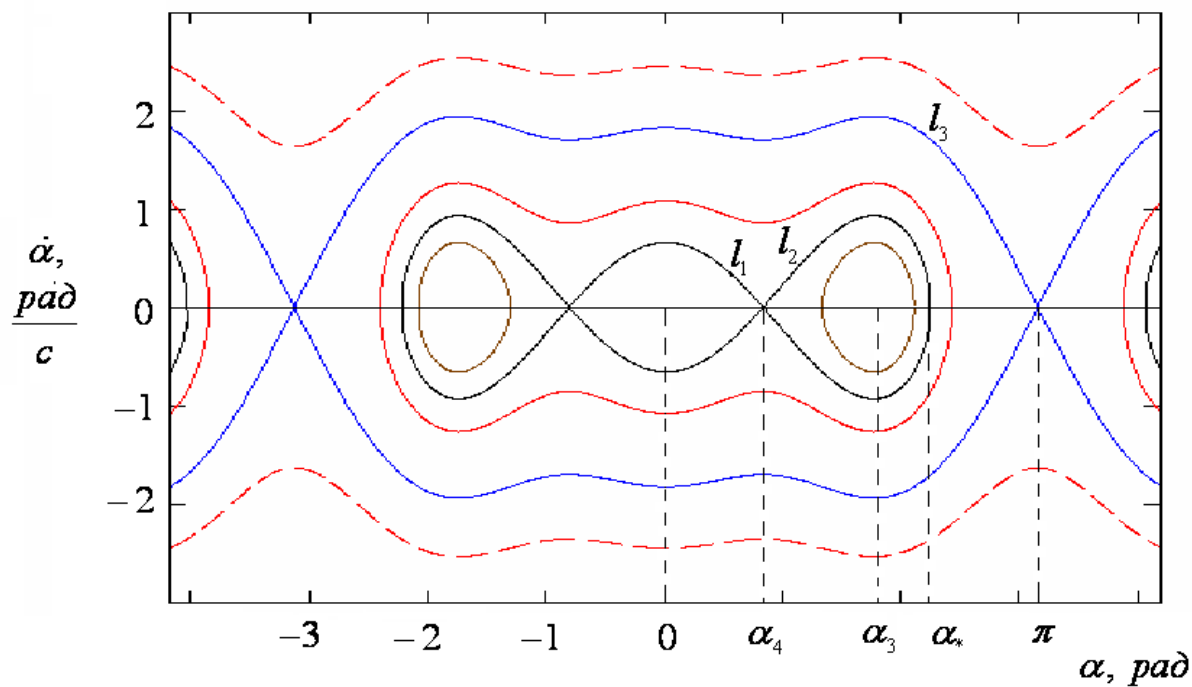
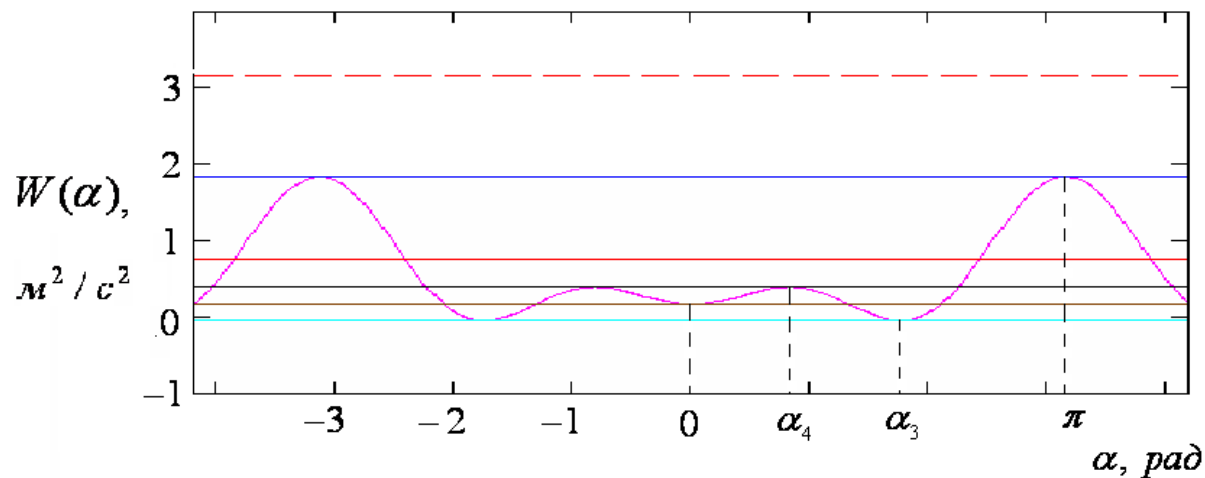


Рисунок 5 – Потенциальная энергия и фазовый портрет для $a=0,5$ $b=-1$ $c=1$ (область 1A, $c > 0$)

Вычисление адиабатических инвариантов для области 1А при $c > 0$

$$I_1 = \int_{-\alpha_4}^{\alpha_4} \dot{\alpha} d\alpha = 2q_1 + 2q_2 (F(\varphi_1, k_1) - K(k_1)) + 2q_3 (E(\varphi_1, k_1) - E(k_1)),$$

$$I_2 = \int_{\alpha_4}^{\alpha_*} \dot{\alpha} d\alpha = q_1 + q_2 F(\varphi_1, k_1) + q_3 E(\varphi_1, k_1),$$

где $\varphi_1 = \arcsin \sqrt{\frac{24mc}{(4c+b+2m)(4c-b+m)}}$, $k_1 = \sqrt{\frac{4c+b+2m}{8c}}$, $\cos \alpha_* = \frac{-b-2m}{4c}$,

$$q_1 = \frac{(4c+3b)\sqrt{2m(4c-m+b)}}{6c\sqrt{(4c-b+m)}}, \quad q_2 = -\frac{16c^2+3b^2-6m^2-16bc+4mc+3bm}{12c\sqrt{3c}}, \quad q_3 = -\frac{8b-2m}{3\sqrt{3c}}.$$

$$I_3 = \int_{-\pi}^{\pi} \dot{\alpha} d\alpha = \frac{8(f+8c-6b)\sqrt{9c-6b+3a}}{3\sqrt{3}(f+16c)} + \frac{\sqrt{f}(3b+4c)}{3\sqrt{3c}} E(\varphi_3, k_3) + \frac{\sqrt{f}(f-4c-3b)}{6\sqrt{3c}} F(\varphi_3, k_3),$$

где $\varphi_3 = 2\arctg \sqrt{\frac{16c}{f}}$, $k_3 = \sqrt{\frac{f+3b+4c}{2f}}$.

Времена перехода и вероятности для области 1А

$$t_1^A = \frac{2}{\beta} \ln \frac{I_0}{I_3} \quad - \text{ время перехода из вращения в колебание,}$$

$$t_2^A = \frac{2}{\beta} \ln \frac{I_0}{I_1 + 2I_2} \quad - \text{ время перехода из внешнего колебания во внутреннее,}$$

$$P_0^A = \frac{I_1}{I_1 + 2I_2} \quad - \text{ вероятность попадания в область колебания относительно } \alpha = 0 ,$$

$$P_{\pm\alpha_3}^A = \frac{I_2}{I_1 + 2I_2} \quad - \text{ вероятность попадания в область колебания относительно } +\alpha_3 \text{ и } -\alpha_3 .$$

