Квантовая динамика и функциональные интегралы

Материалы научной конференции

Рекомендуемая форма библиографической ссылки

Квантовая динамика и функциональные интегралы: материалы научной конференции. — М.: ИПМ им.М.В.Келдыша, 2018. — 140 с. — URL: **http://keldysh.ru/quant/2018**

КВАНТОВАЯ ДИНАМИКА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Материалы
научной
конференции

Квантовая динамика и функциональные интегралы

Материалы научной конференции

Организаторы:

Отдел вычислительной физики и кинетических уравнений,
ИПМ им. М.В. Келдыша РАН

Лаборатория бесконечномерного анализа и математической физики,
Мехмат МГУ им. М.В. Ломоносова / ИПМ им. М.В. Келдыша РАН

Под общей редакцией
д. ф.-м. н. Ю. Н. Орлова

ИПМ им. М. В. Келдыша
2018

УДК 51
ББК 22
К 32

К 32 Квантовая динамика и функциональные интегралы: материалы научной конференции. — М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2018. — 140 с.

ISBN 978-5-98354-049-1

В сборник вошли статьи по квантовой динамике и ее томографическому представлению в контексте использования формул Фейнмана для построения операторов эволюции квантовых состояний. В работах также рассматриваются различные аспекты применения итерационной процедуры построения разрешающих операторов эволюционных уравнений в квантовой механике на основе теоремы Чернова.

Квантовая динамика и функциональные интегралы

Материалы научной конференции

Под общей редакцией Ю. Н. Орлова

ISBN 978-5-98354-049-1

Подписано в печать 19.12.2018. Формат 60x84/16. Усл. печ. л. 8,2. Тираж 100 экз. Заказ М-18
ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 125047, Москва, Миусская пл., 4

Предисловие

В данном научном издании представлены работы по квантовой динамике и ее томографическому представлению в контексте использования формул Фейнмана для построения операторов эволюции квантовых состояний. Цель организаторов конференции состояла в том, чтобы привлечь к обсуждению развиваемого направления исследователей, плодотворно работающих в этой области, и, наряду с ознакомлением с их последними результатами, попытаться очертить ближайшие горизонты и, по возможности, синхронизировать усилия в решении актуальных задач. Формулами Фейнмана называются представления полугруппы Шредингера $\exp(-tH), t \geq 0$, или группы Шредингера $\exp(itH), t \in R$, с помощью пределов интегралов по декартовым степеням некоторого пространства (при стремлении степени к бесконечности), связанного с классической гамильтоновой системой, при квантовании которой получается оператор Гамильтона H. Оператор H может быть, в частности, псевдодифференциальным оператором, символом которого является классическая функция Гамильтона. В случае, когда используются интегралы по декартовым степеням конфигурационного пространства, говорят о лагранжевых формулах Фейнмана, а при использовании интегралов по декартовым степеням фазового пространства – о гамильтоновых формулах Фейнмана. Существуют также формулы Фейнмана, не относящиеся ни к одному из этих типов.

Впервые представить группу или полугруппу Шредингера в виде предела интегралов по декартовым степеням конфигурационного или фазового пространства было предложено Р. Фейнманом; случай конфигурационного пространства был рассмотрен в 1948 году, а случай фазового — в 1951 году. При этом как в лагранжевой, так и в гамильтоновой формах представления подынтегральная функция в соответствующих интегралах представляет собой экспоненту от аппроксимаций функционала действия. Первое доказательство формализованной версии результатов Р. Фейнмана 1948 г. было получено Э. Нельсоном в 1964 году; при этом была использована формула Троттера. Доказательство аналогичной формализации результатов Р. Фейнмана 1951 г. было получено только в 2002 году в работе О.Г. Смолянова и соавторов *O.G. Smolyanov, A.G. Tokarev, A. Truman. Hamiltonian Feynman path integrals via the Chernoff formula // J.Math.Phys., 2002, 43:10.* При этом была использована так называемая формула Чернова, опубликованная еще в 1968 г. После появления указанной работы стало ясно, что формулы Чернова являются эффективным методом получения аппроксимаций групп и полугрупп, возникающих в квантовой механике и стохастическом анализе. Кратные интегралы в формуле Фейнмана представляют собой аппроксимации интеграла по бесконечномерному пространству в формуле Фейнмана-Каца. Эти формулы можно использовать для представлений квантовых операторов эволюции и равновесных операторов плотности, при изучении случайных полугрупп и случайных гамильтонианов, для представлений решений эволюционных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами (такими уравнениями описывается, в частности, квантовая динамика частиц с массой, зависящей от координаты и импульса, а также соответствующая диффузия), для изучения стохастических дифференциальных уравнений типа Шредингера и квантовых стохастических дифференциальных уравнений, для исследования поверхностных мер на обладающих бесконечными размерностью и коразмерностью подмногообразиях бесконечномерных пространств, для представления решений уравнений относительно функций на римановом многообразии и во многих других задачах математической физики, стохастического анализа и математической биологии.

Единый подход к изучению перечисленных задач состоит в том, что для каждой из них строится подходящая операторнозначная функция, возможно, случайная, $F(t), t \geq 0$, не обладающая, вообще говоря, полугрупповым свойством, после чего рассматривается последовательность операторнозначных функций $G_n(t)$, значение n-го члена которой определяется равенством $G_n(t) = (F(t/n))^n$. Предел последовательности функций $G_n(t)$ при $n \to \infty$ и является полугруппой, дающей решение соответствующей задачи.

Обсуждению связанных с такими задачами конструкций и посвящены работы, представленные в конференционных докладах. Одной из мотивировок при этом является применение этих конструкций для получения того, что можно было бы назвать вероятностной интерполяцией различных методов квантования. Такая интерполяция может применяться в тех случаях, когда не существует естественного однозначного отображения объектов, описывающих классическую динамику системы, в квантовые операторы.

Интерес к теореме Чернова связан не только с тем, что она позволяет получить вид разрешающего оператора в явном виде, но и с тем, что через нее просматривается связь статистики и динамики. Как известно, для построения равновесного оператора квантовой матрицы плотности надо решить уравнение Шредингера для соответствующей квантовой системы, после чего просуммировать проекторы на найденные состояния с весами, пропорциональными экспоненте Гиббса. Непосредственное квантование классической функции распределения Гиббса не приводит к желаемому результату, поскольку для некоммутирующих в общем случае операторов, входящих в гамильтониан системы, функция от оператора (т.е. экспонента Гиббса от оператора Гамильтона) не совпадает с оператором от функции. Удивительно же то, что для широкого класса гамильтонианов итерационная процедура вышеописанного типа, примененная к оператору от функции, дает функцию от оператора. Иными словами, бесконечное число раз повторенное динамическое квантование классического распределения дает квантовое распределение. Этот результат и стимулировал многочисленные работы в области исследований формул Фейнмана применительно к различным задачам. Считаем важным подчеркнуть, что основная часть представленных на конференции работ так или иначе связана с именем О.Г. Смолянова. Это доклады его прямых учеников, а также участников его семинара по бесконечномерному анализу, еженедельно проходящего на Мехмате МГУ под его руководством. Энергия и творческая активность Олега Георгиевича способствовали развитию данного направления, в результате чего сформировалась действующая научная школа. На базе Мехмата МГУ совместными усилиями организаторов Конференции была создана Лаборатория бесконечномерного анализа и математической физики под руководством О.Г. Смолянова. Предлагаемые читателю труды Конференции в основном представляют собой научные результаты, полученные сотрудниками этой Лаборатории. Также следует отметить, что в работе Конференции активное участие приняли студенты магистратуры и аспиранты МФТИ, так что научно-педагогическая деятельность Лаборатории не ограничивается стенами только Мехмата МГУ. Будучи одновременно преподавателями МФТИ, сотрудники Лаборатории совместно с коллегами кафедры высшей математики МФТИ организовали специализацию «Математические методы в современной физике», ориентированную на студентов ФОПФ МФТИ.

Считаем, что публикация в одном сборнике последних результатов в области исследования квантовой динамики и континуальных интегралов представляет интерес не только для специалистов, но и может служить источником новых задач для студентов магистратуры и аспирантов соответствующих специальностей.

Ю. Н. Орлов, В.Ж. Сакбаев

Случайные полугруппы, формулы Фейнмана и закон больших чисел

Ю. Н. Орлов[1], В. Ж. Сакбаев[2], О. Г. Смолянов.[3]

Аннотация

В предлагаемой работе исследуются последовательности композиций независимых одинаково распределенных случайных полугрупп линейных преобразований банахова пространства и асимптотические свойства распределений таких композиций при стремлении их числа к бесконечности. В частности, изучается отклонение значений композиций независимых случайных полугрупп от их математического ожидания и исследуется выполнение для таких композиций аналогов предельных теорем теории вероятности типа закона больших чисел и центральноleftй предельной теоремы. Получены условия, достаточные для стремления к нулю при $n \to \infty$ вероятности отклонения на фиксированную величину по (полу)норме в пространстве операторов композиции n случайных полугрупп от ее математического ожидания (это свойство и считается законом больших чисел для композиций). Приведены примеры последовательностей независимых случайных полугрупп, для композиции которых закон больших чисел по норме или по системе полунорм не выполнен. Получено представление когерентных состояний в квантовой оптике с помощью усреднения случайных операторов сдвига.

Введение

$\mathbf{U}(t)$, $t \geq 0$ и их итерации $(\mathbf{U}(t))^n$, $t \geq 0$, $n \in \mathbf{N}_0 \equiv \{0\} \bigcup \mathbf{N}$. Так как для каждого допустимого значения t семейство $(\mathbf{U}(t))^n$, $n \in \mathbf{N}_0$ итераций является динамической системой с дискретным временем, то можно сказать, что мы исследуем однопараметрическое семейство случайных динамических систем.

В предыдущих работах мы изучали асимптотические свойства математических ожиданий таких композиций, при этом были определены операции усреднения однопараметрических полугрупп с помощью итераций Фейнмана-Чернова. Математические ожидания композиций независимых одинаково распределенных случайных полугрупп являются уже неслучайными функциями, которые в силу теоремы Чернова (см. [18]) сходятся к однопараметрическим полугруппам

[1]Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН
[2]Московский физико-технический институт
[3]Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

операторов при стремлении к бесконечности числа компонент композиции. В предлагаемой работе изучается отклонение значений композиций независимых случайных полугрупп от их математического ожидания и исследуется выполнение для таких композиций аналогов предельных теорем теории вероятности типа закона больших чисел и центральной предельной теоремы.

Объектом исследования являются композиции случайных преобразований, значениями которых являются, как и в работах [11, 15, 16] некоммутирующие ограниченные линейные операторы в банаховом пространстве. Основным отличием рассматриваемой нами модели является изучение двухпараметрического семейства случайных операторов – композиций случайных операторов $(\mathbf{U}(t))^n,\ t \geq 0,\ n \in \mathbf{N}_0$, зависящих от вещественого параметра t и дискретного параметра n. Применение предельного перехода к двупараметрическому семейству случайных операторов позволило использовать теорему Чернова для описания асмптотического поведения математическиго ожидания композиций и получить условия выполнения закона больших чисел для последовательности композиций независимых случайных полугрупп.

Отметим, что однопараметрические семейства случайных операторов $(\mathbf{U})^n$, где $n \in \mathbf{N}_0$, и асимптотические их свойства при $n \to \infty$ изучались в работах [3, 5, 7, 10, 12, 16, 17].

Среди них мы хотели бы отметить работу [17], в которой впервые использовались методы теории полугрупп для доказательства центральной предельной теоремы. Фактически, наша работа не имеет точек соприкосновения с процитированными.

Формулировка закона больших чисел для композиции линейных операторов, предлагаемая в настоящей работе, рассматривается, по-видимому, впервые. Результаты о достаточных условиях выполнения закона больших чисел получены из рассмотрения двухпараметрического семейства случайных операторов $\{(\mathbf{U}(t))^n,\ t \geq 0,\ n \in \mathbf{N}_0\}$ вместо однопараметрического $\{\mathbf{U}^n,\ n \in \mathbf{N}_0\}$.

В работах [8, 9] изучаются случайные полугруппы – случайные величины со значениями во множестве полугрупп; а также итерации случайных полугрупп – последовательности композиций из n, $n \in \mathbf{N}$ независимых случайных полугрупп линейных ограниченных преобразований банахова пространства. Установлены условия на случайные полугруппы, достаточные для того, чтобы математические ожидания итераций случайных полугрупп сходились в определенном смысле к полугруппе при стремлении к бесконечности кратности итераций.

В настоящей работе будут исследованы взаимосвязи этих объектов – итерации случайных полугрупп из [8, 9] рассматриваются как однопараметрические семейства случайных динамических систем с дискретным временем из работ [3, 10]; в свою очередь, случайные динамические системы с непрерывным временем из [15] могут рассматриватся как пределы итераций случайных полугрупп.

Будут приведены условия, достаточные для выполнения и достаточные для нарушения закона больших чисел для композиции независимых одинаково распределенных случайных полугрупп.

Для изучения случайных полугрупп и динамических систем нам потребуется изучить математическое ожидание и дисперсию (ковариацию) случайных операторов и их степеней. Математическое ожидание операторнозначных случайных величин определяется с помощью интеграла Петтиса, а дисперсии могут определяться с помощью различных неотрицательных квадратичных отображений как отклонения среднего значения квадратичного отображения случайного оператора от значения квадратичного отображения на математическом ожидании случайного оператора. При этом каждому такому квадратичному отображению соответствует выбор второго момента случайного оператора.

Далее будут исследованы аналоги таких предельных теорем для сумм независимых случайных величин как закон больших чисел (и центральная предельная теорема). Для последовательности композиций из n независимых случайных операторов (или полугрупп) будет исследовано математическое ожидание и второй момент. Стремление к нулю при $n \to \infty$ второго момента для среднего геометрического совокупности из n случайных операторов означает выполнение некоммутативного мультипликативного закона больших чисел для случайных операторов в форме Чебышева.

Одним из ключевых вопросов является выбор определения среднего геометрического композиции n независимых случайных операторов $\mathbf{A}_1, ...\mathbf{A}_n$: является ли таким средним оператором оператор

$$\hat{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}_n \circ ... \circ \mathbf{A}_1)^{\frac{1}{n}}$$

или оператор

$$\bar{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}_n)^{\frac{1}{n}} \circ ... \circ (\mathbf{A}_1)^{\frac{1}{n}} \ ?$$

Теорема Чернова (см. [2, 19]) позволяет исследовать закон больших чисел в случае определения среднего геометрического композиции операторов по второму варианту. Изучению такой возможности и посвящена настоящая статья.

Будем говорить, что для последовательности композиций случайных операторов в топологическом векторном пространстве операторов выполняется закон больших чисел, если для любого числа $\delta > 0$ и любой полунормы ϕ из семейства порождающих топологию пространства операторнозначных функций выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty} P(\{\phi((\mathbf{A}_n)^{\frac{1}{n}} \circ ... \circ (\mathbf{A}_1)^{\frac{1}{n}} - \mathrm{M}((\mathbf{A}_n)^{\frac{1}{n}} \circ ... \circ (\mathbf{A}_1)^{\frac{1}{n}}) \geq \delta\}) = 0.$$

Если же последовательность композиций случайных операторов в банаховом пространстве удовлетворяет условию

$$\forall\ \delta > 0\ \lim_{n\to\infty} P(\{\|(\mathbf{A}_n)^{\frac{1}{n}} \circ ... \circ (\mathbf{A}_1)^{\frac{1}{n}} - \mathrm{M}((\mathbf{A}_n)^{\frac{1}{n}} \circ ... \circ (\mathbf{A}_1)^{\frac{1}{n}})\| \geq \delta\}) = 0,$$

то будем говорить, что закон больших чисел выполнен для последовательности композиций случайных операторов в банаховом пространстве.

Установлены условия на случайные операторы, достаточные для выполнения закона больших чисел; приведены примеры случайных операторов, для которых закон больших чисел не выполняется (и, тем более, не может быть выполнена центральная предельная теорема).

Последовательность итераций случайных полугрупп будем называть вероятностным представлением некоторой полугруппы $\mathbf{U}$, если для каждой полунормы p вероятность отклонения n-кратной итерации случайной полугруппы от полугруппы $\mathbf{U}$ по полунорме p на любую заданную положительную величну стремится к нулю при $n \to \infty$.

С помощью предела при $n \to \infty$ математического ожидания композиции n независимых случайных полугрупп в работах [9, 20] получено представление полугруппы, разрешающей задачу Коши для эволюционного дифференциального уравнения. Если последовательность итераций математического ожидания случайной полугруппы сходится в сильной операторной топологии, то предельная функция является полугруппой согласно теореме 3 работы [8]. В настоящей работе дана асимптотическая оценка отклонения итерации n-го порядка математического ожидания случайной полугруппы от предельной полугруппы при $n \to \infty$, являющегося систематическим отклонением аппроксимации предельной полугруппы. В терминах вторых моментов дана оценка отклонения итераций случайной полугруппы от итераций ее математического ожидания, являющегося случайным отклонением аппроксимации предельной полугруппы.

Случайные операторы и полугруппы

Для изучения случайных полугрупп и операторов введем следующее расширение понятия случайной величины. Всюду далее измеримым пространством называется пара $(\Omega, \mathcal{A})$, где Ω – множество, $\mathcal{A}$ – некоторая алгебра его подмножеств; вероятностным пространством называется набор $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, где $(\Omega, \mathcal{A})$ – измеримое пространство, а μ – неотрицательная нормированная конечно аддитивная функция на алгебре $\mathcal{A}$, которую мы называем также вероятностной мерой. Случайной величиной мы называем $\mathcal{A}$-измеримую функцию ξ на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ со значениями в некотором измеримом пространстве. Случайная величина ξ может принимать как числовые значения, так и значения в топологическом векторном пространстве, снабженном минимальной алгеброй подмножеств, содержащей топологию. Например, если такая случайная величина ξ принимает значения в пространстве операторов, то она называется случайным оператором; аналогично определяется и понятие случайной полугруппы (определение 1 ниже).

Понятие случайной полугруппы состоит в следующем. Пусть $Y_s(X)$ – топологическое векторное пространство сильно непрерывных отображений $\mathbf{F}$ полуоси $R_+ = [0, +\infty)$ в банахово пространство $B(X)$ линейных преобразований банахова пространства X, топология τ_s на котором определяется семейством функционалов $\phi_{T,u}$, $T \geq 0$, $u \in X$, действующих по правилу $\phi_{T,u}(\mathbf{F}) = \sup\limits_{t \in [0,T]} \|\mathbf{F}(t)u\|_X$; пусть также X_* – такое банахово пространство, что $(X_*)^* = X$.

Определение 1. *Случайной полугруппой мы называем случайную величину G, принимающую значения в множестве $\mathcal{S}(X)$ сильно непрерывных однопараметрических полугрупп операторов, действующих в банаховом пространстве X (алгебра $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ подмножеств $\mathcal{S}(X)$, превращающая его в измеримое пространсво, представляет собой минимальную алгебру подмножеств множества $\mathcal{S}(X)$, содержащую все множества из топологии $\tau_{\mathcal{S}}$, индуцированой на $\mathcal{S}(X)$ из топологического пространства $Y_s(X)$).*

Математическим ожиданием случайной полугруппы G как отображения пространства с мерой $(\Omega, 2^{\Omega}, \mu)$ в топологическое пространство $Y_s(X)$ будем называть интеграл Петтиса

$$M[G] = \int\limits_{\Omega} G_{\varepsilon} d\mu(\varepsilon),$$

где $M[G]$ – такой элемент пространства $Y_s(X)$, что для любых $t \in R_+, A \in X, g \in X_*$ выполняется равенство

$$\langle M[G](t)A, g\rangle = \int\limits_{\Omega} \langle G_{\varepsilon}(t)A, g\rangle d\mu(\varepsilon). \tag{1}$$

Здесь через $\langle A, g\rangle$ обозначается значение на элементе $g \in X_*$ линейного непрерывного функционала $A \in X = X_*^*$.

Нижеследующая теорема 1 предоставляет достаточные условия существования последнего интеграла от ограниченной числовой функции по конечно аддитивной мере $\mu \in W(E)$ (см. [6]).

Случайную величину ξ со значениями в пространстве $Y_s(X)$ назовем равномерно ограниченной, если $\sup\limits_{\varepsilon \in E} \sup\limits_{t \geq 0} \sup\limits_{\|x\|_X = 1} \|\xi_{\varepsilon}(t)x\|_X \leq C < +\infty$.

Случайную величину ξ со значениями в пространстве $Y_s(X)$ назовем

1. плотно слабо равностепенно непрерывной, если существует такое плотное линейное подпространство $D \subset X$, что для любого $A \in D$, любого $g \in X_*$ и любого $\sigma > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что для любого $t \in R_+$ и любого $\Delta t \in (0, \delta) : \, t + \Delta t \in R_+$ выполняется следующее неравенство $\sup\limits_{t \in R_+, \varepsilon \in E} |\langle \xi_{\varepsilon}(t + \Delta t)A - \xi_{\varepsilon}(t)A, g\rangle| \leq \sigma$.
2. плотно сильно равностепенно непрерывной, если существует такое плотное линейное подпространство $D \subset X$, что для любого $A \in D$ и любого $\sigma > 0$

существует число $\delta > 0$ такое, что для любого $t \in R_+$ и любого $\Delta t \in (0, \delta)$: $t + \Delta t \in R_+$ выполняется следующее неравенство $\sup\limits_{t \in R_+, \varepsilon \in E} |\|\xi_\varepsilon(t + \Delta t)A - \xi_\varepsilon(t)A\|_X \leq \sigma$.

Теорема 1 [9]. *Пусть μ – вещественнозначная мера на алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств множества E с ограниченной вариацией. Тогда если измеримое отображение $\xi : E \to Y_s(X)$ является равномерно ограниченной и плотно слабо (сильно) равностепенно непрерывной, то $M\xi(t) \in Y_s(X)$. Если случайная величина ξ со значениями в пространстве $Y_s(X)$ является равномерно ограниченной и плотно слабо (сильно) равностепенно непрерывной, то среднее значение случайной величины ξ является непрерывной оператор-функцией: $M\xi(t) \in C_w(R_+, B(X))$ $(M\xi(t) \in C_s(R_+, B(X)))$.*

Доказательство. Равномерная ограниченность случайной величины ξ означает, что

$\sup\limits_{\varepsilon \in E,\, t \in R_+} \|\xi_\varepsilon(t)\|_{B(X)} \leq C$ при некотором $C > 0$.

Потому в силу условия равномерной ограниченности отображения $\xi : E \times R_+ \to B(X)$ при каждом $t \geq 0$ и для любых $v \in X$ и $g \in X_*$ функция $\langle \xi_\varepsilon(t)v, g \rangle$ ограничена на множестве E и измерима как отображение $E \to C$ и, следовательно, интегрируема по мере μ (см. [13]), а интеграл (20) как функция аргумента g является линейным непрерывным функционалом на пространстве X_*. Следовательно, для любого $v \in X$ определен интеграл Петтиса $\int\limits_E \xi_\varepsilon v d\mu(\varepsilon) \in X$, причем отображение $v \to \int\limits_E \xi_\varepsilon v d\mu(\varepsilon)$ линейно по v в силу линейности интеграла Петтиса и непрерывно в силу равномерной ограниченности отображения ξ. Следовательно, отображение $v \to \int\limits_E \xi_\varepsilon v d\mu(\varepsilon)$ определено на пространстве X и является линейным ограниченным преобразованием пространства X. Поэтому при каждом $t > 0$ среднее значение $M\xi(t) = \int\limits_E \xi_\varepsilon d\mu(\varepsilon) \in B(X)$ корректно определено.

Согласно условию плотной слабой равномерной непрерывности существует такое плотное линейное подпространство $D \subset X$, что для любого $A \in D$, любого $g \in X_*$ и любого $\sigma > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что для любого $t \in R_+$ и любого $\Delta t \in (0, \delta)$: $t + \Delta t \in R_+$ выполняются следующие оценки $\sup\limits_{t \in R_+} |\langle (M\xi(t + \Delta t) - M\xi(t))A, g \rangle| = \sup\limits_{t \in R_+} |\langle \int\limits_E [\xi_\varepsilon(t + \Delta t)A - \xi_\varepsilon(t)A, g \rangle] d\mu| \leq \int\limits_E \sup\limits_{t \in R_+, \varepsilon \in E} |\langle \xi_\varepsilon(t + \Delta t)A - \xi_\varepsilon(t)A, g \rangle| d\mu \leq \sigma$.

Из условия сильной равномерной непрерывности следует существование такого плотного линейного подпространства $D \subset X$, что для любого $A \in D$ и любого $\sigma > 0$ существует такое число $\delta > 0$ что для любого $t \in R_+$ и любого

$\Delta t \in (0,\delta) : \ t + \Delta t \in R_+$ имеют место следующие оценки:

$$\sup_{t\in R_+} \|M\xi(t+\Delta t)A - M\xi(t)A\|_X =$$

$$\sup_{t\in R_+} \sup_{\|g\|_{X_*}=1} |\langle (M\xi(t+\Delta t) - M\xi(t))A, g\rangle| \leq$$

$$\leq \int\limits_E \sup_{t\in R_+,\varepsilon\in E} \sup_{\|g\|_{X_*}=1} |\langle \xi_\varepsilon(t+\Delta t)A - \xi_\varepsilon(t)A, g\rangle| d\mu =$$

$$= \int\limits_E \sup_{t\in R_+,\varepsilon\in E} \|\xi_\varepsilon(t+\Delta t)A - \xi_\varepsilon(t)A\|_X d\mu \leq \sigma$$

.

Для любого $u \in X$ найдется элемент $A \in D$ такой, что $\|u - A\|_X \leq \sigma$. Поэтому согласно условию равномерной ограниченности оценка $\|M\xi(t)u - M\xi(t)A\|_X \leq C\sigma$ справедлива при всех $t \geq 0$. Таким образом, непрерывность математического ожидания $M\xi$ случайной величины ξ имеет место в соответствующих топологиях. $\square$

Если на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ определена случайная полугруппа G, то ее генератором называется случайная величина $\mathbf{H}_G$ на том же вероятностном пространстве, определяемая условием: для каждого $\varepsilon \in \Omega$ значение $\mathbf{H}_G(\varepsilon)$ случайной величины $\mathbf{H}_G$ представляет собой генератор полугруппы $G(\varepsilon) \in \mathcal{S}(X)$. Так определенная случайная величина $\mathbf{H}_G$ принимает значение в множестве $\mathcal{G}(X)$ генераторов сильно непрерывных однопараметрических полугрупп, действующих в пространстве X. Топология τ_G на множестве $\mathcal{G}(X)$ определяется условием, чтобы биекция $\mathcal{J}$ между $S(X)$ и $G(X)$, при которой каждой полугруппе соответствует ее генератор, была гомеоморфизмом топологических пространств $(S(X), \tau_S)$ и $(G(X), \tau_G)$. Таким образом, $\mathbf{H}_G = \mathcal{J} \circ G$; иначе говоря, $\mathbf{H}_G$ – это измеримая функция на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ (случайная величина), принимающая значения в топологическом пространстве генераторов $\mathcal{G}(X)$. Если математическим ожиданием случайной полугруппы G является операторнозначная функция F_G, эквивалентная по Чернову (см. [21]) некоторой полугруппе U_G, то генератор полугруппы U_G и будет называться математическим ожиданием случайного генератора $\mathcal{H}_G$ случайной полугруппы G.

Такое определение усреднения генераторов является расширением процедуры усреднения в пространстве операторов, поскольку в случае, если все значения случайного генератора ограничены, то его среднее значение совпадает с обычным средним значением элементов банахова пространства. (см. [9]). В случае, когда значения случайного генератора являются неограниченными операторами, естественное определение математического ожидания случайной величины $\mathcal{H}_G$ может не быть корректным, но введенное в [9] определение усреднения применимо.

Моменты случайных операторов и полугрупп

Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство.

Рассмотрим случайную величину $\mathbf{U}$ со значениями в банаховом пространстве $X = B(H)$ и определим объекты, характеризующие моменты ее распределения.

Математическим ожиданием случайного оператора $\mathbf{U}$ называется оператор $M[\mathbf{U}] \in B(H)$, равный интегралу Петтиса от вектор-функции $\mathbf{U}:\ E \to B(H)$ по мере μ.

Математическое ожидание является моментом первого порядка для векторной случайной величины $\mathbf{U}$.

Первый момент векторной случайной величины $\mathbf{U}$ характеризуют математические ожидания различных линейных отображений пространства X. Если линейное отображение $F:\ X \to Y$ непрерывно, то $M[F(\mathbf{U})] = F(M[\mathbf{U}])$.

Охарактеризовать второй момент векторной случайной величины $\mathbf{U}$ могут математические ожидания различных неотрицательно определенных квадратичных отображений пространства X. Дисперсией случайной величины $\mathbf{U}$ является значние второго момента на отклонении случайной величины от ее математического ожидания.

1. Например, если отображение $K:\ B(H) \to B^+(H)$ действует по правилу $K(\mathbf{U}) = \mathbf{U}^*\mathbf{U}$, то соответствующим функции K вторым моментом случайной величины $\mathbf{U}$ является неотрицательно определенный оператор $M[K(\mathbf{U})] = M[\mathbf{U}^*\mathbf{U}]$, а дисперсией случайной величины $\mathbf{U}$ является неотрицательный оператор $D_K(\mathbf{U}) = M[K(\mathbf{U} - M[\mathbf{U}])] = M[K(\mathbf{U})] - K(M[\mathbf{U}])$.

2. Непосредственно вторым моментом векторнозначной случайной величины $\mathbf{U}$ является ковариационный оператор, то есть билинейная форма на пространстве X^*, определяемая так: билинейная форма $\beta_{\mathbf{U}}$ каждой упорядоченной паре векторов $(f,g) \in X^* \times X^*$ сопоставляет число $\beta_{\mathbf{U}}(f,g) = M[\overline{f(\mathbf{U})}g(\mathbf{U})]$. При этом соответствующая дисперсия случайной величины $\mathbf{U}$ является билинейной формой $D_\beta(\mathbf{U})$ на пространстве X^*, определяемой для каждой пары векторов $(f,g) \in X^* \times X^*$ равенством $D_\beta(\mathbf{U})(f,g) = M[\overline{(f(\mathbf{U} - M[\mathbf{U}])}(g(\mathbf{U} - M[\mathbf{U}]))] = M[\overline{f(\mathbf{U})}g(\mathbf{U})] - \overline{f(M[\mathbf{U}])}g(M[\mathbf{U}])$.

3. Кроме того, динамика пространства квантовых состояний (динамика алгебры наблюдаемых) прпедставляет собой положительно определенную квадратичную функцию $\Lambda:\ B(H) \to B(B^*(H))$ (либо $V:\ B(H) \to B(B(H))$), действующую по правилу $\Lambda(\mathbf{U}) = \mathcal{T}_{\mathbf{U}}$, где $\mathcal{T}_{\mathbf{U}}(\rho) = \mathbf{U}\rho\mathbf{U}^*\ \forall\ \rho \in (B(H))^*$ (либо $V(\mathbf{U}) = \mathbf{T}_{\mathbf{U}}$, где $\mathbf{T}_{\mathbf{U}}(\mathbf{A}) = \mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{U}\ \forall\ \mathbf{A} \in (B(H))$). Отображения $\mathcal{T}$ (либо $\mathbf{T}$) переводят положительные элементы в положительные. Тогда второй момент случайной величины $\mathbf{U}$ может быть определен как $M[\Lambda(\mathbf{U})]$

(как $M[V(\mathbf{U})]$), а соответствующие дисперсии случайной величины $\mathbf{U}$ определяются равенствами $D_\Lambda(\mathbf{U}) = M[\Lambda(\mathbf{U})] - \Lambda(M[\mathbf{U}]) = M[\Lambda(\mathbf{U} - M[\mathbf{U}])]$ (либо как $D_V(\mathbf{U}) = M[V(\mathbf{U})] - V(M[\mathbf{U}]) = M[V(\mathbf{U} - M[\mathbf{U}])]$).

Общим свойством приведенных примеров вторых моментов является следующее – стремление к нулю значений дисперсии на последовательности случайных операторов свидетельствует об асимптотической детерминированности предела последовательности случайных операторов.

В настоящей работе исследуются первый и второй моменты случайного оператора $\mathbf{U}_\varepsilon(t)$ при фиксированном $t > 0$ со значениями в пространстве $B(H)$, случайной полугруппы $\mathbf{U}_\varepsilon(t)$, $t \geq 0$ со значениями в пространстве $C_s(R_+, B(H))$ и их случайного генератора $\mathbf{L}_\varepsilon$ со значениями во множестве $\mathcal{G}(H)$ генераторов сильно непрерывных полурупп в гильбертовом пространстве H. Дальнейшей целью является изучение предельного поведения первого и второго моментов у композиции из n независимых одинаково распределенных случайных операторов $\mathbf{U}: \ \Omega \to B(H)$ (или случайных полугрупп $\mathbf{U}(\cdot): \ \Omega \to Y_s(H)$) при $n \to \infty$.

Пример 1. Сначала рассмотрим пример случайного оператора $\mathbf{A}$, заданного на вероятностном пространстве $(E, 2^E, \mu)$ и принимающего счетное множество значений $\{\mathbf{A}_k, \, k \in \mathbf{N}\}$ в некотором шаре радиуса $r \in (0, +\infty)$ в пространстве $B(H)$.

Математическим ожиданием случайного оператора $\mathbf{A}$ является предел:

$$\bar{\mathbf{A}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{A}_k P(\{\mathbf{A} = \mathbf{A}_k\}) \in B(H)$$

Математическим ожиданием случайной полугруппы $\mathbf{U}(t) = \exp(\mathbf{A}t)$, $t \geq 0$, является равномерно непрерывная оператор-функция $\bar{\mathbf{U}}$, которая согласно [9] эквивалентна по Чернову полугруппе $\exp(\bar{\mathbf{A}}t)$, $t \geq 0$.

Рассмотрим показательный для дальнейшего изложения пример случайного унитарного оператора и случайных унитарных полугрупп. Особенностями рассматриваемого примера являются конечная аддитивность меры на "вероятностном"пространстве $(E, 2^E, \mu)$ и некомпактность (в сильной операторной топологии) множества значений случайной величины $\mathbf{U}$.

Пример 2. Пусть $(E, 2^E, \mu)$ – пространство с неоторицательной, нормированной конечно аддитивной мерой, и пусть $(B(H), \mathcal{A}_s)$ – пространство ораниченных линейных операторов, снабженное структурой измеримого пространства с алгеброй подмножеств $\mathcal{A}_s$ – минимальной алгеброй, содержащей все открытые подмножества сильной операторной топологии τ_s на пространстве ораниченных линейных операторов $B(H)$. Тогда любое отображение $\mathbf{U}: \ E \to B(H)$ является измеримым отображением пространства с мерой $(E, 2^E, \mu)$ в измеримое пространство $(B(H), \mathcal{A}_s)$, то есть, случайным оператором.

Исследуем математическое ожидание и второй момент случайного оператора из примера 2.

Пусть $\mathbf{U}_\varepsilon = e^{-it\mathbf{L}_\varepsilon}$ при некотором заданном числе $t > 0$, где $\mathbf{L}_\varepsilon$, $\varepsilon \in E = (0,1)$, $\varepsilon \to +0$ – самосопряженная регуляризация максимального симметрического оператора $\mathbf{L}$. Тогда при $\varepsilon \to +0$ последовательность унитарных операторов $\{\mathbf{U}_\varepsilon\}$, $\varepsilon \to +0$, либо сходится в сильной операторной топологии к оператору $e^{-it\mathbf{L}}$ при условии $\dim(\mathrm{Ker}(\mathbf{L}^*+i\mathbf{I})) = 0$, либо сходится в слабой операторной топологии к оператору $e^{-it\mathbf{L}^*}$ при условии $\dim(\mathrm{Ker}(\mathbf{L}^* + i\mathbf{I})) \neq 0$. Поэтому для любой меры $\mu \in W_0(E)$ выполняется равенство $M[\mathbf{U}](t) = \int\limits_E e^{-it\mathbf{L}_\varepsilon} d\mu(\varepsilon) = e^{-it\mathbf{L}}$ при условии $\dim(\mathrm{Ker}(\mathbf{L}^* + i\mathbf{I})) = 0$, либо выполняется равенство $M[\mathbf{U}](t) = \int\limits_E e^{-it\mathbf{L}_\varepsilon} d\mu(\varepsilon) = e^{-it\mathbf{L}^*}$ при условии $\dim(\mathrm{Ker}(\mathbf{L}^* + i\mathbf{I})) \neq 0$. Относительно определенных в соответствии с 1)-3) вторых моментов случайного унитарного оператора или случайной унитарной полугруппы заметим следующее.

Предложение 1. *Пусть $\boldsymbol{U}$ – случайный оператор из примера 1 и пусть мера μ удовлетворяет условию $\mu \in W_0(E)$. Тогда $D_K(\boldsymbol{U}) = 0$ при условии $\dim(\mathrm{Ker}(\boldsymbol{L}^*+i\boldsymbol{I})) = 0$, $D_K(\boldsymbol{U}) = \boldsymbol{I} - e^{-it\boldsymbol{L}} e^{-it\boldsymbol{L}^*} \equiv \boldsymbol{P}_{H_1(t)}$ при условии $\dim(\mathrm{Ker}(\boldsymbol{L}^* + i\boldsymbol{I})) \neq 0$. Здесь $H_1(t)$ – сдвиговая компонента в разложении Вольда (см. [14]) изометрического оператора $e^{it\boldsymbol{L}}$.*

Следует отметить, что как функция параметра $t \geq 0$ дисперсия $D_K(\mathbf{U})$ монотонно возрастает от нуля до максимального значения – проектора на пространство некорректности задачи Коши для уравнения Шредингера с гамильтонианом $\mathbf{L}$ (см. [13]).