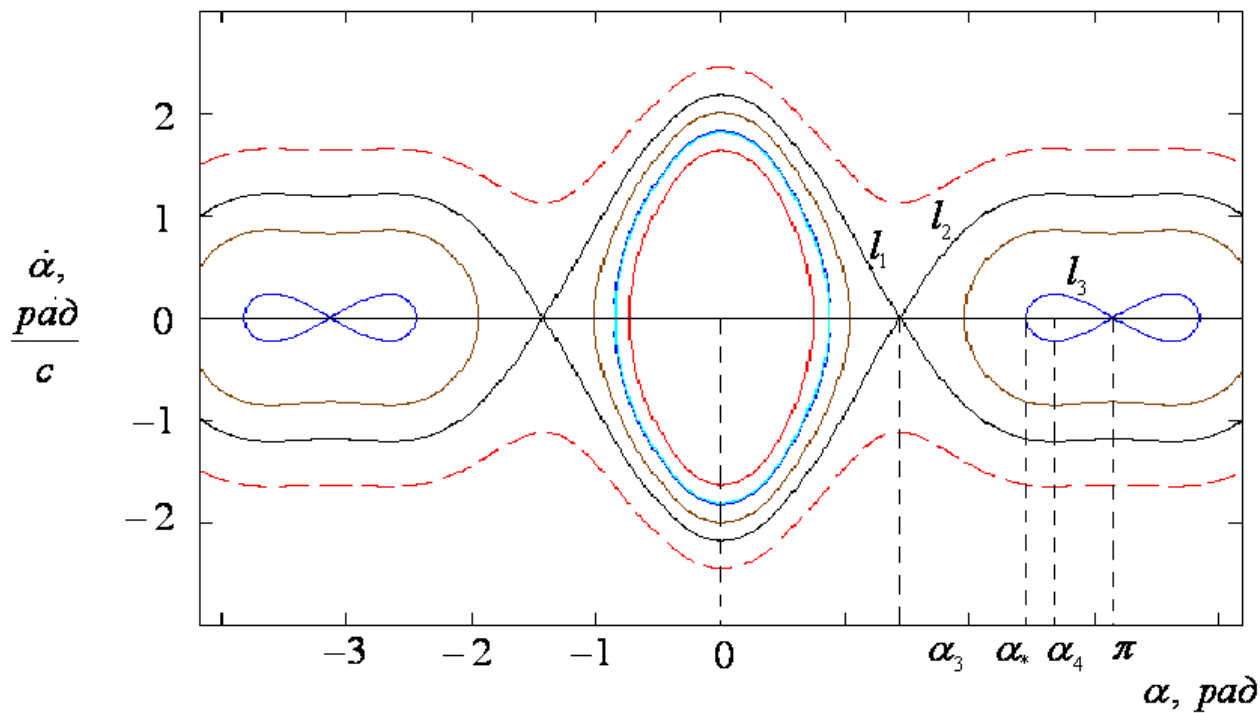
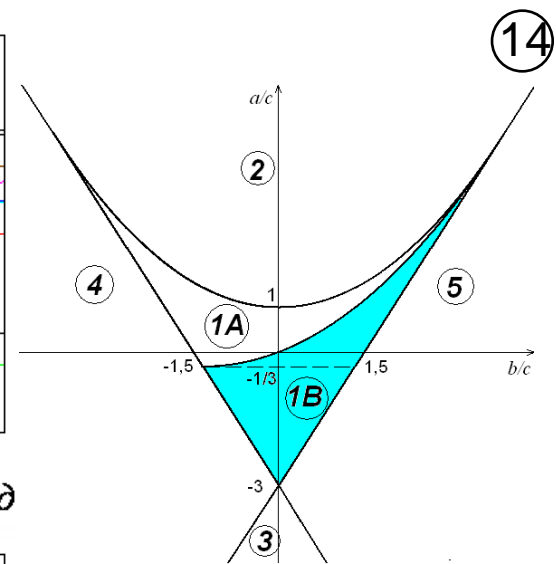
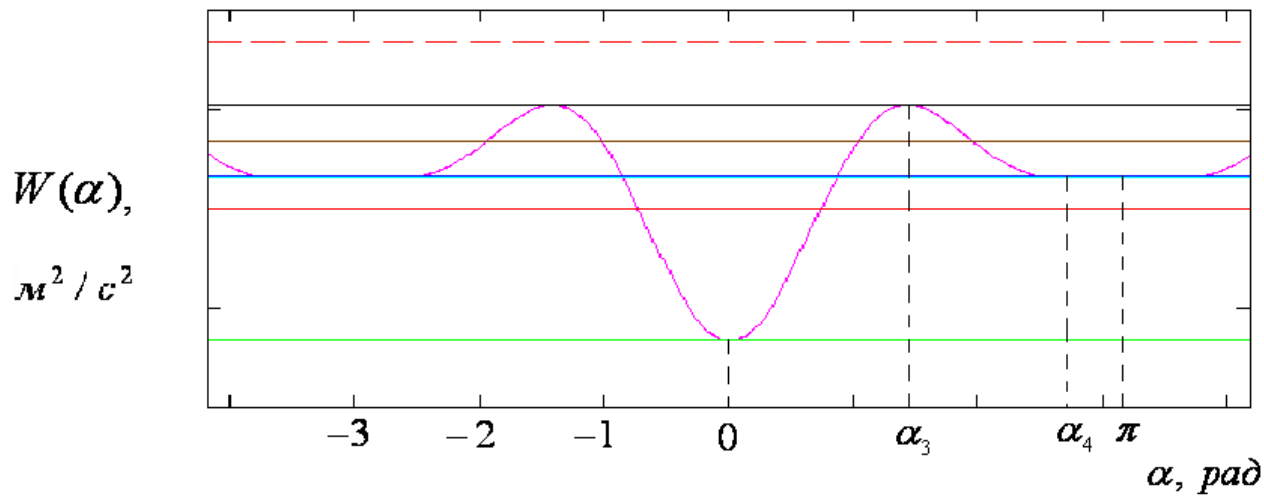


Рисунок 6 – Потенциальная энергия и фазовый портрет для $a=0,5 \quad b=1,5 \quad c=1$ (область 1B, $c > 0$)

Вычисление адиабатических инвариантов для области 1В при $c > 0$

$$I_1 = \int_{-\alpha_4}^{\alpha_4} \dot{\alpha} d\alpha = 2q_1 + 2q_2 (F(\varphi_1, k_1) - K(k_1)) + 2q_3 (E(\varphi_1, k_1) - E(k_1)),$$

$$I_2 = \int_{\alpha_4}^{\pi + \alpha_4} \dot{\alpha} d\alpha = 2q_1 + 2q_2 F(\varphi_1, k_1) + 2q_3 E(\varphi_1, k_1),$$

где $\varphi_1 = \arcsin \sqrt{\frac{(4c + b + 2m)(4c - b + m)}{24mc}}$, $k_1 = \sqrt{\frac{8c}{4c + b + 2m}}$,

$$q_1 = \frac{(m + 2b)\sqrt{2(4c - m + b)(m + 4c - b)}}{9c\sqrt{m}}, \quad q_2 = \frac{\sqrt{b + 2m + 4c}(b + 2m - 4c)}{3\sqrt{6c}}, \quad q_3 = -\frac{(4b - m)\sqrt{b + 2m + 4c}}{3\sqrt{6c}}.$$

при $a < -\frac{c}{3}$

$$I_3 = \int_{\alpha_*}^{\pi} \dot{\alpha} d\alpha = \frac{\sqrt{(12c - 3b - d)(4c - 9b + d)}}{3\sqrt{3c(12c - 3b + d)}} + \frac{\sqrt{2d}(3b + 4c)}{6c\sqrt{3}} (E(k_3) - E(\varphi_3, k_3)) -$$

$$- \frac{\sqrt{2d}(3b + 4c + d)}{12c\sqrt{3}} (K(k_3) - F(\varphi_3, k_3)),$$

где $\varphi_3 = \arcsin \sqrt{\frac{2d}{d - 3b + 12c}}$, $k_3 = \sqrt{\frac{d - 3b - 4c}{2d}}$, $\cos \alpha_* = \frac{-3b + 4c - d}{8c}$, $d = \sqrt{9b^2 + 24bc - 48ac}$.

при $a > -\frac{c}{3}$

$$I_3 = \int_{\alpha_*}^{\pi} \dot{\alpha} d\alpha = \frac{(4c-3b)\sqrt{3c-2b+a}}{6c} + \frac{\sqrt{4c+3b+d}(4c+3b)}{6c\sqrt{3}} (E(k_3) - E(\varphi_3, k_3)) +$$

$$+ \frac{-d\sqrt{(4c+3b+d)}}{6c\sqrt{3}} (K(k_3) - F(\varphi_3, k_3)),$$

где $\varphi_3 = \arcsin \sqrt{\frac{4c+3b+d}{16c}}$, $k_3 = \sqrt{\frac{4c+3b-d}{4c+3b+d}}$, $\cos \alpha_* = \frac{-3b+4c+d}{8c}$.

Времена перехода и вероятности для области 1В

$$t_1^B = \frac{2}{\beta} \ln \frac{I_0}{I_1 + I_2} \quad - \text{ время перехода из вращения в колебание,}$$

$$P_0^B = \frac{I_1}{I_1 + I_2} \quad - \text{ вероятность попадания в область колебания относительно } \alpha = 0,$$

$$P_{\pi}^B = \frac{I_2}{I_1 + I_2} \quad - \text{ вероятность попадания в область колебания относительно } \pi,$$

$$t_2^B = \frac{2}{\beta} \ln \frac{I_0 - I_1}{2I_3} \quad - \text{ время перехода из колебания относительно } \pi \text{ в колебание относительно } \alpha_4,$$

$$P_{\pm\alpha_3}^B = \frac{1}{2} \quad - \text{ вероятность попадания в область колебания относительно } +\alpha_3 \text{ и } -\alpha_3.$$

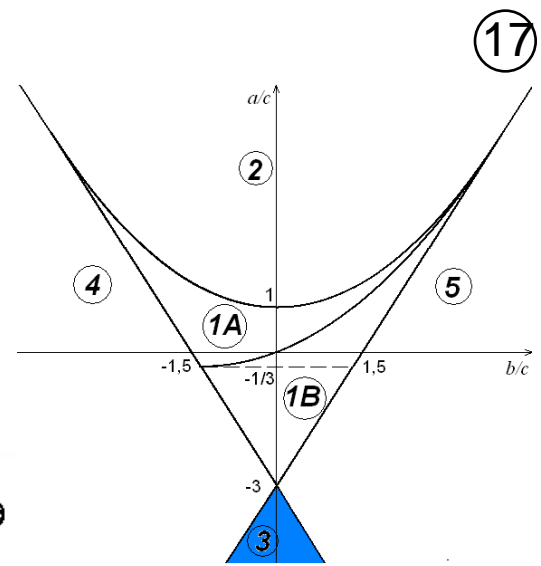
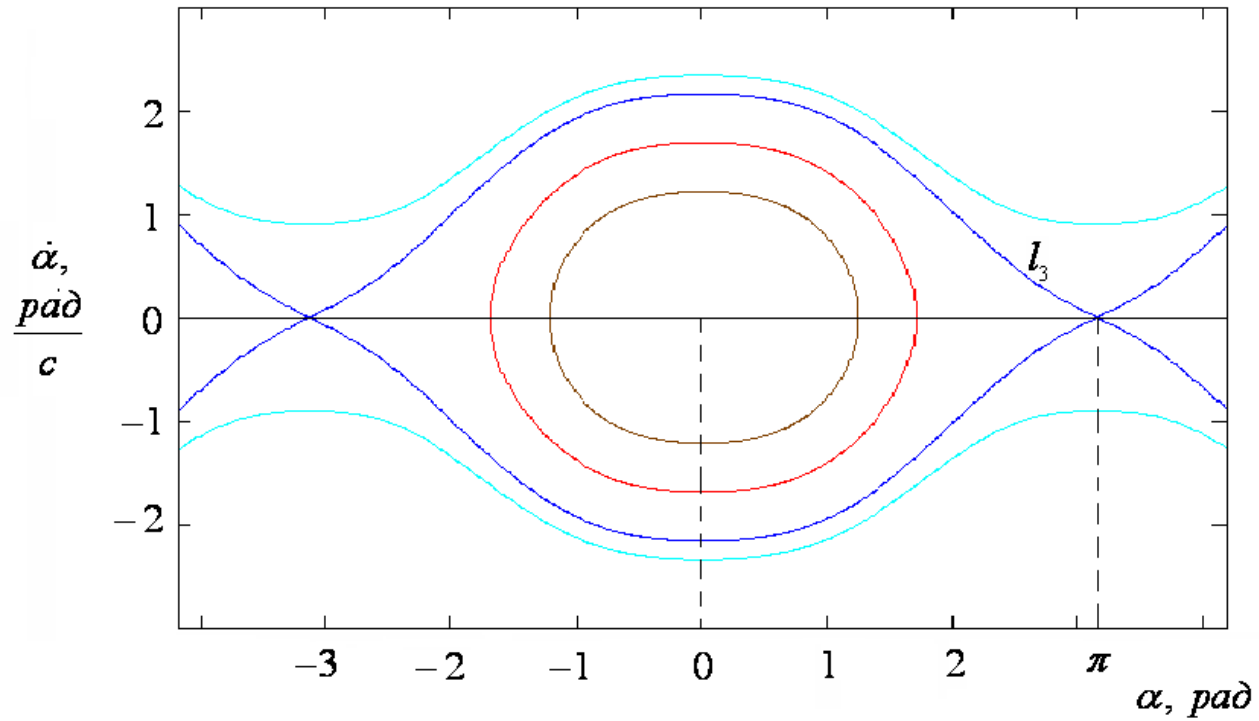
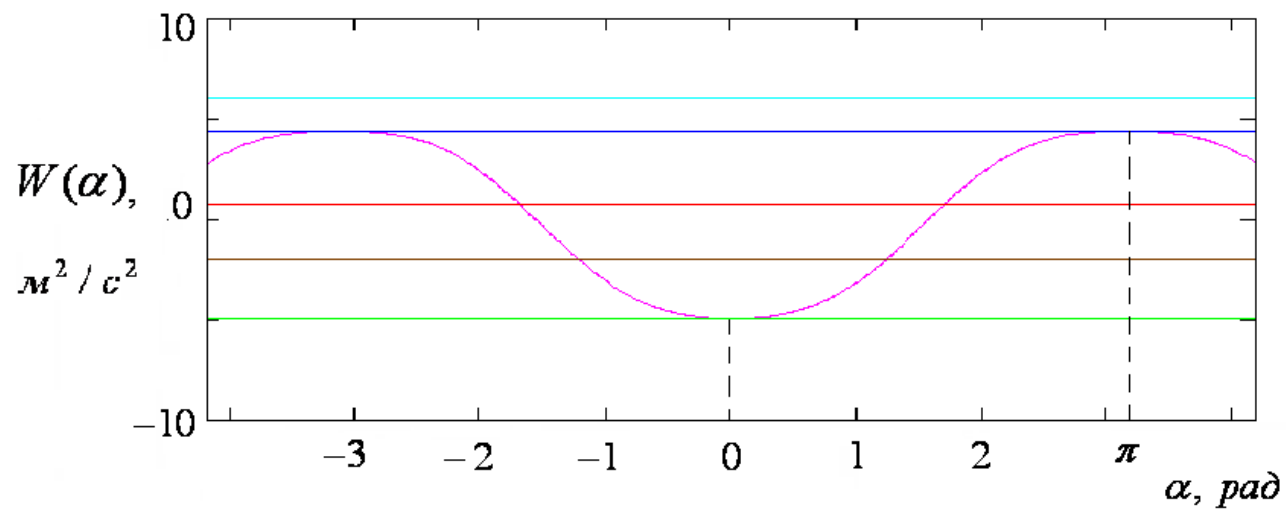


Рисунок 7 – Потенциальная энергия и фазовый портрет для $a = 5$ $b = 0,3$ $c = -1$ (область 3, $c < 0$)

Вычисление адиабатических инвариантов для области 3 при $c < 0$

$$I_3 = \int_{-\pi}^{\pi} \dot{\alpha} d\alpha = \frac{8\sqrt{3c-2b+a}}{3} + \frac{\sqrt{2d}(3b+4c)}{3\sqrt{3c}}(E(k_3) - E(\varphi_3, k_3)) - \frac{\sqrt{2d}(4c+3b+d)}{6\sqrt{3c}}(K(k_3) - F(\varphi_3, k_3)),$$

где $\varphi_3 = \arcsin \sqrt{\frac{12c-3b+d}{-4c-3b+d}}$, $k_3 = \sqrt{\frac{d-3b-4c}{2d}}$, $d = \sqrt{9b^2 - 24bc - 48ac}$.

$t_1 = \frac{2}{\beta} \ln \frac{I_0}{I_3}$ - время перехода из вращения в колебание.