Предложение 2. *Пусть $\boldsymbol{U}$ – случайный оператор из примера 1 и пусть мера μ удовлетворяет условию $\mu \in W_0(E)$. Тогда $\beta_{\boldsymbol{U}}(f,g) = 0$ для любых $f, g \in B_*(H) = T_1(H)$.*

По определению, $f, g \in B^*(H)$, в частности, возможно рассмотреть случай, когда $f, g \in \Sigma(H)$, более того, $f = |u >< u|$ и $g = |v >< v|$. В таком случае $f(\mathbf{U}(t)) = (u, \mathbf{U}(t)u)$, поэтому для любого $\mu \in W_0(E)$ справедливо равенство $M[f(\mathbf{U}(t))] = (u, w - \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \mathbf{U}_\varepsilon(t)u) = (u, M[\mathbf{U}(t)]u)$. Поэтому для функционалов f, g указанного вида и в случае меры $\mu \in W_0(E)$ справедливо равенство:

$$M[\overline{f(\mathbf{U}(t))} g(\mathbf{U}(t))] = \int\limits_E \overline{(u, \mathbf{U}_\varepsilon(t)u)}(v, \mathbf{U}_\varepsilon(t)v) d\mu(\varepsilon) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} [\overline{(u, \mathbf{U}_\varepsilon(t)u)}(v, \mathbf{U}_\varepsilon(t)v)] = \overline{(u, M[\mathbf{U}(t)]u)}(v, M[\mathbf{U}(t)]v)$$

Следовательно, для функционалов f, g указанного вида и в случае меры $\mu \in W_0(E)$ справедливо равенство

$$\beta_{\mathbf{U}}(f,g) = M[\overline{f(\mathbf{U})} g(\mathbf{U})] - \overline{f(M[\mathbf{U}])} g(M[\mathbf{U}]) = 0.$$

Предложение 3. *Пусть $\boldsymbol{U}$ – случайный оператор из примера 1 и пусть мера μ удовлетворяет условию $\mu \in W_0(E)$.*

Тогда $D_\Lambda(\boldsymbol{U})(\rho) = M[\Lambda(\boldsymbol{U})](\rho) - \Lambda(M[\boldsymbol{U}])(\rho) = M[e^{-it\boldsymbol{L}_\varepsilon}\rho e^{it\boldsymbol{L}_\varepsilon}] - e^{-it\boldsymbol{L}}\rho e^{it\boldsymbol{L}^*} = 0$ *при условии* $\dim(\mathrm{Ker}(\boldsymbol{L}^* + i\boldsymbol{I})) = 0$*, в то время как* $D_\Lambda(\boldsymbol{U})(\rho) = M[\Lambda(\boldsymbol{U})](\rho) - \Lambda(M[\boldsymbol{U}])(\rho) = M[e^{-it\boldsymbol{L}_\varepsilon}\rho e^{it\boldsymbol{L}_\varepsilon}] - e^{-it\boldsymbol{L}^*}\rho e^{it\boldsymbol{L}} = \mathcal{T}^\mu(t)\rho - e^{-it\boldsymbol{L}^*}\rho e^{it\boldsymbol{L}}$ *при условии* $\dim(\mathrm{Ker}(\boldsymbol{L}^* + i\boldsymbol{I})) = 0$*, в частности,* $\langle D_\Lambda(\boldsymbol{U})(\rho), \boldsymbol{I}\rangle = 1 - \rho(\boldsymbol{P}_{H_0}) = \rho(\boldsymbol{P}_{H_1}) = \langle \rho, D_K(\boldsymbol{U})\rangle$.

То есть $\langle D_\Lambda(\mathbf{U})(\rho), \mathbf{I}\rangle = \langle \rho, D_K(\mathbf{U})\rangle$ и в этом смысле $D_\Lambda(\mathbf{U})$ как элемент пространства $(B(H))^{**}$ совпадает с $D_K(\mathbf{U})$ как с элементом $B(H)$. А при условии $\rho = \rho_\varphi$, где $\varphi \in H_1$, справедливо равенство $D_\Lambda(\mathbf{U})(\rho) = \mathcal{T}^\mu(t)\rho$.

Закон больших чисел и предельные теоремы для композиций независимых операторов (полугрупп)

Предельные теоремы для последовательностей сумм независимых одинаково распределенных случайных величин ξ_j, $j \in \mathbf{N}$, со значениями в R (или R^d) характеризуют асимптотические при $n \to \infty$ свойства распределения вероятности случайной величины $\Xi_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j$ и усредненной случайной величины $\bar{\xi}_{(n)} = \frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j$.

При изучении последовательостей композиций независимых одинаково распределенных случайных величин ξ_j, $j \in \mathbf{N}$, со значениями в банаховом пространстве ограниченных линейных операторов $B(H)$ нас будут интересовать асимптотические при $n \to \infty$ свойства распределения вероятности случайной величины $\Xi_n = \xi_n \circ ... \circ \xi_1$; в качестве усредненной случайной величины могут выступать случайные величины

$$\hat{\xi}_n = (\xi_n \circ ... \circ \xi_1)^{\frac{1}{n}} \tag{2}$$

и

$$\bar{\xi}_n = (\xi_n)^{\frac{1}{n}} \circ ... \circ (\xi_1)^{\frac{1}{n}}, \tag{3}$$

где дробная степень оператора определяется с помощью спектрального разложения в случае самосопряженного или унитарного оператора. В связи с этим при изучении случайных унитарных или самосопряженных операторов допустимо рассматривать оба варианта усреднения композиции случайных операторов, но нами в этой статье будут рассмотрены только предельные свойства усреденных по правилу (3) случайных операторов $\bar{\xi}_n$.

Аналогом закона больших чисел для последовательности сумм независимых случайных величин является следующее утверждение о последовательности композиций независисимых случайных операторов:

Определение 2. Пусть $\{\mathbf{A}_n\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных операторов, имеющих математическое ожидание $\bar{\mathbf{A}} \in B(H)$.

Тогда следующее условие:

$$\lim_{n\to\infty} P(\{\|((\mathbf{A}_n)^{\frac{1}{n}} \circ ... \circ (\mathbf{A}_1)^{\frac{1}{n}} - \bar{\mathbf{A}})x\| > \varepsilon\}) = 0 \tag{4}$$

при любых $x \in H$, $x \neq 0$, и любых $\varepsilon > 0$, будем называть законом больших чисел в сильной операторной топологии для последовательности $\{\mathbf{A}_n\}$;

а условие:

$$\lim_{n\to\infty} P(\{\|(\mathbf{A}_n)^{\frac{1}{n}} \circ ... \circ (\mathbf{A}_1)^{\frac{1}{n}} - \bar{\mathbf{A}}\| > \varepsilon\}) = 0 \tag{5}$$

при любых $\varepsilon > 0$, будем называть законом больших чисел по операторной норме для последовательности $\{\mathbf{A}_n\}$.

Закон больших чисел по оператоной норме (по сильной операторной топологии) в форме Чебышева для последовательности случайных операторов $\{\mathbf{A}_n\}$ представляет собой следующее утверждение:

Определение 3. Пусть $\{\mathbf{A}_n\}$ – последовательность независимых случайных операторов, имеющих одинаковое математическое ожидание $\bar{\mathbf{A}}$ и ограниченную последовательность вторых моментов $\{D(\mathbf{A}_n)\}$. Тогда условие

$$\lim_{n\to\infty} \|D((\mathbf{A}_n)^{\frac{1}{n}} \circ ... \circ (\mathbf{A}_1)^{\frac{1}{n}})\|_{B(H)} = 0 \tag{6}$$

называется законом больших чисел в форме Чебышева по операторной норме; соответственно, по сильной операторной топологии законом больших чисел в форме Чебышева называется утверждение:

$$\lim_{n\to\infty} \|D((\mathbf{A}_n)^{\frac{1}{n}} \circ ... \circ (\mathbf{A}_1)^{\frac{1}{n}})x\|_H = 0 \ \forall\ x \in H. \tag{7}$$

Лемма 1. Если случайный ограниченный линейный оператор $\mathbf{A}$ имеет дисперсию $D_K \in B(H)$, то справедливо неравенство Чебышева

$$P(\{\|\mathbf{A} - M\mathbf{A}\|_{B(H)} > \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\|D_K\|_{B(H)}.$$

Действительно, $D_K = \int\limits_E ((\mathbf{A} - M\mathbf{A})^*(\mathbf{A} - M\mathbf{A}))d\mu$, поэтому

$$\|D_K\|_{B(H)} = \sup_{\|u\|_H=1} (u, \int\limits_E ((\mathbf{A} - M\mathbf{A})^*(\mathbf{A} - M\mathbf{A}))d\mu u) =$$

$$= \sup_{\|u\|_H=1} \lim \int\limits_E (u, ((\mathbf{A} - M\mathbf{A})^*(\mathbf{A} - M\mathbf{A}))u)d\mu =$$

$$= \sup_{\|u\|_H=1} \lim \int\limits_{\{\varepsilon\in E:\ \|\mathbf{A}-M\mathbf{A}\|_{B(H)}\geq\varepsilon\}} (u, ((\mathbf{A} - M\mathbf{A})^*(\mathbf{A} - M\mathbf{A}))u)d\mu +$$

$$+ \int\limits_{\{\varepsilon\in E:\ \|\mathbf{A}-M\mathbf{A}\|_{B(H)}<\varepsilon\}} (u, ((\mathbf{A} - M\mathbf{A})^*(\mathbf{A} - M\mathbf{A}))u)d\mu] \geq$$

$$\geq \sup_{\|u\|_H=1} \lim \int\limits_{\{\varepsilon\in E:\ \|\mathbf{A}-M\mathbf{A}\|_{B(H)}\geq\varepsilon\}} (u,((\mathbf{A}-M\mathbf{A})^*(\mathbf{A}-M\mathbf{A}))u)d\mu \geq$$

$$\geq \varepsilon^2\mu(\{\varepsilon\in E:\ \|\mathbf{A}-M\mathbf{A}\|_{B(H)}\geq\varepsilon\})$$

откуда и следует неравенство Чебышева.

Следствие 1. Из неравенства Чебышева следует, что если для последовательности независимых одинаково распределенных случайных операторов выполняется условие (6) с функционалом дисперсии D_K, то для нее выполняется условие (5).

Лемма 2. Если случайный ограниченный линейный оператор $\mathbf{A}$ имеет дисперсию $D_K\in B(H)$, то для любого вектора $x\in H:\ \|x\|_H=1$ справедливо неравенство Чебышева

$$P(\{\|(\mathbf{A}-M\mathbf{A})x\|_H>\varepsilon\})\leq\frac{1}{\varepsilon^2}\|D_Kx\|_H \tag{8}$$

Действительно, $D_K=\int\limits_E((\mathbf{A}-M\mathbf{A})^*(\mathbf{A}-M\mathbf{A}))d\mu$, поэтому для любого вектора $x\in H$ такого, что $\|x\|_H=1$, справедливы соотношения

$$\|D_Kx\|_H=\sup_{\|u\|_H=1}(u,[\int\limits_E(\mathbf{A}-M\mathbf{A})^*(\mathbf{A}-M\mathbf{A})d\mu]x)\geq$$

$$\geq(x,[\int\limits_E(\mathbf{A}-M\mathbf{A})^*(\mathbf{A}-M\mathbf{A})d\mu]x)=$$

$$=\int\limits_E(x,((\mathbf{A}-M\mathbf{A})^*(\mathbf{A}-M\mathbf{A}))x)d\mu=\int\limits_E\|(\mathbf{A}-M\mathbf{A})x\|_H^2d\mu\geq$$

$$\geq\int\limits_{\{\varepsilon\in E:\ \|(\mathbf{A}-M\mathbf{A})x\|_H\geq\varepsilon\}}\|(\mathbf{A}-M\mathbf{A})x\|_H^2d\mu\geq\varepsilon^2\mu(\{\varepsilon\in E:\ \|(\mathbf{A}-M\mathbf{A})x\|_H\geq\varepsilon\}),$$

откуда и следует неравенство Чебышева.

Следствие 2. Из неравенства Чебышева следует, что если для последовательности независимых одинаково распределенных случайных операторов выполняется условие (7) с функционалом дисперсии D_K, то для нее выполняется условие (4).

Аналогом закона больших чисел для последовательности сумм независимых случайных величин является следующее утверждение о последовательности композиций независисимых случайных полугрупп.

Закон больших чисел в сильной операторной топологии. Пусть $\{\mathbf{U}_n(t),\ t\geq 0\}$ – последовательность независимых случайных полугрупп, имеющих одинаковое математическое ожидание $\bar{\mathbf{U}}(t)$, $t\geq 0$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}P(\{\|(\mathbf{U}_n(\frac{t}{n})\circ\ldots\circ\mathbf{U}_1(\frac{t}{n})-\bar{\mathbf{U}}(t))x\|>\varepsilon\})=0 \tag{9}$$

при любых $x \in H$, $x \neq 0$, и любых $\varepsilon > 0$.

Закон больших чисел в форме Чебышева: пусть $\{\mathbf{U}_n(t),\, t \geq 0\}$ – последовательность независимых случайных полугрупп, имеющих одинаковое математическое ожидание $\bar{\mathbf{U}}(t)$, $t \geq 0$ и ограниченную последовательность вторых моментов $\{D(\mathbf{U}_n)\}$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} D((\mathbf{U}_n)^{\frac{1}{n}} \circ ... \circ (\mathbf{U}_1)^{\frac{1}{n}}) = 0. \tag{10}$$

Замечание. Подчеркнем, что для случайных полугрупп $\mathbf{U}(t)$, $t \geq 0$ равенство $(\mathbf{U}(t))^{\frac{1}{n}} = \mathbf{U}(\frac{t}{n})$ имеет место при всех $t \geq 0$, $n \in \mathbf{N}$. При этом равенство $(\mathbf{U}_n \circ ... \circ \mathbf{U}_1)^{\frac{1}{n}} = (\mathbf{U}_n)^{\frac{1}{n}} \circ ... \circ (\mathbf{U}_1)^{\frac{1}{n}}$ не справедливо в силу некоммутативности операторного умножения. Это делает более удобным исследование усреденных величин (3) по сравнению с усредненными величиами (2).

Моменты композиции независимых случайных полугрупп

Пусть $(E, \mathcal{A}, \mu)$ – пространство с счетно-аддитивной мерой на σ-алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств множества E. Для каждого числа $n \in \mathbf{N}$ обозначим через $\mathcal{A}_\tau \otimes ... \otimes \mathcal{A}_\tau$ минимальную σ-алгебру, содержащую совокупность $\mathcal{A}_\tau \times ... \times \mathcal{A}_\tau$ всевозможных n-кратных прямых произведений множеств из алгебры $\mathcal{A}$ (n-мерных измеримых параллелепипедов); через $\mu \otimes ... \otimes \mu$ обозначим счетно-аддитивную меру, являющуюся счетно-аддитивным продолжением функции множества $\mu \times ... \times \mu$ с совокупности параллелепипедов $\mathcal{A}_\tau \times ... \times \mathcal{A}_\tau$ на σ-алгебру $\mathcal{A}_\tau \otimes ... \otimes \mathcal{A}_\tau$ (см. [2], теорема 3.3.1). Пусть $\mathbf{U}:\ E \to B(H)$ – случайный оператор.

Определение 4. Композицией n независимых одинаково распределенных операторов $\mathbf{U}$ называется отображение $\mathbf{U}^n$ пространства с мерой $(E \times ... \times E, \mathcal{A}_\tau \otimes ... \otimes \mathcal{A}_\tau, \mu \otimes ... \otimes \mu)$ в измеримое постранство $(B(H), \mathcal{A}_\tau)$, определяемое равенством

$$\mathbf{U}^n(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) = \mathbf{U}(\varepsilon_n) \circ ... \circ \mathbf{U}(\varepsilon_1),\ (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) \in E \times ... \times E \tag{11}$$

Рассмотрим теперь вместо случайного линейного оператора $\mathbf{U}$ последовательность $\{\mathbf{U}^n\}$, значением n-го члена которой является композиция n независимых случайных линейных операторов $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, ..., \mathbf{U}_n$:

$$\mathbf{U}^n = \mathbf{U}_n \circ ... \circ \mathbf{U}_2 \circ \mathbf{U}_1. \tag{12}$$

Теорема 2. ([11, 15]). Если (12) – композиция n независимых одинаково распределенных случайных операторов, каждый из которых является измеримым отображением $\mathbf{U}$ пространства с мерой $(E, \mathcal{A}, \mu)$ в измеримое пространство $(B(H), \mathcal{A}_\tau)$, то оператор $\mathbf{U}^n$ является измеримым отображением пространства с мерой $(E \times ... \times E, \mathcal{A}_\tau \otimes ... \otimes \mathcal{A}_\tau, \mu \otimes ... \otimes \mu)$ в измеримое постранство $(B(H), \mathcal{A}_\tau)$, то есть – случайным оператором.

Теорема 3. Если при каждом $n \in \mathbf{N}$ случайные операторы $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, ..., \mathbf{U}_n$ являются независимыми в совокупности, то

$$M[\mathbf{U}^n] = M[\mathbf{U}_n] \circ ... \circ M[\mathbf{U}_2] \circ M[\mathbf{U}_1] \tag{13}$$

при каждом $n \in \mathbf{N}$; а если при этом случайные операторы $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, ..., \mathbf{U}_n$ являются одинаково распределенными, то

$$M[\mathbf{U}^n] = (M[\mathbf{U}])^n \ \forall \ n \in \mathbf{N}.$$

Доказательство. Утверждение теоремы 3 следует из теоремы 2 и теоремы Фубини (см. [2], теорема 3.4.4).

Докажем теорему 3 для случая счетного множества $E = \mathbf{N}$ с вероятностной мерой на алгебре подмножеств 2^E сначала при $n = 2$.

Согласно теореме 2 отображение $\mathbf{U}^2 = \mathbf{U}_2 \circ \mathbf{U}_1 : \ E \times E \to B(H)$ является измеримым отображением измеримого пространства $(E \times E, 2^E \otimes 2^E) = (E \times E, 2^{E \otimes E})$ с мерой $\mu \otimes \mu$ (счетно-аддитивным продолжением функции множества $\mu \times \mu$ с совокупности прямоугольников $2^E \times 2^E$ на содержащую ее минимальную σ-алгебру $2^E \otimes 2^E$, см. [2], п. 3.3) в измеримое пространство $(B(H), \mathcal{A}_{sot})$ (и, тем более, в измеримое пространство $(B(H), \mathcal{A}_{wot})$).

Для определения математического ожидания $M(\mathbf{U}^2)$ рассмотрим при фиксированных элементах $u, v \in H$ числовую случайную величину $(v, \mathbf{U}^2 u)$ и определим ее математическое ожидание $M((v, \mathbf{U}^2 u)) = \int\limits_{E \times E} (v, \mathbf{U}(\varepsilon_2) \circ \mathbf{U}(\varepsilon_1) u) d\mu \otimes \mu(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Выберем некоторое число $s > 0$. В силу того, что μ – вероятностная мера на счетном множестве $E = \mathbf{N}$, существует такое число $N \in \mathbf{N}$, что $\mu(E \backslash E_N) < s$ и $(\mu \otimes \mu)((E \times E) \backslash (E_N \times E_N)) < s$, где $E_N = \{1, ..., N\}$. Поэтому так как $\sup\limits_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in E \times E} |(v, \mathbf{U}(\varepsilon_2) \circ \mathbf{U}(\varepsilon_1) u)| \leq 1$, то

$$|\int\limits_{E \times E} (v, \mathbf{U}(\varepsilon_2) \circ \mathbf{U}(\varepsilon_1) u) d(\mu \otimes \mu)(\varepsilon_1, \varepsilon_2) - \int\limits_{E_N \times E_N} (v, \mathbf{U}(\varepsilon_2) \circ \mathbf{U}(\varepsilon_1) u) d(\mu \otimes \mu)(\varepsilon_1, \varepsilon_2)| \leq s.$$

Выберем какой-либо ортонормированный базис $F = \{f_j\}$ пространства H, тогда для всех $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in E \times E$ справедливо равенство $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (v, \mathbf{U}(\varepsilon_2) f_k)(f_k, \mathbf{U}(\varepsilon_1) u)$, поэтому

$$\int\limits_{E_N \times E_N} (v, \mathbf{U}(\varepsilon_2) \circ \mathbf{U}(\varepsilon_1) u) d(\mu \otimes \mu)(\varepsilon_1, \varepsilon_2) =$$

$$= \int\limits_{E \times E} \sum_{k=1}^{\infty} (v, \mathbf{U}(\varepsilon_2) f_k)(f_k, \mathbf{U}(\varepsilon_1) u) d(\mu \otimes \mu)(\varepsilon_1, \varepsilon_2) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{\infty} (v, \mathbf{U}(\varepsilon_{2j}) f_k)(f_k, \mathbf{U}(\varepsilon_{1i}) u) \mu(\{\varepsilon_{1i}\}) \mu(\{\varepsilon_{2j}\}).$$

С другой стороны,

$$(v, M\mathbf{U}_2 \circ M\mathbf{U}_1)u) = \sum_{k=1}^{\infty}(v, M\mathbf{U}_2 f_k)(f_k, M\mathbf{U}_1)u) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_E (v, \mathbf{U}(\varepsilon_2) f_k) d\mu(\varepsilon_2) \int\limits_E (f_k, \mathbf{U}(\varepsilon_1)u) d\mu(\varepsilon_1).$$

А поскольку $\mu(E \backslash E_N) < s$, то

$$|(v, M\mathbf{U}_2 \circ M\mathbf{U}_1)u) - \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_N} (v, \mathbf{U}(\varepsilon_2) f_k) d\mu(\varepsilon_2) \int\limits_{E_N} (f_k, \mathbf{U}(\varepsilon_1)u) d\mu(\varepsilon_1)| =$$

$$= |(v, M\mathbf{U}_2 \circ M\mathbf{U}_1)u) - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} (v, \mathbf{U}(\varepsilon_{2j}) f_k)(f_k, \mathbf{U}(\varepsilon_{1i})u) \mu(\{\varepsilon_{1i}\}) \mu(\{\varepsilon_{2j}\})| < 3s.$$

В силу произвольности числа $s > 0$ справедливо равенство $M((v, \mathbf{U}^2 u)) = (v, M\mathbf{U}_2 \circ M\mathbf{U}_1)u)$, а в силу произвольности элементов $u, v \in H$ – равенство

$$M\mathbf{U}^2 = M\mathbf{U}_2 \circ M\mathbf{U}_1.$$

Равенство (13) при произвольном $n \in \mathbf{N}$ может быть доказано по индукции. В случае конечного множества E доказательство равенства (13) проверяется непосредственно.

Замечание. Для дальнейших рассмотрений нам потребуется установить равенство (13) для специфических случайных операторов, особенностью которых является следующее: случайный оператор $\mathbf{U}$ определяется как измеримое отображение измеримого пространства $(E, 2^E)$ с конечно-аддитивной мерой μ в измеримое пространство $(B(H), \mathcal{A}_{sot})$ или $(B(H), \mathcal{A}_{wot})$. Такие примеры возникают при изучении предельного поведения регуляризаций задач Коши с особенностями, в этих случаях измеримое пространство $(E, 2^E)$ представляет собой множество параметров регуляризации, а конечно-аддитивная мера μ определяет ультрафильтр подмножеств множества E.

В случае конечно-аддитивных мер на алгебре 2^E подмножеств множества E функция множества $\mu \times ... \times \mu$, заданная на совокупности прямоугольных множеств $2^E \times ... \times 2^E$, может не иметь однозначного продолжения на алгебру $2^{E \times ... \times E}$. Поэтому в случае конечной аддитивности меры μ для всякого $n \in \mathbf{N}$ обозначим через $\mathcal{A}(E \times ... \times E)$ минимальную алгебру, содержащую совокупность множеств $2^E \times ... \times 2^E$, а через $\overline{\mu \times ... \times \mu}$ обозначим аддитивное продолжение функции множества $\mu \times ... \times \mu$ с совокупности $2^E \times ... \times 2^E$ на алгебру $\mathcal{A}(E \times ... \times E)$. Тогда композицию $\mathbf{U}^n$ определим как измеримое отображение измеримого пространства $(E \times ... \times E, \mathcal{A}(E \times ... \times E))$ с мерой $\overline{\mu \times ... \times \mu}$ в измеримое пространство $(B(H), \mathcal{A}_{sot})$ или $(B(H), \mathcal{A}_{wot})$. При определенных условиях этого достаточно для того, чтобы определить математическое ожидание и дисперсию случайного оператора и установить формулу (13) для композиций.

Лемма 3. Пусть $\mathbf{U}(\varepsilon)$, $\varepsilon \in E$, – оператор-функция, задающая случайный оператор; пусть ε^* – предельная точка множества E и функция $(\mathbf{U}(\varepsilon))^*$ сходится к оператору $(\bar{\mathbf{V}})$ при $\varepsilon \to \varepsilon^*$ в сильной операторной топологии: для любого $x \in H$ и любого $\sigma > 0$ существует такая окрестность $O(\varepsilon^*)$ точки ε^*, что для любого $\varepsilon \in O(\varepsilon^*)$ выполняется условие $\|((\mathbf{U}(\varepsilon))^* - (\bar{\mathbf{V}}))x\|_H < \sigma$. Тогда если μ – конечно аддитивная мера на измеримом пространстве $(E, 2^E)$, сосредоточенная в произвольной проколотой окрестности точки ε^*, то для любого $n \in \mathbf{N}$ выполняется равенство

$$M((\mathbf{U})^n) = ((\bar{\mathbf{V}})^*)^n.$$

Действительно, пусть $u, v \in H$ и для некоторого $n \in \mathbf{N}$ определена случайная величина $(u, \mathbf{U}^n v) = (u, \mathbf{U}(\varepsilon_n) \circ ... \circ \mathbf{U}(\varepsilon_1) v)$. Согласно условию на меру $\mu \in W^0_{\varepsilon^*}(E)$ и условию $\lim\limits_{\varepsilon \to \varepsilon^*} \mathbf{U}^*_\varepsilon x = \bar{\mathbf{V}} x \ \forall \ x \in H$, для любого числа $s > 0$ найдется такая окрестность $O(\varepsilon^*)$ точки ε^*, что $\mu(E \backslash O(\varepsilon^*)) = 0$ и $\|\mathbf{U}^*_\varepsilon u - \bar{\mathbf{V}} u\|_H < s$ для любого $\varepsilon \in O(\varepsilon^*)$. Поэтому для множества $O(\varepsilon^*) \times ... \times O(\varepsilon^*) \in 2^E \times ... \times 2^E$ выполняется условие $\overline{\mu \times ... \times \mu}(E \times ... \times E \backslash O(\varepsilon^*) \times ... \times O(\varepsilon^*)) = 0$ и для любого $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) \in O(\varepsilon^*) \times ... \times O(\varepsilon^*)$ выполняется условие $\|\mathbf{U}^*(\varepsilon_n) \circ ... \circ \mathbf{U}^*(\varepsilon_1) u - (\bar{\mathbf{V}})^n u\|_H < ns\|U\|^{n-1}_{L_\infty}$. Следовательно, $\int\limits_{E \times ... \times E} (u, \mathbf{U}^n(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) v) d(\overline{\mu \times ... \times \mu}) = (u, ((\bar{\mathbf{V}})^*)^n v)$ для любых $u, v \in H$ и любых $n \in \mathbf{N}$.

Исследуем вторые моменты линейной случайной динамической системы (12) (то есть вторые мометны последовательности итерций случайных линейных операторов).

Предложение 4. Пусть $t \geq 0$ и $n \in \mathbf{N}$. Тогда если в качестве второго момента случайной полугруппы выбрано квадратичное отображение D_K, то справедливы следующие равенства.

$$D_K((\mathbf{U}(t))^n) = M[\mathbf{U}^*_1(t) \circ ... \circ \mathbf{U}^*_n(t) \circ \mathbf{U}_n(t) \circ ... \circ \mathbf{U}_1(t)] - (M[(\mathbf{U}(t))^n])^* M[(\mathbf{U}(t))^n].$$

Поэтому если $\{\mathbf{U}_n\}$ – последовательность независимых случайных унитарных операторов, то

$$D_K((\mathbf{U}(t))^n) = \mathbf{I} - ((M[\mathbf{U}(t)])^n)^* (M[\mathbf{U}(t)])^n;$$

если, кроме того, математическое ожидание случайной полугруппы $\mathbf{U}(t)$, $t \geq 0$, является полугруппой, то

$$D_K((\mathbf{U}(t))^n) = \mathbf{I} - (M[\mathbf{U}(nt)])^* M[\mathbf{U}(nt)] = D_K(\mathbf{U}(nt)),$$

то есть при перечисленных предположениях дисперсия D_K композиции n независимых одинаково распределенных случайных полугрупп совпадает с дисперсией

n-кратной композиции одной из этих случайных полугрупп: $D_K(\mathbf{U}_n(t) \circ ... \circ \mathbf{U}_1(t)) = D_K((\mathbf{U}_1(t))^n)$.

Предложение 5. Пусть $t \geq 0$ и $n \in \mathbf{N}$. Пусть выполнено условие $\dim(\mathrm{Ker}(\mathbf{L}^* + i\mathbf{I})) = 0$. Тогда если в качестве второго момента случайной полугруппы выбрано квадратичное отображение D_Λ, то справедливы следующие равенства

$$D_\Lambda((\mathbf{U}(t))^n)(\rho) = (\mathcal{T}^\mu(t))^n \rho - e^{-int\mathbf{L}^*}\rho e^{int\mathbf{L}},$$

где $\mathcal{T}^\mu(t)\rho = M[e^{-it\mathbf{L}_\varepsilon}\rho e^{it\mathbf{L}_\varepsilon}]$ для любого состояния $\rho \in B^*(H)$, то есть $\langle \mathcal{T}^\mu(t)\rho, \mathbf{A}\rangle = \int\limits_E \langle \rho, e^{it\mathbf{L}_\varepsilon}\mathbf{A}e^{-it\mathbf{L}_\varepsilon}\rangle d\mu(\varepsilon)\ \forall\ \mathbf{A} \in B(H)$.

Согласно определению

$$D_\Lambda((\mathbf{U}(t))^n)(\rho) = M[\Lambda((\mathbf{U}(t))^n)](\rho) - \Lambda(M[(\mathbf{U}(t))^n])(\rho) =$$

$$= M[e^{-it\mathbf{L}_{\varepsilon_n}}...e^{-it\mathbf{L}_{\varepsilon_1}}\rho e^{it\mathbf{L}_{\varepsilon_1}}...e^{it\mathbf{L}_{\varepsilon_n}}] - M[(\mathbf{U}(t))^n]^*\rho M[(\mathbf{U}(t))^n]$$

Поскольку случайные операторы $e^{-it\mathbf{L}_{\varepsilon_1}}, ..., e^{-it\mathbf{L}_{\varepsilon_n}}$ являются независимыми, то

$$M[e^{-it\mathbf{L}_{\varepsilon_n}}...e^{-it\mathbf{L}_{\varepsilon_1}}\rho e^{it\mathbf{L}_{\varepsilon_1}}...e^{it\mathbf{L}_{\varepsilon_n}}] = M[e^{-it\mathbf{L}_{\varepsilon_n}}...e^{-it\mathbf{L}_{\varepsilon_2}}(\mathcal{T}^\mu(t)\rho)e^{it\mathbf{L}_{\varepsilon_2}}...e^{it\mathbf{L}_{\varepsilon_n}}],$$

поэтому

$$D_\Lambda((\mathbf{U}(t))^n)(\rho) = M[e^{-it\mathbf{L}_{\varepsilon_n}}...e^{-it\mathbf{L}_{\varepsilon_2}}(\mathcal{T}^\mu(t)\rho)e^{it\mathbf{L}_{\varepsilon_2}}...e^{it\mathbf{L}_{\varepsilon_n}}] - \left(e^{-it\mathbf{L}^*}\right)^n \rho \left(e^{it\mathbf{L}}\right)^n =$$

$$= (\mathcal{T}^\mu(t))^n \rho - e^{-int\mathbf{L}^*}\rho e^{int\mathbf{L}}$$

.

В этом случае если среднее значение $\mathcal{T}^\mu$ случайной квантовой динамической полугруппы $\mathcal{T}_{\mathbf{L}_\varepsilon}$ эквивалентно по Чернову квантовой динамической полугруппе $\mathcal{T}_{\mathbf{L}^\mu}$, то в пределе при $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty}(D_\Lambda((\mathbf{U}(\frac{t}{n}))^n)(\rho)) = \mathcal{T}_{\mathbf{L}^\mu}(t)\rho - e^{-it\mathbf{L}^*}\rho e^{it\mathbf{L}}.$$

В этом случае дисперсия динамики квантового состояния представляет собой ненормальную компоненту предельной в *-слабой топологии динамики квантового состояния.

Итерации независимых одинаково распределенных случайных полугрупп разлагаются на сумму детерминированной составляющей – итерации математических ожиданий случайных полугрупп, и случайной составляющей – все остальные слагаемые. В пределе при $n \to \infty$ предельное поведение для детерминированной и случайной компонент динамики – систематическое и случайное отклонения от предельной динамики.

Предположив, что случайная полугруппа с $\mathbf{U}$ имеет математическое ожидание $\mathbf{F}$, введем оператор случайного отклонения $\Delta\mathbf{U} = \mathbf{U} - \mathbf{F}$, помощью которого оценим композицию:

$$\mathbf{U}_{\varepsilon_n}(\frac{t}{n}) \circ ... \circ \mathbf{U}_{\varepsilon_1}(\frac{t}{n}) = (\mathbf{F}(\frac{t}{n}) + \Delta\mathbf{U}_{\varepsilon_n}(\frac{t}{n})) \circ ... \circ (\mathbf{F}(\frac{t}{n}) + \Delta\mathbf{U}_{\varepsilon_1}(\frac{t}{n})) =$$

$$= \mathbf{U}_{0,n}(t) + \mathbf{U}_{1,n}(t) + \mathbf{U}_{2,n}(t) + ... + \mathbf{U}_{n,n}(t), \quad (14)$$

где

$$\mathbf{U}_{0,n} = (\mathbf{F}(\frac{t}{n}))^n;$$

$$\mathbf{U}_{1,n} = \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{F}(\frac{t}{n}))^{n-k} \Delta\mathbf{U}_{\varepsilon_k}(\frac{t}{n})(\mathbf{F}(\frac{t}{n}))^{k-1};$$

$$\mathbf{U}_{2,n} = \sum_{1 \le i < j \le n} (...)(\mathbf{F}(\frac{t}{n}))^{n-1-j} \Delta\mathbf{U}_{\varepsilon_j}(\frac{t}{n})(\mathbf{F}(\frac{t}{n}))^{j-1-i} \Delta\mathbf{U}_{\varepsilon_i}(\frac{t}{n})(\mathbf{F}(\frac{t}{n}))^{i-1};$$

....

$$\mathbf{U}_{n,n} = \Delta\mathbf{U}_{\varepsilon_n}(\frac{t}{n}) \circ ... \circ \Delta\mathbf{U}_{\varepsilon_1}(\frac{t}{n}). \quad (15)$$

Подчеркнем, что операторы $\Delta\mathbf{U}_{\varepsilon_n}(\frac{t}{n}), ..., \Delta\mathbf{U}_{\varepsilon_1}(\frac{t}{n})$ являются независимыми в совокупности и имеют нулевое математическое ожидание. Поэтому в силу теоремы 3 для математического ожидания справедливо равенство $M[\mathbf{U}_{\varepsilon_n}(\frac{t}{n}) \circ ... \circ \mathbf{U}_{\varepsilon_1}(\frac{t}{n})] = (\mathbf{F}(\frac{t}{n}))^n$.

Дисперсия первой группы слагаемых (линейных по ΔU) в выражении (14) имеет вид

$$D[\sum_{k=1}^{n} (\mathbf{F}(\frac{t}{n}))^{n-k} \Delta\mathbf{U}_{\varepsilon_k}(\frac{t}{n})(\mathbf{F}(\frac{t}{n}))^{k-1}] =$$

$$= \sum_{j,k=1}^{n} M[((\mathbf{F}(\frac{t}{n}))^{n-j} \Delta\mathbf{U}_{\varepsilon_j}(\frac{t}{n})(\mathbf{F}(\frac{t}{n}))^{j-1})^*((\mathbf{F}(\frac{t}{n}))^{n-k} \Delta\mathbf{U}_{\varepsilon_k}(\frac{t}{n})(\mathbf{F}(\frac{t}{n}))^{k-1})] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} M[((\mathbf{F}(\frac{t}{n}))^{n-k} \Delta\mathbf{U}_{\varepsilon_k}(\frac{t}{n})(\mathbf{F}(\frac{t}{n}))^{k-1})^*((\mathbf{F}(\frac{t}{n}))^{n-k} \Delta\mathbf{U}_{\varepsilon_k}(\frac{t}{n})(\mathbf{F}(\frac{t}{n}))^{k-1})] \quad (16)$$

и является суммой n слагаемых первого порядка по $\Delta\mathbf{U}$. При этом представление (16) для дисперсии суммы слагаемых, линейных по $\Delta\mathbf{U}$, не зависит от выбора функционала дисперсии.

Аналогично, дисперсия второй группы слагаемых (квадратичных по ΔU) в выражении (14) является суммой C_n^2 слагаемых, и т.д. Используем представление (14) композиции независимых случайных преобразований для оценки ее дисперсии.

Пример 3. Рассмотрим пример случайной полугруппы линейных преобразований конечномерного гильбертова пространства H. Предположим, что $\{\mathbf{U}_\varepsilon, \varepsilon \in E\}$ – случайная полугруппа линейных преобразований конечномерного гильбертова пространства H, причем $\|\mathbf{U}_\varepsilon(t)\| = 1$ при всех $t \geq 0$ и $\varepsilon \in E$, (например, $\mathbf{U}_\varepsilon, \varepsilon \in E\}$ – случайная полугруппа линейных унитарных преобразований конечномерного гильбертова пространства H). Пусть, кроме того, $E = \{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m\}$ – конечное множество и $\mathbf{L}_{\varepsilon_j}$, $\varepsilon_j \in E$, – генераторы полугрупп $\mathbf{U}_{\varepsilon_j}$ соответственно. Положим $A = \max\{\|\mathbf{L}_{\varepsilon_1}\|, ..., \|\mathbf{L}_{\varepsilon_m}\|\}$. Тогда математическое ожидание $\mathbf{F}(t) = M[\mathbf{U}_\varepsilon(t)]$, $t \in R_+$, является оператор-функцией, эквивалентной по Чернову полугруппе $\bar{\mathbf{U}}(t) = e^{\bar{\mathbf{L}}t}$, $t \geq 0$, с усредненным генератором $\bar{\mathbf{L}} = \sum\limits_{j=1}^{m} p_j \mathbf{L}_{\varepsilon_j}$ (см. [9]). При этом оценка $\|\mathbf{F}(t)\| \leq \sum\limits_{j=1}^{m} p_j \|\mathbf{U}_{\varepsilon_j}(t)\| = 1$ справедлива при любом $t \geq 0$.

Оценим дисперсии для последовательности композиций независимых случайных полугрупп в случае примера 3 при каком-либо выборе функционала дисперсии.