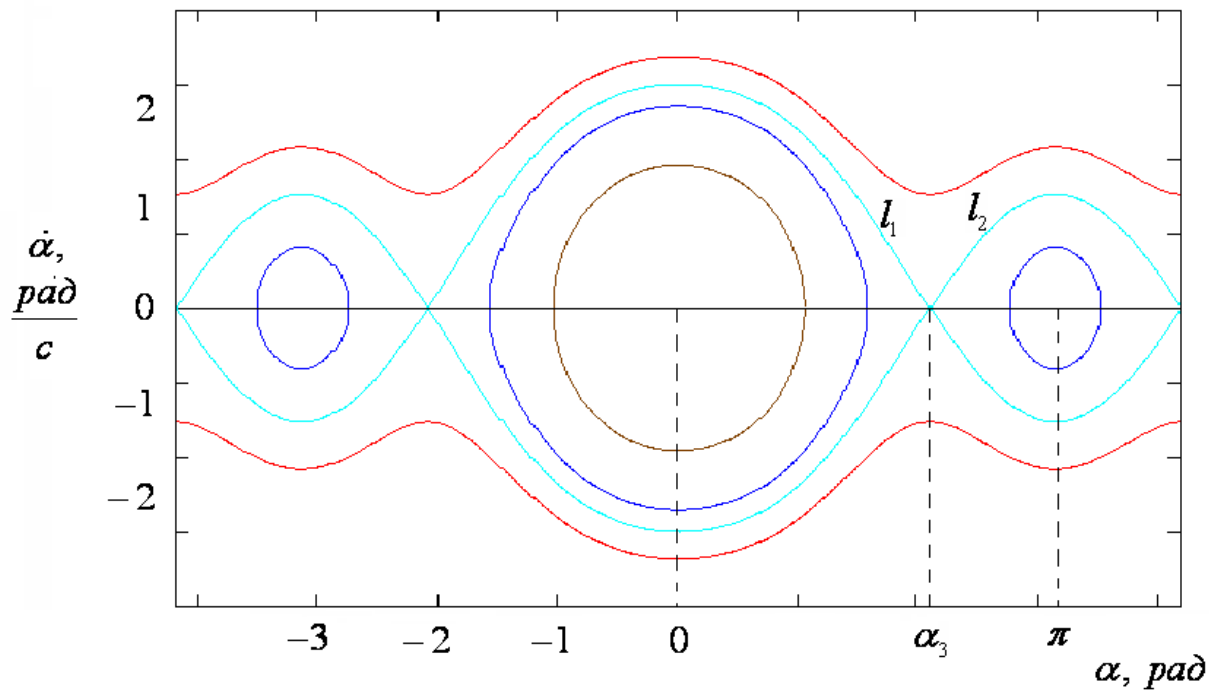
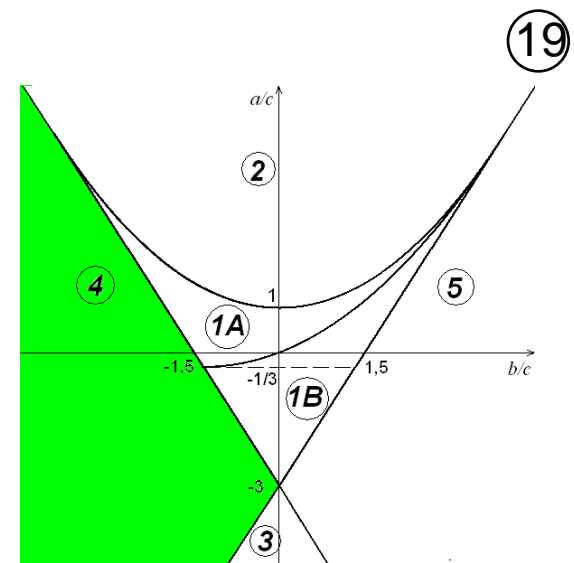
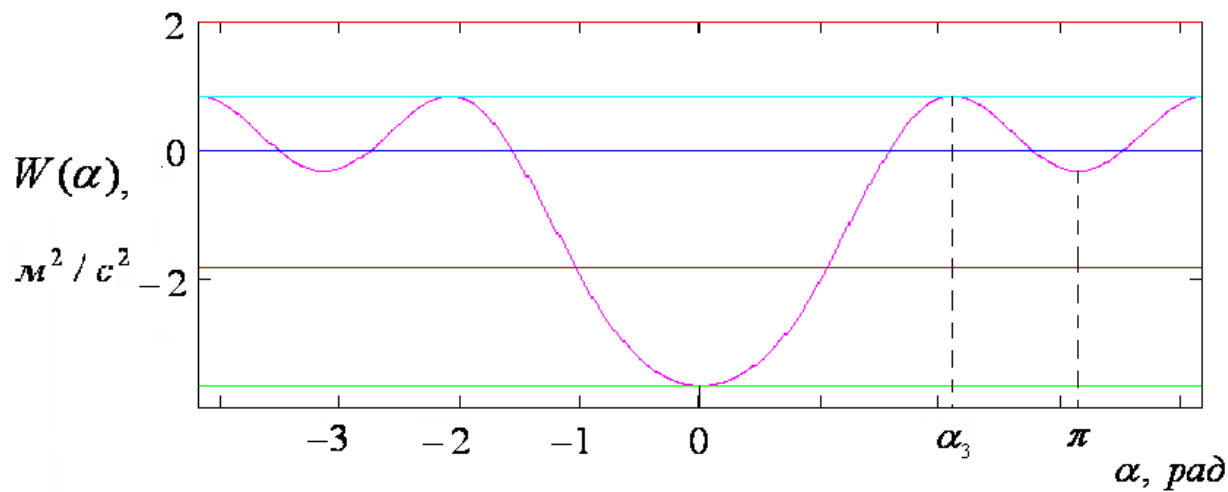


Рисунок 8 – Потенциальная энергия и фазовый портрет для $a = 2$ $b = 2$ $c = -1$ (область 4, $c < 0$)

Вычисление адиабатических инвариантов для области 4 при $c < 0$

$$I_1 = \int_{-\alpha_4}^{\alpha_4} \dot{\alpha} d\alpha = 2q_1 + 2q_2 (F(\varphi_1, k_1) - K(k_1)) + 2q_3 (E(\varphi_1, k_1) - E(k_1)),$$

$$I_2 = \int_{\alpha_4}^{\pi + \alpha_4} \dot{\alpha} d\alpha = 2q_1 + 2q_2 F(\varphi_1, k_1) + 2q_3 E(\varphi_1, k_1),$$

где $\varphi_1 = \arcsin \sqrt{\frac{m-b+4c}{8c}}, \quad k_1 = \sqrt{\frac{8c}{4c-b-2m}},$

$$q_1 = \frac{-\sqrt{2m(4c-m+b)(4c-b+m)}}{6c}, \quad q_2 = \frac{\sqrt{2}(16ac-5b^2-4bm)}{6c\sqrt{3}(b+2m-4c)}, \quad q_3 = \frac{(4b-m)\sqrt{2}(b+2m-4c)}{6\sqrt{3}c}.$$

$t = \frac{2}{\beta} \ln \frac{I_0}{I_1 + I_2}$ - время перехода из вращения в колебание,

$P_0 = \frac{I_1}{I_1 + I_2}$ - вероятность попадания в область колебания относительно $\alpha = 0$,

$P_\pi = \frac{I_2}{I_1 + I_2}$ - вероятность попадания в область колебания относительно π .

Параметры спускаемой капсулы:

$$m_a = 0,5, \quad m_b = -1, \quad m_c = 1, \quad \beta = 0,03 \quad 1/c,$$

$$c_\tau = -0,3333 + 1,333 \cos \alpha - 0,0667 \cos 2\alpha + 0,1667 \cos 3\alpha,$$

$$c_n = 0,2985 \sin \alpha + 0,0676 \sin 2\alpha + 0,0093 \sin 3\alpha.$$

Параметры движения:

$$\theta_0 = 0,03 \quad \text{рад}, \quad H_0 = 160000 \text{ м},$$

$$\lambda = \frac{1}{7200} \text{ с/м}, \quad V_0 = 7200 \text{ м/с}.$$

Начальные условия движения:

$$\alpha_0 = 0,1 \quad \text{рад}, \quad \dot{\alpha}_0 = 0,5 \quad \text{рад/с},$$

$$\dot{\alpha}_{01} = 0,51 \quad \text{рад/с},$$

Графики

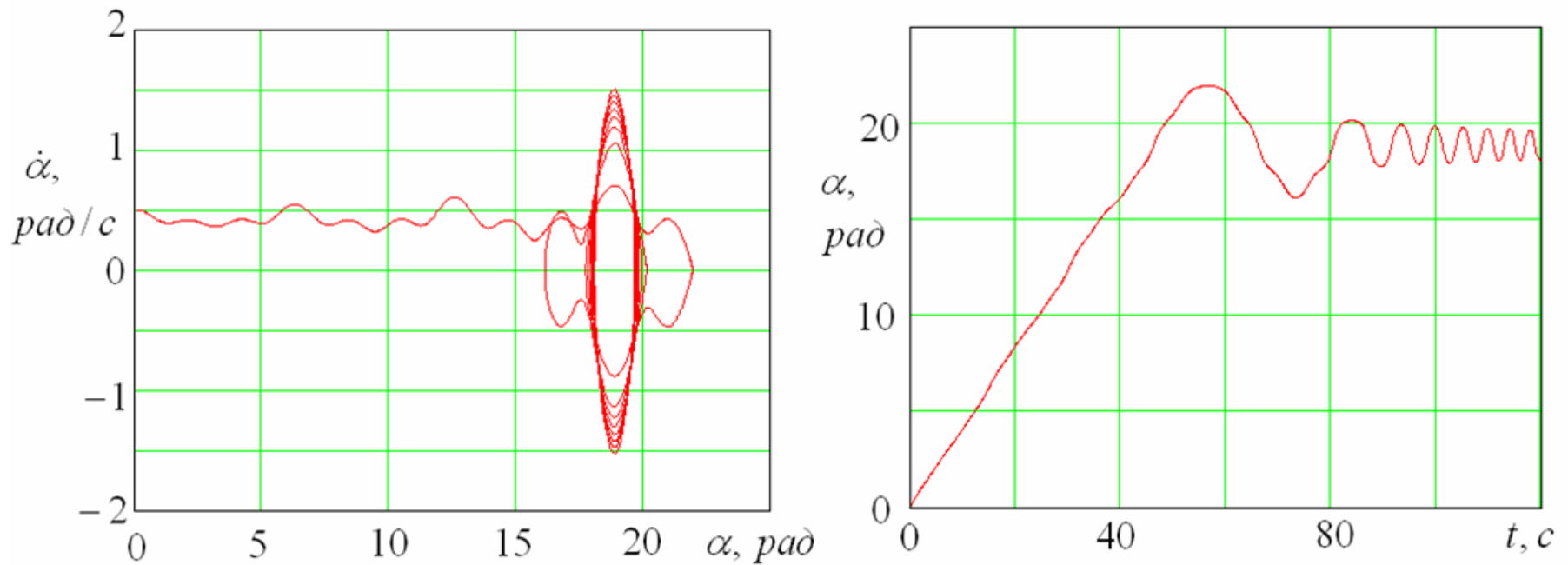
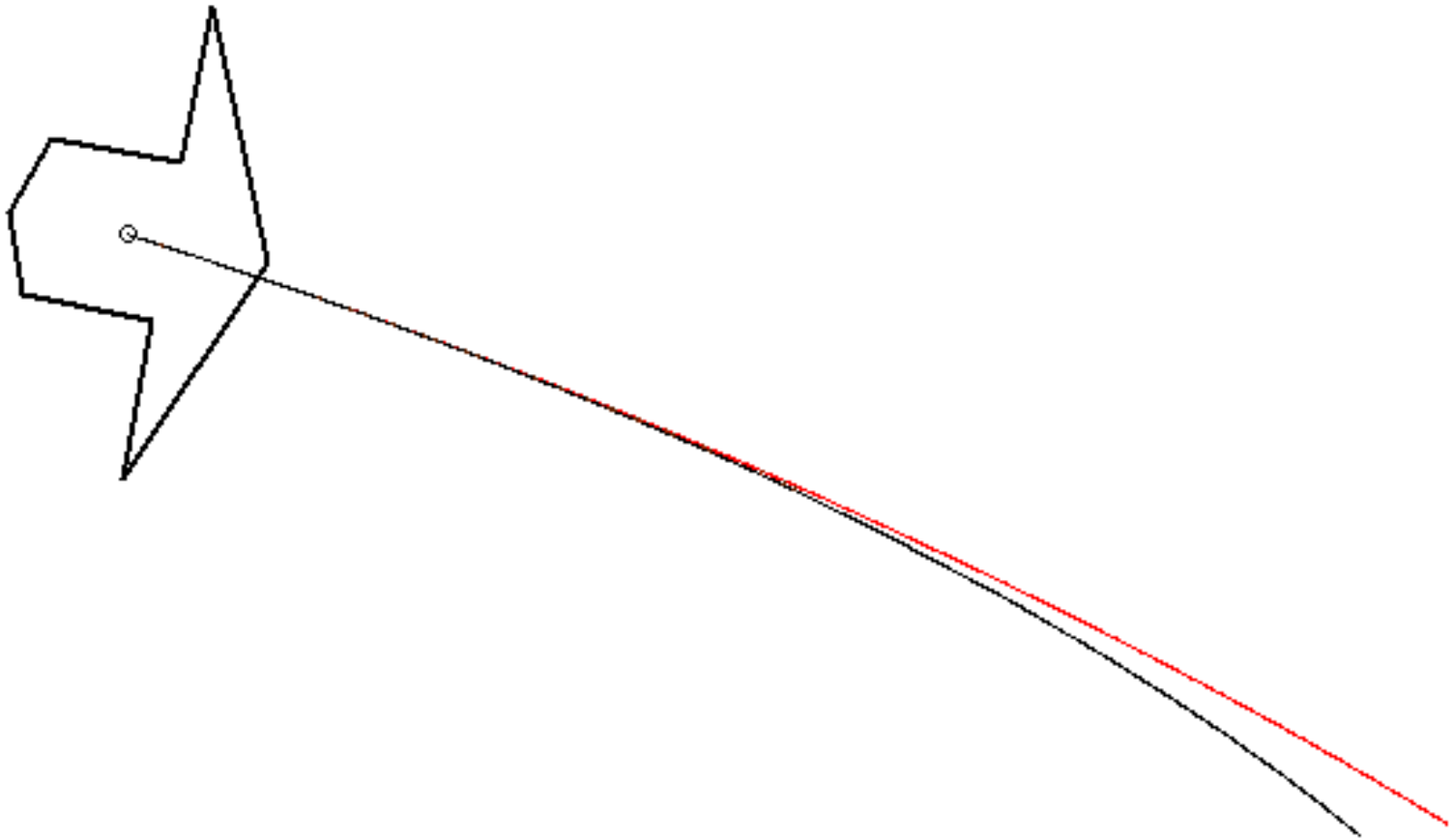


Рисунок 9 – Фазовая траектория и зависимость угла атаки от времени

$$t_1^A = 54,603 \text{ с}, \quad t_2^A = 82,504 \text{ с}, \quad P_0^A = 0,665, \quad P_{\pm\alpha_3}^A = 0,167.$$