Поскольку $\mathbf{L}_{\varepsilon_j}$, $\varepsilon_j \in E$, – генераторы непрерывных по норме полугрупп $\mathbf{U}_{\varepsilon_j}$ соответственно, то $\|\Delta \mathbf{U}_{\varepsilon_j}(\frac{t}{n}) - \mathbf{L}_{\varepsilon_j} \frac{t}{n}\|_{B(H)} = o(\frac{t}{n})$ при $\frac{t}{n} \to 0$. Поэтому слагаемое первого порядка в выражении (14) имеет, согласно (16), дисперсию $D[\sum\limits_{k=1}^{n} (\mathbf{F}(\frac{t}{n}))^{n-k} \Delta \mathbf{U}_{\varepsilon_k}(\frac{t}{n}) (\mathbf{F}(\frac{t}{n}))^{k-1}]$, допускающую оценку

$$D^{(1)} = D[\sum_{k=1}^{n} (\mathbf{F}(\frac{t}{n}))^{n-k} \Delta \mathbf{U}_{\varepsilon_k}(\frac{t}{n}) (\mathbf{F}(\frac{t}{n}))^{k-1}] \leq$$

$$\leq n \|\mathbf{F}(\frac{t}{n})\|^{2(n-1)} A^2 (\frac{t}{n})^2 (1 + o(1)) \leq C_n^1 (\frac{At}{n})^2 (1 + o(1))$$

при $\frac{t}{n} \to 0$. Дисперсия слагаемого из (14), содержащего k сомножителей вида $\Delta \mathbf{U}$, аналогично, допускает оценку сверху

$$D^{(k)} \leq C_n^k \|\mathbf{F}(\frac{t}{n})\|^{2n-k} A^{2k} (\frac{t}{n})^{2k} (1 + o(1)) \leq C_n^k (\frac{At}{n})^{2k} (1 + o(1))$$

при $\frac{t}{n} \to 0$.

Поэтому

$$D[\mathbf{U}_{\varepsilon_n}(\frac{t}{n}) \circ ... \circ \mathbf{U}_{\varepsilon_1}(\frac{t}{n})] \leq \sum_{k=1}^{n} D^k \leq [\sum_{k=0}^{n} C_n^k (\frac{At}{n})^{2k} - 1](1 + o(1)) =$$

$$= [(1 + \frac{A^2 t^2}{n^2})^n - 1](1 + o(1)) = \frac{A^2 t^2}{n} + t o(\frac{t}{n})$$

при $\frac{t}{n} \to 0$. Поэтому для любого фиксированного $T > 0$ справедлива оценка

$$\sup_{t \in [0,T]} D[\mathbf{U}_{\varepsilon_n}(\frac{t}{n}) \circ ... \circ \mathbf{U}_{\varepsilon_1}(\frac{t}{n})] \to 0 \qquad n \to \infty,$$

более того,

$$\sup_{t \in [0,T]} D[\mathbf{U}_{\varepsilon_n}(\frac{t}{n}) \circ ... \circ \mathbf{U}_{\varepsilon_1}(\frac{t}{n})] = O(\frac{T^2}{n}) \qquad n \to \infty.$$

Таким образом, при каждом фиксированном $n \in \mathbf{N}$ и при каждом фиксированном $T > 0$ случайная величина $\mathbf{U}_{\varepsilon_n}(\frac{t}{n}) \circ ... \circ \mathbf{U}_{\varepsilon_1}(\frac{t}{n})$ имеет математическое ожидание $(\mathbf{F}(\frac{t}{n}))^n$, среднее квадратичное отклонение от которого имеет порядок $O(\frac{1}{\sqrt{n}})$ при $n \to \infty$ равномерно на отрезке $[0, T]$. Согласно теореме Чернова, в конечномерном пространстве H последовательность $\{(\mathbf{F}(\frac{t}{n}))^n\}$ сходится по норме пространства $B(H)$ равномерно на каждом отрезке $[0, T]$ к предельной полугруппе $e^{\bar{\mathbf{L}}t}$, $t \geq 0$, причем отклонение значения n-го элемента последовательности от предела допускакет оценку $\|e^{\bar{\mathbf{L}}t} - (\mathbf{F}(\frac{t}{n}))^n\|_{B(H)} = O(\frac{1}{\sqrt{n}})$ при $n \to \infty$ равномерно на отрезке $[0, T]$.

Теорема 4. *Пусть ξ – случайная величина со значениями в пространстве $B(H)$, множество значений которой ограничено по норме пространства $B(H)$, и $U(t) = \exp(i\xi t)$, $t \geq 0$, – соответствующая случайная полугруппа. Тогда для последовательности $\{\boldsymbol{U}_n\}$ независимых одинаково распределенных случайных полугрупп выполняется условие*

$$\lim_{n\to\infty}[\sup_{T>0} \|D(U_n(\frac{t}{n}) \circ ... \circ U_n(\frac{t}{n}))\|_{B(H)}] = 0. \tag{17}$$

Следствие 3. Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда для каждого числа $T > 0$ и каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N \in \mathbf{N}$, что отклонение случайной величины $(\mathbf{U}(\frac{t}{n}))^n$ от случайной величины $\eta_n(t) \equiv (\mathbf{F}(\frac{t}{n}))^n + \sum\limits_{k=1}^{n} (\mathbf{F}(\frac{t}{n}))^{n-k} \Delta\mathbf{U}_{\varepsilon_k}(\frac{t}{n})(\mathbf{F}(\frac{t}{n}))^{k-1}$ по операторной норме не более чем на ε с вероятностью 1.

Действительно, $(\mathbf{U}(\frac{t}{n}))^n - \eta_n(t) = \sum\limits_{k=2}^{n} \mathbf{U}_{k,n}$.

Поскольку для каждого $k \in \overline{1,n}$ с вероятностью 1 справедлива оценка $\|\mathbf{U}_{k,n}\|_{B(H)} \leq C_n^k(\frac{At}{n})^k$, то $\|(\mathbf{U}(\frac{t}{n}))^n - \eta_n(t)\|_{B(H)} \leq \sum\limits_{k=2}^{n} C_n^k(\frac{At}{n})^k = (1+\frac{At}{n})^n - 1 - \frac{At}{n} \leq C(\frac{T}{n})^2$, из которой, согласно лемме 1, следует утверждение следствия 2. Предельное распределение случайной величины $(\mathbf{U}(\frac{t}{n}))^n$, $t \in [0,T]$ мало отличается от предельного распределения случайной величины $\eta_n(t)$, $t \in [0,T]$.

Замечание. Если значения оператор-функции $\mathbf{U}_\varepsilon(t)$, $t \geq 0$, $\varepsilon \in E$, коммутируют между собой, то $\eta_n(t) = (\mathbf{F}(\frac{t}{n}))^n + (\mathbf{F}(\frac{t}{n}))^{n-1} \sum\limits_{k=1}^{n} \Delta\mathbf{U}_{\varepsilon_k}(\frac{t}{n})$ и распределение случайной величины $\eta_n(t)$ определяется распределением суммы независимых случайных величин $\sum\limits_{k=1}^{n} \Delta\mathbf{U}_{\varepsilon_k}(\frac{t}{n})$.

Теорема 5. *Пусть ξ – случайная величина со значениями в множестве самосопряженных операторов в пространстве H и пусть $U(t) = \exp(i\xi t)$, $t \geq 0$, – соответствующая случайная полугруппа. Пусть существует такое плотное в пространстве H подпространство $\mathcal{D}$, что для любого $u \in \mathcal{D}$ выполняется условие $\int\limits_{\Omega} \|\xi(\omega)u\|_H d\mu(\omega) < \infty$. Тогда если определенный на пространстве $\mathcal{D}$ равенством $\bar{\xi}u = \int\limits_{\Omega} \xi(\omega)u d\mu(\omega)$ оператор $\bar{\xi}$ существенно самосопряжен, то для последовательности $\{\boldsymbol{U}^n\}$ композиций независимых случайных полугрупп выполняется условие*

$$\lim_{n\to\infty}[\sup_{t\in[0,T]} \|D(U_n(\frac{t}{n}) \circ ... \circ U_n(\frac{t}{n}))x\|_H] = 0 \ \forall\ T > 0,\ \forall\ x \in H. \tag{18}$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{\mathbf{U}^n\}$, значением n-го члена которой является композиция n независимых случайных полугрупп линейных операторов
$\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, ..., \mathbf{U}_n$:

$$\mathbf{U}^n = \mathbf{U}_n \circ ... \circ \mathbf{U}_2 \circ \mathbf{U}_1.$$

Так как при каждом $n \in \mathbf{N}$ случайные операторы $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, ..., \mathbf{U}_n$ являются независимыми в совокупности и одинаково распределенными, то

$$M[\mathbf{U}^n] = M[\mathbf{U}_n] \circ ... \circ M[\mathbf{U}_2] \circ M[\mathbf{U}_1] = (M[\mathbf{U}])^n \ \forall \ n \in \mathbf{N}.$$

При каждом $t \geq 0$ и каждом $n \in \mathbf{N}$ справедливо следующее равенство

$$D((\mathbf{U}(\frac{t}{n}))^n) =$$

$$= M[\mathbf{U}_1^*(\frac{t}{n}) \circ ... \circ \mathbf{U}_n^*(\frac{t}{n}) \circ \mathbf{U}_n(\frac{t}{n}) \circ ... \circ \mathbf{U}_1(\frac{t}{n})] - (M[(\mathbf{U}(\frac{t}{n}))^n])^* M[(\mathbf{U}(\frac{t}{n}))^n].$$

Поэтому для последовательности $\{\mathbf{U}^n\}$ независимых случайных унитарных полугрупп имеет место равенство

$$D((\mathbf{U}(\frac{t}{n}))^n) = \mathbf{I} - ((M[\mathbf{U}(\frac{t}{n})])^n)^*(M[\mathbf{U}(\frac{t}{n})])^n. \tag{19}$$

В соответствии с теоремой 3 работы [9] оператор-функция $M[\mathbf{U}(t)]$, $t \geq 0$, эквивалентна по Чернову (см. [8, 9]) полугруппе $\exp(i\bar{\xi}t)$, $t \geq 0$, то есть последовательность $(M[\mathbf{U}(\frac{t}{n})])^n$, $t \geq 0$, сходится к полугруппе $\exp(i\bar{\xi}t)$, $t \geq 0$, в сильной операторной топологии равномерно на каждом отрезке полупрямой R_+. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}(\sup\limits_{t\in[0,T]} \|((M[\mathbf{U}(\frac{t}{n})])^n)^*[(M[\mathbf{U}(\frac{t}{n})])^n - \mathbf{I}]x\|_H) = 0$ для любых $T > 0$ и $x \in H$. Теорема 5 доказана. □

Пример нарушения закона больших чисел для композиций случайных полугрупп

Пусть $E = (0,1)$, 2^E – алгебра всех подмножеств множества E и пусть $W_0(E)$ – класс неотрицательных нормированных конечно аддитивных мер μ на алгебре подмножеств 2^E, сосредоточенных в произвольной проколотой окрестности точки $\epsilon_0 = 0$ в том смысле, что для любого множества $A \in 2^E$, замыкание которого не содержит точки 0, выполняется условие $\mu(A) = 0$. Пусть $(E, 2^E, \mu)$ – пространство с мерой $\mu \in W_0(E)$.

Пусть $\mathbf{L}$ – максимальный симметрический, но не самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H с индексами дефекта $(0, m)$, $m \in \mathbf{N}$, и пусть $\mathbf{L}_\epsilon$, $\epsilon \in (0,1)$, – однопараметрическое семейство самосопряженных операторов, сильный граф-предел которых при $\epsilon \to 0$ совпадает с оператором $\mathbf{L}$. Пример таких операторов приведен в работе [13] и там же показано, что оператор $i\mathbf{L}$

является генератором изметрической полугруппы $e^{it\mathbf{L}}$, $t \geq 0$, а оператор $i\mathbf{L}$ является генератором сжимающей полугруппы $e^{-it\mathbf{L}^*}$, $t \geq 0$. При каждом $t > 0$ оператор $e^{-it\mathbf{L}^*}$ имеет нетривиальное ядро $H_1(t)$, причем оператор $e^{-it\mathbf{L}}e^{-it\mathbf{L}^*}$ является ортогональным проектором на подпространство $H_0(t) = (H_1(t))^{\perp}$ ([14]).

Тогда отображение $E \ni \epsilon \to \{e^{-it\mathbf{L}_\epsilon},\ t \geq 0\} \in Y_s(H)$ является случайной полугруппой. При фиксированном значении параметра $t > 0$ получаем случайный оператор

$$\mathbf{U}_\epsilon(t) = e^{-it\mathbf{L}_\epsilon},\ \epsilon \in E, \tag{20}$$

со значениями во множестве унитарных операторов.

Лемма 4. Для любого $t \geq 0$ случайный оператор (20) имеет математическое ожидание $M[\mathbf{U}](t) = e^{-it\mathbf{L}^*}$.

Действительно, в силу условий $\dim(\mathrm{Ker}(\mathbf{L}^* - i\mathbf{I})) = 0$ и $\dim(\mathrm{Ker}(\mathbf{L}^* + i\mathbf{I})) \neq 0$ (см. [13]) при любом $t > 0$ последовательность унитарных операторов $\{\mathbf{U}_\epsilon(t)\}$, $\epsilon \to +0$, сходится в слабой операторной топологии к оператору $e^{-it\mathbf{L}^*}$ при $\epsilon \to +0$. Так как $\mu \in W_0(E)$, то интеграл Петтиса $\int\limits_E e^{-it\mathbf{L}_\epsilon} d\mu(\epsilon)$ равен $e^{-it\mathbf{L}^*}$.

Предложение 6. *Пусть $t > 0$ и $\boldsymbol{U}(t):\ E \to B(H)$ – случайный оператор (20). Тогда $D((\boldsymbol{U}(\frac{t}{n}))^n) = \boldsymbol{I} - e^{-it\boldsymbol{L}}e^{-it\boldsymbol{L}^*} \equiv \boldsymbol{P}_{H_1(t)}$ при всех $n \in \boldsymbol{N}$. Здесь $H_1(t)$ – сдвиговая компонента в разложении Вольда (см. [14]) изометрического оператора $e^{it\boldsymbol{L}}$.*

Действительно, поскольку значениями случайной полугруппы $\mathbf{U}$ являются унитарные операторы, то для дисперсии n-кратной композиции $(\mathbf{U}(\frac{t}{n}))^n$ справедлива формула (19). Так как математическое ожидание $M[\mathbf{U}](t)$, $t \geq 0$, является полугруппой, то $(M[\mathbf{U}](\frac{t}{n}))^n = M[\mathbf{U}](t) = e^{-it\mathbf{L}^*}$ при всех $n \in \mathbf{N}$. Поэтому согласно (19)

$$D((\mathbf{U}(\frac{t}{n}))^n) = \mathbf{I} - e^{it\mathbf{L}}e^{-it\mathbf{L}^*} = \mathbf{P}_{H_1(t)}\ \forall\ n \in \mathbf{N} \tag{21}$$

что и доказывает предложение 6.

Из предложения 6 следует, что при любом $t > 0$ $\|D((\mathbf{U}(\frac{t}{n}))^n)\|_{B(H)} = 1$ и что условие

$$\lim_{n\to\infty} P(\{\|\mathbf{U}(\frac{t}{n}))^n - M(\mathbf{U}(\frac{t}{n}))^n)\|_{B(H)} > \delta\}) = 0$$

не выполняется ни при каком $\delta > 0$. Таким образом, закон больших чисел для композиции случайных полугрупп не выполняется по норме пространства $B(H)$.

Более того, он не выполняется и в сильной операторной топологии пространства $B(H)$ ибо при любом $t > 0$ подпространство $H^1(t)$ нетривиально (иначе полугруппа $\mathbf{U}(t)$, $t \geq 0$, являлась бы унитарной), и потому найдется такой единичный вектор $\phi \in H_1(t)$, что $\|D((\mathbf{U}(\frac{t}{n}))^n)\phi\|_H = 1$. При этом условие

$$\lim_{n\to\infty} P(\{\|\mathbf{U}(\frac{t}{n}))^n - M(\mathbf{U}(\frac{t}{n}))^n)\phi\|_H > \delta\}) = 0\ \forall\ \phi \in H$$

не выполняется ни при каком $\delta > 0$, поскольку

$$\|\mathbf{U}(\frac{t}{n}))^n - M(\mathbf{U}(\frac{t}{n}))^n)\phi\|_H \geq \|\mathbf{U}(\frac{t}{n}))^n\phi\|_H - \|M(\mathbf{U}(\frac{t}{n}))^n)\phi\|_H = 1$$

с вероятностью единица.

Таким образом, приведен пример случайной полугруппы, для которой закон больших чисел не выполняется ни по норме, ни в сильной операторной топологии.

Приведем пример случайной полугруппы, для которой закон больших чисел выполняется в сильной операторной топологии, но не выполняется по операторной норме.

Пример 4. Пусть $E = \{1, 2\}$ и мера μ на алгебре 2^E задана равенствами $\mu(\{1\}) = \mu(\{2\}) = \frac{1}{2}$. Пусть случайный оператор A есть отображение множества E в множество самосопряженных операторов в пространстве H такое, что $\mathbf{A}(1) = \mathbf{L}$ и $\mathbf{A}(2) = -\mathbf{L}$, где $\mathbf{L}$ – оператор с ортонормированным базисом $\{e_k\}$ из собственных векторов и $\mathbf{L}_k = ke_k \,\forall\, k \in \mathbf{N}$. Случайная полугруппа $\mathbf{U}(t) = \exp it\mathbf{A}$ принимает с вероятностью $\frac{1}{2}$ одно из двух возможных значений $\mathbf{U}_1(t) = e^{it\mathbf{L}}$, $t \geq 0$, или $\mathbf{U}_2(t) = e^{-it\mathbf{L}}$, $t \geq 0$.

Поскольку мера μ определена на алгебре 2^E, то отображение $\mathbf{U}: \ E \to Y_s(H)$ является измеримым и, следовательно, $\mathbf{U}$ есть случайная полугруппа в смысле определения 1. Очевидно, что $M(\mathbf{U}(t)) \equiv \mathbf{F}(t) = \frac{1}{2}(e^{it\mathbf{L}} + e^{-it\mathbf{L}}) = \cos(\mathbf{L}t)$, $t \geq 0$.

Согласно теореме 2 (и следствию 2) работы [8] оператор-функция $\mathbf{F}$ эквивалентна по Чернову полугруппе $e^{it\bar{\mathbf{A}}} = \mathbf{I}$, $t \geq 0$, то есть для любого $u \in H$ и любого $T > 0$ выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{t\in[0,T]} \|((\mathbf{F}(\frac{t}{n}))^n - \mathbf{I})u\|_H = 0$.

Предложение 7. *Последовательность* $\{(\boldsymbol{U}(\frac{t}{n}))^n\}$ *композиций независимых случайных одинаково распределенных унитарных полугрупп из примера 4 не удовлетворяет закону больших чисел по норме, но удовлетворяет ему в сильной операторной топологии.*

Поскольку значениями случайной полугруппы $\mathbf{U}$ являются унитарные операторы, то для дисперсии последовательности $\{\mathbf{U}^n\}$ итераций независимых случайных одинаково распределенных полугрупп справедливо равенство (19).

Рассмотрим при $t = \pi$ последовательность $\{(\mathbf{U}(\frac{\pi}{n}))^n\}$ итераций независимых случайных одинаково распределенных унитарных операторов. При каждом $n \in \mathbf{N}$ оператор $\mathbf{F}(\frac{\pi}{n})$ имеет бесконечномерное ядро K_n, поэтому $\|D((\mathbf{U}(\frac{\pi}{n}))^n)\|_{B(H)} = 1$ при всех $n \in \mathbf{N}$, то есть дисперсия композиций n независимых одинаково распределенных случайных унитарных операторов не стремится к нулю по норме. Покажем, что и закон больших чисел в топологии нормы не выполнен для последовательности $\{(\mathbf{U}(\frac{\pi}{n}))^n\}$ итераций независимых случайных одинаково распределенных унитарных операторов.

Действительно,

$$\sup_{\|x\|_H=1}\|((\mathbf{U}(\frac{\pi}{n}))^n - M((\mathbf{U}(\frac{\pi}{n}))^n))x\|_H = \sup_{\|x\|_H=1}\|((\mathbf{U}(\frac{\pi}{n}))^n - (\cos(\mathbf{L}\frac{t}{n}))^n)x\|_H \geq$$

$$\geq \sup_{\|x\|_H=1}\|((\mathbf{U}(\frac{\pi}{n}))^n x\|_H - \inf_{\|x\|_H=1}\|(\cos(\mathbf{L}\frac{t}{n}))^n x\|_H = 1$$

так как все операторы в композиции $((\mathbf{U}(\frac{\pi}{n}))^n$ сохраняют норму, а операторы $(\cos(\mathbf{L}\frac{t}{n}))^n$ имеют нетривиальное ядро.

Но поскольку оператор-функция $\mathbf{F}$ эквивалентна по Чернову унитарной полугруппе $\bar{\mathbf{U}}(t) = \mathbf{I}$, $t \geq 0$, то для любого $u \in H$ выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty}\|((\mathbf{F}(\frac{\pi}{n}))^n - \mathbf{I})u\|_H = 0$. Поэтому для любого $u \in H$ и для любого $t \geq 0$ выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty}\|D((\mathbf{U}(\frac{t}{n}))^n)u\|_H = 0$, то есть для последовательности $\{(\mathbf{U}(\frac{t}{n}))^n\}$ композиций независимых случайных одинаково распределенных унитарных полугрупп закон больших чисел выполняется в сильной операторной топологии.

Таким образом, в случае случайного оператора $\mathbf{L}$, множеством значений которого ограничено по норме пространства $B(H)$ с вероятностью 1, последовательность итераций независимых случайных полугрупп $\xi = \exp(\mathbf{L}t)$ в пределе при $n \to \infty$ стремится, в силу теоремы 4, к детерминированной полугруппе $e^{\bar{\mathbf{L}}t}$, $t \geq 0$, равномерно на каждом отрезке $[0, T]$ в банаховом пространстве $B(H)$. При этом систематическое отклонение итераций от предельной полугруппы (то есть отклонение математического ожидания $M[\mathbf{U}_{\varepsilon_n}(\frac{t}{n}) \circ ... \circ \mathbf{U}_{\varepsilon_1}(\frac{t}{n})]$ от предельной полугруппы $e^{\bar{\mathbf{L}}t}$, $t \geq 0$) по норме банахова пространства $B(H)$ имеет порядок $O(\frac{1}{\sqrt{n}})$ при $n \to \infty$ равномерно на отрезке $[0, T]$, а случайное отклонение итераций от предельной полугруппы по норме банахова пространства $B(H)$ (то есть дисперсия случайной величины $\mathbf{U}_{\varepsilon_n}(\frac{t}{n}) \circ ... \circ \mathbf{U}_{\varepsilon_1}(\frac{t}{n})$) также имет порядок $O(\frac{1}{\sqrt{n}})$ при $n \to \infty$ равномерно на отрезке $[0, T]$. В этом смысле для итераций независимых случайных полугрупп (12) с равномерно ограниченными по норме пространства $B(H)$ генераторами справедлив закон больших чисел (последовательность итераций независимых случайных полугрупп (12) с ограниченным множеством генераторов является некоммутативным аналогом последовательности сумм независимых случайных величин).

В бесконечномерном пространстве H согласно оценкам в доказательстве теоремы Чернова систематическое отклонение итераций (12) от предельной полугруппы (то есть отклонение математического ожидания $M[\mathbf{U}_{\varepsilon_n}(\frac{t}{n}) \circ ... \circ \mathbf{U}_{\varepsilon_1}(\frac{t}{n})]$ от предельной полугруппы $e^{\bar{\mathbf{L}}t}$, $t \geq 0$) по полунормам, порождающим сильную операторную топологию пространства $B(H)$ имеет порядок $O(\frac{1}{\sqrt{n}})$ при $n \to \infty$ равномерно на отрезке $[0, T]$. Но как показывают приведенные выше примеры (предложения 4 и 5), случайное отклонение итераций от предельной полугруппы (то есть дисперсия случайной величины $\mathbf{U}_{\varepsilon_n}(\frac{t}{n}) \circ ... \circ \mathbf{U}_{\varepsilon_1}(\frac{t}{n})$) по полунормам, порождающим сильную операторную топологию пространства $B(H)$, или по норме пространства $B(H)$, не является бесконечно малой величиной при $n \to \infty$ ни при каком $t \in [0, T]$. В этом смысле для итераций независимых случайных полугрупп (12) в пространстве H закон больших чисел не справедлив.

Представление когерентых состояний в квантовой оптике

Представленная в работе конструкция случайных полугрупп имеет практическое приложение в задачах квантовой оптики при рассмотрении осциллятора с переменной частотой. Для них возникает проблема построения оператор-функции комплексного аргумента, эквивалентной по Чернову суперпозиции операторов сдвига в терминах так называемых когерентных состояний (КС). Напомним, что КС $|z\rangle$ называется собственный вектор оператора уничтожения $\mathbf{a}$, отвечающий собственному значению $z \in \mathbf{C}$.

Операторы рождения $\mathbf{a}^*$ и уничтожения $\mathbf{a}$ действуют на векторы $|n\rangle$ стандартного фоковского базиса гильбертова пространства H по формулам

$$\mathbf{a}^*|n\rangle = \sqrt{n+1}|n\rangle, \quad \mathbf{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$$

Известно, что КС $|z\rangle$ имеет представление с точностью до фазового множителя

$$|z\rangle = e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

и может быть получено действием оператора сдвига

$$\hat{\mathbf{D}}(z) = e^{z\mathbf{a}^* - \bar{z}\mathbf{a}}$$

на векторное состояние

$$|z\rangle = \hat{\mathbf{D}}(z)|0\rangle.$$

Состояния, отвечающие разным собственным значениям, не ортогональны:

$$\langle z|w\rangle = e^{-\frac{1}{2}(|z-w|^2 - \bar{w}z + w\bar{z})}.$$

Тем не менее, они образуют (переполненный) базис, поскольку фоковское состояние имеет представление

$$|n\rangle = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbf{C}} e^{-\frac{|z|^2}{2}} \frac{\bar{z}^n}{\sqrt{n!}} |z\rangle d^2 z.$$

Однопараметрическое семейство операторов сдвига $\hat{\mathbf{D}}(z)$, $z \in \mathbf{C}$, не обладает полугрупповым свойством, поскольку

$$\hat{\mathbf{D}}(z)\hat{\mathbf{D}}(w) = e^{i\varphi}\hat{\mathbf{D}}(z+w),$$

где $i\varphi(z,w) = \frac{1}{2}(\bar{w}z - w\bar{z})$.

Но попадание в состояние $|z\rangle$ на практике может рассматриваться как случайное блуждание по всевозможным траекториям, соединяющим вакуумное состояние $|0\rangle$ и интересующее нас состояние $|z\rangle$.

Тогда реально сгенерированное состояние $|z\rangle$ может трактоваться как действие на вакуумный вектор $|0\rangle$ среднего значения суперпозиции операторов сдвига, эквивалентной по Чернову оператору $e^{i\varphi_0}\hat{\mathbf{D}}(z)$, где φ_0 – результат усреднения фаз (см. ниже формулу (22)).

Рассмотрим сначала попадание в состояние $|z\rangle$ через некоторое промежуточное состояние $|w\rangle$.

Тогда введем

$$\hat{\mathbf{U}}(z,w) = \hat{\mathbf{D}}(z-w)\hat{\mathbf{D}}(w) = e^{i\varphi(z,w)}\hat{\mathbf{D}}(z).$$

В силу того, что $e^{i\varphi(z,w)}$ и $\hat{\mathbf{D}}(z)$ коммутируют и имеют место равенства $(e^{i\varphi(\frac{z}{n},w)})^n = e^{i\varphi(z,w)}$ и $(\hat{\mathbf{D}}(\frac{z}{n}))^n = \hat{\mathbf{D}}(z)$, получаем, что

$$(\hat{\mathbf{U}}(\frac{z}{n},w))^n = \hat{\mathbf{U}}(z,w).$$

Далее, если ввести суперпозицию траекторий из $|0\rangle$ в $|z\rangle$ через $|w\rangle$ с некоторой мерой $\nu(w)$, то

$$\int\limits_{\mathbf{C}} e^{i\varphi(z,w)}d\nu(w) \sim_{Ch} e^{i\varphi_0(x)},$$

где

$$\varphi_0(z) = \int\limits_{\mathbf{C}} \varphi(z,w)d\nu(w). \tag{22}$$

Тогда среднее значение суперпозиции операторов сдвига эквивалентно по Чернову произведению функции Вигнера распределения $\nu(w)$ и оператора сдвига $\hat{\mathbf{D}}(z)$:

$$\int\limits_{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{U}}(z,w)d\nu(w) \sim_{ch} W_\nu(\frac{z}{2})\hat{\mathbf{D}}(z) \equiv \overline{\hat{\mathbf{D}}(z)},$$

где

$$W_\nu(z) = \int\limits_{\mathbf{C}} e^{z\bar{w}-\bar{z}w}d\nu(w).$$

Эта величина $W_\nu(z)$ введена по аналогии с обычной функцией Вигнера в квантовой оптике, определенной как

$$W(z) = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{\mathbf{C}} e^{z\bar{w}-\bar{z}w}X(w)d^2w,$$

где $X(w)$ – характеристическая функция или среднее значение оператора сдвига по состояниям, определяемым матрицей плотности $\hat{\rho}$, имеющей представление

Глаубера-Сударшана

$$\hat{\rho} = \int\limits_{\mathbf{C}} \rho(z)|z\rangle\langle z|dz^2,$$

и для которой

$$X(w) = Tr(\hat{\rho}\hat{\mathbf{D}}(w)).$$

Таким образом, переход из состояния $|0\rangle$ в состояние $|z\rangle$ через случайное состояние $|w\rangle$ определяет случайный оператор перехода $\hat{\mathbf{U}}(z,w)$ из состояния $|0\rangle$ в состояние $|z\rangle$. Специфика рассматриваемой задачи такова, что от выбора элемента w вероятностного пространства $\mathbf{C}$ зависит только фазовый множитель, с точностью до которого случайный оператор перехода $\hat{\mathbf{U}}(z,w)$ совпадает с оператором перехода $\hat{\mathbf{D}}(z)$.

Описанный пример показывает практическое применение теоремы 2 работы [9], которая применительно к данному случаю формулируется так.

Теорема 6. *Пусть на комплексной плоскости $\boldsymbol{C}$ выбрана вероятностная мера ν, абсолютно непрерывная относительно меры Лебега на $\boldsymbol{C}$. Тогда среднее по мере ν значение оператора $\hat{\boldsymbol{U}}(z,w)$ перехода из состояния $|0\rangle$ в состояние $|z\rangle$ через промежуточное состояние $|w\rangle$ эквивалентно по Чернову оператору $\hat{\boldsymbol{D}}(z)e^{i\varphi_0(z)}$, где $\hat{\boldsymbol{D}}(z)$ – оператор перехода из состояния $|0\rangle$ в состояние $|z\rangle$, а $\varphi_0(z) = \frac{1}{2i}\int\limits_{\boldsymbol{C}}(\bar{w}z - w\bar{z})d\nu(w)$, в том смысле, что для любого $z \in \boldsymbol{C}$ и любого $u \in H$ выполняется равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \|[(\int\limits_{\boldsymbol{C}} \hat{\boldsymbol{U}}(\frac{z}{n}, w)d\nu(w))^n - \hat{\boldsymbol{D}}(z)e^{i\varphi_0(z)}]u\|_H = 0.$$

Особенностью привееденной формулы Чернова является то, что в ней исследована сходимость итераций операторнозначной функции, заданной не на промежутке, а на комплексной плоскости.

В более общем случае при разбиении траектории из $|0\rangle$ в $|z\rangle$ на n ломанных получаем суперпозицию n операторов сдвига. Пусть $\gamma_{\alpha,\beta}$ – участок траектории из $|\alpha\rangle$ в $|\beta\rangle$. Тогда введем $\varphi_{\gamma_{0z}}$ так, что

$$2i\varphi_{\gamma_{0z}} = \int\limits_{\gamma_{0z}} d\bar{\alpha} \int\limits_{\gamma_{\alpha z}} d\beta - \int\limits_{\gamma_{0z}} d\alpha \int\limits_{\gamma_{\alpha z}} d\bar{\beta}.$$

Если каждая такая траектория выбирается с некоторой вероятностью $d\mu(\gamma_{0z})$, то можно определить среднее значение оператора сдвига по траекториям γ_{0z}:

$$\bar{\mathbf{D}}(z) = \int\limits_{\Gamma} \hat{\mathbf{D}}(z)e^{i\varphi_{\gamma_{0z}}}d\mu(\gamma_{0z}) \sim_{Ch} \hat{\mathbf{D}}_{\bar{\varphi}_z}(z),$$

где

$$\bar{\varphi}_z = \int\limits_{\Gamma} \varphi_{\gamma_{0z}}d\mu(\gamma_{0z}), \quad \hat{\mathbf{D}}_{\bar{\varphi}_z}(z) = e^{i\bar{\varphi}_z}\hat{\mathbf{D}}(z).$$

Теперь нужно рассмотреть смесь средних операторов сдвига в разные КС, например

$$\sum_k p_k \bar{\mathbf{D}}(z_k) = \int\limits_{\mathbf{C}} e^{i\bar{\varphi}_z} \hat{\mathbf{D}}(z) d\mu(z) \sim_{Ch} e^{i\varphi_0} \hat{\mathbf{D}}(z_0),$$

$$\varphi_0 = \int\limits_{\mathbf{C}} \bar{\varphi}_z d\mu(z), \quad z_0 = \int\limits_{\mathbf{C}} z d\mu(z).$$

В итоге получаем, что среднее значение в смысле эквивалентности по Чернову суперпозиции операторов сдвига также есть оператор сдвига, генерирующий некоторое среднее когерентное состояние. В качестве примера вероятностной меры на множестве путей, ведущих из состояния $|0\rangle$ в состояние $|z\rangle$, может быть рассмотрена мера Винера на пространстве $C_{0,z}([0,1], \mathbf{C})$ непрерывных комплекснозначныых функций на отрезке $[0,1]$ с заданными начальным и конечным значением 0 и z, определенная на минимальной алгебре, порожденной цилиндрическими подмножествами.

Литература

[1] Богачев В.И. *Основы теории меры, том первый* // Москва-Ижевск. 2003.

[2] Богачев В.И., Смолянов О.Г. *Действительный и функциональный анализ* // Москва-Ижевск. 2009.

[3] М.Л. Бланк. *Устойчивость и локализация в хаотической динамике* // М.: МЦНМО, 2001.

[4] Л.С. Ефремова, В.Ж. Сакбаев. *Понятие взрыва множества решений дифференциальных уравнений и усреднение случайных полугрупп* // ТМФ. 185:2 (2015), 252–271.

[5] Григорчук Р.И. *Эргодические теоремы для действия свободной группы и свободной полугруппы.* // Матем. заметки. 65:5 (1999) С. 779–783.

[6] Иосида К. *Функциональный анализ.* // М.: Мир, 1967.

[7] Лётчиков А.В. *Условная предельная теорема для произведений случайных матриц.* // Мат. Сборник.186:3 (1995). С. 65–84.

[8] Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г. *Формулы Фейнмана как метод усреднения случайных гамильтонианов* // Труды МИАН. 2014. Т. 285.

[9] Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г. *Случайные неограниченные операторы и формулы Фейнмана.* // Изв. РАН.

[10] Оселедец В.И. *Марковские цепи, косые произведения и эргодические теоремы для общих динамических систем.* // ТВП. 10:3 (1965), 551–557

[11] Пастур Л.А. *Спектральная теория случайных самосопряженных операторов.* // Итоги науки и техники. Серия «Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика». 25.0 (1987): 3-67.

[12] Протасов В.Ю. *Инвариантные функции для показателей Ляпунова случайных матриц.* // Мат. Сборник. 2011. № 1. Т. 202. С. 105–132.

[13] Сакбаев В.Ж. *Задача Коши для линейного дифференциального уравнения с вырождением и усреднение аппроксимирующих ее регуляризаций* // Современная математика. Фундаментальные направления. 2012. Т. 43. С. 3–174.

[14] Секефальви-Надь Б., Фояш Ч. *Гармонический анализ операторов.* // Изд-во: М.: Мир, 1970

[15] Скороход А.В. *Произведения независимых случайных операторов.* // УМН. Т. 38. № 4 (232). С. 255–280.

[16] Тутубалин В.Н. *Некоторые теоремы типа усиленного закона больших чисел.* // ТВП. 1969. Т. 14. № 2. С. 319–326.

[17] Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2.* // М.: Мир. 1984.

[18] P.R. Chernoff, *Note on Product Formulas for Operator Semigroups*, // J. Funct. Anal., **84**, (1968), 238–242.

[19] K.J. Engel, R. Nagel. *One-parameter semigroups for linear evolution equation.* Springer. 2000.

[20] O.G. Smolyanov, A. Tokarev, A. Trumen. *Hamiltonian Feynman path integrals via the Chernoff formula* JMP **43**:10, (2002), 5161–5171.

[21] Smolyanov O.G. Weizsacker H., Wittih O. *Chernoff's theorem and discrete time approximations of Brownian motion on manifolds*. Pot. Anal. (2007), **26**, 1–29.

Эквивалентность по Чернову и эволюция функции Вигнера для линейного квантования

Л. А. Борисов[1] Ю. Н. Орлов[1,2], В. Ж. Сакбаев[2]

Аннотация

Предложено расширение понятия эквивалентности по Чернову для операторозначных функций на решения квантовых уравнений эволюции относительно матрицы плотности и функции Вигнера. Проанализированы эволюционные уравнения, получающиеся в результате произвольного линейного квантования. Показано, что в общем случае уравнение Вигнера имеет специфический диффузионный член, обсуловленный расплыванием пакета квантовых мод

Введение

Настоящая работа является продолжением исследований по применению теоремы Чернова и понятия эквивалентной по Чернову оператор-функции [1–4] для описания эволюции квантовых систем. Развитие этого метода в последнее время связано с получением явных аналитических выражений [5–7] для решающих операторов задачи Коши для дифференциальных уравнений в частных производных, таких как уравнение теплопроводности или Шредингера. Центральным математическим фактом, лежащим в основе этих исследований, является теорема Чернова [8], устанавливающая сходимость определенного итерационного процесса к полугруппе, которая представляет решение задачи Коши. Приведем здесь формулировку этой теоремы

Теорема (Chernoff, 1968)**.** *Пусть X – банахово пространство, $B(X)$ – банахово пространство линейных ограниченных операторов в X и пусть функция $\boldsymbol{F}:[0;+\infty]\to B(X)$ удовлетворяет условию $\boldsymbol{F}(0)=\boldsymbol{I}$, непрерывная в сильной операторной топологии, удовлетворяет оценке $||\boldsymbol{F}(t)||_{B(X)}\leq e^{\alpha t}, t\geq 0$ при некотором $\alpha\geq 0$. Тогда, если оператор $\boldsymbol{F'}(0)$ замыкаем и его замыкание является генератором сильно непрерывной полугруппы операторов $\boldsymbol{U}(t), t>0$, то для любого $u\in X$ и любого $T>0$ выполняется равенство*

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in[0,T]}||(\boldsymbol{U}(t)u-(\boldsymbol{F}\frac{t}{n})^n u)||_X=0$$

[1]Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН
[2]Московский физико-технический институт

Интерес к применению теоремы Чернова для построения генераторов полугрупп связан не только с возможностью получения решения соответствующих уравнений в более явном виде, чем это позволяют теоремы существования, но и с приданием нового смысла некоторым математическим конструкциям, которые до этого воспринимались только как проявления определенной математической техники.