Движение двух спускаемых аппаратов



Исследование пространственного движения

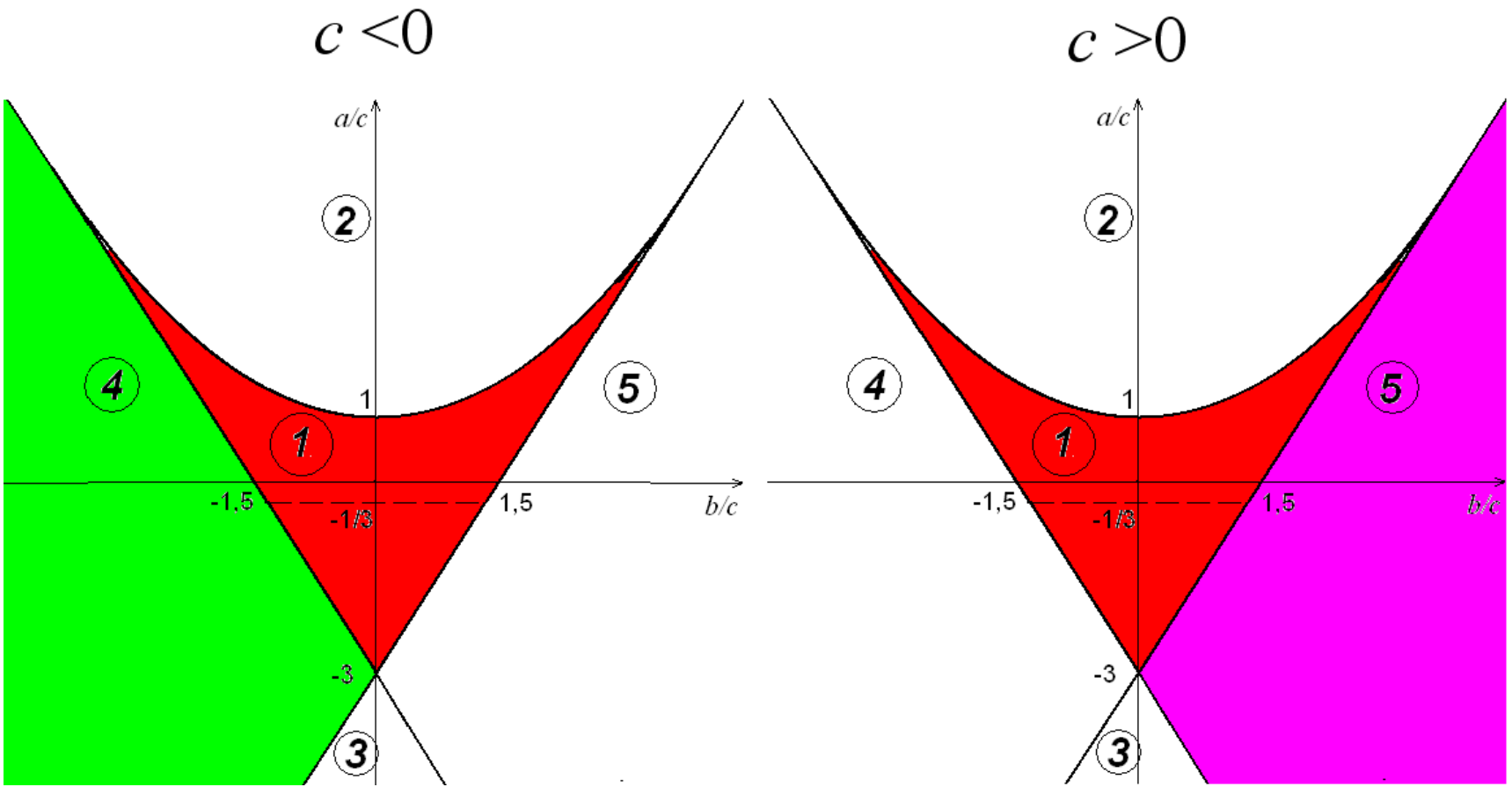


Рисунок 10 – Области с тремя дополнительными положениями равновесия

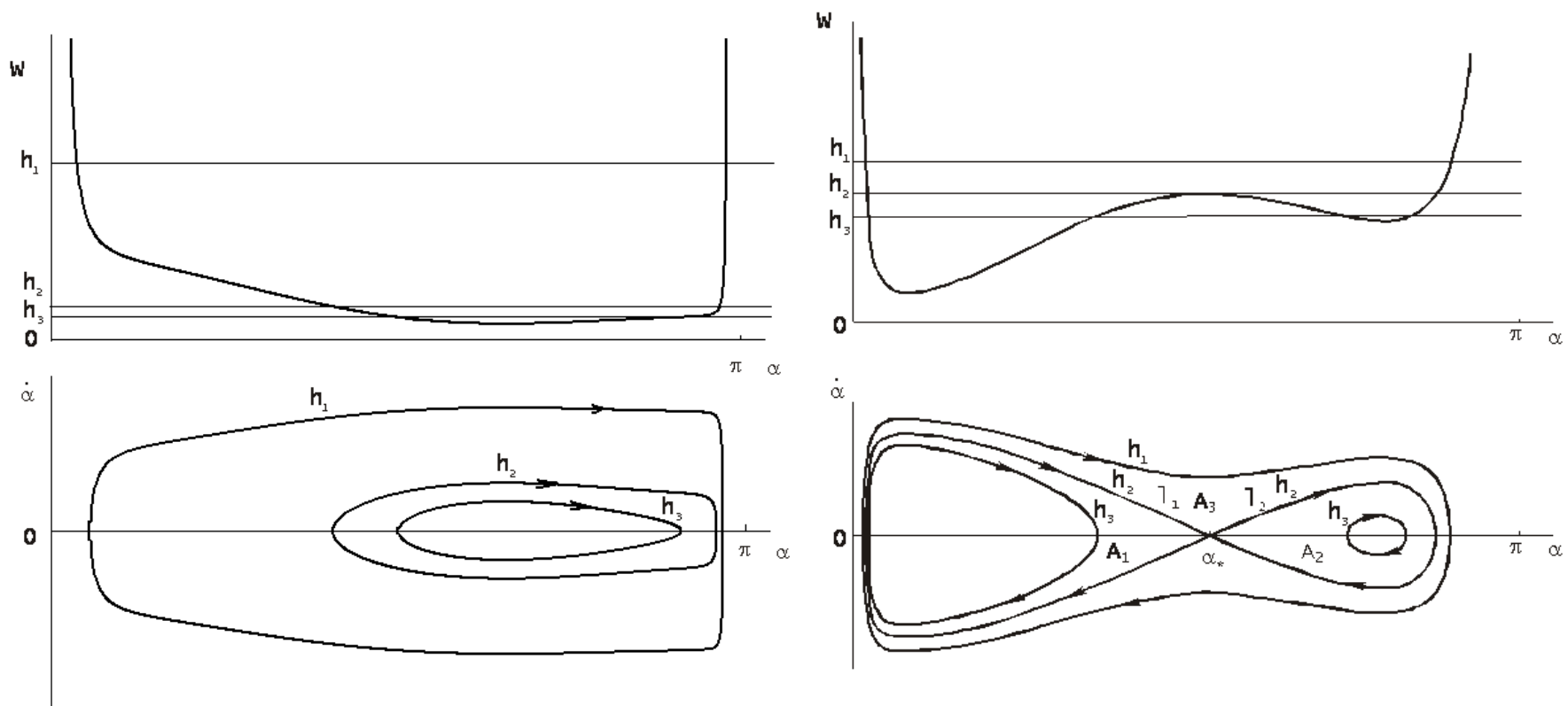


Рисунок 11 – Потенциальные энергии и фазовые портреты для пространственного движения

Вычисление времени изменения фазового портрета
для тригармонического случая:

$$t_* = \frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{-2RGu_{nep}(u_{nep}^2 + 3) + (R^2 + G^2)(3u_{nep}^2 + 1)}{(2b_0 + 8c_0u_{nep})(1 - u_{nep}^2)^3} \right), \quad (11)$$

где u_{nep} -- корень решения следующего уравнения пятой степени, удовлетворяющий условию $-1 \leq u_{nep} \leq 1$:

$$u^5 + \left(\frac{-5\xi}{4} + \frac{3\mu}{8} \right) u^4 + \left(\frac{-\mu\xi}{2} + \frac{\nu}{8} + \frac{11}{8} \right) u^3 + \left(\frac{7\xi}{16} + \frac{3\mu}{4} - \frac{3\nu\xi}{16} \right) u^2 + \left(\frac{3\nu}{8} - \frac{7}{8} \right) u - \frac{\mu}{8} - \frac{\xi\nu}{16} + \frac{\xi}{16} = 0, \quad (12)$$

где $\xi = \frac{R^2 + G^2}{RG} = \frac{\cos \alpha_V}{\cos \alpha_K} + \frac{\cos \alpha_K}{\cos \alpha_V}$, $\nu = \frac{a}{c}$, $\mu = \frac{b}{c}$.

Вычисление адиабатических инвариантов при $c > 0$

$$I_1 = q_0 \left[q_1 \frac{\sin \varphi_* \cos \varphi_*}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi_*}} + q_2 (F(\varphi_*, k) - K(k)) + q_3 (E(\varphi_*, k) - E(k)) + \right. \\ \left. + q_4 \left(\Pi(\varphi_*, n_1, k) - \Pi\left(\frac{\pi}{2}, n_1, k\right) \right) + q_5 \left(\Pi(\varphi_*, n_2, k) - \Pi\left(\frac{\pi}{2}, n_2, k\right) \right) \right],$$

$$I_2 = q_0 \left[q_1 \frac{\sin \varphi_* \cos \varphi_*}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi_*}} + q_2 F(\varphi_*, k) + q_3 E(\varphi_*, k) + q_4 \Pi(\varphi_*, n_1, k) + q_5 \Pi(\varphi_*, n_2, k) \right],$$

где $\varphi_* = \arcsin \sqrt{\frac{(u_1 - u_3)(u_* - u_2)}{(u_1 - u_2)(u_* - u_3)}}$, $k = \sqrt{\frac{(u_1 - u_2)}{(u_1 - u_3)}}$, $n_1 = \frac{1 + u_3}{1 + u_2}$, $n_2 = \frac{1 - u_3}{1 - u_2}$,

$$q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 - f(u_1, u_2, u_3, u_*),$$

$u_* = \cos \alpha_*$, u_1, u_2, u_3 — корни следующего уравнения третьей степени:

$$u^3 + \left(\frac{4}{3} \mu + 2u_* \right) u^2 + \left(-\frac{7}{4} + \frac{3}{4} \nu + \frac{3}{2} \mu \cdot u_* + 3u_*^2 \right) u - \frac{3}{4} \mu - \frac{11}{4} u_* + \frac{3}{4} \nu \cdot u_* + \frac{3}{2} \mu \cdot u_*^2 + 3u_*^3 + \frac{3RG(\xi - 2u_*)}{8c(1 - u_*^2)} = 0.$$

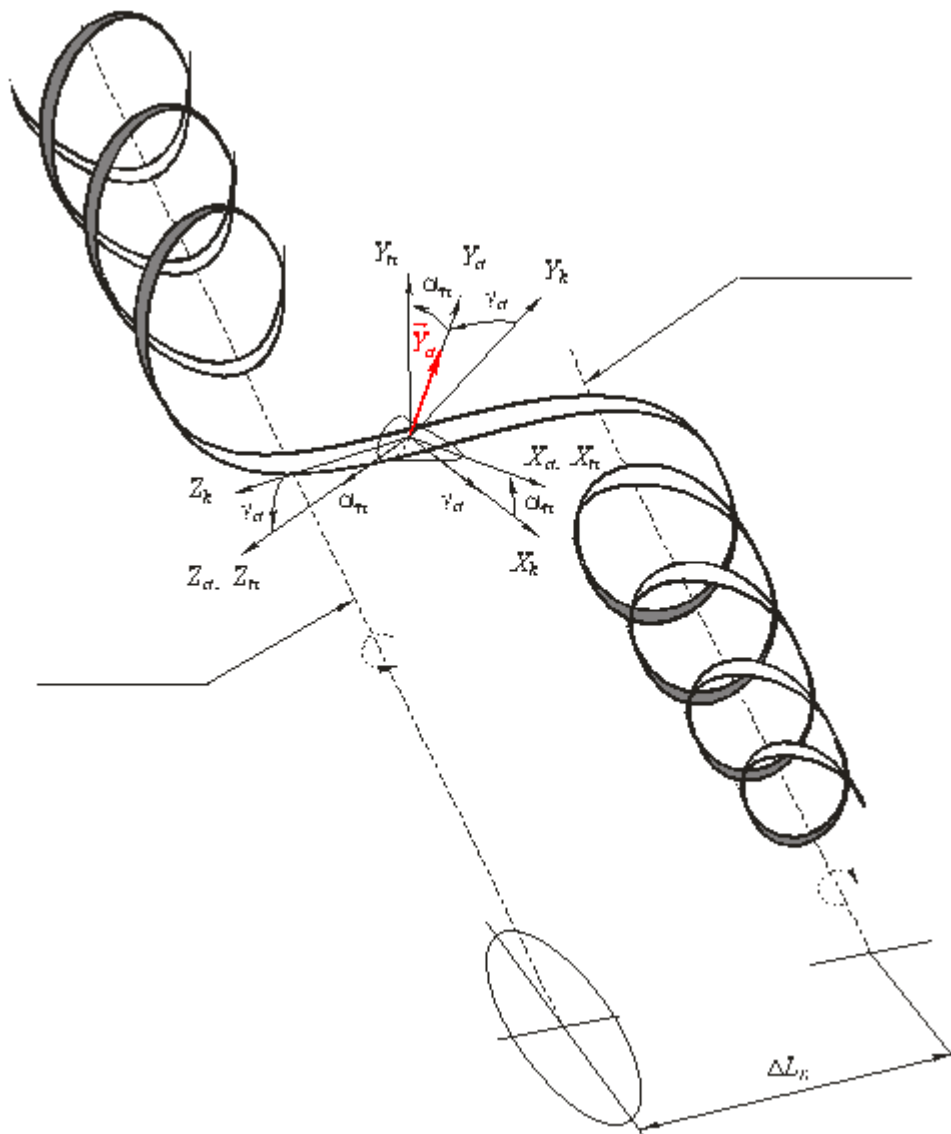


Рисунок 12 – Спиральное прецессионное движение капсулы при спуске в атмосфере

Поперечная скорость:

$$V_{\text{non}} = V_{\text{non}}(0) - \frac{i}{m} \int_0^t Y_a dt \quad (13)$$

где m – масса капсулы, Y_a – подъемная сила,

$$Y_a = (-c_\tau \sin \alpha + c_n \cos \alpha) \frac{S \rho V_0^2}{2}, \quad (14)$$

ρ – плотность атмосферы в текущий момент времени,

$$v = \text{Re}(V), \quad w = \text{Im}(V).$$

Боковое отклонение:

$$\Delta L_{\text{бок}} = S_{\text{тр}} \frac{|V_{\text{non}}|}{V} \text{ – верхняя оценка бокового отклонения точки посадки,} \quad (15)$$

где $S_{\text{тр}} = \frac{H_\epsilon}{\sin \theta}$ – расстояние по траектории от точки, в которой подействовало возмущение до точки посадки,

H_ϵ – высота, на которой подействовало возмущение.

Параметры спускаемой капсулы:

$$I_{non} = 0,04 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad m = 3 \text{ кг},$$

$$S = 0,1257 \text{ м}^2, \quad l = 0,4 \text{ м},$$

$$m_a = 0,0544, \quad m_b = -0,0296, \quad m_c = -0,326,$$

$$c_\tau = 0,1133 + 1,0928 \cos(\alpha) + 0,3083 \cos(2\alpha) + 0,0129 \cos(3\alpha),$$

$$c_n = 0,9269 \sin(\alpha) - 0,2405 \sin(2\alpha) + 0,0096 \sin(3\alpha).$$

Параметры движения:

$$\lambda = \frac{1}{7200} \text{ с} / \text{м},$$

$$K_0 = 0,142 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с},$$

$$\theta_0 = 1,5^\circ,$$

$$V_0 = 7200 \text{ м} / \text{с},$$

$$H_0 = 170000 \text{ м}.$$

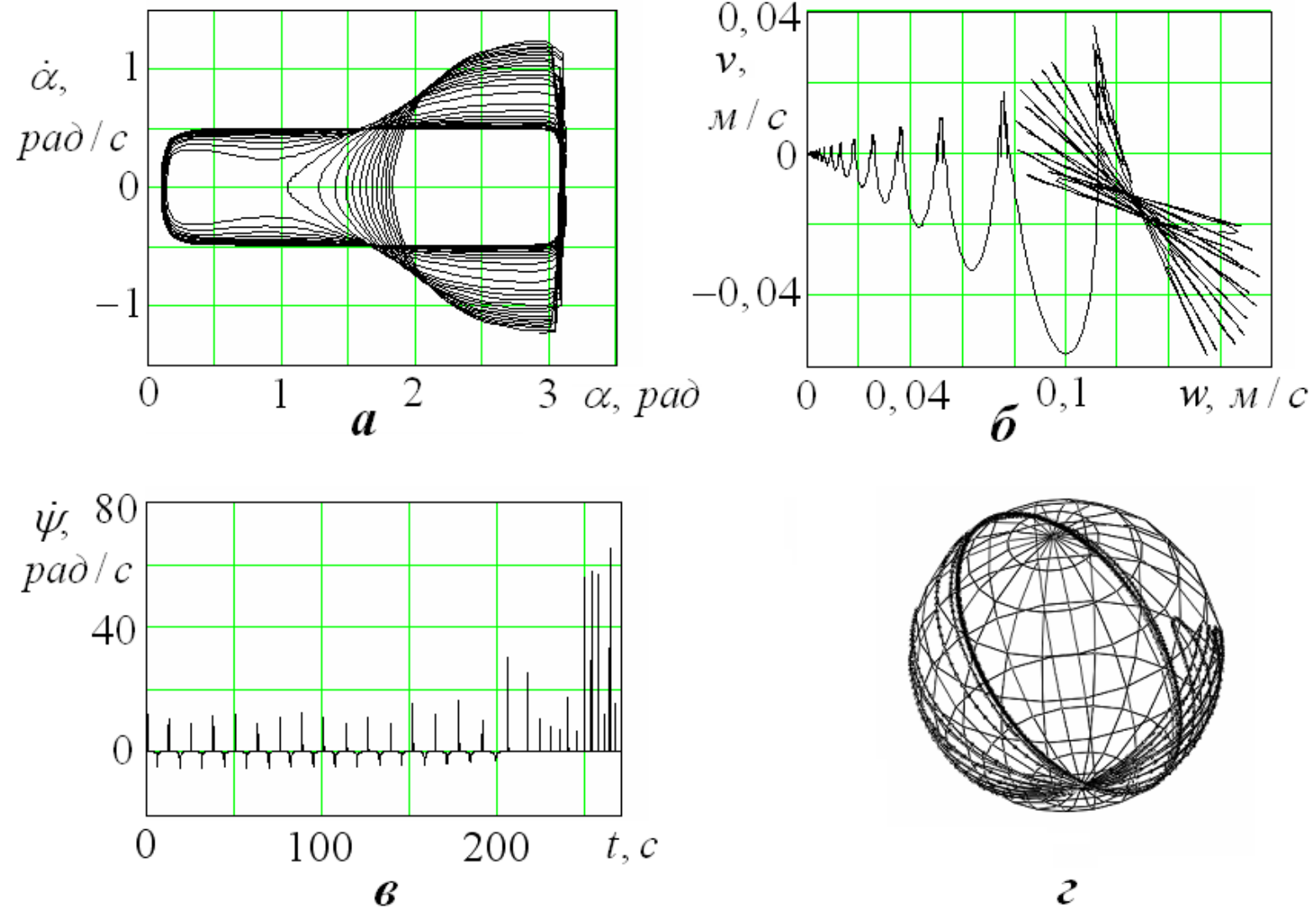


Рисунок 13 – Параметры движения при $\alpha_V = 1,6$, $\alpha_K = 1,5$, $\psi = 0$
 a – фазовая траектория, $б$ – поперечная скорость, $в$ – скорость прецессии,
 z – сферическое изображение движения продольной оси капсулы