Например, при построении равновесного оператора плотности квантовой системы надо определить ядро оператора $\hat{\rho}(\beta) = \exp(-\beta \hat{H})$, где $\hat{H}$ есть линейный самосопряженный оператор, символом которого является функция Гамильтона $H(q, p)$ классической динамической системы, заданная в фазовом пространстве координат q и импульсов p. Сопоставление классической динамической величине (т.е. такой, эволюция которой определяется уравнениями Гамильтона) квантового оператора, т.е. линейного оператора, действующего в Гильбертовом пространстве, называется квантованием. Математические аспекты процедуры квантования (в частности, линейного квантования) подробно описаны в трудах Ф.А. Березина [9]. Ядра соответствующих интегральных преобразований, связывающих между собой символы и операторы, содержатся в [10]. С технической точки зрения проквантовать можно любую функцию от координат и импульсов, преобразование Фурье которой по импульсам является обобщенной функцией (либо регулярной, либо с точечным носителем, либо медленного роста). В частности, можно построить оператор $\hat{f}(\beta)$, которому отвечает символ в виде классического равновесного распределения $f(\beta) = \exp(-\beta H)$. Однако оператор $\hat{f}(\beta)$ не описывает статистические свойства квантовой системы. Аналогично и классический символ, отвечающий квантовому оператору плотности $\hat{\rho}$, не является классическим равновесным распределением, т.е. не имеет статистического и механического смысла. Согласно же теореме Чернова, можно рассмотреть итерационный процесс, состоящий в построении оператора $\hat{D}_n(\beta) = (\hat{f}(\beta/n))^n$, после чего перейти к пределу в сильной операторной топологии и получить оператор

$$\hat{D}(\beta) = \lim_{n \to \infty} \hat{D}_n(\beta),$$

обладающий полугрупповым свойством. В работе О.Г. Смолянова и соавторов [11] было показано, что этот предельный оператор совпадает с оператором плотности $\hat{\rho}$. Следовательно, чтобы получить статистический оператор, надо проквантовать классическую плотность функции распределения как динамическую величину, притом, что собственно квантование классического распределения физически бессмысленно, и бесконечное число раз свернуть полученный оператор с самим собой. Тем самым квантовая статистика получилась как предел итераций квантовой динамики. Поскольку же ядро оператора $\hat{D}_n(\beta)$ определено явно и представляет собой сверточное произведение, его можно рассматривать как усреднение известных функций, заданных в классическом фазовом пространстве, по известной мере. В пределе при $n \to \infty$ это позволяет трактовать квантовый статистический оператор как результат статистического усреднения бесконечного числа независимых случайных сдвигов в классическом пространстве, т.е., в сущности, как результат усреднения случайных полугрупп.

Указанная трактовка выводит нас на следующую задачу, связанную с усреднением полугрупп и с приданием смысла таким операциям. Очевидно, что линейная комбинация полугрупп не обязана быть полугруппой. Но если в результате итераций, аналогичных описанным выше, можно получить сходимость к полугруппе, то такая полугруппа объявляется эквивалентной по Чернову данной линейной комбинации полугрупп. Строгое определение эквивалентности по Чернову было дано О.Г. Смоляновым в [12] и обобщено на несколько более широкий класс операторов в [2].

Определение 1. *Пусть X – банахово пространство, $B(X)$ – банахово пространство линейных ограниченных операторов в X, $\Pi(X)$ – множество сильно непрерывных отображений F полуоси $[0, +\infty)$ в банахово пространство $B(X)$, удовлетворяющих условию $F(0) = I$. Тогда операторнозначные функции F,$G \in \Pi(X)$ называются эквивалентными по Чернову, если для любого $T > 0$ и любого $u \in X$ выполняется условие*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} ||(F(t/n)^n - (G(t/n)^n)u||_X = 0.$$

На основе этого определения в [2–4] были построены примеры эквивалентных по Чернову операторов, отвечающих статистической смеси генераторов полугрупп. Теоретическое обобщение описываемого подхода позволило в [2] дать следующее определение обобщенного среднего значения случайной полугруппы.

Определение 2. *Сильно непрерывная однопараметрическая полугруппа U ограниченных линейных преобразований банахова пространства X является обобщенным средним значением случайной полугруппы ξ, если полугруппа U эквивалентна по Чернову математическому ожиданию $M\xi$.*

В работе [2] были доказаны теоремы об эквивалентности по Чернову для средних значений случайных полугрупп, в которых сформулированы достаточные условия того, чтобы эти средние значения, не будучи сами полугруппами, порождали полугруппу, эквивалентную им по Чернову. Приведем здесь соответствующие формулировки.

Теорема 1. *Пусть $\{\hat{H}_n\}$ – последовательность генераторов сильно непрерывных полугрупп в банаховом пространстве X. Пусть $\{p_n\}$ – последовательность неотрицательных чисел, сумма ряда из которых равна единице. Пусть также* *существует линейное подпространство $D \subset X$, являющееся существенной областью определения каждого из генераторов $\hat{H}_n, n \in N$ и такое, что для любого $x \in D$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} p_n ||\hat{H}_n x||_X$ сходится. Тогда, если оператор $\hat{H}$ определен на D формулой $\hat{H}x = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \hat{H}_n x$ и такой, что замыкание оператора $\hat{H}$ является генератором сильно непрерывной полугруппы $\hat{U} = \exp(t\hat{H}), t \geq 0$, то среднее значение $\hat{F}(t)$ случайной полугруппы $\hat{U} = \exp(t\hat{H})_n$, определяемое формулой $\hat{F}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \exp(t\hat{H}_n), t \geq 0$ эквивалентно по Чернову полугруппе $\hat{U} = \exp(t\hat{H})$.*

В частности, пусть $\hat{H}_1$ и $\hat{H}_2$ – эрмитовы операторы (гамильтонианы), порождающие полугруппы $\hat{U} = \exp(t\hat{H}_1)$ и $\hat{U} = \exp(t\hat{H}_2)$, $t \geq 0$ Рассмотрим оператор $\hat{H} = p_1\hat{H}_1 + p_2\hat{H}_2$, $p_1 \geq 0, p_2 \geq$. Например, эта ситуация возникает тогда, когда гамильтониан проквантован частично по Йордану, а частично по Вейлю. Пусть операторы $\hat{H}_{1,2}$ таковы, что условия теоремы 1 выполнены. Тогда в соответствии с формулой (2) полугруппа $\hat{U} = \exp(t\hat{H})$ эквивалентна по Чернову линейной комбинации полугрупп $p_1\hat{U}_1 + p_2\hat{U}_2$.

Аналогично формулируется и вторая теорема об эквивалентности, применяемая тогда, когда усреднение случайных полугрупп проводится по некоторой счетно-аддитивной мере, заданной на σ-алгебре подмножеств некоторого множества E.

Теорема 2. *Пусть $\hat{H}_\epsilon, \epsilon \in E$ – операторнозначная функция на множестве E, на σ-алгебре подмножеств 2^E которого задана счетно-аддитивная нормированная неотрицательная мера μ, такая, что ее значениями являются генераторы сильно непрерывных сжимающих полугрупп в банахавом пространстве X. Пусть существует линейное подпространство $D \subset X$ являющееся существенной областью определения каждого из генераторов $\hat{H}_\epsilon$ и такое, что для любого $x \in D$ интеграл $\int_E ||\hat{H}_\epsilon x||_X d\mu(\epsilon)$ сходится. Тогда, если оператор $\hat{H}$ определен на D формулой $\hat{H}x = \int_E \hat{H}_\epsilon x d\mu(\epsilon)$ и такой, что замыкание оператора $\hat{H}$ является генератором сильно непрерывной полугруппы $\hat{U} = \exp(t\hat{H}), t \geq 0$, то среднее значение случайной полугруппы $\hat{F}(t) = \int_E \exp(t\hat{H}_\epsilon) d\mu(\epsilon), t \geq 0$ эквивалентно по Чернову полугруппе $\hat{U} = \exp(t\hat{H})$.*

Отметим, что применительно к самой теореме Чернова введенное понятие эквивалентности означает, в частности, что при выполнении условий этой теоремы полугруппа, эквивалентная по Чернову операторной функции $\hat{f}(\beta)$, классическим символом которой является функция $f(\beta) = \exp(-\beta H)$, есть квантовый оператор плотности $\hat{\rho}(\beta) = \exp(-\beta\hat{H})$. Тем самым операторная функция, эквивалентная по Чернову некоторой «пробной» функции с неясным физическим смыслом, оказалась не просто оператором, удовлетворяющим определенным формальным условиям, но уже имеющим смысл как оператор плотности.

Точно так же оператор $\hat{U}(t)$, классическим символом которого является функция $U(t) = \exp(-itH)$, эквивалентен по Чернову оператору $\exp(-it\hat{H})$, разрешающему задачу Коши для уравнения Шредингера. Поэтому теорема Чернова и введенные отношения эквивалентности позволяют обосновать процедуру аппроксимации квантовой полугруппы последовательностью итераций, на каждом шаге которых возникают операторы, которые не являются, вообще говоря, генераторами каких-либо полугрупп, но становятся таковыми в результате предельного перехода. Приведенные выше теоремы 1 и 2 обосновывают этот предельный переход.

Следовательно, приобретает самостоятельную ценность формирование набора операторных функций, получаемых в соответствии с введенным принципом эквивалентности по Чернову для различных эволюционных уравнений. Например, описываемая задача об усреднении полугрупп естественным образом возникает при решении квантового уравнения Лиувилля

$$i\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t} = [\hat{H}, \hat{\rho}], \qquad \hat{\rho}|_{t\to+0} = \hat{\rho}_0 \tag{3}$$

относительно статистического оператора $\hat{\rho}$в случае линейного квантования, когда оператор $\hat{H}$ представляется в виде статистической смеси операторов, как в примере, иллюстрирующем теорему 1 выше.

Для так называемого линейного квантования, определяемого в следующем разделе, актуальной является также и задача перехода к эквивалентным операторам в уравнении эволюции функции Вигнера. Эта функция является специальным преобразованием [10] матрицы плотности и имеет смысл квазивероятности (неположительной меры), по которой усредняется классический символ оператора, так что в результате получается среднее значение квантового оператора. Без такого перехода уравнение эволюции функции Вигнера оказывается в общем случае незамкнутым (исключение составляет только квантование Вейля). Цель настоящей работы состоит в исследовании эволюционного уравнения для функции Вигнера с использованием усреднения генераторов квантовых полугрупп в смысле определений 1 и 2.

Линейное квантование

Опишем кратко концепцию линейного квантования, следуя [9, 10]. Для простоты формулы будем записывать для одномерного случая.

Пусть $\Gamma = R^2$ – классическое фазовое пространство одномерной динамической системы, записанной в терминах канонически сопряженных обобщенных координат q и p. Пусть также $A : \Gamma \to R$ – функция точки в Γ, E_A – гильбертово пространство функций A. Функция $A(q,p)$ в классической механике называется динамической величиной, или наблюдаемой. Одна из наблюдаемых $A=H$ называется функцией Гамильтона, она определяет семейство (группу) преобразований $U:\Gamma\to\Gamma$ фазового пространства. Задавая в Γ динамическую меру с плотностью $f(x,t)$, $x\equiv q,p\in\Gamma$ и гамильтониан H, можно построить уравнение эволюции плотности вероятности $f(x,t)$(уравнение Лиувилля). Каждой наблюдаемой A сопоставляется ее среднее значение в момент времени $t:\langle A\rangle=\int_\Gamma A(x)f(x,t)d\Gamma$, $\langle A\rangle\in R$.

В квантовой механике вводится вещественное или комплексное гильбертово пространство L, полное по норме, определенной скалярным произведением в L. Определенные на L самосопряженные линейные операторы $\hat{A}$ называются наблюдаемыми. Самосопряженные положительные линейные операторы $\hat{\rho}$ с единичным следом называются состояниями. Среднее значение наблюдаемой $\hat{A}$ в состоянии $\hat{\rho}$ вычисляется по формуле

$$\langle\hat{A}\rangle=Tr\hat{A}\hat{\rho}.$$

Пусть L реализовано как пространство функций $\psi(x)\in L$, с интегрируемым квадратом модуля. Элемент называется волновой функцией и является аналогом точки в классической механике. Одна из наблюдаемых $\hat{A}=\hat{H}$ называется гамильтонианом; этот оператор задает эволюцию элемента $\psi(x)\in L$:

$$i\partial_t\psi=\hat{H}\psi \tag{5}$$

Принципом соответствия называются условия, налагаемые на возможные двусторонние отношения между множествами функций $\{A\}$ и операторов $\{\hat{A}\}$. Соответствие $\hat{A}\to A$ называется переходом к классическому пределу; при этом A называется символом оператора $\hat{A}$. Соответствие $A\to\hat{A}$ называется квантованием. Для построения квантовой динамики по классической следует указать квантование функции Гамильтона. При этом, каково бы ни было квантование, потребуем выполнения обычного соответствия для операторов координаты и импульса:

$$q\leftrightarrow x,\quad p\leftrightarrow -i\frac{\partial}{\partial x},\quad q^n\leftrightarrow(\hat{q})^n,\quad p^n\leftrightarrow(\hat{p})^n. \tag{6}$$

Известно [9], что соответствие между операторами и символами операторов полностью определяется формулами, выражающими символы операторов $\hat{p}\hat{A},\hat{A}\hat{p},\hat{q}\hat{A},\hat{A}\hat{q}$ через символ оператора $\hat{A}$. Квантование называется линейным, если эти формулы имеют вид линейных операторов с постоянными коэффициентами, например:

$$\hat{A}\leftrightarrow A,\quad \hat{A}\hat{q}\leftrightarrow(\alpha q+\beta p+\mu\frac{\partial}{\partial q}+\lambda\frac{\partial}{p})A. \tag{7}$$

Соответствие между матрицей $\tilde{A}(x,y)$ оператора $\hat{A}$и его классическим символом $A(q,p)$ определяется в линейном квантовании определяется линейным интегральным преобразованием $\hat{K}$ с ядром $K(q,p|x,y)$, называемым ядром квантования:

$$\tilde{A} = \hat{K}A : \tilde{A}(x,y) = \int A(q,p)K(q,p|x,y)dqdp \tag{8}$$

Оператор $\hat{A}$ действует на элемент $\psi \in L$ по формуле

$$\hat{A}\psi(x) = \int \tilde{A}(x,y)\psi(y)dy. \tag{9}$$

Здесь интегрирование проводится от $-\infty$ до $+\infty$. Далее пределы интегрирования для краткости не указываются, если предполагается, что интегрирование проводится по всему пространству.

Представителя класса линейных квантований, задаваемого ядром

$$K_\tau(q,p|x,y) = \frac{1}{2\pi}\delta(q-\tau x-(1-\tau)y)\exp[ip(x-y)], \tau \in [0,1] \tag{10}$$

будем называть τ-квантованием. Соответствующую матрицу оператора, получаемую по формуле (8), будем обозначать $\tilde{A}_\tau(x,y)$. Из (8) и (10) следует, что для τ-квантования связь между ядрами операторов и их символами дается формулой

$$\tilde{A}_\tau(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int A(\tau x+(1-\tau)y,p)\exp[ip(x-y)]. \tag{11}$$

При таком квантовании моному $q^n p^m$отвечает оператор

$$A = q^n p^m \leftrightarrow \hat{A}_\tau = (-i)^m \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (1-\tau)^k n^{[k]} x^{n-k} \frac{\partial^{m-k}}{\partial x^{m-k}}, \tag{12}$$

матрица которого имеет вид

$$\tilde{A}_\tau(x,y) = (i)^m(\tau x+(1-\tau)y)^n \frac{\partial^m}{\partial y^m}\delta(x-y). \tag{13}$$

Для примера применения τ-квантования установим вид символа для оператора $\hat{B}_\tau = \hat{p}_\tau \hat{A}_\tau$, где $\hat{A}_\tau$ задается формулой (12).

С использованием (10) из (13) получаем

$$\tilde{B}_\tau(x,y) = \int \tilde{p}_\tau(x,z)\tilde{A}_\tau(z,y)dz = (i)^{m+1}\int \frac{\partial\delta(x-z)}{\partial z}(\tau z+(1-\tau)y)^n \frac{\partial^m}{\partial y^m}\delta(z-y)dz =$$

$$= -(i)^{m+1}[n\tau(\tau x+(1-\tau)y)^{n-1}\frac{\partial^m}{\partial y^m}\delta(x-y) - (\tau x+(1-\tau)y)^n \frac{\partial^{m+1}}{\partial y^{m+1}}\delta(x-y)]$$

Сравнивая полученное выражение с (13), заключаем, что оператору $\hat{B}_\tau$отвечает символ

$$\hat{B}_\tau \leftrightarrow B = (p - i\tau\frac{\partial}{\partial q})A \leftrightarrow \hat{p}_\tau \hat{A}_\tau.$$

Аналогично получаем сопоставления вида (7):

$$\hat{A}_\tau \hat{p}_\tau \leftrightarrow (p + i(1-\tau)\frac{\partial}{\partial q})A, \quad \hat{q}_\tau \hat{A}_\tau \leftrightarrow (q + i(1-\tau)\frac{\partial}{\partial p}A, \quad \hat{A}_\tau \hat{q}_\tau \leftrightarrow (q - i\tau\frac{\partial}{\partial p})A.$$

Среди τ-квантований существует единственное эрмитово квантование, которое получается при $\tau = 1/2$. В этом случае формула (10) определяет так называемое квантование Вейля. Другие варианты линейных эрмитовых квантований можно получить с помощью линейной комбинации ядер вида (10), как это сделано в [10]. Такая комбинация может быть представлена в виде линейного интегрального преобразования ядра квантования (10) с некоторой обобщенной функцией $Q(\tau)$, обращающейся в ноль вне отрезка $[0;1]$ и удовлетворяющей условию

$$\int_0^1 Q(\tau)d\tau = 1 \tag{14}$$

В результате ядро квантования и матрица оператора представляются в виде

$$K = \int_0^1 Q(\tau)K_\tau d\tau, \qquad \tilde{A} = \int_0^1 Q(\tau)\tilde{A})\tau d\tau \tag{15}$$

Пусть символ $A(q,p)$ имеет вид произведения монома по импульсу на дифференцируемую функцию координаты:

$$A(q,p) = f(q)p^m. \tag{16}$$

Тогда при квантовании с ядром (15) ему отвечает оператор

$$\hat{A} = (-i)^m \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \sigma_k f^{(k)}(x)\hat{p}^{m-k}, \quad \hat{p} = -i\frac{\partial}{\partial x}, \quad \sigma_k = \int_0^1 Q(\tau)(1-\tau)^k d\tau. \tag{17}$$

Величины σ_k будем называть моментами функции симметризации $Q(\tau)$, а величину $G(s)$ – характеристической функцией квантования:

$$G(s) = \int_0^1 Q(\tau)\exp(i\tau s)d\tau = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma_k (is)^k}{k!} \tag{18}$$

Из (17-18) следует, что для того, чтобы задать оператор, отвечающий полиномиальному по импульсам классическому символу, достаточно указать моменты функции квантования или характеристическую функцию $G(s)$. Символы, не имеющие полиномиального вида, будем считать проквантованными с тем же правилом квантования, определяемым ядром (15).

Пусть задано некоторое линейное эрмитово квантование. Для эрмитовости оператора необходимо и достаточно, чтобы функция симметризации $Q(\tau)$ была симметрична относительно центра отрезка $[0;1]$. В этом случае не все моменты функции симметризации независимы. Именно, моменты четного порядка могут быть заданы произвольно, а для моментов нечетного порядка тогда получается рекуррентная формула:

$$\sigma_0 = 1, \sigma = \frac{1}{2}, \sigma_{2k+1} = \frac{1}{2}[1 + \sum_{n=1}^{2k} (-1)^n \binom{2k+1}{n} \sigma_n]. \tag{19}$$

В результате все моменты нечетного порядка могут быть выражены через четные моменты. В частности, $\sigma_3 = \frac{3}{2}\sigma_2 - \frac{1}{4}$, $\sigma_5 = \frac{1}{2}(1 - 5\sigma_2 + 5\sigma_4)$ и т.д. Среди эрмитовых квантований общеупотребительным является квантование Вейля, но иногда используются и другие способы симметризации, поскольку нет теоретически выводимого требования на использование только какого-нибудь одного правила квантования. Приведем некоторые из квантований с указанием моментов σ_k функции симметризации и характеристической функции квантования $G(s)$:

Квантование Вейля: $Q(\tau) \equiv Q_W(\tau) = \delta(\tau - \frac{1}{2})$, $\quad \sigma_k = \frac{1}{2^k}, G(s) = \exp(is/2)$

Квантование Йордана: $Q(\tau) \equiv Q_J(\tau) = \frac{\delta(\tau)+\delta(1-\tau)}{2}, \sigma_k = \frac{1}{2}, k \geq 1, G(s) = \frac{1+\exp(is)}{2}$

Квантование Борна: $Q(\tau) \equiv Q_B(\tau) = 1$, $\qquad \sigma_k = \frac{1}{k+1}, G(s) = \frac{1-\exp(is)}{2}$

Отметим, что для неотрицательной $Q(\tau)$ формула (15) может быть интерпретирована как усреднение τ-квантований с весом $Q(\tau)$. Для такой функции можно оценить границы, в которых лежит второй момент функции симметризации. Имеем:

$$\sigma_2 =$$

$$= \int_0^1 Q(\tau)\tau^2 d\tau = \int_{-1/2}^{1/2} Q(1/2-a)(a+1/2)^2 da = \int_{-1/2}^{1/2} Q(1/2-a)(a^2+a+1/2) da \geq$$

$$\geq 1/4 + \int_{-1/2}^{1/2} Q(1/2-a)(a^2+a) da \geq 1/4.$$

Знак равенства получается здесь при квантовании Вейля.

С другой стороны, поскольку на отрезке $[0;1]$ справедлива оценка $\tau^2 \leq \tau$, то $\sigma_2 \leq 1/2$. Знак равенства в этой оценке достигается для квантования Йордана.

С учетом (19) аналогично можно получить оценки для моментов других порядков. Тем же методом показывается, что квантования Вейля и Йордана определяют соответственно нижнюю и верхнюю границы промежутков высших моментов функции симметризации: $\frac{1}{2^k} \leq \sigma_k \leq \frac{1}{2}$. Эти два крайние в указанном смысле квантования будут рассматриваться далее в качестве конкретных примеров разных эрмитовых квантований. у суммы двух или более функций симметризации, симметричных относительно центра отрезка . Квантовый гамильтониан, будучи генератором квантовой эволюции, представляет собой статистическую смесь τ-квантований, поэтому теоремы 1 и 2 об усреднении генераторов квантовых полугрупп имеют практическую важность.

Уравнения эволюции квантовых статистических операторов

Построим теперь для линейного эрмитового квантования уравнения эволюции квантовых статистических операторов.

Обозначим через $\rho(x,y)$ матрицу оператора плотности. Тогда среднее значение оператора $\hat{A}$ в состоянии $\hat{\rho}$ определяется по формуле

$$\langle\hat{A}\rangle = Tr\hat{\rho}\hat{A} = \int \rho(x,y)\tilde{A}(y,x)dxdy. \tag{20}$$

Если подставить в (20) формулу (8) для матрицы оператора $\hat{A}$, то среднее значение оператора можно получить, интегрируя его классический символ с некоторой функцией $W(q,p)$, называемой функцией Вигнера:

$$\langle\hat{A}\rangle = \int W(q,p)A(q,p)dqdp, \tag{21}$$

$$W(q,p) = \int \rho(x,y)K(q,p|y,x)dxdy \leftrightarrow W = \hat{K}^T\hat{\rho}. \tag{22}$$

В (22) верхний индекс T означает транспонирование, т.е. взаимную замену в ядре (10) x на y. Для τ-квантования формула (22) имеет вид

$$W_\tau(q,p) = \hat{K}_\tau^T\hat{\rho} = \int \rho(x,y)K_\tau(q,p|y,x)dxdy =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int \rho(q-\tau\xi, q+(1-\tau)\xi)\exp(ip\xi)d\xi. \tag{23}$$

Обратно, для произвольного τ-квантования с ядром (10) имеем

$$\hat{\rho} = 2\pi\hat{K}_\tau^+W \leftrightarrow \rho(x,y) = \int W_\tau(\tau y+(1-\tau)x,p)\exp(ip(x-y))dp, \tag{24}$$

где «плюс» у ядра квантования означает эрмитово сопряжение. Поскольку же матрица плотности в (24) не зависит от τ, можно умножить это равенство на $Q(\tau)$ и усреднить по τ. Левая часть (24) при этом не изменится, и тогда получаем

$$\rho(x,y) = \int V(x,y;p)\exp(ip(x-y))dp, V(x,y;p) = \int_0^1 W_\tau(\tau y+(1-\tau)x,p)Q(\tau)d\tau. \tag{25}$$

Из вида ядра K_τ(10) и эрмитовости матрицы плотности следует, что функция V действительна и симметрична относительно замены x на y. Более того, если классический гамильтониан есть функция с разделенными переменными q и p, то матрица плотности не зависит от квантования, и тогда функция V инвариантна относительно выбора квантования Q.

В соответствии с (15), определим теперь полную функцию Вигнера, отвечающую квантованию с ядром K формулой

$$W(q,p) = \int_0^1 W_\tau(q,p)Q(\tau)dt \tag{26}$$

Из (22) следует, что функция Вигнера явно зависит от квантования, даже если матрица плотности от него не зависит.

С одной стороны, удобство представления средних значений квантовых операторов в терминах функции Вигнера состоит в том, что усреднение в (21) проводится в классическом фазовом пространстве. С другой стороны, помимо известного факта о неположительности функции Вигнера (в общем случае эрмитового квантования), т.е. о невозможности ее интерпретации как плотности совместной функции распределения координат и импульсов, существенным затруднением при ее использовании является то, что при вычислении среднего значения квантового оператора функция Вигнера сворачивается с классическим символом, отвечающим этому оператору при том или ином квантовании. Символ же, в отличие от оператора, для произвольного квантования не восстанавливается по виду оператора, поэтому формула (21) оказывается практически бесполезной. Для τ–квантования существует формула обращения

$$A(q,p) = \int \tilde{A}_\tau(q-(1-\tau)\xi, q+\tau\xi)\exp(ip\xi)d\xi, \tag{27}$$

но для общего квантования после проведения симметризации (15) восстановление символа неоднозначно.

Отправной точкой для вывода уравнения эволюции функции Вигнера является квантовое уравнение Лиувилля (3), которое при заданном гамильтониане $\hat{H}$ записывается через матричные элементы операторов в виде

$$i\partial_\tau\rho(x,y) = \int(\tilde{H}(x,z)\rho(z,y) - \tilde{(}z,y)\rho(x,z))dz. \tag{28}$$

Подчеркнем, что в силу эрмитовости матрицы плотности ее эволюция генерируется гамильтонианом, который проквантован эрмитовым линейным квантованием. Используя представление ядра (10), с учетом (15) получаем из (28) более развернутую запись уравнения Лиувилля:

$$i\partial_\tau\rho(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 Q(\tau)\int H(\tau x+(1-\tau)z,p)\rho(z,y)\exp(ip(x-z))dzdpd\tau -$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^1 Q(\tau)\int H(\tau z+(1-\tau)z,p)\rho(x,z)\exp(ip(z-y))dzdpd\tau.$$

Из последнего выражения видно, что при квантовании, определяемом равенством (10), происходит преобразование Фурье классического гамильтониана по импульсам. Обозначим соответствующий образ через $H_\omega(q)$, т.е.$H_\omega(q) = \frac{1}{2\pi}\int H(q,p)\exp(-i\omega p)dp$. Тогда получаем

$$i\partial_\tau\rho(x,y) = \int_0^1 Q(\tau)\int H_{z-x}(\tau x+(1-\tau)z)\rho(z,y)dzd\tau -$$
$$-\int_0^1 Q(\tau)\int H_{y-z}(\tau z+(1-\tau)y)\rho(x,z)dzd\tau$$

Используя представление (18) для характеристической функции квантования, в полученном выражении можно провести интегрирование по τ, если перейти к Фурье-образам гамильтониана не только по импульсам, но и по координатам, т.е. если положить

$$H_{k,\omega} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int H(q,p) \exp(-ikq - i\omega p) dqdp \tag{29}$$

В этих обозначениях имеем

$$H_{k,\omega} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int H(q,p) \exp(-ikq - i\omega p) dqdp. \tag{29}$$

В частности, если гамильтониан проквантован по Вейлю, то , после чего (30) принимает вид

$$i\partial_\tau \rho(x,y) = \int (G(-ku) H_{k,u} \rho(x+u,y) \exp(ik(x+y)) -$$

$$-H_{k,-u} G(ku) \rho(x+u,y) \exp(iky)) \tag{30}$$

Для квантования Йордана уравнение Лиувилля будет отличаться от (31):

$$i\partial_\tau \rho(x,y) = \frac{1}{2} \int \rho(x+u,y)(H_u(x+u) + H_u(x)) du -$$

$$-\frac{1}{2} \int \rho(x,y+u)(H_{-u}(y+u) + H_{-u}(y)) du.$$

Таким образом, выбор квантования проявляется в квантовом уравнении Лиувилля как способ аппроксимации дифференциального оператора в классическом уравнении Лиувилля его конечно-разностным аналогом.

Получим теперь уравнение эволюции функции Вигнера (22). Поскольку функция Вигнера определяется как среднее значение τ-функции Вигнера $W_\tau(q,p)$ в соответствии с формулами (23), (26), сначала получим уравнение эволюции для $W_\tau(q,p)$, а потом усредним его по функции симметризации. Дифференцируя (26) по времени t и подставляя вместо $i\partial_t \rho(x,y)$ правую часть уравнения Лиувилля (28), получаем

$$i\partial_\tau W_\tau(q,p) = \int K_\tau(q,p|y,x)(\tilde{H}(x,z)\rho(z,y) - \tilde{H}(z,y)\rho(x,z)) dxdydz. \tag{32}$$

Проводя выкладки, аналогичные выводу уравнения (30), получаем

$$i\partial_\tau W_\tau(q,p) = \int K_{k,\omega} G(-k\omega) \exp(i(kq + \omega p + (1-\tau)k\omega)) \Delta_\tau W_\tau dk d\omega, \tag{33}$$

где для сокращения обозначений введен разностный оператор

$$\Delta_\tau W_\tau = W_\tau(q + (1-\tau)\omega, p - \tau k) - W_\tau(q - \tau\omega, p + (1-\tau)k). \tag{34}$$

Уравнение для полной функции Вигнера получается отсюда посредством усреднения (34) по τ с функцией симметризации $Q(\tau)$:

$$i\partial_t W(q,p) = \int H_{k\omega} G(-k\omega)\exp(i(kq+\omega p+k\omega))dkd\omega \int_0^1 Q(\tau)\exp(-i\tau k\omega)\Delta_\tau W_\tau d\tau \tag{35}$$

Из (35) следует, что при произвольном линейном квантовании в виде статистической смеси ядер (15) уравнение эволюции для функции Вигнера не является замкнутым, так как выражается через усреднение разностного оператора, зависящего от τ, причем действует этот оператор не на саму функцию Вигнера $W(q,p)$, а на ее τ-компоненты. Исключением является случай квантования Вейля, когда справа и слева стоят одни и те же функции Вигнера:

$$i\partial_\tau W(q,p) = \int H_{k,\omega}\exp(ikq+i\omega p))(W(q+\omega/2,p-k/2)-W(q-\omega/2,p+k/2))dkd\omega \tag{36}$$

Для квантования Йордана уравнение эволюции полной функции Вигнера представляется в виде системы двух уравнений: одного для 0-квантования, а другого – для 1-квантования:

$$i\partial_\tau W_o(q,p) = \frac{1}{2}\int H_{k,\omega}\exp(ikq+i\omega p))(1+\exp(ik\omega))(W_0(q+\omega,p)-W_0(q,p+k))dkd\omega$$

$$i\partial_\tau W_o(q,p) = \frac{1}{2}\int H_{k,\omega}\exp(ikq+i\omega p))(1-\exp(ik\omega)(W_1(q,p-k)-W_1(q_\omega,p))dkd\omega \tag{37}$$

$$W_J(q,p) = \frac{1}{2}W_0(q,p) + \frac{1}{2}W_1(q,p)$$

Отметим, что τ-компоненты функции Вигнера в общем случае не являются не только положительными, но даже и вещественными, вещественной является лишь полная функция Вигнера – в примере (37) это функция $W_J(q,p)$.

Из (37) видно, что для того, чтобы решить начальную задачу для уравнения Вигнера (35), ее надо решить для τ-компонент соответствующей функции, начальные условия для которых определяются формулой

$$W_\tau(q,p)|_{t=0} = W_\tau^0(q,p) = \int \rho^0(x,y)K_\tau(q,p|y,x)dxdy \equiv \hat{K}_\tau^T\hat{\rho}^0 =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int \rho^0(q-\tau\xi, q+(1-\tau)\xi)\exp(ip\xi)d\xi,$$

после чего усреднить полученные решения по мере, плотность которой дается функцией симметризации $Q(\tau)$.

В физически важном случае, когда классический гамильтониан представляется в виде суммы $H(q,p) = \Phi(q) + \frac{q^2}{2}$, уравнение эволюции (35) для полной функции Вигнера преобразуется к виду

$$i\partial_\tau W(q,p) + ip\frac{\partial W(q,p)}{\partial q} =$$

$$= \int_0^1 Q(\tau)((\tau - 1/2)\frac{\partial^2 W_\tau(q,p)}{\partial q^2} +$$

$$\int \Phi_k \exp(ikq)(W_\tau(q,p-\tau k) - W_\tau(q,p+(1-\tau)k))dk)d\tau \tag{38}$$

Правая часть (38) содержит слагаемые двух типов. Первое слагаемое имеет диффузионный вид, а второе – силовой. Для квантования Вейля диффузионный член обращается в ноль, и в уравнении эволюции остается только силовой член, обусловленный действием потенциала $\Phi(q)$. Важным аспектом, требующим отдельного изучения, является в общем случае диффузионный характер уравнения эволюции функции Вигнера (33), в отличие от квантового уравнения Лиувилля (28), из которого оно и было получено путем определенного преобразования матрицы плотности. Указанный эффект можно назвать диффузией квантования, проявляющийся тогда, когда функция симметризации отлична от дельта-функции. Рассмотрим этот эффект более подробно на следующем примере.

Пусть сисема описывается гамильтонианом $H(q,p) = cq + \frac{p^2}{2}$, где c есть некоторая постоянная. Для него уравнение эволюции (38) функции Вигнера принимает вид

$$\partial_\tau W(q,p) + p\frac{\partial W(q,p)}{\partial q} + c\frac{\partial W(q,p)}{\partial p} = -i\int_0^1 Q(\tau)(\tau - 1/2)\frac{\partial^2 W_\tau(q,p)}{\partial q^2}d\tau \tag{39}$$

Проанализируем влияние диффузионного члена в уравнении (39) для случая квантования Йордана, когда вещественная функция $W_J(q,p)$ представляется в виде полу-суммы комплекснозначных функций $W_0(q,p)$ и $W_1(q,p)$. В этом случае система уравнений (37) преобразуется к виду

$$\partial_t W_0(q,p) + p\frac{\partial W_0(q,p)}{\partial q} + c\frac{\partial W_0(q,p)}{\partial p} = \frac{i}{2}\frac{\partial^2 W_0(q,p)}{\partial q^2}$$

$$\partial_t W_1(q,p) + p\frac{\partial W_1(q,p)}{\partial q} + c\frac{\partial W_1(q,p)}{\partial p} = -\frac{i}{2}\frac{\partial^2 W_1(q,p)}{\partial q^2} \tag{40}$$

Каждое из уравнений системы (40) решается отдельно. Искомую функцию в каждом уравнении обозначим для краткости $f(q,p,t)$, $f(q,p,t)|_{t=0} = f^0(q,p)$.

Перейдем в (40) к лапласовским образам по времени, полагая

$$\tilde{f}(q,p,z) = \int_0^\infty f(q,p,t)\exp(-tz)dt,$$

и к образам Фурье по переменной q, полагая $f_k(p,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(q,p,t)\exp(ikq)dq$. Тогда для первого уравнения из (40) получим обыкновенное линейное дифференциальное уравнение по переменной p с параметрами k и z относительно $\tilde{f}_k(p,z)$:

$$c\frac{d\tilde{f}_k(p,z)}{dp} = \big(-z - \frac{i}{2}k^2 + ikp\big)\tilde{f}_k(p,z) + f_k^0(p) \tag{41}$$

Второе преобразованное уравнение из (40) отличается от (41) только знаком при члене с $ik^2/2$:

$$c\frac{d\tilde{f}_k(p,z)}{dp} = \big(-z + \frac{i}{2}k^2 + ikp\big)\tilde{f}_k(p,z) + f_k^0(p)$$

Рассмотрим уравнение (41). Его общее решение имеет вид

$$\tilde{f}_k(p,z) = \exp(-\frac{2zp - ikp^2}{2c})\Big(A(k,z) + \int f_k^0(p)\exp\big(\frac{2zp + ik^2p - ikp^2}{2c}\big)\Big) \qquad (42)$$

где $A(k,z)$ есть функция, определяемая из условий задачи при $p = 0$. Будем для простоты считать, что функция $A(k,z)$ одна и та же для $W_0(q,p)$ и $W_1(q,p)$, а также и то, что в начальный момент времени матрица плотности $\rho_0(x,y)$ зависит только от разности $x - y$. Тогда, обозначая $\tilde{\rho}_0(p) = \frac{1}{2\pi}\int e^{ip\xi}\rho_0(\xi)d\xi$, получаем решение для фурье-лапласовского образа функции $W_J(q,p)$ в виде:

$$\tilde{W}_{J,k}(p,z) = A(k,z)\exp\big(-\frac{2zp - ikp^2}{2c}\big)cos(\frac{k^2p}{2c}) +$$

$$+\frac{1}{2}\exp\big(-\frac{2zp + ikp^2 - ikp^2}{2c}\big)\delta(k)\int\tilde{\rho}_0(p)\exp\big(\frac{2zp + ikp^2 - ikp^2}{2c}\big)dp +$$

$$+\frac{1}{2}\exp\big(-\frac{2zp - ikp^2 - ikp^2}{2c}\big)\delta(k)\int\tilde{\rho}_0(p)\exp\big(\frac{2zp - ikp^2 - ikp^2}{2c}\big)dp \qquad (43)$$

В частности, если $\tilde{\rho}_0(p) = \delta(p)$, то

$$\tilde{W}_{J,k}(p,z) = \exp(-\frac{2zp - ikp^2}{2c})cos(\frac{k^2p}{2c})(A(k,z) + \delta(k)) \qquad (44)$$

Для квантования Вейля косинус в аналогичном решении заменяется на единицу.

Делая теперь в (43) обратное преобразование, получаем решение эволюционного уравнения (39) в виде свертки фундаментального решения уравнения диффузии и определенным образом сдвинутого начального условия $W_J^0(q,p)$. Если предположить для простоты, что это начальное условие одно и то же для 0-компоненты и 1-компоненты функции Вигнера, то получаем

$$W_J(q,p,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} W_J^0(q-s, p-ct)\cos(\frac{s^2}{2t} - \frac{t}{2}(2p-ct)^2)ds. \qquad (45)$$

Эквивалентые по Чернову операторные функции

Исследуем далее вопрос о возможности введения понятий эквивалентных по Чернову оператор-функций применительно к задаче эволюции квантовых статистических операторов, имея в виду матрицу плотности и функцию Вигнера.

В классической статистической механике уравнение эволюции плотности функции распределения $f(q,p)$ в фазовом пространстве системы, задаваемой независящим от времени гамильтонианом $H(q,p)$, т.е. классическое уравнение Лиувилля, имеет вид:

$$\partial_t f = -[H,f] \equiv -Lf, \quad L = \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial p}\partial\partial q, f|_{t=0} = f_0 \tag{46}$$

Его решение дается формулой

$$f = \exp(-tL) f_0 \tag{47}$$

Для решения в виде (47) выполняются утверждения теорем 1 и 2 относительно эквивалентной по Чернову средней полугруппе, если гамильтониан представляет собой статистическую смесь нескольких гамильтонианов.

В квантовой механике решение квантового уравнения Лиувилля (28) относительно оператора плотности $\hat{\rho}$ принято представлять через генератор эволюции волновых функций, т.е. через оператор Гамильтона $\hat{H}$, классическим символом которого является $H(q,p)$, в виде

$$\hat{\rho} = \exp(-it\hat{H})\hat{\rho}^0 \exp(it\hat{H}) \equiv \exp(-t\hat{L}_{\hat{H}})(\hat{\rho}^0) \tag{48}$$

где $\exp(-t\hat{L}_{\hat{H}})$ – полугруппа преобразований пространства операторов плотности, порождаемая задачей Коши для уравнения (28) с оператором Гамильтона $\hat{H}$. Согласно [13] считаем, что пространство операторов плотности $B_*(H)$ является банаховым пространством ядерных операторов $T_1(H)$, сопряженным к которому является банахово пространство $B(H)$ ограниченных линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве H.

Еще раз подчеркнем, что, в отличие от гамильтониана $H(q,p)$, который при квантовании (8) переходит в оператор $\hat{H}$, плотность $f(q,p)$ в уравнении (46) и его решении (47) не является классическим символом квантовой плотности $\hat{\rho}$из (48) в том смысле, что если проквантовать $f(q,p)$ по правилу (8), то получающаяся матрица $\rho(x,y)$не будет являться матрицей оператора плотности, так как, например, в равновесном случае такой оператор не будет удовлетворять уравнению Блоха $\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial\beta} = -\hat{H}\hat{\rho}$.

Согласно (15), для произвольного линейного квантования уравнение (28) представляется в виде статистической смеси действий операторов $\hat{H}_\tau$. Заметим, что если $\tau \neq 1/2$, то отдельная мода τ-квантования не порождает в общем случае эрмитов оператор, так что гамильтониан $\hat{H}_\tau$ может не быть самосопряженным оператором. В связи с этим возникает вопрос, будет ли такой гамильтониан порождать сильно непрерывную полугруппу (уже не обязательно унитарных) операторов $\hat{U}_\tau(t) = \exp(-it\hat{H}_\tau)$. Для гамильтонианов с разделяющимися переменными оператор $\hat{H}_\tau$ самосопряжен, но существуют и другие гамильтонианы, удовлетворяющие требованиям теоремы 2.

Рассмотрим следующий модельный пример. Пусть классический гамильтониан имеет вид $H(q,p) = T(p)+V(q)+cpq$, где c– некоторая постоянная. Тогда при τ-квантовании получаем $\hat{H}_\tau - \hat{H}_{1/2} = ic(\tau - 1/2)\hat{I}$. Поскольку же самосопряженный оператор $\hat{H}_{1/2}$ порождает унитарную группу $\hat{U}_{1/2}(t) = \exp(-it\hat{H}_{1/2})$, то и оператор $\hat{H}_\tau$ при любом $\tau \in [0;1]$ порождает сильно непрерывную полугруппу $\hat{U}_\tau(t)$, тип которой допускает оценку сверху $\omega \leq 1/2|c|$. Далее мы будем предполагать, что рассматриваемые классические гамильтонианы таковы, что оператор $\hat{H}_\tau$ при всех $\tau \in [0;1]$ является генератором сильно непрерывной полугруппы.

Итак, обозначим через $\hat{U}_\tau(t) = \exp(-it\hat{H}_\tau)$ разрешающий оператор уравнения (28) для τ-квантования, а через $\hat{\rho}_\tau$– соответствующее решение, записываемое по аналогии с (48) в виде:

$$\hat{\rho}_\tau(t) = \hat{U}_\tau(t)\hat{\rho}^0\hat{U}_\tau^{-1}(t) \tag{49}$$

Подчеркнем, что $\hat{\rho}_\tau$ из (49) в общем случае не обладает свойствами матрицы плотности: этот оператор не обязательно эрмитов, ибо τ-квантование в общем случае не эрмитово. Однако его усреднение с помощью функции симметризации провести можно, поскольку начальное распределение одно и то же для всех τ-квантований, и получающийся средний оператор будет эрмитов.

Так как

$$\hat{H} \equiv \hat{H}_{avr} = \int_0^1 \hat{H}_\tau Q(\tau)d\tau,$$

то оператор

$$\hat{U}_{avr} = \int_0^1 \hat{U}_\tau Q(\tau)d\tau$$

эквивалентен по Чернову оператору $\exp(-it\hat{H})$, так что оператору плотности $\hat{\rho}$ из (48) можно поставить в соответствие оператор $\hat{\rho}_{avr} = \int_0^1 \hat{\rho}_\tau Q(\tau)d\tau$, т.е. среднее значение операторов $\hat{\rho}_\tau$ из (49). Таким образом, для уравнения Лиувилля относительно квантового оператора плотности при линейном квантовании естественным образом определяется эквивалентный по Чернову оператор эволюции в соответствии с определениями 1 и 2.

Резюмируя, приходим к следующему утверждению.

Теорема 3. *Пусть операторы $\hat{H}_\tau, \tau \in [0;1]$, удовлетворяют условиям теоремы 2. Тогда среднее значение*

$$\hat{U}_{avr}(t) = \int_0^1 \exp(-it\hat{H}_\tau)Q(\tau)d\tau \tag{50}$$

случайной полугруппы $\hat{U}_\tau(t) = \exp(-it\hat{H}_\tau)$ эквивалентно по Чернову сильно непрерывной полугруппе $\exp(-it\hat{H}_{avr})$, а среднее значение

$$\hat{S}_{avr}(t) = \int_0^1 \exp(-t\hat{L}_{\hat{H}_\tau})Q(\tau)d\tau \tag{51}$$

случайной полугруппы $\hat{S}_\tau(t) = \exp(-t\hat{L}_{\hat{H}_\tau})$ *эквивалентно по Чернову сильно непрерывной полугруппе* $\exp(-t\hat{L}_{\hat{H}_{avr}})$ *в пространстве* $B_*(H)$ *матриц плотности.*

Развивая таким образом определение 1, дадим определение эквивалентной по Чернову полугруппы в контексте решения квантового уравнения Лиувилля.

Определение 3. Операторнозначную функцию $F : [0; +\infty] \to B(B_*(H))$ *из множества* $\Pi(B_*(H))$ *будем называть эквивалентной по Чернову полугруппе* $U(t) \in \Pi(B_*(H)), t \geq 0$, *если для всех* $\hat{\rho} \in B_*(H)$ *и для всех* $T > 0$ *выполняется равенство:*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} ||(U(t) - (F(t/n)^n)\hat{\rho}||_{B_*(H)} = 0 \tag{52}$$

Теорема 3 дает достаточные условия эквивалентности по Чернову операторнозначных функций в пространстве $\Pi(B_*(H))$

Определение 4. Порожденную усредненной полугруппой $\exp(-t\hat{L}_{\hat{H}_{avr}})$ *матрицу плотности*

$$\hat{\rho}_{avr} = \int_0^1 \hat{\rho}_\tau Q(\tau)d\tau = \int_0^1 \exp(-t\hat{L}_{\hat{H}_\tau})(\hat{\rho}^0)Q(\tau)d\tau \overset{Chernoff}{\cong} \exp(-t\hat{L}_{\hat{H}_{avr}})(\hat{\rho}^0) \tag{53}$$

будем называть усредненной траекторией в пространстве матриц плотности $B_*(H)$.

Что касается уравнения эволюции полной функции Вигнера, то непосредственно применить теорему 2 к его решению не удается, поскольку в (35) усреднение проводится не только для эволюционного оператора, но одновременно и для τ-компоненты функции Вигнера.

Рассмотрим возникающие трудности более детально.

Связь с классической механикой для функции Вигнера проявляется не только в правиле (21) усреднения квантовых операторов в классическом фазовом пространстве, но также и в том, что решение эволюционного уравнения для нее может быть записано в форме, аналогичной (47) для решения классического уравнения Лиувилля. Вернемся к уравнению (33), решение которого формально может быть представлено в виде

$$W_\tau(q,p) = \exp(-it\hat{R}_\tau)W_\tau^0(q,p), \tag{54}$$

где введен оператор

$$\hat{R}_\tau = \int H_{k,\omega} G(-k\omega) e^{ikq + i\omega p + ik\omega} *$$

$$* \exp[-i\tau(k\omega - i\omega\frac{\partial}{\partial q} - ik\frac{\partial}{\partial p})]\Big(\exp(\omega\frac{\partial}{\partial q}) - \exp(k\frac{\partial}{\partial p})\Big)dk d\omega$$

Используя представление (23), начальные условия для $W_\tau^0(q,p)$ можно записать через $\hat{\rho}^0$, так что выражение (54) принимает вид

$$W_\tau = \exp(-it\hat{R}_\tau)\hat{K}_\tau^T\hat{\rho}^0 \tag{55}$$

Формула (55) показывает, почему решение начальной задачи для полной функции Вигнера не может быть представлено в форме усреднения генератора полугруппы в эквивалентной по Чернову трактовке: сходимости к генератору полугруппы, как это требуется в теоремах 1 и 2, препятствует наличие в этой формуле ядра $\hat{K}_t^T$. Как легко проверить, сверточное произведение ядра $\hat{K}_t^T$ не преобразуется снова в ядро того же вида. Например, для 0-квантования получается «почти» нужное выражение (с точностью до множителя)

$$\int K_0(q,p|x,z)K0(q,p|z,y)dz = \frac{1}{(2\pi)^2}\delta(x-y)\exp(ip(x-y)) = \frac{1}{2\pi}K_0(q,p|x,y),$$

но для 1/2-квантования имеем совсем другую формулу:

$$\int K_{1/2}(q,p|x,z)K1/2(q,p|z,y)dz = \frac{1}{(2\pi)^2}\delta(x-y)\exp(ip(x-y))$$

Последнее выражение фактически является дельта-функцией от $x-y$, не приводящей к соответствию «символ – матрица оператора». В результате итерационная процедура вида (1) не может быть реализована, и потому оператор эволюции полной функции Вигнера не является эквивалентным по Чернову среднему оператору эволюции ее τ-компонент.

Заметим, что отдельно для семейства операторов $\hat{L}_\tau = \exp(-it\hat{R}_\tau)$ можно ввести средний оператор $\hat{L} = \int_0^1 \hat{L}_\tau Q(\tau)d\tau$, для которого существует эквивалентный ему по Чернову оператор $\hat{L} = \exp(-i\hat{t}R)$, где $\hat{}R = \int_0^1 \hat{R}_\tau Q_(\tau)d\tau$.

Из (18) находим, что оператор $\hat{\hat{R}}$ имеет следующий явный вид:

$$\hat{\hat{R}} = \int H_{k,\omega}G(-k\omega)e^{ikq+i\omega p+ik\omega}G(-k\omega+i\omega\frac{\partial}{\partial q}+ik\frac{\partial}{\partial p})\Big(\exp(\omega\frac{\partial}{\partial q})-\exp(k\frac{\partial}{\partial p})\Big)dkd\omega. \tag{56}$$

Следовательно, гипотетическое эволюционное уравнение с разрешающим оператором $\hat{L} = e^{-it\hat{\hat{R}}}$ относительно некоторой функции $W(q,p)$ имеет вид:

$$i\frac{\partial W(q,p)}{\partial t} = \int H_{k,\omega}G(-k\omega)e^{ikq+i\omega p+ik\omega}*$$
$$*G(-k\omega+i\omega\frac{\partial}{\partial q}+ik\frac{\partial}{\partial p})\Big(e^{\omega\frac{\partial}{\partial q}}-e^{k\frac{\partial}{\partial p}}\Big)\bar{W}(q,p)dkd\omega. \tag{57}$$

Для квантования Вейля это уравнение, очевидно, совпадает с (36). Для квантования Йордана вместо системы (37) получаем одно уравнение:

$$ddi\partial_t W_J(q,p) = \frac{1}{4}\int H_{k,\omega}e^{ikq+i\omega p}(1+e^{ik\omega})(W_J(q+\omega,p)-W_J(q,p+k))dkd\omega =$$
$$= \frac{1}{4}\int H_{k,\omega}e^{ikq-i\omega p}(1+e^{ik\omega})(W_J(q,p-k)-W_J(q-\omega,p))dkd\omega. \tag{58}$$

Покажем, что функция $W(q,p)$, удовлетворяющая уравнению (57), не может считаться полноценной функцией Вигнера в том смысле, что она не дает правильную эволюцию квантовых средних. Для этого рассмотрим классический гамильтониан с разделенными переменными, который имеет вид

$$H(q,p) = \Phi(q) + \frac{p^2}{2}.$$

Тогда для функции $W(q,p)$ из уравнения (57) следует уравнение, вид которого близок к уравнению (38):

$$\frac{\partial \bar{W}(q,p)}{\partial t} + \frac{\partial \bar{W}(q,p)}{\partial q} =$$

$$= -i\int_0^1 Q(\tau)(\int \Phi_k \exp(ikq)(\bar{W}(q,p-\tau k) - \bar{W}(q,p+(1-\tau)k))dk)d\tau \qquad (59)$$

Отличие уравнения (59) от (38) состоит в том, что теперь функция $W(q,p)$ уже не снабжена нижним индексом τ но, что самое главное, в уравнении (59) отсутствует диффузионный член, обращающийся в ноль для оператора $\hat{L}_\tau = \exp(-it\hat{R})$, поскольку полное квантование эрмитово.

Следовательно, только для квантования Вейля эволюция квантовых средних в эквивалентном по Чернову смысле будет основываться на том же уравнении, что и эволюция средних в обычном смысле (но, заметим, сама эквивалентность вырождается в этом случае в тождество). Поскольку же «эквивалентные» средние не будут, вообще говоря, средними значениями квантовых операторов, то функция $W(q,p)$ не является функцией Вигнера, так как с ее помощью нельзя найти средние значения квантовых операторов по правилу (21), и поэтому усреднение операторов $\hat{L}_\tau = \exp(-it\hat{R}_\tau)$ применительно к нахождению некоей эквивалентной функции Вигнера не имеет физического смысла.

С другой стороны, можно рассмотреть функцию Вигнера W_{avr}, которая отвечает средней матрице плотности $\rho_{avr} = \int_0^1 \hat{\rho}_\tau Q(\tau)d\tau$ при квантовании с ядром $\hat{K}^T$. В соответствии с (55) определена зависимость введенной функции Вигнера W_{avr} от времени согласно равенству

$$W_{avr}(t) = \hat{K}^T \hat{\rho}_{avr}(t) \overset{Chernoff}{\cong} \hat{K}^T \exp(-t\hat{L}_{\hat{H}_{avr}})(\hat{\rho}^0) \qquad (60)$$

Формула (60) выражает установленную в работе связь между результатами усреднений квантовых статистических операторов: именно, усредненной траектории (53) в пространстве матриц плотности отвечает усредненная траектория (60) в пространстве функций Вигнера.

Уравнение эволюции функции W_{avr} несколько отличается от уравнения эволюции функции W. В сокращенных обозначениях (22-23) через оператор квантования $\hat{K}$ исходное уравнение Лиувилля для матрицы плотности имеет вид

$$i\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = [\hat{H}, \hat{\rho}] = \int_0^1 Q(\mu)[\hat{K}_\mu H, \hat{\rho}]d\mu$$

а для функции Вигнера получается

$$i\frac{\partial W}{\partial t} = \int_0^1 \int_0^1 Q(\mu)Q(\tau)[\hat{K}_\mu H, \hat{K}^T \hat{\rho}] d\mu d\tau.$$

Для усредненной в смысле определения 4 матрицы плотности имеем

$$i\frac{\partial \hat{\rho}_{avr}}{\partial t} = \int_0^1 \int_0^1 Q(\mu)[\hat{K}_\mu H, \hat{\rho}_\mu] d\mu,$$

и для соответствующей функции Вигнера получаем

$$i\frac{\partial W_{avr}}{\partial t} = \int_0^1 \int_0^1 Q(\mu)Q(\tau)[\hat{K}_\mu H, \hat{K}_\tau^T \hat{\rho}_\mu] d\mu d\tau \tag{61}$$

Из (61) видно, что W_{avr} получена усреднением по τ и по μ некоторой τ-μ-функции W_τ^μ такой, что

$$I\partial_t W_\tau^\mu = [\hat{K}_\mu H, \hat{K}_\tau^T \hat{\rho}_\mu]$$

Нижний индекс τ у функции W_τ^μ обозначает то, что она получена из матрицы оператора ρ с помощью τ-квантования, а верхний индекс μ – то, что в качестве оператора $\hat{\rho}$ взят оператор $\hat{\rho}_\mu$, эволюция которого определяется μ-проквантованным гамильтонианом.

Введем также «квантовый след» функции W_τ^μ, т.е. функцию W_τ^τ, отвечающую матрице $\hat{\rho}_\tau$ при квантовании с ядром $\hat{K}_\tau$. Хотя W_τ^τ не обладает свойствами τ-функции Вигнера (23), тем не менее, как будет показано далее, она представляет определенный интерес. Рассмотрим наряду сW_τ^τ и «средний квантовый след», т.е. функцию

$$\bar{W} = \int_0^1 W_\tau^\tau Q(\tau) d\tau \tag{62}$$

Прежде всего отметим, что вычисление средних значений операторов с помощью функции (62) в общем случае линейного квантования не приводит к исходным правильным выражениям, поскольку

$$\int W_\tau^\tau(q,p)A(q,p)dqdp = Tr\rho_\tau \hat{A}_\tau$$

и

$$Tr\hat{\rho}\hat{A} = \int_0^1 Q(\tau)Tr\rho\hat{A}_\tau d\tau \neq \int_0^1 Q(\tau)Tr\rho_\tau\hat{A}_\tau d\tau.$$

Тем не менее, если квантование проводится с ядром $\hat{K}_\tau$, то средние значения операторов (вообще говоря, не «наблюдаемых» по терминологии квантовой механики) вычисляются по функции Вигнера W_τ, а эволюция статистических операторов определяется τ-проквантованным гамильтонианом. В таком случае и функция W_τ^τ приобретает смысл.

Уравнение эволюции для функции W_τ^τ следует из уравнения (32), в котором вместо матрицы $\tilde{H}$ используется $\tilde{H}_\tau$. Тогда получается следующее уравнение:

$$i\partial_t W_\tau^\tau(q,p) = \int H_{k,\omega} \exp(i(kq + \omega p + (1-2\tau)k\omega))\Delta_\tau W_\tau^\tau dk d\omega \tag{63}$$

Уравнение эволюции для функции (62) имеет вид:

$$i\partial_t \bar{W}(q,p) = \int_0^1 Q(\tau) \int H_{k,\omega} \exp(i(kq + \omega p + (1-2\tau)k\omega))\Delta_\tau W_\tau^\tau dk d\omega d\tau \tag{64}$$

Для квантования Вейля уравнение (64) совпадает с (63) и оба они совпадают с уравнением (36), как и должно быть. Для других эрмитовых квантований уравнение эволюции $\bar{W}$ отличается от уравнения эволюции для W. Например, для квантования Йордана вместо (37) имеем

$$i\partial W_0^0(q,p) = \frac{1}{2}\int H_{k,\omega} \exp(ikq + i\omega p + ik\omega)(W_0^0(q+\omega,p) - W_0^0(q,p+k))dk d\omega;$$

$$i\partial W_1^1(q,p) = \frac{1}{2}\int H_{k,\omega} \exp(ikq + i\omega p - ik\omega)(W_1^1(q,p-k) - W_1^1(q-\omega,p))dk d\omega;$$

$$\bar{W}_J(q,p) = \frac{1}{2}W_0^0(q,p) + \frac{1}{2}W_1^1(q,p).$$

Важно подчеркнуть, что для гамильтониана с разделенными переменными $H(q,p) =$
$= \Phi(q) + \frac{p^2}{2}$ уравнение эволюции для $\bar{W}$ совпадает с уравнением эволюции (38) для полной функции Вигнера. Это означает, что, во всяком случае, на достаточно широком классе моделей рассматриваемая эквивалентность применительно к уравнению эволюции функции Вигнера имеет разумную интерпретацию.

Представляет интерес исследовать различия уравнений для W и $\bar{W}$ в случае, когда гамильтониан явно зависит от правила квантования. Такие модели, в которых координаты и импульсы входят, например, в виде произведений, специфичны для задач квантовой оптики [14]. Простейшей моделью, в которой проявляются различия между уравнениями для W_τ и W_τ^τ, является осциллятор с ангармонизмом четвертого порядка, полиномиальный гамильтониан которого имеет вид

$$H(q,p) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}q^2 + cq^2p^2, \tag{65}$$

где c есть некоторая постоянная. Хотя квантовый оператор Гамильтона с символом (65), как следует из (17), зависит от момента σ_2 функции симметризации, и от σ_2зависит также и уравнение эволюции матрицы плотности, в уравнение эволюции функции Вигнера этот параметр явным образом не входит. Выбор квантования сказывается в этом уравнении более сложным образом, через усреднение τ-компонент функции Вигнера.

Для гамильтониана (65) уравнение эволюции τ-функции Вигнера (33) имеет вид

$$i\partial_t W_t(q,p) + ip\frac{\partial W_\tau(q,p)}{\partial q} - iq\frac{\partial W_tau(q,p)}{\partial p} =$$

$$= (\tau - \frac{1}{2})(\frac{\partial^2 W}{\partial q^2} - \frac{\partial^2 W_\tau(q,p)}{\partial p^2}) + 2c\hat{F}_\tau W_\tau(q,p), \tag{66}$$

где оператор $\hat{F}_\tau$ имеет вид

$$\hat{F}_\tau = 2(1-2\tau - i(1-\tau)pq)q\frac{\partial}{\partial q} - 2(1-2\tau - i\tau pq)p\frac{\partial}{\partial p} -$$

$$-(\tau - \frac{1}{2})(p^2\frac{\partial^2}{\partial p^2} - q^2\frac{\partial^2}{\partial q^2}) + i\tau(1-\tau)(p\frac{\partial^3}{\partial q\partial p^2} - q\frac{\partial^2}{\partial pq^2}) \tag{67}$$

Для функции W_τ^τ уравнение эволюции (63) в гармонической части гамильтониана совпадает с уравнением (66), а в части ангармонизма оператор $\hat{F}_\tau$ (67) заменяется на оператор $\hat{F}_\tau^\tau$, который имеет вид

$$\hat{F}_\tau = (2(1-2\tau) + iqp)(p\frac{\partial}{\partial p} - q\frac{\partial}{\partial q}) - (\tau - \frac{1}{2})(p^2\frac{\partial^2}{\partial p^2} - q^2\frac{\partial^2}{\partial q^2}) +$$

$$+it(1-\tau)(p\frac{\partial^3}{\partial q\partial p^2} - q\frac{\partial^2}{\partial p\partial q^2}) \tag{68}$$

Сравнивая (67) и (68) замечаем, что отличие есть только в членах, содержащих производные первого порядка по q и p. Это отличие состоит в том, что усреднение по τ, которое будет применяться на этапе построения уравнения относительно полной функции Вигнера, для варианта (67) более изощренное, чем для функции W. Последнее уравнение удобно тем, что в нем операторы дифференцирования по q и p входят кососимметрическим образом, тогда как в (61) такой кососимметричности нет. Разумеется, для квантования Вейля члены $\hat{F}_\tau$ и $\hat{F}_\tau^\tau$ в уравнения (67) и (68) совпадают.

Сделаем в заключение ряд замечаний относительно усредненных в смысле формул (53) и (60) квантовых распределений в равновесном случае.

Равновесный квантовый оператор плотности $\hat{\rho}(\beta) = \exp(-\beta\hat{H})$ коммутирует с $\hat{H}$ и потому удовлетворяет стационарному уравнению Лиувилля. Тогда равновесные функции Вигнера также удовлетворяют соответствующим стационарным уравнениям. В частности, введенная выше τ-τ-функция Вигнера W_τ^τ, построенная по равновесной матрице плотности $\hat{\rho}_\tau$, удовлетворяет своему стационарному уравнению.

Как уже говорилось ранее во введении, оператор $\hat{f}(\beta)$ с классическим символом $f(\beta) = \exp(-\beta H(q,p))$ эквивалентен по Чернову оператору $\hat{\rho}(\beta) = \exp(-\beta\hat{H})$. В работах [2, 3] были введены операторы $\hat{\rho}_\tau(\beta) = \exp(-\beta\hat{H}_\tau)$, после чего с помощью теорем 1 и 2 было показано, что средняя полугруппа $\hat{\rho}_{avr} = \int_0^1 Q(\tau)\hat{\rho}_\tau d\tau$ эквивалентна по Чернову тому же равновесному оператору

$\hat{\rho}(\beta) = \exp(-\beta\hat{H})$. Следовательно, равновесные операторы $\hat{\rho}_\tau(\beta) = \exp(-\beta\hat{H}_\tau)$, введенные в [2, 3], могут быть отождествлены со стационарными решениями уравнения Лиувилля с гамильтонианом $\hat{H}_\tau$. Тем самым понятие эквивалентности по Чернову может быть в одной и той же формулировке применено как к равновесным, так и к неравновесным квантовым статистическим операторам.

Итак, в работе предложено расширение понятия эквивалентности по Чернову применительно к решениям уравнений эволюции квантовых статистических операторов, причем в результате получаются объекты, имеющие физический смысл. Описанный подход представляется методологически полезным для анализа зависимости уравнений эволюции квантовых операторов от правила квантования и при исследовании эволюции квантовых систем под действием случайных гамильтонианов.

Литература

[1] Ю.Н. Орлов, В.Ж. Сакбаев, О.Г. Смолянов. *Скорость сходимости фейнмановских аппроксимаций полугрупп, порождаемых гамильтонианом осциллятора* // ТМФ. 2012. 172:1. 122–137.

[2] Ю.Н. Орлов, В.Ж. Сакбаев, О.Г. Смолянов. *Формулы Фейнмана как метод усреднения случайных гамильтонианов* // Труды МИАН. 2014. Т. 285. С. 232–243.

[3] Л.А. Борисов, Ю.Н. Орлов *Анализ зависимости конечнократных аппроксимаций равновесной матрицы плотности гармонического осциллятора и функции Вигнера от правила квантования* // ТМФ, 2015. 184:1. 106–116.

[4] Л.А. Борисов, Ю.Н. Орлов, В.Ж. Сакбаев. *Формулы Фейнмана для усреднения полугрупп, порождаемых операторами типа Шредингера* // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, № 57, 2015. – 23 с.

[5] Я.А. Бутко, О.Г. Смолянов. *Формулы Фейнмана в стохастической и квантовой динамике.* Современные проблемы математики и механике, **6**:1, (2011), 61–75.

[6] В.Ж Сакбаев *Задача Коши для линейного дифференциального уравнения с вырождением и усреднение аппроксимирующих ее регуляризаций* // В сб. Современная математика. Фундаментальные направления, 43, 2012. 3-174.

[7] P. Chernoff *Note on product formulas for operator semigroups*, J. Funct. Anal. 1968. **8**4. 238–242.

[8] Ф.А. Березин. *Невинеровские континуальные интегралы.* // ТМФ, 1971, 6:2, 194–212.

[9] Ю.Н. Орлов. *Основы квантования вырожденных динамических систем*, М.: МФТИ, (2004) – 236 с.

[10] O.G.Smolyanov, A.G.Tokarev, A.Truman. *Hamiltonian Feynman path integrals via the Chernoff formula* J.Math.Phys., **4**3:10, (2002), 5161–5171.

[11] O.G. Smolyanov, H. Weizsacker, O. Wittih. *Chernoff's theorem and discrete time approximations of Brownian motion on manifolds*. Potential Anal. 2007. **2**6. P. 1–29.

[12] У. Брателли, Д. Робинсон *Операторные алгебры и квантовая статистическая механика (пер. с англ.)*. – М.: Мир, 1982. – 517 с.

[13] Я. Перина *Квантовая статистика линейных и нелинейных оптических явлений (пер. с англ.)*. – М.: Мир, 1987. – 366 с.

О томографическом представлении на плоскости пространства операторов Шварца и дуального к нему

Г.Г. Амосов[1]

Аннотация

Показано, что множество оптических квантовых томограмм можно снабдить топологией пространства Фреше. При этом сопряженное пространство будет состоять из символов квантовых наблюдаемых, включая всевозможные полиномы от операторов координаты и импульса.

Введение

В случае, если эксперимент представляет из себя гомодинное детектирование [1], результатом измерения является оптическая квантовая томограмма $\omega(t, \varphi)$. Для каждого фиксированного $\varphi \in [0, 2\pi)$ она представляет из себя распределение вероятностей на прямой. Знание оптической томограммы для всех значений параметров $(t, \varphi) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi)$ позволяет безошибочно восстановить квантовое состояние. Недавно было показано [2], что множество всех операторов плотности с ядрами из пространства Шварца можно наделить топологией пространства Фреше. При этом сопряженное пространство будет состоять из квантовых наблюдаемых, включая всевозможные операторы, являющиеся полиномами от координаты и импульса. В предлагаемой работе такая идеология применяется для множества оптических квантовых томограмм. Тем самым мы продолжаем разработку аппарата томографического отображенния на плоскость и дуального к нему, начатую в [3, 4].

Оптические томограммы

Обозначим $\mathfrak{S}(H)$ множество квантовых состояний (положительных операторов с единичным следом) в гильбертовом пространстве H. Пусть p и q – стандартные операторы импульса и координаты, для которых пространство Шварца $S(\mathbb{R})$ является существенной областью определения (на нём определены все возможные полиномы от p и q). Введем характеристическую функцию состояния $T \in \mathfrak{S}(H)$

$$F_T(x, y) = Tr(T \exp(xq + iyp). \tag{1}$$

[1]Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

Характеристическая функция (1) определяет набор распределений вероятностей $\omega(t,\varphi)$ на прямой, зависящий от параметра $\varphi \in [0, 2\pi)$, по формуле

$$\omega_T(t,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-its} F_T(s\cos\varphi, s\sin\varphi)ds. \tag{2}$$

Функция (2) называется оптической квантовой томограммой. В случае, если T записан в виде интегрального оператора в координатном представлении $(Tf)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \rho(x,y)f(y)dy$, получаем

$$F_T(x,y) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{ixt}\rho\left(t-\frac{y}{2}, t+\frac{y}{2}\right)dt. \tag{3}$$

Обратное преобразование Фурье позволяет восстановить характеристическую функцию по её томограмме:

$$F_T(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{irt}\omega_T(t,\varphi)dt. \tag{4}$$

Отображение, дуальное томографическому

Рассмотрим множество $\mathcal{T}$ линейных интегральных операторов T в гильбертовом пространстве $H = L^2(\mathbb{R})$, ядра которых $\rho(\cdot,\cdot)$ принадлежат пространству Шварца $S(\mathbb{R}^2)$. Для оператора $T \in \mathcal{T}$ с ядром $\rho(\cdot,\cdot)$ можно ввести функции (3) и (2). В случае, когда T является положительным оператором с единичным следом, $\omega(X,\varphi)$ представляет из себя оптическую квантовую томограмму. В [3, 4] было построено отображение $T \to f_T(X,\varphi)$, дуальное к отображению $T \to \omega_T(X,\varphi)$ в том смысле, что

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \omega_T(X,\varphi)f_S(X,\varphi)dXd\phi = Tr(TS) \tag{5}$$

для любых $T, S \in \mathcal{T}$. Далее, в [3,4] было показано, что отображение $T \to f_T(X,\varphi)$ продолжается на класс операторов, включающий полиномы $P(q,p)$ от операторов координаты и импульса. Такое представление можно реализовать и в декартовых координатах [5].

В [3] не было получено в явной форме выражение, определяющее дуальное отображение в виде интегрального оператора. Это связано с тем, что представление (5) является неудобным. В нём не учтено, что $\omega_T(X,\varphi+\pi) = \omega(-X,\varphi)$. Переопределим дуальное отображение так, чтобы выполнялось условие

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{+\infty} \omega_T(X,\varphi)f_S(X,\varphi)dXd\varphi = Tr(TS) \tag{6}$$

Предложение 1. *Пусть интегральный оператор $S \in \mathcal{T}$ определяется ядром $\rho(\cdot,\cdot)$, тогда для $f_S(X,\varphi)$, определенного (6)*

$$f_S(X,\varphi) = \int_{\mathbb{R}^2} te^{i(X+x\sin\varphi)t}\rho\left(x - \frac{t\sin\varphi}{2}, x + \frac{t\sin\varphi}{2}\right) dxdt. \tag{7}$$

Доказательство. Принимая во внимание вид характеристической функции (3), получаем

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} \omega_T(X,\varphi) f_S(X,\varphi) dX d\varphi =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} e^{-iXr}F_T(r\cos\varphi, r\sin\varphi) f_S(X,\varphi) dX d\varphi dr \equiv I.$$

Из (7) следует, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-iXr} f_S(X,\varphi)dX = rF_S(r\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

Таким образом, получаем

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} F_T(r\cos\varphi, r\sin\varphi) rF_S(r\cos\varphi, r\sin\varphi) dr d\varphi =$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} F_T(x,y)F_S(x,y)dxdy = Tr(TS).$$

□

Рассмотрим базис пространства H, состоящий из собственных функций осциллятора

$$< x|n >= \frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{2^n n!}} H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}},$$

где $H_n(x)$ – полиномы Эрмита и $n = 0, 1, 2, \ldots$. Ядро оператора ранга один $|n >< m|$ принадлежит пространству Шварца, так что $|n >< m| \in \mathcal{T}$.

Предложение 2. *Томографическое отображение переводит $|n >< m|$ в*

$$\omega_{|n><m|}(X,\varphi) = e^{i(n-m)\varphi} H_n(X) H_m(X) e^{-X^2}$$

Доказательство. Заметим, что

$$|m >< n| = \frac{1}{2}(|m+n >< m+n| + i|m+in >< m+in| -$$

$$(1+i)(|m><m|+|n><n|))$$

В силу линейности томографического отображения,

$$\omega_{|m><n|} = \frac{1}{2}(\omega_{|m+n><m+n|} + i\omega_{|m+in><m+in|} - (1+i)(\omega_{|m><m|} + \omega_{|n><n|}))$$

Известно, что томографическим символом, отвечающим линейной комбинации $|n+\lambda m><n+\lambda m|$ будет функция

$$\omega(X,\varphi) = |<X,n> e^{in\varphi} + \lambda <X,m> e^{im\varphi}|^2$$

Теперь достаточно рассмотреть $\lambda = 1$ и $\lambda = i$. □

Для фиксированного $n = 0,1,2,\ldots$, рассмотрим семейство функций $\{H_k(X)H_{k+n}(X)\}_{k=0}^{+\infty}$. Поскольку функции из семейства представляют из себя полиномы возрастающей размерности, в ее замкнутой линейной оболочке существует единственная система функций $\{h_k^{(n)}\}_{k=0}^{+\infty}$, являющаяся биортогональной к ней в смысле

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-X^2} H_k(X)H_{k+n}(X)h_s^{(n)}(X)dX = \delta_{ks}.$$

Предложение 3. *Дуальное отображение переводит $|n><m|$ в функцию*

$$f_{|n><m|}(X) = h_{min\{n,m\}}^{(|n-m|)}(X)e^{i(n-m)\varphi}$$

Замечание. *В квантовой томографии функции $h^n(X)$ принято называть "pattern functions". Подробно их свойства изложены в [6]*

Доказательство. Прямой проверкой убеждаемся, что

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{+\infty} \omega_{|k><l|}(X,\varphi)f_{|m><n|}(X,\varphi)dXd\varphi = \delta_{kn}\delta_{lm}.$$

□

Пространство операторов Шварца и дуальное к нему

В [2] было введено понятие оператора Шварца T гильбертовом пространстве $H = L^2(\mathbb{R})$. По определению, пространство операторов Шварца $\mathcal{T}$ состоит из линейных операторов, непрерывных относительно системы полунорм

$$||T||_{n,m,\psi} = ||q^n p^m T\psi||_H, \tag{8}$$

где q и p – операторы координаты и импульса, а $\psi \in S(\mathbb{R})$. Сопряженное пространство $\mathcal{T}'$, состоящее из линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{T}$, содержит, в том числе, все полиномы $P(q,p)$ от q и p. При этом соотношение двойственности задается формулой

$$T \to Tr(TP(q,p)).$$

В [2] было показано, что $\mathcal{T}$ является пространством Фреше. Более того, $T \in \mathcal{T}$ тогда и только тогда, когда он является интегральным оператором, ядро которого $\rho(\cdot,\cdot)$ будет принадлежать пространству Шварца $S(\mathbb{R}^2)$.