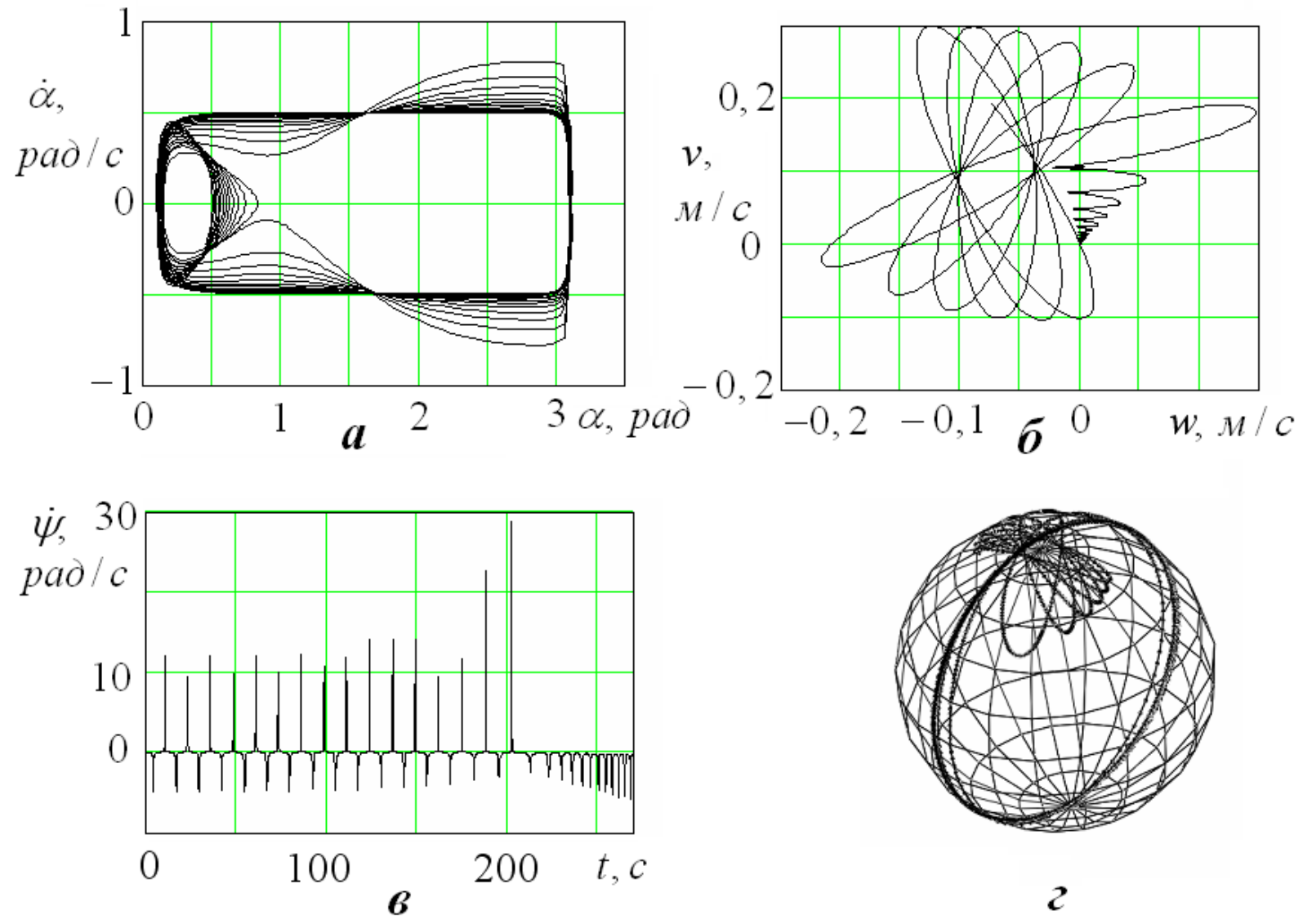


Рисунок 14 – Параметры движения при $\alpha_V = 1,6$, $\alpha_K = 1,5$, $\psi = 1$
 a – фазовая траектория, b – поперечная скорость, v – скорость прецессии,
 z – сферическое изображение движения продольной оси капсулы

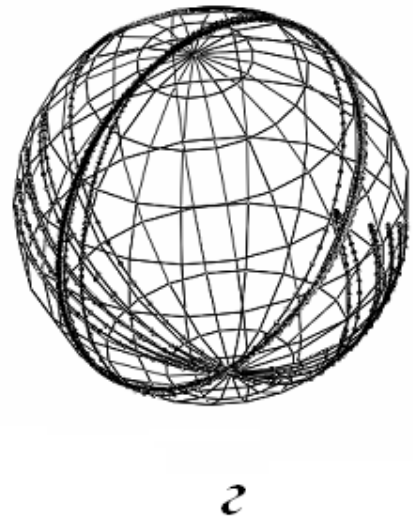
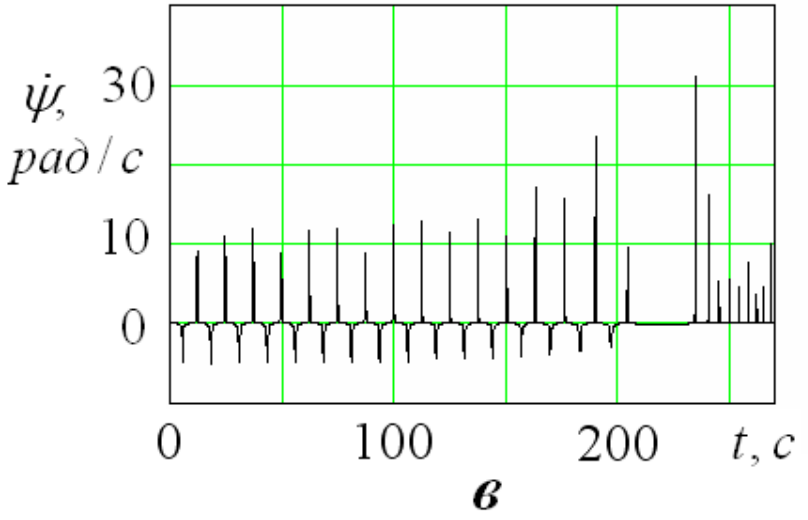
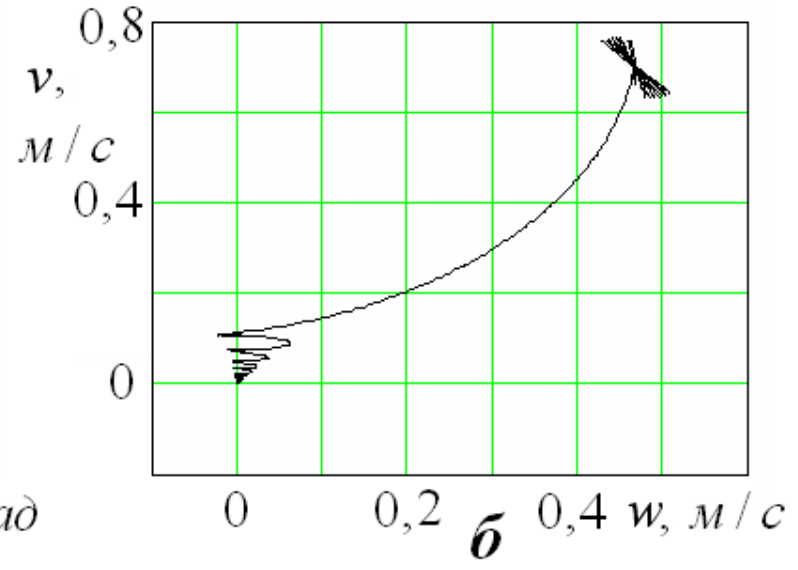
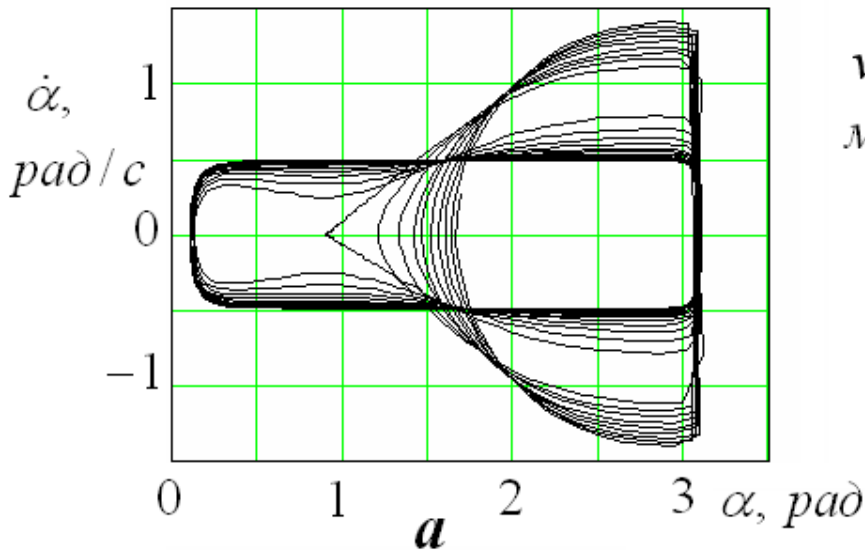


Рисунок 15 – Параметры движения при $\alpha_V = 1,6$, $\alpha_K = 1,5$, $\psi = 0,6$
 a – фазовая траектория, b – поперечная скорость, v – скорость прецессии,
 g – сферическое изображение движения продольной оси капсулы

Спасибо за внимание