Представление пространства операторов Шварца в виде оптических квантовых томограмм

Расширим область определения интегрального оператора (3) на все возможные ядра $\rho(\cdot,\cdot) \in S(\mathbb{R}^2)$ (это то же самое, что расширение по линейности). Зададим на пространстве $\mathcal{T}$ интегральных операторов $(Tf)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \rho_T(x,y)f(y)dy,\ f \in H$, отображение $T \to \omega_T(X,\varphi)$ по формуле

$$\omega_T(X,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{i(s\cos\varphi - X)t}\rho_T\left(s - \frac{t\sin\varphi}{2}, s + \frac{t\sin\varphi}{2}\right)dsdt. \tag{9}$$

Отображение (9) представляет из себя композицию отображений (3) и (2).

Отображение (3) представляет из себя композицию афинного преобразования плоскости и преобразования Фурье по одной из двух координат. Отображение (2) представляет из себя преобразование Фурье по выделенной на плоскости прямой. Следовательно, образом пространства Шварца $S(\mathbb{R}^2)$ при отображении $\rho(\cdot,\cdot) \to \omega(\cdot,\varphi)$ является пространство Шварца $S(\mathbb{R})$. Более того, функции $\omega(X,\cdot)$ 2π-периодичны и бесконечно дифференцируемы, то есть

(i) $\omega(\cdot,\varphi) \in S(\mathbb{R}),\ \varphi \in [0,2\pi)$;

(ii) $\omega(X,\varphi)$ 2π-периодичны и бесконечно дифференцируемы.

Тем не менее, не все функции, удовлетворяющие свойствам (i) и (ii) входят в $\hat{\mathcal{T}}$.

Пример. Положим

$$\omega(t,\varphi) = e^{-t^2}\sin\varphi. \tag{10}$$

Функция (10) удовлетворяет свойствам (i) и (ii). Найдём характеристическую функцию, соответствующую (10):

$$F(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{irt}e^{-t^2}\sin\varphi dt = \frac{1}{8\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{r^2}{4}}\sin\varphi. \tag{11}$$

Таким образом,

$$F(x,y) = \frac{1}{8\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{12}$$

Нетрудно видеть, что $F(\cdot,\cdot) \notin S(\mathbb{R}^2)$.

Возникает вопрос, из каких функций состоит $\hat{\mathcal{T}}$. Принимая во внимание, что

$$t^n = \frac{n!}{2^n}\sum_{m=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{1}{m!(n-2m)!}H_{n-2m}(t) \tag{13}$$

введём семейство функций

$$g_n(t) = \frac{n!}{2^n}\sum_{m=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(-i)^{n-2m}}{m!(n-2m)!}H_{n-2m}(t),\ n=0,1,2,3,\dots \tag{14}$$

Положим

$$f_{m,n}(t,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}g_n(t)e^{-t^2}\sin^m\varphi\cos^{n-m}\varphi,\ 0\le m\le n. \tag{15}$$

Предложение 4. *Имеет место включение $f_{m,n} \in \hat{\mathcal{T}}$.*

Доказательство. Найдём характеристическую функцию $F_{m,n}(x,y)$, отвечающую $f_{m,n}$. Заметим, что

$$F_{m,n}(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{irt}f_{m,n}(t,\varphi)dt = t^n e^{-t^2}\sin^m\varphi\cos^{n-m}\varphi.$$

Таким образом,

$$F(x,y) = x^{n-m}y^m e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}. \tag{16}$$

Функции $F_{m,n} \in S(\mathbb{R}^2)$, причём их линейные комбинации образуют всюду плотное множество в $S(\mathbb{R}^2)$. □

Ниже нам потребуется семейство функций $\{Q_{m,n}(\varphi),\ 0\le m\le n\}$, биортогональное к семейству функций $\{\sin^m\varphi\cos^{n-m}\varphi\}$ в своей линейной оболочке [3]. Обозначим $\mathcal{V}_N$ линейное подпространство, натянутое на систему функций $\{f_{m,2N},\ 0\le m\le N\}$. Пусть $\mathcal{P}_N$ – ортогональный проектор на пространство $\mathcal{V}_N$. Определим семейство полунорм на множестве $\hat{\mathcal{T}}$ по формуле

$$||\omega||_{m,N} = \left|\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{+\infty} X^{2N}\mathcal{P}_N(\omega(X,\varphi))Q_{m,2N}(\varphi)d\varphi dX\right|, \tag{17}$$

$N = 0,1,2,\dots$

Теорема. *Отображение $T \to \omega_T(X,\varphi)$ непрерывно относительно семейства полунорм (17).*

Доказательство. По определению, $T \to \omega_T(X,\phi)$ задаёт отображение пространства операторов Шварца $\mathcal{T}$ на множество $\hat{\mathcal{T}}$. Заметим, что [3]

$$||\omega_T||_{m,N} = |Tr(P_{2N}(q,p)T_N)|, \tag{18}$$

где P_{2N} – некоторый полином степени $2N$ от операторов координаты q и импульса p, а T_N сужение оператора плотности на конечномерное подпространство, натянутое на первые N возбужденных состояний квантового осциллятора. Следовательно, отображение $T \to \omega_T(X, \varphi)$ будет непрерывным. $\square$

Из теоремы немедленно вытекает

Следствие. *Отображение $S \to f_S(X, \phi)$ определяет представление пространства $\mathcal{T}'$ в пространстве $\hat{\mathcal{T}}'$, снабженном системой полунорм (17).*

Литература

[1] D. T. Smithey, M. Beck, and M. G. Raymer, Measurement of the Wigner Distribution and the Density Matrix of a Light Mode Using Optical Homodyne Tomography: Application to Squeezed States and the Vacuum, Phys. Rev. Lett. 70, N 9, 1244-1247 (1993)

[2] M. Keyl, J. Kiukas, R.F. Werner, Schwartz operators, arXiv:1503.04086.

[3] Г. Г. Амосов, Я. А. Коренной, В. И. Манько, О вычислении средних значений квантовых наблюдаемых в представлении оптической томографии, ТМФ, 171:3 (2012), 475–482

[4] G. G. Amosov, Ya. A. Korennoy, V. I. Man'ko, Description and measurement of observables in the optical tomographic probability representation of quantum mechanics, Phys. Rev. A, 85 (2012), 052119, 9 pp.

[5] G. G. Amosov, A. I. Dnestryan, Towards a tomographic representation of quantum mechanics on the plane, Phys. Scr., 90:7 (2015), 074025

[6] L.M. Artiles, R.D. Gill, M.I. Guta, An invitation to quantum tomography, J. Royal Stat. Soc. (B) 67, 109-134 (2005)

On the algebra generated by projectors with commutator relation

A.S. Kocherova[1] I.Yu. Zhdanovskiy[1,2]

Abstract

In this article we apply methods of representation theory and combinatorial algebra to the different problems related to quantum tomography. For this purpose, we introduce the algebra generated by projectors satisfying some commutator relation. In this paper we study this commutator relation by combinatorial methods and develop the representation theory of this algebra. Also, we apply results to the case of mutually unbiased bases in dimension 7.

Introduction

Consider the following situation in physics: we have quantum-mechanical system consisting of two algebras of observables A and B. Assume that there are some linear combinations of elements of A and B which are compatible observables (cf. [8]). We can ask the following question: is there some decomposition of our quantum-mechanical system into a sum of some smaller quantum-mechanical system.

We can reformulate this situation in terms of classical algebra. Namely we have free product of the algebras $A * B$ and the ideal I generated commutator relations as $[a_i + b_i, a_j + b_j] = 0$, where $a_i \in A, b_i \in B$. Denote by R the quotient $A * B/I$. Consider finite-dimensional algebras A and B. And also, assume that the set of $\{a_i\}$ is a basis of A, set of $\{b_i\}$ is a set of generators of B. In present paper, we show that for sufficiently large N: the N-dimensional representation of the algebra R is a direct sum of smaller dimension representations of R. More precisely, we prove that dimension of any irreducible representation of R is less than dimension of the algebra B. Further, assume that $A \cong \mathbb{C}^{\oplus 3}$ and $B \cong \mathbb{C}^{\oplus 3}$ with bases $P_1, P_2, 1 - P_1 - P_2$ and $Q_1, Q_2, 1 - Q_1 - Q_2$ respectively. Suppose we have the following relation for P_1, P_2, Q_1, Q_2:

$$[P_1 - Q_2, P_2 - Q_1] = 0, \tag{19}$$

where $[a, b] = ab - ba$. Denote by $\mathcal{C}$ the quotient $\mathbb{C}^{\oplus 3} * \mathbb{C}^{\oplus 3}$ by the ideal generated by relation (19). Recall the notion of mutually unbiased bases in n-dimensional complex Hilbert vector space with scalar product $(,)$. Two orthonormal bases $\{e_i\}$

[1]Moscow Institute of Physics and Technology

[2]National Research University High School of Economics, Laboratory of Algebraic Geometry

and $\{f_j\}$ are *mutually unbiased* iff $|(e_i, f_j)|^2 = \frac{1}{n}$. The study of this notion is closely related to study $\mathbb{C}^*$ - subalgebras of von-Neumann algebras (see [9], [10]) Applications of mutually unbiased bases is an object of constant use in Quantum Information Theory etc, [1], [2]. One of the reasons why mutually unbiased bases are important in practice is that they provide a crucial mathematical tool that allows to transfer quantum information with minimal loss of it in the channel. Reliable protocols in quantum channels are based on a choice of maximal number of mutually unbiased bases in the relevant vector space of quantum states of transmitted particles. For instance, protocol BB84, which utilizes 3 of such bases in a 2-dimensional vector space, enables to significantly extend the distance between the source and the receiver of quantum information. Constructing maximal number of mutually unbiased bases in vector spaces of higher dimension is important for producing reliable protocols in quantum channels.

Recall that the problem of classification of mutually unbiased bases in any dimension is far from the solution. Complete classification is known only in the case of dimension less than 6. Petrescu constructed one-dimensional family of mutually unbiased bases in dimension 7 (see [6]). Consider fixed pair of mutually bases $\{e_i\}, \{f_j\}$ from family of Petrescu. Associate with vectors $\{e_i\}_{i=1}^7$ and $\{f_j\}_{j=1}^7$ hermitian projectors p_i and q_j of rank 1 respectively. Nicoara showed that we can order p_i and q_j such that $[p_1 + p_2, q_1 + q_2] = [p_3 + p_4, q_3 + q_4]$ (see [7]). It is easy that if we denote by P_1, P_2, Q_1 and Q_2 the elements $p_1 + p_2$, $p_3 + p_4$, $q_1 + q_2$ and $q_3 + q_4$ respectively, we get that $[P_1, Q_1] = [P_2, Q_2]$ or, equivalently, $[P_1 - Q_2, P_2 - Q_1] = 0$, i.e. 7-dimensional representation of the algebra $\mathcal{C}$. This gives us another motivation for studying of this algebra $\mathcal{C}$ in quantum mechanics.

Our article is organized as follows. In Section we discuss the general problem of two finite-dimensional algebras A and B. In this section we introduce the algebra R and prove the useful property of irreducible R-modules. In Section we define the algebra $\mathcal{C}$ as the quotient of $A * B$ by relation (19). Further, we define the filtration on the algebra $\mathcal{C}$ for combinatorial description. Crucial result for understanding of the algebra $\mathcal{C}$ is Theorem 1. This theorem claims that the ideal generated by the relation is the intersection of three ideals generated by projectors. This fact permits us to describe irreducible $\mathcal{C}$-modules as irreducible modules of the quotients of $\mathcal{C}$ by these three ideals. In Section 4 we develop a representation theory. We classify all irreducible $\mathcal{C}$ - modules. At the end of the article, we apply our result to the case of mutually unbiased bases in dimension 7.

We are grateful to Amosov G.G., Bondal A.I., Man'ko V.I. for very helpful discussions.

Second author is partially supported by RFBR, research projects 16-01-00113 A and 14-01-00416. The article was prepared within the framework of a subsidy granted to the HSE by the Government of the Russian Federation for the implementation of

the Global Competitiveness Program.

Finite-dimensional algebras with commutator relations and quantum mechanics

In this section we study the quotient of free product of finite-dimensional algebras by ideal generated by several commutator relations.

Firstly, recall the notion of free product of finite-generated associative algebras A and B. Denote by $F(S)$ a free associative algebra with a set of generators S. In this case $A = F(S_1)/J_1$ and $B = F(S_2)/J_2$, where S_1 and S_2 are generating sets of A and B respectively. J_1 and J_2 are two-sided ideals of relations of the algebras A and B. Free product $A * B$ is the quotient of $F(S_1 \cup S_2)$ by the ideal J generated by the ideals J_1 and J_2.

Further, consider two finite-dimensional algebras A, B and their free product $A * B$. Assume that $\dim_{\mathbb{C}} A = n_1$ and $\dim_{\mathbb{C}} B = n_2$. Consider elements c_i of $A * B$ given by formulas:

$$s_i = a_i + b_i, i = 1, ..., n_1, \tag{20}$$

where $a_i, i = 1, ..., n_1$ is a basis of A as a vector space over $\mathbb{C}$, b_i are generators of B as an associative algebra over $\mathbb{C}$. Let I be an ideal generated by commutators $[s_i, s_j], i, j = 1, ..., n_1$. Denote by R the quotient $A * B/I$. Also, denote by S the unital commutative subalgebra of R generated by $s_i, i = 1, ..., n_1$.

Since $a_i, i = 1, ..., n_1$ is a basis of A, we have the following relations:

$$a_i a_j = \sum_{k=1}^{n_1} m_{ij}^k a_k, i, j, k = 1, ..., n_1, \tag{21}$$

where m_{ij}^k are structural coefficients. We obtain that $a_i = s_i - b_i$ from formulas (20). Thus, algebra R is generated by $s_i, b_j, i, j = 1, ..., n_1$. Also, we get that $(s_i - b_i)(s_j - b_j) = \sum_{k=1}^{n_1} m_{ij}^k (s_k - b_k)$. Rewrite formula (21) in the following manner:

$$s_i b_j = -b_i s_j + s_i s_j - \sum_{k=1}^{n_1} m_{ij}^k s_k + b_i b_j + \sum_{k=1}^{n_1} m_{ij}^k b_k, i, j = 1, ..., n_1. \tag{22}$$

Denote by s_{ij} and b_{ij} the elements $s_i s_j - \sum_{k=1}^{n_1} m_{ij}^k s_k$ and $b_i b_j + \sum_{k=1}^{n_1} m_{ij}^k b_k$ respectively. Thus, we get the following relations:

$$s_i b_j = -b_i s_j + s_{ij} + b_{ij}, i, j = 1, ..., n_1. \tag{23}$$

Proposition 1. *jective morphism of right S - modules:*

$$f : S^{\oplus n_2} \to R. \tag{24}$$

In other words, any element c of R can be represented as $\sum_{i=1}^{n_2} s_i' b_i'$, where $s_i' \in S$, $\{b_i'\}_{i=1}^{n_2}$ is a basis of B.

Proof. Choose the basis $b_i', i = 1, ..., n_2$ of B. As we know s_i and b_i' generate the algebra $\mathcal{C}$. Thus, any element c of R is a linear combination of monomials of the following type: $s_1'b_1'...s_k'b_k'$, $b_1's_1'...b_k's_k'$, $s_1'b_1'...s_k'$ or $b_1's_1'...b_k'$ for suitable $s_i' \in S$ and $b_i' \in B$ and various k. Consider the monomial $s_1'b_1'...s_k'b_k'$. By induction of k and using formulas (23), we can transform this monomials into the sum of monomials of type $s_i''b_i'$. Analogous arguments prove the same for other monomials. Therefore, any element is a linear combination of elements $s_i'b_i'$, where $s_i' \in S$, $\{b_i'\}$ is a basis of B.

Further, the immersion $S \to R$ defines the structure of a right S-module on R. Also, consider free S - module $S^{\oplus n_2}$ of rank n_2 with basis $e_i, i = 1, ..., n_2$. Define the morphism S-modules f as follows. $f : e_i \mapsto b_i$. Using the first part of the proof, we get that the morphism f is surjective. □

Corollary 2. *Assume that V is an irreducible finite-dimensional R-module. In this case we have the following inequality:*

$$\dim_{\mathbb{C}} V \leq n_2. \tag{25}$$

Proof. Let V be an irreducible finite-dimensional R-module. Consider V as an S-module. Since S is a commutative algebra, there is a one-dimensional S-submodule $\mathbb{C}^\chi$ of V, where $\mathbb{C}^\chi$ is an S-module given by a character $\chi : S \to \mathbb{C}$. Thus, $\mathrm{Hom}_S(\mathbb{C}^\chi, V) \neq 0$. Using adjointness of functors, we get that

$$\mathrm{Hom}_R(\mathcal{C} \otimes_S \mathbb{C}^\chi, V) = \mathrm{Hom}_S(\mathbb{C}^\chi, V) \neq 0 \tag{26}$$

Hence, there is a non-trivial morphism of R - modules: $g : \mathcal{C} \otimes_S \mathbb{C}^\chi \to V$. Using irreducibility of V, we get that the morphism g is surjective. Therefore,

$$\dim_{\mathbb{C}} V \leq \mathcal{C} \otimes_S \mathbb{C}^\chi. \tag{27}$$

Also, using proposition 1 and tensoring of seqence (24) by $\mathbb{C}^\chi$, we get that the morphism: $f : S^{\oplus n_2} \otimes_S \mathbb{C}^\chi = \mathbb{C}^{n_2} \to \mathcal{C} \otimes_S \mathbb{C}^\chi$ is surjective. Hence, $\dim_{\mathbb{C}} R \otimes_S \mathbb{C}^\chi \leq n_2$. Combining this with formula (27), we get the required statement. □

Remark. Note that if we put $s_1 = 1$ we can consider $n_1 - 1$ elements s_i satisfying commutator relations: $[s_i, s_j] = 0$.

Remark on the connection with quantum mechanics.

At the end of this section we make a remark about the application of this construction on quantum mechanics. Consider the following situation: we have two algebras of variables A and B of dimension n_1 and n_2. Fix the basis a_i of A and generators b_i of B. Consider an N-dimensional quantum mechanical system consisting of algebras of observables A and B. Assume that there are n_1 compatible observables - linear combinations: $s_i = a_i + b_i, i = 1, ..., n_1$. In this case an N-dimensional space decomposed into the direct sum of quantum mechanical systems of dimension of less or equal n_2.

Algebra $\mathcal{C}$

In this section we apply the result of Section to the case $A = \mathbb{C}^{\oplus 3}$ and $B = \mathbb{C}^{\oplus 3}$. In the first subsection we define the algebra $\mathcal{C}$ and light the connection with quantum mechanics.

Algebra $\mathcal{C}$ and connection with quantum mechanics

In this subsection we will explain and light relations between of the representations of constructed algebra $\mathcal{C}$ and some notions of quantum mechanics [10].

Consider the algebras $A = \mathbb{C}^{\oplus 3}$ and $B = \mathbb{C}^{\oplus 3}$. Fix the bases $1 - P_1 - P_2, P_1, P_2$ and $1 - Q_1 - Q_2, Q_1, Q_2$ of the algebras A and B respectively, satisfying the relations:

- $P_i^2 = P_i, Q_i^2 = Q_i, i = 1, 2$
- $P_i P_j = Q_i Q_j = 0, i \neq j$.

Consider the algebra $\mathcal{C}$ - the quotient of $A * B$ by ideal generated by the relation:

$$[P_1 - Q_2, P_2 - Q_1] = 0, \tag{28}$$

i.e. $P_1Q_1 - Q_1P_1 - P_2Q_2 + Q_2P_2 = 0$.

Consider the representation of $\mathcal{C}$ such that generators P_1, P_2, Q_1, Q_2 are represented as Hermitian matrices. In this case we have the following quantum-mechanical interpretations:

Firstly, we have the interpretation from Section . Namely, projectors P_1, P_2, Q_1, Q_2 are observables. In this case relations $P_1P_2 = P_2P_1$ and $Q_1Q_2 = Q_2Q_1$ mean that pairs P_1, P_2 and Q_1, Q_2 are pairs of compatible observables. Since P_i, Q_j are projectors, we get the following interpretation: P_i and Q_i are "indicator" observables. Also, $P_1 - Q_2$ and $P_2 - Q_1$ are compatible observables.

Secondly, recall the notion of mutually unbiased bases in a complex vector space $\mathbb{C}^n$ with Hermitian form $(,)$. Two bases $\{e_i\}_{i=1}^n$ and $\{f_j\}_{j=1}^n$ are mutually unbiased iff

$$|(e_i, f_j)|^2 = \frac{1}{n}. \tag{29}$$

We can consider with the sets of vectors $\{e_i\}, \{f_j\}$ the sets of orthogonal projectors $\{p_i\}_{i=1}^n, \{q_j\}_{j=1}^n$ of rank 1 respectively. Condition (29) can be rewrite in the following manner:

$$p_i q_j p_i = \frac{1}{n} p_i, q_i p_j q_i = \frac{1}{n} q_i, i, j = 1, ..., n. \tag{30}$$

Recall that reduced Temperley-Lieb algebra $B_r(\Gamma)$ for some simply-laced graph Γ is a unital algebra over $\mathbb{C}[r]$ with generators x_v labeled by vertices of Γ and relations:

$$x_v^2 = x_v, \tag{31}$$

$$x_v x_w = x_w x_v = 0, \tag{32}$$

if vertices v, W are not adjacent and

$$x_v x_w x_v = r x_v, x_w x_v x_w = r x_w, \tag{33}$$

if v, w are adjacent.

Relations (30) lead us to the representations of reduced Temperley-Lieb algebra $B_{\frac{1}{n}}(\Gamma_{n,n})$ of full bipartite graph $\Gamma_{n,n}$ with n vertices in each row.

One can find details of these representations connected with mutually unbiased bases in $\mathbb{C}^n$ in article [3]. Also, one can see the construction of a 4-dimensional family in $\mathbb{C}^6$ in [4] via representations of $B_{\frac{1}{6}}(\Gamma_{6,6})$. Also, applications of symplectic geometry for studying mutually unbiased bases are in [5]. Consider the case of dimension 7. Nicoara ([7]) showed that we have the following relation:

$$[p_1 + p_2, q_1 + q_2] = [p_3 + p_4, q_3 + q_4] \tag{34}$$

for suitable ordering of $\{p_i\}$ and $\{q_j\}$. It is easy that projectors $p_1 + p_2$, $p_3 + p_4$ are orthogonal. Analogously, $q_1 + q_2$ and $q_3 + q_4$ are orthogonal. Consider the ideal I of $B_{\frac{1}{7}}(\Gamma_{7,7})$ generated by the element $[p_1 + p_2, q_1 + q_2] - [p_3 + p_4, q_3 + q_4]$. Thus, identity 34 and correspondence

$$\phi : P_1 \mapsto p_1 + p_2, P_2 \mapsto p_3 + p_4, Q_1 \mapsto q_1 + q_2, Q_2 \mapsto q_3 + q_4 \tag{35}$$

define the morphism of algebras $\phi : \mathcal{C} \to B_{\frac{1}{7}}(\Gamma_{7,7})/I$.

Thirdly, we light the connection between the algebra $\mathcal{C}$ and a Heisenberg algebra. Recall that a Heisenberg algebra $\mathfrak{h}_2$ is a Lie algebra with generators $x_1, x_2; y_1, y_2; z$ and relations:

$$[x_i, y_j] = \delta_{ij} z, [x_i, x_j] = [y_i, y_j] = 0, [x_i, z] = [y_i, z] = 0, i = 1, 2. \tag{36}$$

Consider the universal enveloping algebra $U(\mathfrak{h}_2)$ with the same generators. Consider the two-sided ideal I of $U(\mathfrak{h}_2)$ generated by $x_i^2 - x_i, y_i^2 - y_i, x_i x_j, y_i y_j$. Therefore, we have the following morphism: $\psi : \mathcal{C} \to \mathfrak{u} = U(\mathfrak{h}_2)/I$ defined by the rule: $\psi : P_i \mapsto x_i, Q_i \mapsto y_i$, and $z = \psi([P_1, Q_1])$. It is easy that the morphism ψ is surjective and the ideal $\mathrm{Ker}\psi$ is generated by the elements $P_1 Q_2 - Q_2 P_1$ and $P_2 Q_1 - Q_1 P_2$. Thus, $\mathcal{C}/\mathrm{Ker}\psi \cong \mathfrak{u}$.

Let us study the algebra $\mathfrak{u}$. In this case, we have the following identities:

$$x_i z = z x_i = y_i z = z y_i = 0, i = 1, 2. \tag{37}$$

Show that $x_1 z = 0$. As we know, $z = x_1 y_1 - y_1 x_1 = x_2 y_2 - y_2 x_2$. Thus, using commutativity of x_1 and y_2 and the relation $x_1 x_2 = 0$, we get that $x_1 z = x_1(x_2 y_2 - y_2 x_2) = 0$. Analogously, we obtain the rest.

Also, deduce that $z = 0$ in the algebra $\mathfrak{u}$. Consider the element $x_1y_1 - y_1x_1 = z$. Consider the element $s = x_1z + zx_1$. We get that $s = x_1(x_1y_1 - y_1x_1) + (x_1y_1 - y_1x_1)x_1 = x_1y_1 - y_1x_1 = z$. Using relations (37), we obtain that $z = 0$. Thus, the algebra $\mathfrak{u}$ is commutative.

Proposition 3. *The algebra* $\mathfrak{u} \cong \mathbb{C}^{\oplus 9}$.

Proof. The algebra $\mathfrak{u}$ is a commutative algebra generated by x_1, x_2, y_1, y_2 with relations: $x_i^2 = x_i, y_i^2 = y_i$, $x_1x_2 = y_1y_2 = 0$ and $x_iy_j = y_jx_i, i, j = 1, 2$. Consider the elements $g_1 = (1 - x_1 - x_2) + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2$ and $g_2 = (1 - y_1 - y_2) + \epsilon y_1 + \epsilon^2 y_2$, where ϵ is a primitive root of unity of degree 3. One can show that $g_i^3 = 1, i = 1, 2$ and $g_1g_2 = g_2g_1$. Also, x_i and y_i are linear combinations of $1, g_1, g_1^2$. and linear combinations of $1, g_2, g_2^2$ respectively. Consider the group $G = \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$. It can be shown that $\mathfrak{u} = \mathbb{C}[G]$. Therefore, we get the required result. □

Corollary 4. *1-dimensional representations of* $\mathcal{C}$ *are 1-dimensional representations of* $\mathfrak{u}$. *It means that for any* $f : \mathcal{C} \to \mathbb{C}$ *there is a morphism* $g : \mathfrak{u} \to \mathbb{C}$ *such that* $f = g \circ \psi$.

Proof. Consider $f : \mathcal{C} \to \mathbb{C}$. The morphism f is defined by values $f(P_i), f(Q_i)$. It is easy that $f(P_i), f(Q_i) \in \{0, 1\}, i = 1, 2$. Direct checking shows that there is only 9 possibilities for $f(P_i)$ and $f(Q_i)$. □

The algebra $\mathbf{P}r(\Gamma)$ *and the path algebra of a quiver*

In this subsection we introduce the algebra $\mathbf{P}r(\Gamma)$ for a fixed graph Γ. Also, we explain its relation with the path algebra of the quiver $\mathbf{Q}_\Gamma$ related to the graph Γ.

The algebra $\mathbf{P}r(\Gamma)$ is an algebra over $\mathbb{C}$ with an identity element and generators x_v labeled by the vertices of Γ with the relations:

- $x_v^2 = x_v$ for every $v \in V(\Gamma)$
- $x_vx_w = x_wx_v = 0$ for non-adjacent vertices v, w.

There is a natural morphism (augmentation) $\epsilon : \mathbf{P}r(\Gamma) \to \mathbb{C}$ defined by the formula: $\epsilon : x_v \mapsto 0$. The kernel of ϵ is called the ideal of augmentation. We denote it by $\mathbf{P}r^+(\Gamma)$.

Also, define the path algebra $\mathbb{C}\mathbf{Q}$ for the fixed quiver $\mathbf{Q}$. Pathes in $\mathbf{Q}$ form the basis of algebra $\mathbf{C}\mathbb{Q}$. Denote by $\mathbf{Q}_0$ the set of vertices of the quiver $\mathbf{Q}$, denote by $P(\mathbf{Q})$ the set of pathes in $\mathbf{Q}$. We associate trivial path e_v with any vertex $v \in \mathbf{Q}_0$. Define the following maps $s : P(\mathbf{Q}) \to \mathbf{Q}_0$, $t : P(\mathbf{Q}) \to \mathbf{Q}_0$ as follows. For fixed $\gamma \in P(\mathbf{Q})$ define by $s(\gamma)$ and $t(\gamma)$ the source and the target of the path γ respectively. Define the multiplication of pathes in the quiver $\mathbf{Q}$ as follows. Consider two pathes γ_1 and γ_2. If $t(\gamma_1) = s(\gamma_2)$ then $\gamma_1\gamma_2$ is a path obtained by juxtaposition of pathes.

Otherwise $\gamma_1\gamma_2 = 0$. It is easy that identity element of $\mathbb{C}\mathbf{Q}$ is a sum $\sum e_v$ where the sum is taken over all vertices of $\mathbf{Q}$. Thus, we define the path algebra $\mathbb{C}\mathbf{Q}$.

Let us construct the double quiver $\mathbf{Q}_\Gamma$ related to fixed graph Γ. The set of vertices of $\mathbf{Q}_\Gamma$ is the set $V(\Gamma)$. We connect any adjacent vertices i, j by opposite arrows a_{ij} and a_{ji}. There is a correspondence between the set of pathes in $\mathbb{Q}_\Gamma$ and the set of elements of $\mathbf{P}r(\Gamma)$ defined by following formula:

$$f : \gamma \mapsto x_\gamma \in \mathbf{P}r(\Gamma), \tag{38}$$

where $x_\gamma = x_{i_1}...x_{i_k}$ and $i_1, ..., i_k$ are consecutive vertices of path γ.

Let us formulate (cf. [4]) the following proposition:

Proposition 5. *The correspondence f is a bijection between $\mathbb{C}\boldsymbol{Q}_\Gamma$ and $\boldsymbol{Pr}^+(\Gamma)$. Therefore, the algebra $\boldsymbol{Pr}(\Gamma)$ has a $\mathbb{C}$-basis $1, x_\gamma$, where γ runs over all pathes in $\boldsymbol{Q}_\Gamma$.*

Recall the construction of a homotop $\widehat{A}_x$ of the algebra A by means of the element $x \in A$. Let x be the fixed element of the algebra A. We will consider a non-unital algebra A_x with multiplication $*_x$ defined by formula:

$$a_1 *_x a_2 = a_1 x a_2.$$

Formally adding the unit, we get the algebra $\widehat{A}_x$. We studied the properties of homotops in the article [3]. In particular, we get the morphism: $\phi : \widehat{A}_x \to A$ defined by rule: $\phi : a \mapsto ax$. Denote by $\Delta(\mathbf{Q}_\Gamma) = 1 + \sum a_{ij}$, where the sum is taken over all arrows of the quiver $\mathbf{Q}_\Gamma$. The algebra $\mathbf{P}r(\Gamma)$ is a homotop of the algebra $\mathbb{C}\mathbf{Q}_\Gamma$ by means of the element $\Delta(\mathbf{Q}_\Gamma)$ [3]. Using properties of homotops, we get the morphism:

$$\phi : \mathbf{P}r(\Gamma) \to \mathbb{C}\mathbf{Q}_\Gamma \tag{39}$$

defined by rule: $x_v \mapsto e_v\Delta(\mathbf{Q}_\Gamma)$.

Let us back to the case $\mathbb{C}^{\oplus 3} * \mathbb{C}^{\oplus 3}$. Consider the full bipartite graph $\Gamma_{k,m}$ with k and m vertices in upper and lower rows respectively. Denote them by $1, 2, ..., k$ and $1', 2', ..., m'$ respectively (Figure). Consider the graph $\Gamma_{3,3}$. Vertices $1, 2, 3$ and $1', 2', 3'$

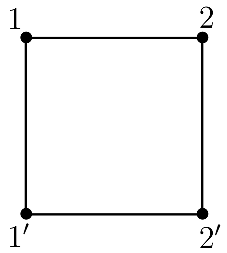

Figure 0.1:

correspond to $P_1, P_2, P_3 = 1 - P_1 - P_2$ and $Q_1, Q_2, Q_3 = 1 - Q_1 - Q_2$ respectively. The algebra $\mathbb{C}^{\oplus 3} * \mathbb{C}^{\oplus 3}$ is isomorphic to the quotient of the algebra $\mathbf{P}r(\Gamma_{3,3})$ by the ideal generated by the elements $P_1+P_2+P_3-1, Q_1+Q_2+Q_3-1$. Also, note that the algebra $\mathbb{C}^{\oplus 3} * \mathbb{C}^{\oplus 3}$ is isomorphic to the algebra $\mathbf{P}r(\Gamma_{2,2})$. For simplicity, we denote by $\mathbf{P}r$ and $\mathbb{C}\mathbf{Q}$ the algebras $\mathbf{P}r(\Gamma_{2,2})$ and $\mathbb{C}\mathbf{Q}_{\Gamma_{2,2}}$ respectively. Also, we have the well-defined morphism $\phi : \mathbf{P}r \to \mathbb{C}\mathbf{Q}$ defined by rules: $\phi : P_1 \mapsto e_1+a_{11'}+a_{12'}, P_2 \mapsto e_2+a_{21'}+a_{22'}$ and $\phi : Q_1 \mapsto e_{1'} + a_{1'1} + a_{1'2}, Q_2 \mapsto e_{2'} + a_{2'1} + a_{2'2}$ (Figure 0.2).

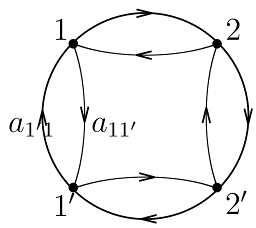

Figure 0.2:

Filtration on $\mathcal{C}$

In this subsection we introduce the filtration on the algebra $\mathcal{C}$.

Recall that a filtration on the fixed associative algebra C is a set of finite-dimensional subspaces $F^iC, i = 0, 1, 2, ...$ such that

- $F^0C \subseteq F^1C \subseteq ... \subseteq F^iC \subseteq F^{i+1}C...,$
- $\bigcup_{i=0}^{\infty} F^iC = C$
- $F^iC \cdot F^jC \subseteq F^{i+j}C$, where $F^iC \cdot F^jC$ is a subspace generated by $c' \cdot c'', c' \in F^iC, c'' \in F^jC$.

Consider the path algebra $\mathbb{C}\mathbf{Q}$ for the fixed quiver $\mathbf{Q}$. Define the length function: $l : P(\mathbf{Q}) \to \mathbb{N}_0$ as follows. Put $l(e_v) = 0$ for any vertex $v \in \mathbf{Q}_0$. We will say that $l(\gamma) = k$ iff γ is a product of k arrows. Thus, one can see that there exists the following filtration on $\mathbb{C}\mathbf{Q}$: $F^i\mathbb{C}\mathbf{Q}$ is a space generated by paths of length less or equal i.

Note the following useful property of the morphism ϕ from formula (39):

Proposition 6. *The morphism $\phi : \boldsymbol{Pr}(\Gamma) \to \mathbb{C}\boldsymbol{Q}_\Gamma$ is injective.*

Proof. Consider the element $x = \sum c_\gamma x_\gamma$, where $\gamma \in P(\mathbf{Q}_\Gamma)$, x_γ is the element of $\mathbf{P}r(\Gamma)$ corresponding to the path γ and $c_\gamma \in \mathbb{C}$. Assume that $\phi(x) = \phi(\sum c_\gamma x_\gamma) = \sum c_\gamma \gamma \Delta(\mathbf{Q}_\Gamma) = 0$.

Let us prove that element $\Delta(\mathbf{Q}_\Gamma)$ is not a divisor of zero. Assume that there is an element $\Theta = \sum_\gamma c_\gamma \gamma \in \mathbb{C}\mathbf{Q}_\Gamma$ such that $\Theta\Delta(\mathbf{Q}_\Gamma) = 0$. Consider linear independent paths γ in the decomposition of the element Θ. Multiplying by $\Delta(\mathbf{Q}_\Gamma)$, we get the linear independent paths in the decomposition of $\Theta\Delta(\mathbf{Q}_\Gamma)$. Thus, the element $\Theta = 0$. □

Corollary 7. *Length of paths induces the function of length L on the elements of $\boldsymbol{Pr}(\Gamma)$. Namely, $L(x_\gamma) = l(\gamma) + 1$, i.e. $L(x_{i_1}...x_{i_k}) = k$. If $x = \sum c_\gamma x_\gamma$, then $L(x) = \max_{\gamma: c_\gamma \neq 0} L(x_\gamma)$. Also, the filtration on $\mathbb{C}\boldsymbol{Q}_\Gamma$ induces the filtration on $\boldsymbol{Pr}(\Gamma)$: $F^0\boldsymbol{Pr}(\Gamma) = \mathbb{C}\cdot 1$, $F^i\boldsymbol{Pr}(\Gamma)$ is a space generated by the elements of length less or equal i.*

Let us back to the algebra $\mathbf{P}r$. We have the filtration on $\mathbf{P}r$ induced by the filtration of the algebra $\mathbb{C}\mathbf{Q}$. The algebra $\mathcal{C}$ is a quotient of $\mathbf{P}r$ by ideal I generated by element $h = [P_1 - Q_2, P_2 - Q_1]$. Also, recall that algebra $\mathcal{C}$ is a quotient of algebra $\mathbf{P}r(\Gamma_{3,3})$ by the ideal $\mathcal{I}$ generated by the elements $P_1+P_2+P_3-1, Q_1+Q_2+Q_3-1, h$. It is easy that $\mathbf{P}r/I \cong \mathbf{P}r(\Gamma_{3,3})/\mathcal{I}$. Since wreath product of S_3 and $\mathbb{Z}_2$ is an automorphism group of the graph $\Gamma_{3,3}$, there is an action of this group on $\mathbf{P}r(\Gamma_{3,3})$. One can check that elements $P_1 + P_2 + P_3 - 1, Q_1 + Q_2 + Q_3 - 1$ are invariant under the action of wreath product. Also, note that this construction defines the action of wreath product of S_3 and $\mathbb{Z}_2$ on $\mathbf{P}r$.

Lemma 8. *There is a well-defined action of the group $S_3 \times \mathbb{Z}_2$ on the ideal $\mathcal{I}$ as follows. Symmetric group is generated by the permutations $\sigma_1 : P_1 \leftrightarrow P_2, Q_1 \leftrightarrow Q_2$ and $\sigma_2 : P_1 \leftrightarrow P_3, Q_2 \leftrightarrow Q_3$. Group $\mathbb{Z}_2$ acts by the permutation: $P_1 \leftrightarrow Q_2, P_2 \leftrightarrow Q_1$.*

Proof. $\sigma_2(h) = [P_3 - Q_3, P_2 - Q_1] = [Q_1 + Q_2 - P_1 - P_2, P_2 - Q_1] = [Q_1, P_2] + [Q_2, P_2] + [P_1, Q_1] + [P_2, Q_1] = [P_1, Q_1] - [P_2, Q_2] = h$. The rest is easy. □

Denote by pr the natural projection $\mathbf{P}r \to \mathcal{C} = \mathbf{P}r/I$. Denote by $F^i\mathcal{C}$ the image of $F^i\mathbf{P}r$ under pr. Thus, the algebra $\mathcal{C}$ has the filtration induced by the filtration of $\mathbf{P}r$. Further, the morphism pr induces surjective morphisms: $pr^i : F^i\mathbf{P}r \to F^i\mathcal{C}, i = 0, 1, 2, ...$ Also, denote by I^i the space $\mathrm{Ker} pr^i = I \cap F^i\mathbf{P}r, i = 0, 1, 2, ...$

Consider the quotient spaces $\mathrm{gr}^0\mathbf{P}r = \mathbb{C}\cdot 1, \mathrm{gr}^i\mathbf{P}r = F^i\mathbf{P}r/F^{i-1}\mathbf{P}r, i = 1, 2, ...,$. It is easy that one can pickup the basis of the vector space $\mathrm{gr}^i\mathbf{P}r$ consisting of the elements $x_\gamma, l(\gamma) = i - 1$.

Let us prove the following proposition:

Proposition 9. *Consider the vector spaces $\mathrm{gr}^i\mathcal{C}$. We have the following identities and inequalities:*

- $$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Gr}^0\mathcal{C} = 1, \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Gr}^1\mathcal{C} = 4 \tag{40}$$

- $$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Gr}^2\mathcal{C} \leq 7, \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Gr}^i\mathcal{C} \leq 6, i \geq 3. \tag{41}$$

Moreover, any $x \in F^l\mathcal{C}$ can be presented as linear combination of the elements: $P_1Q_1P_1...$, $Q_1P_1Q_1...$, $P_1Q_2P_1...$, $Q_2P_1Q_2...$, $P_2Q_1P_2...$ and $Q_1P_2Q_1...$ of length l and elements of length less than l.

Proof. The cases of $\mathrm{Gr}^0\mathcal{C}$ and $\mathrm{Gr}^1\mathcal{C}$ are trivial. Note the following commutative diagram:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I^{l-1} \arrow[r] \arrow[d] & F^{l-1}\mathbf{P}r \arrow[r] \arrow[d] & F^{l-1}\mathcal{C} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & I^l \arrow[r] \arrow[d] & F^l\mathbf{P}r \arrow[r] \arrow[d] & F^l\mathcal{C} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & I^l/I^{l-1} \arrow[r] & F^l\mathbf{P}r/F^{l-1}\mathbf{P}r \arrow[r] & F^l\mathcal{C}/F^{l-1}\mathcal{C} \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd} \tag{42}$$

where two upper rows and three columns are short exact sequences. Using this exactness and the direct calculations, we get that lower row is an exact sequence.

Also, consider the morphism $f : I^l \to F^l\mathbf{P}r \to F^l\mathbf{P}r/F^{l-1}\mathbf{P}r$. This morphism is defined as follows. Consider the element $y = \sum_\gamma c_\gamma x_\gamma \in I^l$. We have the decomposition of y: $y = \sum_{s=0}^{l} y_s$, where $y_s = \sum_{\gamma:l(\gamma)=s-1} c_\gamma x_\gamma$. Then morphism f is defined by rule: $f(y) = y_l$. Therefore, $\mathrm{Gr}^l\mathcal{C}$ is a quotient of $\mathrm{Gr}^l\mathbf{P}r$ by the subspace I^l/I^{l-1}. Also, I^l/I^{l-1} is a space generated by 'l-parts' of the elements of I^l.

The inequality $\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Gr}^2\mathcal{C} \leq 7$ is evident.

We prove the statement of the proposition by induction. Firstly, prove that any element of $F^3\mathcal{C}$ is a linear combination of the elements $P_1Q_1P_1$, $Q_1P_1Q_1$, $P_1Q_2P_1$, $Q_2P_1Q_2$, $P_2Q_1P_2$, $Q_1P_2Q_1$ and elements of length less than 3. Denote by $V \subseteq I^3$ the subspace generated by the elements of type: $x_\gamma h$, $hx_{\gamma'}$ and $x_\gamma hx_{\gamma'}$ such that $L(x_\gamma) = L(x_{\gamma'}) = 1$ and $L(x_\gamma hx_{\gamma'}) = 3$. Consider the image of V in $\mathrm{Gr}^3\mathbf{P}r$ under f. One can check that the quotient $\mathrm{Gr}^3\mathbf{P}r/f(V)$ is generated by the elements $P_1Q_1P_1, Q_1P_1Q_1, P_1Q_2P_1, Q_2P_1Q_2, P_2Q_1P_2, Q_1P_2Q_1$.

Also, note that we have the following identities for the rest of $P_iQ_jP_k$:

$$P_iQ_jP_k = \pm P_1Q_1P_1 + x, \tag{43}$$

where $L(x) \leq 2$. Analogous statement for $Q_iP_jQ_k$ is true.

Further, assume that the statement is true for any $l \leq k$. Let us prove the statement for $l = k + 1$. It is sufficient to prove that this statement is true for monomials. Consider the monomial $t = P_{i_1}Q_{i_2}...Q_{i_{k+1}}$, where $i_{k+1} = 2$. Using induction, we have the following identity:

$$t = (c_1P_1Q_1...P_1 + c_2Q_1P_1Q_1...Q_1 + ... + c_6Q_1P_2Q_1...Q_1)Q_2 =$$

$$c_1P_1Q_1..P_1Q_2 + c_3P_1Q_2P_1...Q_2 + c_5P_2Q_1...P_2Q_2 + x,$$

where $L(x) < k+1$. Using formula (43) and filtration, we obtain that $P_1Q_1...P_1Q_2 = c''P_1Q_1...P_1Q_1+x$, $P_2Q_1...P_2Q_2 = c'P_1Q_1...P_1Q_1+x'$, where $c', c'' = \pm 1$, $L(x) < k+1$ and $L(x') < k+1$. One can consider another cases analogously.

$\square$

Using lemma 8, we get the following

Corollary 10. *There is a well-defined action of $S_3 \times \mathbb{Z}_2$ on the algebra $\mathcal{C}$ compatible with filtration. Thus, $\mathrm{Gr}^l\mathcal{C}$ is a $S_3 \times \mathbb{Z}_2$ - module for any $l \in \mathbb{N}_0$.*

The ideal I of the algebra $\mathbf{P}r$ as an intersection of the ideals and the basis of $\mathcal{C}$

In this subsection we show that the ideal I of $\mathbf{P}r$ is an intersection of three more simple ideals of $\mathbf{P}r$. This allows us to calculate dimensions of $\mathrm{Gr}^i\mathcal{C}$ and the basis of $\mathcal{C}$.

Consider the ideals $I_1 = \langle P_1, Q_2\rangle$, $I_2 = \langle P_2, Q_1\rangle$ and $I_3 = \langle 1-P_1-P_2, 1-Q_1-Q_2\rangle$ of the algebra $\mathbf{P}r$ generated by P_1, Q_2, P_2, Q_1 and $1-P_1-P_2, 1-Q_1-Q_2$ respectively. It is easy that $I_2 = \sigma_1(I_1)$ and $I_3 = \sigma_2(I_3)$. Quotients $\mathcal{C}_j = \mathbf{P}r/I_j, j = 1, 2, 3$ are isomorphic to free product $\mathbb{C}^{\oplus 2} * \mathbb{C}^{\oplus 2}$. Denote by ψ_j the natural projections: $\mathbf{P}r \to \mathcal{C}_j, j = 1, 2, 3$. It is clear that

$$\psi_2 = \psi_1 \circ \sigma_1, \psi_3 = \psi_1 \circ \sigma_2. \tag{44}$$

Consider the case of I_1. We have two algebras $\mathbb{C}^{\oplus 3}$ with bases $P_1, P_2, 1-P_1-P_2$ and $Q_1, Q_2, 1-Q_1-Q_2$. Define the morphisms $\mathbb{C}^{\oplus 3} \to \mathbb{C}^{\oplus 2}$ as natural projections with kernels generated by P_1 and Q_2 respectively. Thus, we can define the morphisms $\mathbb{C}^{\oplus 3} \to \mathcal{C}_1 = \mathbb{C}^{\oplus 2} * \mathbb{C}^{\oplus 2}$. Using universality of free product, we get the morphism: $\psi_1 : \mathbf{P}r = \mathbb{C}^{\oplus 3} * \mathbb{C}^{\oplus 3} \to \mathcal{C}_1 = \mathbb{C}^{\oplus 2} * \mathbb{C}^{\oplus 2}$. Note that any element of $\mathbb{C}^{\oplus 2} * \mathbb{C}^{\oplus 2}$ has pre-image under this morphism. Thus, ψ_1 is surjective. One can show that $\mathrm{Ker}\psi_1 = I_1$. Using analogous arguments, we get that quotients $\mathcal{C}_j$ are isomorphic to $\mathbb{C}^{\oplus 2} * \mathbb{C}^{\oplus 2}$.

Proposition 11. *Consider the algebra $\boldsymbol{Pr}$ and the two-sided ideals $I = \langle h\rangle$, $I_1 = \langle P_1, Q_2\rangle$, $I_2 = \langle P_2, Q_1\rangle$ and $I_3 = \langle 1-P_1-P_2, 1-Q_1-Q_2\rangle$. Then*

$$I \subseteq I_1 \cap I_2 \cap I_2. \tag{45}$$

Proof. It is easy that $I \subset I_j, j = 1, 2$. Also, one can check that

$$h = (1-Q_1-Q_2)(P_1+P_2) - (1-P_1-P_2)(Q_1+Q_2).$$

Thus, $I \subset I_3$. $\square$

Also, make the following useful remark. Denote by x_1, y_1, x_2, y_2 and x_3, y_3 the generating idempotents of $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ and $\mathcal{C}_3$ respectively. In this case morphism is defined $\psi_1 : P_1 \mapsto 0, P_2 \mapsto x_1, Q_1 \mapsto y_1, Q_2 \mapsto 0$. The morphisms ψ_2 and ψ_3 are defined by formula (44). It is clear that there is a natural filtration on $\mathcal{C}_i$ generated by length function. It is well known that the following elements $x_i y_i x_i ..., y_i x_i y_i ...$ form the basis of $\mathcal{C}_i$ for $i = 1, 2, 3$. Also, $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Gr}^l \mathcal{C}_i = 2$ with the basis consisting of the elements $x_i y_i ..., y_i x_i ...$ of length l.

Theorem 12. *We have the following identity:*

$$I = I_1 \cap I_2 \cap I_3. \tag{46}$$

Proof. For simplicity, denote by I_{123} the intersection $I_1 \cap I_2 \cap I_3$. Using Proposition 11, we get that there is a surjective morphism: $\pi : \mathcal{C} \to \mathbf{P}r/I_{123}$. Note that the ideal I_{123} is an $S_3 \times \mathbb{Z}_2$ - invariant. This morphism defines the filtration on the algebra $\mathbf{P}r/I_{123}$. Also, we have surjective morphism: $\pi : \mathrm{Gr}^l \mathcal{C} \to \mathrm{Gr}^l \mathbf{P}r/I_{123}$. It is clear that there is the following factorization of the morphism $\psi_i, i = 1, 2, 3$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, "\psi_i"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathcal{C}_1 \\
& \mathbf{P}r/I_{123} \arrow[ur, "\psi_i'"'] &
\end{tikzcd} \tag{47}$$

Let us prove that $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Gr}^l \mathbf{P}r/I_{123} = 6$ for $l \geq 3$ and $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Gr}^2 \mathbf{P}r/I_{123} = 7$. For this purpose, consider the elements from Proposition 9. Prove that images of this elements under the morphism π are linear independent. Fix $l \geq 3$. Denote by $e_1 = \pi(P_1 Q_2 P_1 ...), e_2 = \pi(P_2 Q_1 P_2 ...), e_3 = \pi(P_1 Q_1 P_1 ...), f_1 = \pi(Q_2 P_1 Q_2 ...), f_2 = \pi(Q_1 P_2 Q_1 ...), f_3 = \pi(Q_1 P_1 Q_1 ...)$. Assume that there is a non-trivial linear combination $a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + b_1 f_1 + b_2 f_2 + b_3 f_3 = 0$ in the vector space $\mathrm{Gr}^l \mathbf{P}r/I_{123}$. Consider $\psi_1'(a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + b_1 f_1 + b_2 f_2 + b_3 f_3) = a_2 x_1 y_1 ... + b_2 y_1 x_1 ... = 0$. Thus, $a_2 = b_2 = 0$. Using the action of $S_3 \times \mathbb{Z}_2$, we get that $a_i = b_i = 0, i = 1, 2, 3$.

The group of symmetries gives us two possibilities: $P_1 Q_1 - P_2 Q_2 = 0$, $Q_1 P_1 - Q_2 P_2 = 0$ or $P_1 Q_1 - Q_1 P_1 - P_2 Q_2 + Q_2 P_2$ in $\mathrm{Gr}^2 \mathbf{P}r/I_{123}$. Direct calculations show us that there is no element $x \in I_{123}$ such that $L(x) \leq 2$ and part of length 2 is $P_1 Q_1 - Q_1 P_1$. Thus, we have a unique possibility: $P_1 Q_1 - Q_1 P_1 - P_2 Q_2 + Q_2 P_2 = 0$.

This implies that π is an isomorphism. Combining with 11, we get that $I = I_{123}$. $\square$

Corollary 13. *The agebra $\mathcal{C}$ has the following basis:*

- *an identity element* 1, P_1, P_2, Q_1, Q_2 *- elements of length* 0 *and* 1 *respectively,*

- $P_1 Q_1, P_1 Q_2, P_2 Q_1, P_2 Q_2, Q_1 P_1, Q_1 P_2, Q_2 P_1$ *- elements of length* 2

- $P_1Q_1P_1..., Q_1P_1Q_1..., P_1Q_2P_1..., Q_2P_1Q_2..., P_2Q_1P_2..., Q_1P_2Q_1...$ *- elements of length k for $k \geq 3$.*

This set is an infinite basis of the algebra $\mathcal{C}$. In particular, the algebra $\mathcal{C}$ is infinite-dimensional.

Corollary 14. *Consider the morphisms $\psi_i : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_i$. Thus,* $\mathrm{Ker}\psi_1 \cap \mathrm{Ker}\psi_2 \cap \mathrm{Ker}\psi_3 = \{0\}$.

Representation theory of the algebra $\mathcal{C}$

In this section we study representation theory of the algebra $\mathcal{C}$. We classify irreducible $\mathcal{C}$ - modules by means of studying the center of $\mathcal{C}$. Also, we the geometric description

Algebras $S_a, a \in \mathbb{C}^*$

In this subsection we study the one-dimensional family of commutative subalgebras.

Consider the algebra $\mathcal{C}$.

Let us introduce the parameter $a = (a_0 : a_1) \in \mathbb{P}^1$. Recall that a projective line $\mathbb{P}^1$ consists of points with homogenous coordinates $(a_0 : a_1)$. Consider the element $[a_0P_1 - a_1Q_2, a_0P_2 - a_1Q_1]$. It is easy that

$$[a_0P_1 - a_1Q_2, a_0P_2 - a_1Q_1] = -a_0a_1([P_1, Q_1] - [P_2, Q_2]) = -a_0a_1[P_1 - Q_2, P_2 - Q_1]. \tag{48}$$

If $a_0, a_1 \neq 0$ then the ideals $\langle [a_0P_1 - a_1Q_2, a_0P_2 - a_1Q_1] \rangle$ and $\langle [P_1 - Q_2, P_2 - Q_1] \rangle$ of $\mathbf{P}r$ coincide. Thus, we can consider the family of the algebras S_a parameterizing by $\mathbb{P}^1 \setminus \{(0:1), (1:0)\} = \mathbb{C}^*$ with the coordinate $a = \frac{a_1}{a_0}$.

Fix $a \in \mathbb{C}^*$. Consider the subalgebra $S_a \subset \mathcal{C}$ generated by the elements $s_1 = P_1 - aQ_2$ and $s_2 = P_2 - aQ_1$. It is clear that S_a is commutative. Note that S_a is invariant under the action of involution σ_1. Also, using Proposition 1 in the case of $A = \mathbb{C}^{\oplus 3}$ and $B = \mathbb{C}^{\oplus 3}$ and Theorem 13, we get that the algebra S_a is infinite-dimensional. Also, we have the well-defined action of S_3 on the algebra S_a. Actually, this group acts on S_a by permutations of the elements: $s_1, s_2, s_1 + s_2 + (a-1)$. Permutation $P_i \leftrightarrow Q_i$ transform subalgebra S_a to $S_{\frac{1}{a}}$. Thus, if $a = \pm 1$ we have the well-defined action of $S_3 \times \mathbb{Z}_2$.

Proposition 15. *We claim that there is the following identity:*

$$s_1s_2(s_1 + s_2 + (a-1)) = 0. \tag{49}$$

Proof. Let us rewrite this element as follows.

$$s_1s_2(s_1+s_2-(a-1)) = (P_1-aQ_2)(P_2-aQ_1)((P_1+P_2)-a(Q_1+Q_2)+(a-1)) =$$

$$= -a(P_1Q_1+Q_2P_2)((P_1+P_2)-a(Q_1+Q_2)+(a-1)) =$$

$$= -a(P_1Q_1P_1+P_1Q_1P_2-P_1Q_1)+a^2(Q_2P_2Q_1+Q_2P_2Q_2-Q_2P_2).$$

We have the following identity: $P_1h(P_2-1) = P_1Q_1P_1+P_1Q_1P_2-P_1Q_1$. Thus, we get that $P_1Q_1P_1+P_1Q_1P_2-P_1Q_1 = 0$. Analogously, $Q_2P_2Q_1+Q_2P_2Q_2-Q_2P_2 = 0$. Consequently, we proved the required statement. □

Proposition 16. *Fix $a \in \mathbb{C}^*$. Consider the surjective morphism $\phi : \mathbb{C}[s_1,s_2] \to S_a$. Kernel of ϕ is generated by the element $s_1s_2(s_1+s_2+(a-1))$, i.e. relation (49) is the unique defining relation of the algebra S_a.*

Proof. Consider the element $h_1 \in \mathrm{Ker}\phi$. Using infinite-dimensionality of S_a, we get that g.c.d.$(h_1, s_1s_2(s_1+s_2+(a-1))) \neq 1$. We have three possibilities:

- $h_1 = s_1h_2$ for some h_2,
- $h_1 = s_2h_2$ for some h_2,
- $h_1 = (s_1+s_2+(a-1))h_2$ for some h_2.

Applying the action of S_3, we get that $h = s_1s_2(s_1+s_2+(a-1))h'$ for some h'.

□

Consider the family of affine varieties $\mathrm{Spec}S_a = \mathrm{Hom}_{alg}(S_a,\mathbb{C}), a \in \mathbb{C}^*$. Note the following fact:

Corollary 17. *We have two cases:*

- $a \neq 1$, $\mathrm{Spec}S_a$ *is a union of three lines on the plane intersecting in three different points.*
- $a = 1$, $\mathrm{Spec}S_1$ *is a union of three lines on the plane passing through one point. (Figure 0.3)*

Proof. Fix $a \in \mathbb{C}^*$. Consider the affine variety $\mathrm{Spec}S_a$. There is a natural embedding $\mathrm{Spec}S_a$ into affine space $\mathbb{C}^2$ with coordinates s_1, s_2. $\mathrm{Spec}S_a$ is given by equation (49)
. □

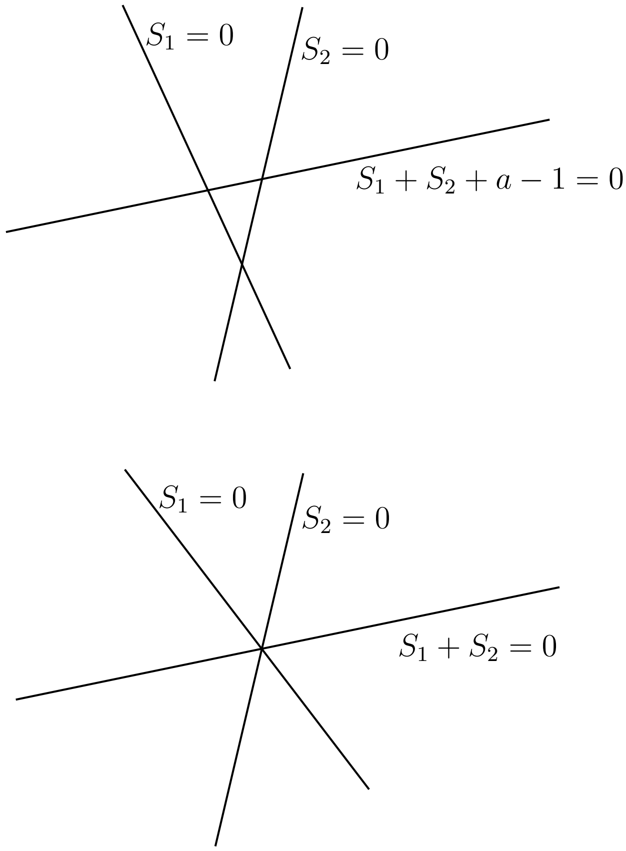

Figure 0.3:

The center of the algebra $\mathcal{C}$

In this subsection we describe the center of the algebra $\mathcal{C}$.

Consider a one-dimensional family of the subalgebras $S_a \subset \mathcal{C}, a \in \mathbb{C}^*$. Denote by $s_1(a) = P_1 - aQ_2$ and $s_2(a) = P_2 - aQ_1$ for fixed $a \in \mathbb{C}^*$. Denote by $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ the center of the algebra $\mathcal{C}$.

Proposition 18. *We have the following statements:*

- *The subalgebras S_{a_1} and S_{a_2} for any different fixed $a_1, a_2 \in \mathbb{C}^*, a_1 \neq a_2$ generate the algebra $\mathcal{C}$.*

- *Elements $s_1^2(a') + (a' - 1)s_1(a'), s_2^2(a') + (a' - 1)s_2(a'), s_1(a')s_2(a')$ belong to the intersection $\bigcap_{a \in \mathbb{C}^*} S_a$ for any $a' \in \mathbb{C}^*$.*

- *Also, we have the following immersion: $\bigcap_{a \in \mathbb{C}^*} S_a \subseteq \mathcal{Z}(\mathcal{C})$.*

Proof. Using expressions for $s_i(a)$ as linear combinations of P_i, Q_j, we get the first statement. Direct calculations give us the following identities:

$$a_2(s_1^2(a_1) + (a_1 - 1)s_1(a_1)) = a_1(s_1^2(a_2) + (a_2 - 1)s_1(a_2)), \tag{50}$$

$$a_2(s_2^2(a_1) + (a_1 - 1)s_2(a_1)) = a_1(s_2^2(a_2) + (a_2 - 1)s_2(a_2)), \tag{51}$$

$$a_2 s_1(a_1)s_2(a_1) = a_1 s_1(a_2)s_2(a_2), \tag{52}$$

for any $a_1, a_2 \in \mathbb{C}^*$. This proves the second statement. In particular, we get that $\bigcap_{a\in\mathbb{C}^*} S_a = S_{a_1} \cap S_{a_2}$ for any $a_1, a_2 \in \mathbb{C}^*, a_1 \neq a_2$. Consider $x \in S_{a_1} \cap S_{a_2}$. Thus, x commutes with $s_i(a_j), i = 1, 2, j = 1, 2$. Using the first statement, we get that $x \in \mathcal{Z}(\mathcal{C})$. □

Proposition 19. *Fix $a \in \mathbb{C}^*$. Any element of the center $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ can be expressed as the sum $f_1(t_1) + f_2(t_2) + f_3(t_3)$, where $f_i \in \mathbb{C}[x]$ and*

$$t_1 = \frac{s_2^2(a) + (a-1)s_2(a) + s_1(a)s_2(a)}{a}, t_2 = \frac{s_1^2(a) + (a-1)s_1(a) + s_1(a)s_2(a)}{a},$$
$$t_3 = \frac{s_1(a)s_2(a)}{a}. \tag{53}$$

Proof. Consider the morphisms $\psi_i : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_i, i = 1, 2, 3$ from Subsection . It is easy that $\psi_i(\mathcal{Z}(\mathcal{C})) \subseteq \mathcal{Z}(\mathcal{C}_i), i = 1, 2, 3$, where $\mathcal{Z}(\mathcal{C}_i)$ are the center of the algebra $\mathcal{C}_i$ for $i = 1, 2, 3$. Let us prove that $x \in \mathcal{Z}(\mathcal{C})$ iff $\psi_i(x) \in \mathcal{Z}(\mathcal{C}_i)$ for $i = 1, 2, 3$. It is easy that necessity is evident.

Recall that x_i, y_i are generators of $\mathcal{C}_i, i = 1, 2, 3$. It is well known that the center of $\mathcal{C}_i$ is generated by the element $\theta_i = x_i y_i + y_i x_i - x_i - y_i$ for any $i = 1, 2, 3$ (cf. []). Fix $a \in \mathbb{C}^*$. Consider the element

$$t_3 = \frac{s_1(a)s_2(a)}{a}. \tag{54}$$

It is clear that $\psi_i(t_3) = 0, i = 1, 2$ and $\psi_3(t_3) = \theta_3$. Recall that there is an action of $S_3 \times \mathbb{Z}_2$ on $\mathcal{C}$. It is easy that this group preserves the center $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$. Considering different elements of type $\sigma(t_3), \sigma \in S_3$, we can find the elements $t_i, i = 1, 2$ such that $\psi_j(t_i) = 0$ if $i \neq j$ and $\psi_i(t_i) = \theta_i, i = 1, 2$. Direct calculations show us that

$$t_1 = -\frac{s_2^2(a) + (a-1)s_2(a) + s_1(a)s_2(a)}{a}, t_2 = -\frac{s_1^2(a) + (a-1)s_1(a) + s_1(a)s_2(a)}{a}. \tag{55}$$

Assume that $\psi_i(x) \in \mathcal{Z}(\mathcal{C}_i), i = 1, 2, 3$. We have the following formulas for $\psi_i(x)$: $\psi_i(x) = f_i(\theta_i), i = 1, 2, 3$ for some polynomial $f_i \in \mathbb{C}[x]$. Consider the element $z = f_1(t_1) + f_2(t_2) + f_3(t_3) \in \mathcal{Z}(\mathcal{C})$. Then we have the following formulas: $\psi_i(z) = \psi_i(x) = f_i(\theta_i), i = 1, 2, 3$. Thus, $x - z \in \mathrm{Ker}\psi_1 \cap \mathrm{Ker}\psi_2 \cap \mathrm{Ker}\psi_3$. As we know from Corollary 14, $\mathrm{Ker}\psi_1 \cap \mathrm{Ker}\psi_2 \cap \mathrm{Ker}\psi_3 = \{0\}$. Hence, $x = z$. □

Note that it is more convenient to choose t_i by formulas (54) and (55), because the expressions of t_i in terms of P_i, Q_j are independent of a.

Corollary 20. *We have the following relations:*

$$t_1t_2 = t_2t_3 = t_3t_1 = 0 \tag{56}$$

Moreover, these elements t_1t_2, t_2t_3, t_3t_1 generate the kernel of the natural morphism: $\mathbb{C}[t_1, t_2, t_3] \to \mathcal{Z}(\mathcal{C})$.

Proof. Prove that $t_1t_2 = 0$. It is easy that $\psi_i(t_1t_2) = 0, i = 1, 2, 3$. Thus, $t_1t_2 = 0$. Analogously, $t_it_j = 0$ for $i \neq j$.

Further, consider some $h(t_1, t_2, t_3) = 0$. Since $t_it_j = 0$ for $i \neq j$, we can write h as the sum $h_1(t_1) + h_2(t_2) + h_3(t_3)$, where $h_i \in \mathbb{C}[x]$. Using the morphisms ψ_i, we get that $h_i = 0$. $\square$

As we know, there is the action of S_3 on $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ by permutations of t_i.

Calculating $\mathrm{Spec}\mathcal{Z}(\mathcal{C}) = \mathrm{Hom}_{alg}(\mathcal{Z}(\mathcal{C}), \mathbb{C})$ we get the following corollary:

Corollary 21. *The affine variety $\mathrm{Spec}\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ is a union of three lines in the three-dimensional space passing through one point.*

The group S_3 acts on $\mathrm{Spec}\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ by permutations of lines.

Let us make the remark about the application of the center $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ in quantum mechanics. As we know, we can consider a quantum-mechanical system corresponding to algebra $\mathcal{C}$. In this case the elements of the center $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ play the role of conservation laws of the system. It means that if we decompose our quantum-mechanical system into the direct sum of finite-dimensional irreducible subsystems, then elements of $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ are constants in these subsystems. Conversely, the characters of $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ give us decomposition of the quantum-mechanical system into the direct sum of irreducible subsystems. We will discuss it in the next subsection **??**.

Fix $a \in \mathbb{C}^*$. Consider the natural morphism of affine varieties: $p_a : \mathrm{Spec}S_a \to \mathrm{Spec}\mathcal{Z}(\mathcal{C})$. Since $\mathcal{Z}(\mathcal{C}) \to S_a$ is an immersion, the morphism p_a is dominant. Denote by $L_i, i = 1, 2, 3$ the components of $\mathrm{Spec}S_a$ given by the equations: $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, $s_1 + s_2 + (a - 1) = 0$ respectively. Recall that we have the action of S_3 on the affine variety $\mathrm{Spec}S_a$. Consider the involutions $\tau_i, i = 1, 2, 3$ of S_3 defined by the formulas:

$$\tau_1 : s_1 \mapsto s_1, s_2 \mapsto -(a-1) - s_1 - s_2,$$

$$\tau_2 : s_1 \mapsto -(a-1) - s_1 - s_2, s_2 \mapsto s_2,$$

$$\tau_3 : s_1 \leftrightarrow s_2.$$

It is easy that $\tau_i(L_i) = L_i, i = 1, 2, 3$. Denote by l_i the components of $\mathrm{Spec}\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ given by the equations: $t_1 = 0$, $t_2 = 0$ and $t_3 = 0$

Proposition 22. *Fix $a \in \mathbb{C}^*$. We have the following statements:*

- *$p_a(L_i) = l_i$ and restriction of p_a onto L_i has degree 2.*

- $p_a|_{L_i} \circ \tau_i = p_a$, *and hence,* $L_i/\tau_i \cong l_i$.

- *Consider points* $x_i \in L_i$ *such that* $\tau_i(x_i) = x_i$. *Then* $x_1 = (0, -\frac{a-1}{2}), x_2 = (-\frac{a-1}{2}, 0), x_3 = (0,0)$. *Thus, ramification divisors of the restriction* p_a *onto* $L_i, i = 1,2,3$ *are the points* $(-\frac{(a-1)^2}{4a}, 0, 0)$, $(0, -\frac{(a-1)^2}{4a}, 0)$ *and* $(0, 0, -\frac{(a-1)^2}{4a})$ *of* $\mathrm{Spec}\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ *respectively.*

- $p^{-1}(0,0,0) = \{(0,0), (0, 1-a), (1-a, 0)\}$.

Proof. Consider the case of L_1. Points of L_1 has coordinates $(0,x)$ in coordinates s_1, s_2. Restriction of p_a onto L_1 is given by the rule: $(0,x) \mapsto \frac{x^2+ax}{a}$. Direct checking and the action of S_3 prove the proposition. $\square$

Remark the following corollary:

Corollary 23.

- *If* $a = 1$ *then ramification divisor is* $(0,0,0)$

- *if* $a = 1$, *then the morphism* p_a *provides the isomorphism of the varieties* $\mathrm{Spec}S_a/\mathbb{Z}_2$ *and* $\mathrm{Spec}\mathcal{Z}(\mathcal{C})$, *where the involution acts by the formula:* $x \mapsto -x$.

- *if* $a = -1$ *then ramification divisor is the set* $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$.

Properties of $\mathcal{C}$-modules

In this subsection we describe properties of finite-dimensional $\mathcal{C}$-modules. In particular, we give the description of irreducible $\mathcal{C}$-modules.

Firstly, consider the set of so-called characters, i.e. one-dimensional $\mathcal{C}$-modules. Recall that we calculated this set in Section Fix $a \in \mathbb{C}^*$. As we know from Section , any element $x \in \mathcal{C}$ can be expressed as

$$amx = s + Q_1 s' + Q_2 s'', s, s', s'' \in S_a. \tag{57}$$

Consider algebra $\mathcal{C}$ as algebra with generators $s_i, i = 1,2$ and $Q_i, i = 1,2$. In style of section we have the following formulas for P_i: $P_1 = s_1 + aQ_2, P_2 = s_2 + aQ_1$. Using orthogonality of P_i, we get the following formulas:

$$(s_1 + aQ_2)(s_2 + aQ_1) = 0, (s_2 + aQ_1)(s_1 + aQ_2) = 0.$$

Thus, we deduce the following identities:

$$s_1 s_2 + aQ_2 s_2 + as_1 Q_1 = 0, s_2 s_1 + aQ_1 s_1 + as_2 Q_2 = 0. \tag{58}$$

Also, we have the formulas: $(s_1 + aQ_2)^2 = s_1 + aQ_2$ and $(s_2 + aQ_1)^2 = s_2 + aQ_1$. Therefore, we get the following identities:

$$a(Q_1 s_2 + s_2 Q_1) = s_2 - s_2^2 + (a - a^2)Q_1, a(Q_2 s_1 + s_1 Q_2) = s_1 - s_1^2 + (a - a^2)Q_2. \tag{59}$$

Thus, we can consider the algebra $\mathcal{C}$ as unital algebra with generators Q_1, Q_2, s_1, s_2 satisfying relations: $Q_i^2 = Q_i, i = 1, 2$, $Q_iQ_j = 0$ if $i \neq j$, $s_1s_2 = s_2s_1$ and relations (49), (58) and (59).

Multiplying the element aQ_2s_2 by $(s_1 + (a-1))$ from the left side, we get that

$$(s_1 + (a-1))aQ_2s_2 = -(s_1 + (a-1))as_1Q_1 - (s_1 + (a-1))s_1s_2$$

from relations (58). Recall that the element $(s_1+(a-1))s_1$ is central. Using relation (59), we obtain that

$$as_1Q_2s_2 + (a-1)aQ_2s_2 = -aQ_2s_1s_2 + (s_1 - s_1^2)s_2 + (a-a^2)Q_2s_2 + (a-1)aQ_2s_2$$

$$= -aQ_1(s_1 + (a-1))s_1 - (s_1 + (a-1))s_1s_2.$$

Finally, we have that

$$s_1s_2 - Q_2s_1s_2 + Q_1(s_1 + (a-1))s_1 = 0. \tag{60}$$

Using symmetries, we get that

$$(Q_1s_1 - Q_2s_2)((a-1) + s_1 + s_2) = 0 \tag{61}$$

and

$$-s_1s_2 + Q_1s_1s_2 - Q_2s_2((a-1) + s_2) = 0. \tag{62}$$

Let us define the singular characters. We will say that χ is *singular* if $\chi \in \{(0,0), (1-a,0), (0,1-a)\}$, i.e. correspond to singular points of the variety $\mathrm{Spec}S_a$.

Further, prove the following proposition:

Proposition 24. *Fix $a \neq \pm 1$. Consider the character $\chi \in \mathrm{Spec}S_a$. Denote by $\mathbb{C}^\chi$ the one-dimensional S_a-module corresponding to χ. We have the following statements:*

- *if χ is not singular, then* $\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{C} \otimes_{S_a} \mathbb{C}^\chi = 2$,
- *if χ is singular, then* $\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{C} \otimes_{S_a} \mathbb{C}^\chi = 3$.

Proof. Let v be a vector such that $s_iv = \chi(s_i)v$. It is well known that generators of the $\mathcal{C}$ - module $\mathcal{C} \otimes_{S_a} \mathbb{C}^\chi$ are the vectors $1 \otimes v$, $Q_1 \otimes v$ and $Q_2 \otimes v$. Tensoring the identity (60) by v, we get the following identity:

$$s_2s_1 \otimes v - Q_1s_1s_2 \otimes v + Q_2((a-1) + s_1)s_1 \otimes v =$$

$$= \chi(s_1s_2) \cdot 1 \otimes v - \chi(s_1s_2) \cdot Q_1 \otimes v + ((a-1) + \chi(s_1))\chi(s_1) \cdot Q_2 \otimes v = 0.$$

This expression is trivial iff $\chi(s_1)\chi(s_2) = 0, \chi(s_1)(\chi(s_1) + (a-1)) = 0$, i.e. χ corresponds to line $s_1 = 0$ and the point $s_1 = -(a-1), s_2 = 0$. Applying the group of symmetry, we get that (60), (61) and (62) are trivial linear combinations iff $\chi \in \{(0,0), (1-a,0), (0,1-a)\}$. $\square$

Consider the $\mathcal{C}$-module W. Denote by $\mathrm{Char}(W)$ the set of characters $\chi \in \mathrm{Spec}S_a$ such that there exists an immersion: $\mathbb{C}^\chi \to W$ as S_a-modules.

Recall that there are three involutions $\tau_i, i = 1, 2, 3$ acting on $L_i \subset \mathrm{Spec}S_a$.

Proposition 25. *Consider $\mathcal{C}$-module W. Assume that $\chi \in \mathrm{Char}(W)$, $\chi \in L_i$ Then $\tau_i(\chi) \in \mathrm{Char}(W)$.*

Proof. Assume that $\chi \in L_1$. Thus, $\chi(s_1) = 0, \chi(s_2) = x$ and $s_2 1 \otimes v = \chi(s_2) 1 \otimes v$. Using relation (61), we get that $Q_2 \otimes v = 0$. Let us calculate $s_2 Q_1 \otimes v$. Using relation (59), we obtain that

$$s_2 Q_1 \otimes v + x Q_1 \otimes v = \frac{x - x^2}{a} 1 \otimes v + (1 - a) Q_1 \otimes v.$$

Thus, $s_2 Q_1 \otimes v = (-(a-1) - x) Q_1 \otimes v + \frac{x - x^2}{a} 1 \otimes v$. Similar arguments give us that

$$s_1 Q_1 \otimes v = 0.$$

Therefore, the operator s_2 acting on two-dimensional space generated by $1 \otimes v, Q_1 \otimes v$ has two eigenvalues x and $-(a-1) - x = \tau_1((0, x))$. Analogously, one can prove the rest. $\square$

Corollary 26. *If $a = 1$ then the character is singular iff $\chi = (0, 0)$. Thus, we get that*

- *if $\chi = (0, 0)$, then* $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{C} \otimes_{S_a} \mathbb{C}^\chi = 3$,
- *if $\chi \neq (0, 0)$ then* $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{C} \otimes_{S_a} \mathbb{C}^\chi = 2$.

Further, we classify irreducible $\mathcal{C}$-modules.

Proposition 27. *Consider the irreducible $\mathcal{C}$-module W.*

- *Assume that $\chi \in L_i \subset \mathrm{Spec}S_a$ is not singular, $\tau_i(\chi) \neq \chi$ and $\chi \in \mathrm{Char}(W)$. We have the following isomorphism of $\mathcal{C}$ - modules:*

$$W \cong \mathcal{C} \otimes_{S_a} \mathbb{C}^\chi \cong \mathcal{C} \otimes_{S_a} \mathbb{C}^{\tau_i(\chi)}. \tag{63}$$

- *If $a \neq \pm 1$ and χ is singular. Then $\mathcal{C} \otimes_{S_a} \mathbb{C}^\chi$ is a non-trivial extension of one-dimensional $\mathcal{C}$-modules.*

- *If $a \neq \pm 1$, $\chi \in L_i \subset \mathrm{Spec}S_a$ and $\tau_i(\chi) = \chi$. In this case $\mathcal{C} \otimes_{S_a} \mathbb{C}^\chi$ is irreducible $\mathcal{C}$-module. If $a = -1$, $\chi \in L_i \subset \mathrm{Spec}S_a$ and $\tau_i(\chi) = \chi$. In this case $\mathcal{C} \otimes_{S_a} \mathbb{C}^\chi$ is a sum of one-dimensional $\mathcal{C}$-modules. If $a = 1$, $\chi \in L_i \subset \mathrm{Spec}S_a$ and $\tau_i(\chi) = \chi$ then χ is singular and $\chi = (0, 0)$.*

Proof. If $\chi \in L_i$ is not singular and $\tau_i(\chi) \neq \chi$, then $\mathrm{Char}(W) = \{\chi, \tau_i(\chi)\}$ and $\dim_{\mathbb{C}} W \geq 2$. Also, $\mathcal{C} \otimes_{S_a} \mathbb{C}^\chi$ has dimension 2 and we have a non-trivial morphism $\mathcal{C} \otimes_{S_a} \mathbb{C}^\chi \to W$. Since W is irreducible, we get that $W \cong \mathcal{C} \otimes_{S_a} \mathbb{C}^\chi$. First statement is proved.

Consider $\chi = (0,0) \in \mathrm{Spec} S_a$. In this situation, we get that $s_1 1 \otimes v = 0$, $s_1 Q_1 \otimes v = 0$ and $s_1 Q_2 \otimes v = (1-a) Q_2 \otimes v$ for s_1; $s_2 1 \otimes v = 0$, $s_2 Q_1 \otimes v = (1-a) Q_1 \otimes v$ and $s_2 Q_2 \otimes v = 0$ for element s_2. It is easy that $Q_i 1 \otimes v = Q_i \otimes v$, $Q_i Q_j \otimes v = \delta_{ij} Q_j \otimes v$ for $i,j = 1,2$. One can check that there is a two-dimensional submodule W_0 of $\mathcal{C} \otimes_{S_a} \mathbb{C}^\chi$ generated by the images of $Q_i, s_i, i = 1,2$. But there is no additional one-dimensional submodule W_1 of $\mathcal{C} \otimes_{S_a} \mathbb{C}^\chi$ such that $W_0 \oplus W_1 = \mathcal{C} \otimes_{S_a} \mathbb{C}^\chi$.

Analogous arguments and direct calculations prove the rest. □

Corollary 28. *We have the following list of irreducible $\mathcal{C}$-modules:*

- *9 one-dimensional modules from Proposition 3.*
- *$\mathcal{C} \otimes_{S_a} \mathbb{C}^\chi$ if χ is not singular. Note that if $\chi \in L_i \subset \mathrm{Spec} S_a$ then $\mathcal{C} \otimes_{S_a} \mathbb{C}^\chi \cong \mathcal{C} \otimes_{S_a} \mathbb{C}^{\tau_i(\chi)}$. It means that two-dimensional irreducible $\mathcal{C}$ - modules corresponding to L_i are parameterized by the quotient $L_i/\tau_i \cong l_i$.*

Consider the algebra $\mathcal{C}$. Recall that we have the morphisms: $\psi_i : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_i$ from subsection . It is easy that one can get the irreducible $\mathcal{C}$-modules as irreducible $\mathcal{C}_i$-modules by means of applying ψ_i. Formulate the following corollary:

Corollary 29. *For any irreducible $\mathcal{C}$-module V there is a number i such that V can be obtained from some $\mathcal{C}_i$-module V_i by means of applying ψ_i.*

Algebras $\mathcal{C}_\vartheta, \vartheta \in \mathrm{Spec}\mathcal{Z}(\mathcal{C})$

In this subsection we study the quotient of the algebra $\mathcal{C}$ by the ideal generated by the relations: $z - \vartheta(z) \cdot 1, z \in \mathcal{Z}(\mathcal{C})$ for fixed character $\vartheta \in \mathrm{Spec}\mathcal{Z}(\mathcal{C})$.

We can consider the algebra $\mathcal{C}$ as an algebra over its center $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$. Denote by $\mathrm{Irr}(\mathcal{C})$ the set of irreducible $\mathcal{C}$-modules. It is well known that there is a map: $p : \mathrm{Irr}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Spec}\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ defined as follows. Fix an irreducible $\mathcal{C}$-module V. We can consider this module as $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$-module. By Schur's lemma, V as $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ - module is a direct sum of $\dim_{\mathbb{C}} V$ copies of $\mathbb{C}^\vartheta$ for some character $\vartheta \in \mathrm{Spec}\mathcal{Z}(\mathcal{C})$. The map p is defined by rule: $V \mapsto \vartheta$.

Fix the character $\vartheta \in \mathrm{Spec}\mathcal{Z}(\mathcal{C})$. Consider the algebra $\mathcal{C}_\vartheta$ the quotient of $\mathcal{C}$ by the ideal generated by relations $z - \vartheta(z) \cdot 1, z \in \mathcal{Z}(\mathcal{C})$. Irreducible $\mathcal{C}$-modules corresponding to ϑ are irreducible $\mathcal{C}_\vartheta$-modules. Since $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ is a subalgebra of $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}$ is a $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ - module. It is easy that a $\mathcal{C}_\vartheta$ as vector space is isomorphic to $\mathcal{C} \otimes_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})} \mathbb{C}^\vartheta$.

Proposition 30. *Fix the character $\vartheta \in \mathrm{Spec}\mathcal{Z}(\mathcal{C})$. Then we have the following identities for dimensions:*

- *if* $\vartheta = (0,0,0)$ *then* $\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{C}_\vartheta = 9$,
- *if* $\vartheta \neq (0,0,0)$ *then* $\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{C}_\vartheta = 4$.

Proof. Recall that the fiber of the morphism p_a over $(0,0,0)$ consists of three singular characters. Then we deduce that an S_a-module $S_a \otimes_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})} \mathbb{C}^\vartheta$ for $\vartheta = (0,0,0)$ is three-dimensional and is isomorphic to the direct sum $\bigoplus \mathbb{C}^\chi$, where the sum is taken over singular characters of S_a. Actually, in this case, we have the following isomorphism:

$$\mathcal{C} \otimes_{S_a} S_a \otimes_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})} \mathbb{C}^\vartheta = \bigoplus \mathcal{C} \otimes_{S_a} \mathbb{C}^\chi, \tag{64}$$

the sum is taken over singular characters of S_a. Using Proposition 24, we get that $\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{C} \otimes_{S_a} \mathbb{C}^\chi = 3$ and, hence, $\mathcal{C} \otimes_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})} \mathbb{C}^\vartheta = 9$.

Assume that $\vartheta \in l_i \subset \mathrm{Spec}\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ is not in the ramification divisor of p_a and $\vartheta \neq (0,0,0)$. In this situation one can show that S_a - module $S_a \otimes_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})} \mathbb{C}^\vartheta$ is isomorphic to the direct sum $\mathbb{C}^\chi \oplus \mathbb{C}^{\tau_i(\chi)}$, where $\chi \in L_i$ and $p_a(\chi) = \vartheta$. Thus, we obtain that $\mathcal{C} \otimes_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})} \mathbb{C}^\vartheta = \mathcal{C} \otimes_{S_a} \mathbb{C}^\chi \bigoplus \mathcal{C} \otimes_{S_a} \mathbb{C}^{\tau_i(\chi)}$. Using Proposition 24, we get that $\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{C} \otimes_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})} \mathbb{C}^\vartheta = 4$.

Assume that ϑ is in the ramification divisor of p_a. Choose a' such that ϑ is not in the ramification divisor of $p_{a'}$ and apply arguments of the previous case. □

Prove the following structure theorem for the algebra $\mathcal{C}_\vartheta$ for various $\vartheta \in \mathrm{Spec}\mathcal{Z}(\mathcal{C})$:

Theorem 31. *Consider the algebra* $\mathcal{C}_\vartheta$. *We have the following statements:*

- *if* $\vartheta \notin \{(0,0,0),(-1,0,0),(0,-1,0),(0,0,-1)\}$, *then* $\mathcal{C}_\vartheta \cong Mat_2(\mathbb{C})$,
- *if* $\vartheta \in \{(-1,0,0),(0,-1,0),(0,0,-1)\}$, *then the algebra* $\mathcal{C}_\vartheta$ *has a two-dimensional radical* J,
- *if* $\vartheta = (0,0,0)$, *then the algebra* $\mathcal{C}_\vartheta$ *has a 6-dimensional radical.*

Proof. Let $\vartheta = (0,0,x), x \neq 0$. In this case the algebra $\mathcal{C}_\vartheta$ is a quotient of $\mathcal{C}$ by the ideal generated by the relation $t_3 = 1$. One can rewrite this relation as $s_1 s_2 - ax \cdot 1$. It can be shown that the algebra $\mathcal{C}_\vartheta$ has the following basis $1, s_1, Q_1, Q_1 s_1$ with the relations: $s_1^2 + (a-1)s_1 + ax = 0$ and $s_1 Q_1 + Q_1 s_1 - s_1 + (1-a)Q_1 + x + 1 - a = 0$. It is clear that there is 2-dimensional commutative subalgebra $\mathcal{S}$ of $\mathcal{C}_\vartheta$ generated by s_1. Fix character λ of $\mathcal{S}$. It is easy that $\lambda(s_1)^2 + (a-1)\lambda(s_1) + x = 0$. Denote by v the generator of the 1-dimensional $\mathcal{S}$-module $\mathbb{C}^\lambda$ corresponding to the character λ. Consider $\mathcal{C}_\vartheta$-module $\mathcal{C}_\vartheta \otimes_{\mathcal{S}} \mathbb{C}^\lambda$. This module is 2-dimensional and has the basis $1 \otimes v$ and $Q_1 \otimes v$. Thus, we have the homomorphism: $\mathcal{C}_\vartheta \to Mat_2(\mathbb{C})$ given by the formula:

$$s_1 \mapsto \begin{pmatrix} \lambda(s_1) & \lambda(s_1) - x - 1 + a \\ 0 & -\lambda(s_1) + 1 - a \end{pmatrix}, Q_1 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{65}$$

Prove that if $x \neq -1$ then this homomorphism is isomorphism. It is sufficient to prove that $\mathcal{C}_\vartheta$-module $\mathcal{C}_\vartheta \otimes_{\mathcal{S}} \mathbb{C}^\lambda$ is irreducible. Assume that there exists a non-trivial $\mathcal{C}_\vartheta$ - invariant subspace of $\mathcal{C}_\vartheta \otimes_{\mathcal{S}} \mathbb{C}^\lambda$. It is clear that this subspace is the kernel of the matrix corresponding to Q_1 or the image of this matrix. Direct checking shows us that this subspace exists iff $x = -1$.

Assume that $x = -1$. Consider the element $h = a + s_1 - (a+1)Q_1$. One can check that $h^2 = 0$. Consider the two-sided ideal J of $\mathcal{C}_\vartheta$ generated by h. Direct calculations show us that this ideal consists of two elements h and $(s_1 - 1)Q_1$. One can show that $J^2 = 0$. It means that J is a radical of $\mathcal{C}_\vartheta$ and the quotient $\mathcal{C}_\vartheta / J \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$. Using symmetry, we get the first and second statements.

Assume that $\vartheta = (0,0,0)$ and $a \neq 1$. In this case the algebra $\mathcal{C}_\vartheta$ is 9 - dimensional and has the basis: $1, s_1, s_2, Q_1, s_1Q_1, s_2Q_1, Q_2, s_1Q_2, s_2Q_2$ and the relations $s_1s_2 = 0, s_1^2 + (a-1)s_1 = 0, s_2^2 + (a-1)s_2 = 0$, (58) and (59). One can rewrite these relations as follows

$$s_1Q_1 + Q_2s_2 = 0, Q_1s_1 + s_2Q_2 = 0, \tag{66}$$

$$Q_1s_2 + s_2Q_1 = s_2 + (1-a)Q_1, Q_2s_1 + s_1Q_2 = s_1 + (1-a)Q_2. \tag{67}$$

Consider the elements $h_1 = s_1 + (a-1)Q_2$, $h_2 = s_2 + (a-1)Q_1$. Denote by J' the two-sided ideal of $\mathcal{C}_\vartheta$ generated by h_1, h_2. One can calculate that $h_1^2 = h_2^2 = h_1h_2 = 0$. Also, $s_2h_1 = (a-1)s_2Q_2$. Using relations, we obtain that $s_2Q_2s_2Q_2 = -s_2s_1Q_1Q_2 = 0$. Analogously, elements $s_1Q_1, s_1(1-Q_2), s_2(1-Q_1) \in J'$ are nilpotent. It can be shown that J' is a radical of $\mathcal{C}_\vartheta$ and $\mathcal{C}_\vartheta/J' = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$. In the case $a = 1$, denote by J' the ideal generated by s_1, s_2. Direct calculations show us that J' is a 6-dimensional radical and $\mathcal{C}_\vartheta/J' = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$. $\square$

Corollary 32. *Dimension of any irreducible $\mathcal{C}$ - module is less than 2. Two-dimensional irreducible $\mathcal{C}$ - modules are parameterized by the open dense subset*

$$U = \mathrm{Spec}\mathcal{Z}(\mathcal{C}) \setminus \{(0,0,0), (-1,0,0), (0,-1,0), (0,0,-1)\}$$

.

Representation of $\mathcal{C}$ corresponding to a mutually unbiased basis in dimension 7

We constructed the morphism $\mathcal{C} \to B_{\frac{1}{7}}(\Gamma_{7,7})$ in Subsection . Also, recall that any non-trivial 7-dimensional representation of $B_{\frac{1}{7}}B(\Gamma_{7,7})$ defines an orthogonal pair in a Lie algebra [4]. In this subsection we study a pullback of a non-trivial 7-dimensional representation of $B_{\frac{1}{7}}(\Gamma_{7,7})$.

Consider the algebra $B_{\frac{1}{7}}(\Gamma_{7,7})$ with generators $p_1, ..., p_7$ and $q_1, ..., q_7$. Consider the ideal I generated by $[p_1 + p_2, q_1 + q_2] - [p_3 + p_4, q_3 + q_4]$. Recall that we have the homomorphism $i : \mathcal{C} \to B_{\frac{1}{7}}(\Gamma_{7,7})$ defined by rule: $P_1 \mapsto p_1 + p_2, P_2 \mapsto p_3 + p_4, Q_1 \mapsto q_1 + q_2, Q_2 \mapsto q_3 + q_4$. Using arguments of the filtration on $\mathcal{C}$ and the basis of $B_{\frac{1}{7}}(\Gamma_{7,7})$ described in [3], we get the following proposition:

Proposition 33. *The morphism i is injective.*

Denote by ρ the 7-dimensional $B_{\frac{1}{7}}(\Gamma_{7,7})$ - representation. Using the relation $\mathrm{Tr} p_i q_j = \frac{1}{7}$, we get the following values for the characters for a pullback of ρ:

character	dim	P_1	P_2	Q_1	Q_2	P_1Q_1	P_1Q_2	P_2Q_1	P_2Q_2
χ	7	2	2	2	2	$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{7}$

Firstly, let us calculate the traces of the elements

$$P_1, P_2, Q_1, Q_2, P_1Q_1, P_1Q_2, P_2Q_1, P_2Q_2$$

in the various irreducible $\mathcal{C}$-modules. 9 one-dimensional $\mathcal{C}$-modules. We have the following list:

character	dim	P_1	P_2	Q_1	Q_2	P_1Q_1	P_1Q_2	P_2Q_1	P_2Q_2
χ_1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
χ_2	1	1	0	0	0	0	0	0	0
χ_3	1	0	1	0	0	0	0	0	0
χ_4	1	0	0	1	0	0	0	0	0
χ_5	1	0	0	0	1	0	0	0	0
χ_6	1	1	0	1	0	1	0	0	0
χ_7	1	1	0	0	1	0	1	0	0
χ_8	1	0	1	1	0	0	0	1	0
χ_9	1	0	1	0	1	0	0	0	1

Secondly, consider two-dimensional $\mathcal{C}$-modules. As we know, these modules are parameterized by $\mathrm{Spec}\mathcal{Z}(\mathcal{C})$, i.e. the points of type $(x, 0, 0), (0, x, 0), (0, 0, x), x \neq 0, -1$. We get the following list:

character	dim	P_1	P_2	Q_1	Q_2	P_1Q_1	P_1Q_2	P_2Q_1	P_2Q_2
$\chi_{(x,0,0)}$	2	0	1	1	0	0	$x+1$	0	0
$\chi_{(0,y,0)}$	2	1	0	0	1	0	0	$y+1$	0
$\chi_{(0,0,z)}$	2	1	1	1	1	$-z$	$1+z$	$1+z$	$-z$

Actually, consider the representation of $\mathcal{C}$ corresponding to the point $(0, 0, x)$. In this case $t_3 = x$. Thus, $t_3 = -P_1Q_1 - Q_2P_2 = x \cdot 1$. Calculating the trace, we get that $-\mathrm{Tr}(P_1Q_1 + Q_2P_2) = 2x$. Further, in this representation we have the following identities: $P_2 = 1 - P_1$, $Q_2 = 1 - Q_1$. Thus, $-2\mathrm{Tr}P_1Q_1 = 2x$ and hence, $\mathrm{Tr}P_1Q_1 = -x$.

Recall the notion Jordan-Holder composite factors and its property in representation theory. Consider the unital associative algebra A. We say that an A-module V

has *Jordan-Holder composite factors* (briefly, composite factors) W_1,...,W_s if there exists a sequence of A-submodules of the following type:

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset M_2 ... \subset M_{s-1} \subset M_s = V \tag{68}$$

and the quotients $W_i = M_i/M_{i-1}, i = 1, ..., s$ are irreducible A-modules. It is known that the set of composite factors for any A-module is unique up to permutations. Let us denote by $\mathbf{g}r(V)$ the direct sum $W_1 \oplus ... \oplus W_s$ for an A-module V with the composite factors W_1,...,W_s. Two n-dimensional A-modules V_1 and V_2 have the same characters iff $\mathbf{g}r(V_1) \cong \mathbf{g}r(V_2)$.

Consider $\mathcal{C}$ - module V corresponding to ρ. Find Jordan-Holder factors of V. For this purpose, we must find numbers $m_i, i = 1, ..., 9; n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}_0$ such that:

$$\chi = \sum_{i=1}^{9} m_i \chi_i + n_1 \chi_{(x,0,0)} + n_2 \chi_{(0,x,0)} + n_3 \chi_{(0,0,x)}. \tag{69}$$

For any set $m_1, ..., m_9; n_1, n_2, n_3$ satisfying (69), we get that $\mathcal{C}$ - module has m_i factors isomorphic to a 1-dimensional $\mathcal{C}$-module $\chi_i, i = 1, ..., 9$ and n_i factors isomorphic to the corresponding irreducible two-dimensional $\mathcal{C}$-module.

Proposition 34. *The $\mathcal{C}$-module V has the following Jordan-Holder composite factors:*

- *A one-dimensional module corresponding to χ_1,*
- *A two-dimensional factor corresponding to $(-\frac{6}{7}, 0, 0)$,*
- *A two-dimensional factor corresponding to $(0, -\frac{6}{7}, 0)$,*
- *A two-dimensional factor corresponding to $(0, 0, -\frac{4}{7})$.*

Proof. Direct calculations prove this proposition. □

Consider $\mathcal{C}$-module V. Fix $a \in \mathbb{C}^*$.

Prove that these composite factors are direct summands of V.

Proposition 35. *Denote by V_0, V_1, V_2, V_3 the $\mathcal{C}$-modules corresponding to Jordan-Holder factors of V in the proposition 34. Then we have the following isomorphism:*

$$V \cong V_0 \oplus V_1 \oplus V_2 \oplus V_3. \tag{70}$$

Proof. Fix $a \in \mathbb{C}^*$. Consider $\mathcal{C}$ - module V as S_a-module. Recall that we denote by $\mathrm{Char}(V)$ the characters $\lambda \in \mathrm{Spec} S_a$ such that there exists an immersion of S_a-modules: $\mathbb{C}^\lambda \to V$. In this case we have the following decomposition of V:

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Char}(V)} \mathbb{C}^\lambda. \tag{71}$$

One can prove that $\mathrm{Char}(V)$ consists of 7 different points of $\mathrm{Spec}S_a$. The set $\mathrm{Char}(V)$ divides into subsets as follows: $\mathrm{Char}(V) = \lambda_0 \cup (\lambda_1, \tau_1(\lambda)) \cup (\lambda_2, \tau_2(\lambda_2)) \cup (\lambda_3, \tau_3(\lambda_3))$, where λ_0 is a character corresponding to the point $(0,0) \in \mathrm{Spec}S_a$, τ_i are involutions acting on components $L_i \subset \mathrm{Spec}S_a$. $\mathcal{C}$-module $\mathcal{C}^{\lambda_0}$ is isomorphic to V_0. One can check that $\mathcal{C}$-module $\mathcal{C} \otimes_{S_a} \mathbb{C}^{\lambda_i}, i = 1,2,3$ are irreducible and isomorphic to the factors $V_i, i = 1,2,3$ respectively. Thus, we have the immersions of $\mathcal{C}$-modules: $V_i = \mathcal{C} \otimes_{S_a} \mathbb{C}^{\lambda_i} \to V$. Using standard arguments, we get that

$$V = V_0 \oplus V_1 \oplus V_2 \oplus V_3. \tag{72}$$

$\square$

Bibliography

[1] Durt T., Englert B.-G., Bengtsson I., Zyczkowski K., On mutually unbiased bases, Int.J.Quantum Inform., 08, 535(2010)

[2] Ruskai M.B., Some connections between frames, mutually unbiased bases, and POVM's in quantum information theory, Acta Applicandae Mathematicae 12/2009, 108(3), 709-719

[3] Bondal A., Zhdanovskiy I., Representation theory for system of projectors and discrete Laplace operator, Preprint of IPMU, IPMU13-0001.

[4] Bondal A.I., Zhdanovskiy I.Yu., Orthogonal pairs and mutually unbiased bases, Journal of Mathematical Sciences July 2016, Volume 216, Issue 1, pp 23-40

[5] A. Bondal, I. Zhdanovskiy, Symplectic geometry of unbiasedness and critical points of a potential, 2015 , 14 pp., to appear in: Advanced Studies in Pure Mathematics Advanced Studies in Pure Mathematics Book Series. Japan, Tokyo: the Mathematical Society of Japan by Kinokuniya, Tokyo, 2016, arXiv: 1507.00081

[6] M. Petrescu, Existence of continuous families of complex Hadamard matrices of certain prime dimensions and related results, PhD thesis, University of California Los Angeles, 1997.

[7] R. Nicoara, A finiteness result for commuting squares of matrix algebras, J. Operator Theory 55 (2006), no. 2, 295-310, arXiv:math/0404301

[8] J. von Neumann: Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik (Springer-Verlag, Berlin 1932). English translation: Mathematical Foundations of Quantum Mechanics (Princeton University Press, Berlin 1955).

[9] S. Popa, Orthogonal pairs of *-subalgebras in finite von Neumann algebras, J. Operator Theory 9, 253-268 (1983)

[10] Sakai S. C*-algebras and W*-algebras. New York; Heidelberg; Berlin: Springer-Verl., 1971.

[11] U. Haagerup, Orthogonal maximal abelian *-subalgebras of the n x n matrices and cyclic n-roots, Operator Algebras and Quantum Field Theory (ed. S.Doplicher et al.), International Press (1997), 296-322

Entropic Inequalities for Matrix Elements of Rotation Group Irreducible Representations

V. L. Man'ko[1], L. A. Markovich [2] [3] [4]

Abstract

Using the entropic inequalities for Shannon and Tsallis entropies new inequalities for some classical polynomials are obtained. To this end, an invertible mapping for the irreducible unitary representation of groups $SU(2)$ and $SU(1,1)$ like Jacoby polynomials and Gauss' hypergeometric functions, respectively, are used.

Introduction

It is known that matrix elements of some irreducible unitary representation of compact and noncompact groups can be represented in terms of special functions, e.g. Jacobi and Legendre polynomials [1]. What's more, any unitary matrix can be associated with a bistochastic matrix. The sums of elements of the bistochastic matrices both in columns and rows are equal to one. Hence, it is possible to use the elements of such matrices as probabilities. Symmetry properties provide possibilities to connect the representation aspects of groups and algebras with properties of special functions (see e.g. [2–5]).

The Shanon entropy characterizes the probability distribution of the random variable which appears as a result of experiment with finite number of outcomes. For two random variables the joint probability distribution can be obtained. The distribution is connected with $N = N_1 \cdot N_2$ outcomes, where for the first random variable we have N_1 results and for the second random variable N_2 results. According to the Sklar's theorem [6] the joint distribution function and dependence between two random variables determine two marginal distribution functions. For the latter three distributions the Shannon entropies can be calculated. They satisfy the inequality called the subadditivity condition [7]. The entropic inequalities for bipartite systems were used in [8, 9] in the framework of the tomographic probability representation of quantum mechanics to characterize two degrees of quantum correlations in the systems. For the systems without subsystems the latter inequalities were introduced

[1]P.N.Lebedev Physical Institute, Russian Academy of Sciences
[2]Moscow Institute of Physics and Technology
[3]Institute for Information Transmission Problems
[4]V.A.Trapeznikov Institute of Control Sciences

in [10]. However we can apply the subadditivity condition in all cases, where the set of nonnegative numbers or functions is arisen and the sum of numbers or functions equals to unity. For the Li subgroups like $SU(2)$ and $SU(1,1)$ the unitary irreducible representations are well known [1]. For example, they can be represented in terms of Jacobi, Legendre and Gauss' hypergeometric polynomials, etc. Therefore, we can write some new inequalities for the latter polynomials. The inequalities for the Jacobi and Legendre polynomials in case of the system with the spin $j = 3/2$ are introduced in [11].

It turns out, that many well-known special functions and classical polynomial families associated with the irreducible representations of the semisimple groups provide new properties under some transformations. For example, the continuous q-Hermite polynomials present some new transformation properties with respect to the Fourier integral transform in [12]. Moreover, the new properties of q^{-1}-Hermite polynomials, useful for finite signal analysis are investigated in [13–15]. The properties of the special functions connected with the matrix elements of the group irreducible representations and Clebsch-Gordan coefficients were studied in [16–20].

The aim of our work is to consider the unitary matrices connected with the irreducible representation of the $SU(2)$ and $SU(1,1)$ groups and to construct the new inequalities for such special functions as Jacobi and Gauss' hypergeometric polynomials from the entropic inequalities. To this end, the invertible mapping of indices proposed in [21, 22] is used.

The paper is organized as follows. In Sec. the invertible mapping for the finite groups is introduced. In Sec. we use the latter mapping and the subadditivity condition for the Shannon entropy to write the new inequalities for the Jacobi polynomials which represent the elements of the $SU(2)$-group. The results are illustrated on examples of the states with the spins $j = 3/2$ and $j = 2$. Section is dedicated to the use of other invertible mappings and q-entropies to write the new inequalities for the special functions. In Sec. the invertible mapping for the infinite groups is obtained. Using the latter results the new inequalities for the Gauss' hypergeometric polynomials which represent the elements of the $SU(1,1)$-group are written in Sec. .

The invertible mapping for the irreducible unitary representation of the $SU(2)$-group

Let $p_1, p_2, \ldots, p_N$ be the set of nonnegative number such that $\sum_{k=1}^{N} p_k = 1$, $p_k \geq 0$. The latter numbers can be interpreted as the probability vector $\overrightarrow{p}$ with N random components. For the system of qudits with the density matrix ρ the components of the probability vector $\overrightarrow{p}$ are related to the state tomograms

$$w(m,u) =< m|u\rho u^{\dagger}|m >,$$

where u is unitary matrix. The vector $\overrightarrow{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$, $m_k = (-j_k, -j_k + 1, ..., j_k)$, is the projection of the j_k-th spin. The Shannon entropy associated with the probability vector $\overrightarrow{p}$ is determined by

$$H_p \;\;=\;\; -\sum_k p_k \ln p_k.$$

In [11] the special invertible mapping of indices was introduced. Namely, if N is an even number than it follows

$$\begin{aligned} 1 \;&\Leftrightarrow\; 11, \quad 2 \Leftrightarrow 12, \quad \ldots, \quad N/2 \Leftrightarrow 1N/2, \\ N/2+1 \;&\Leftrightarrow\; 21, \quad N/2+2 \Leftrightarrow 22, \quad \ldots, \quad N \Leftrightarrow 2N/2. \end{aligned}$$

Hence, the probabilities are given in the form of the matrix (p_{il}), $i = 1, 2$, $l = 1, 2, \ldots, N/2$, with components

$$\begin{aligned} p_1 \;&\Leftrightarrow\; p_{11}, \quad p_2 \Leftrightarrow p_{12}, \quad \ldots, \quad p_{N/2} \Leftrightarrow p_{1N/2}, \\ p_{N/2+1} \;&\Leftrightarrow\; p_{21}, \quad p_{N/2+2} \Leftrightarrow p_{22}, \quad \ldots, \quad p_N \Leftrightarrow p_{2N/2}. \end{aligned} \tag{73}$$

If N is an odd number than we add a zero component $p_{N+1} = 0$ to the N-component vector $\overrightarrow{p}$. Then we get the $(N+1)$-component vector $\overrightarrow{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_N, p_{N+1})$. Thus, the invertible map of the indices is the following

$$\begin{aligned} 1 \;&\Leftrightarrow\; 11, \quad \ldots, \quad (N+1)/2 \Leftrightarrow 1(N+1)/2, \\ (N+1)/2+1 \;&\Leftrightarrow\; 21, \quad \ldots, \quad N+1 \Leftrightarrow 2(N+1)/2. \end{aligned}$$

The probabilities are given in the form of the matrix (p_{il}), $i = 1, 2$, $l = 1, 2, \ldots, (N+1)/2$ with the components

$$\begin{aligned} p_1 \;&\Leftrightarrow\; p_{11}, \quad p_2 \Leftrightarrow p_{12} \quad \ldots, \quad p_{(N+1)/2} \Leftrightarrow p_{1(N+1)/2}, \\ p_{(N+1)/2+1} \;&\Leftrightarrow\; p_{21}, \quad \ldots, \quad p_{N+1} \Leftrightarrow p_{2(N+1)/2}. \end{aligned} \tag{74}$$

Let us introduce the unitary matrix U with the matrix elements u_{ik}, $i, k = 1, 2, \ldots, N$, which satisfy the condition $\sum_{i=1}^{N} |u_{ik}|^2 = \sum_{k=1}^{N} |u_{ik}|^2 = 1$. It is known that the latter $n \times n$ matrix can be associated with the bistochastic matrix M, i.e. $|u_{ik}|^2 = m_{ik}$. The sum of numbers both in columns and rows of bistochastic matrices is equal to one. Let us fix the second index k and introduce the notation $m_{ik} \equiv p_i^{(k)}$. Thus, we can map the indices i on the pairs of indices $(\alpha(i), \xi(i))$, $\alpha(i) \in \{1, 2\}$, $\xi(i) \in \{1, 2, \ldots N/2((N+1)/2)\}$, like (73) and (74). Using the latter mapping we can rewrite the bistochastic matrix $p_i^{(k)}$ in the form $p^{(k)}_{\alpha(i),\xi(i)}$.

Since $p^{(k)}_{\alpha(i),\xi(i)} \geq 0$ and $\sum_\alpha \sum_\xi p^{(k)}_{\alpha(i),\xi(i)} = 1$ hold, the values $p^{(k)}_{\alpha(i),\xi(i)}$ can be considered as probabilities. We can write the Shannon entropy as

$$\mathcal{H}_p(12) \;=\; -\sum_{\alpha=1}^{2} \sum_{\xi=1}^{N/2((N+1)/2)} p^{(k)}_{\alpha(i),\xi(i)} \ln p^{(k)}_{\alpha(i),\xi(i)}. \tag{75}$$

If we fix one of the indices $\alpha(i)$ or $\xi(i)$ and sum over the unfixed one we can obtain the analog of the marginal distributions

$$p^{(k)}_{\xi(i)}(1) = \sum_{\alpha=1}^{2} p^{(k)}_{\alpha(i),\xi(i)}, \quad p^{(k)}_{\alpha(i)}(2) = \sum_{\xi=1}^{N/2((N+1)/2)} p^{(k)}_{\alpha(i),\xi(i)}. \tag{76}$$

What's more, we can write two Shannon entropies associated with marginal distributions (76) as

$$\mathcal{H}_p(1) = -\sum_{\xi=1}^{N/2((N+1)/2)} p^{(k)}_{\xi(i)}(1) \ln p^{(k)}_{\xi(i)}(1),\; \mathcal{H}_p(2)) = -\sum_{\alpha=1}^{2} p^{(k)}_{\alpha(i)}(2) \ln p^{(k)}_{\alpha(i)}(2).$$

It is known that these entropies satisfy the subadditivity condition [7] written in the form of inequality

$$\mathcal{H}_p(1) + \mathcal{H}_p(2) \geq \mathcal{H}_p(12). \tag{77}$$

The inequalities for the representation of matrix elements of the $SU(2)$-group

In this section we deal with the $SU(2)$-group which has the following properties

$$SU(2) = \left\{ u = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1, \right\},$$

where $\det u = 1$, $a, b \in \mathbf{C}$ and the overline denotes complex conjugation. The complex numbers a, b can be represented using the Euler angels (φ, θ, ψ), $-\pi \leq \varphi \leq \pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \psi \leq 4\pi$.

From the representation theory it is known that the $SU(2)$-group is generated by $J^i = \sigma^i/2$, $i \in \{1, 2, 3\}$. Hence, for the matrix elements of the $SU(2)$ the following parametrization can be used $u = e^{i\psi J^1} e^{i\theta J^2} e^{i\varphi J^2}$. For the latter parametrization the associated D-function of the $SU(2)$ reduces to the Wigner d-function

$$D^j_{m'm}(u) \;=\; e^{im'\psi} d^{(j)}_{m',m}(\theta) e^{im\varphi}.$$

It is known that the unitary irreducible representations of the rotation group with spins (or $SU(2)$ group) are expressed in terms of Jacobi polynomials [1, 23]. The squared modules of the matrix elements are determined by

$$\left| d^{(j)}_{m',m}(\theta) \right|^2 \;=\; S^{(j)}_{m',m}(\theta) \left(P^{(j)}_{m',m}(\theta) \right)^2, \tag{78}$$

where the following notation

$$S^{(j)}_{m',m}(\theta) = \frac{(j+m')!(j-m')!}{(j+m)!(j-m)!}\cos(\theta/2)^{2(m'+m)}\sin(\theta/2)^{2(m'-m)},$$

is used. $P^{(j)}_{m',m}(\theta) \equiv P^{(m'-m,m'+m)}_{j-m'}(\cos\theta)$ denotes the Jacobi polynomials

$$P^{(a,b)}_n(z) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-z)^{-a}(1+z)^{-b}\frac{d^n}{dz^n}(1-z)^{a+n}(1+z)^{b+n}.$$

The following relations

$$\begin{aligned}
d^{(j)}_{m',m}(\theta) &= d^{(j)}_{m',m}(\theta), \quad m'+m \geq 0, m'-m \geq 0, \\
d^{(j)}_{m',m}(\theta) &= d^{(j)}_{-m,-m'}(\theta), \quad m'+m \leq 0, m'-m \geq 0, \\
d^{(j)}_{m',m}(\theta) &= (-1)^{m'-m} d^{(j)}_{m,m'}(\theta), \quad m'+m \geq 0, m'-m \leq 0, \\
d^{(j)}_{m',m}(\theta) &= (-1)^{m'-m} d^{(j)}_{-m',-m}(\theta), \quad m'+m \leq 0, m'-m \leq 0.
\end{aligned} \tag{79}$$

hold [14]. We shall apply the inequalities for probabilities expressed in terms of Shannon entropies [24] to the matrix elements (78). The point is that one has $\left|d^{(j)}_{m'm}(\theta)\right|^2 \geq 0$ and $\sum_{m'=-j}^{j}\left|d^{(j)}_{m',m}(\theta)\right|^2 = \sum_{m=-j}^{j}\left|d^{(j)}_{m',m}(\theta)\right|^2 = 1$. Thus, the values $\left|d^{(j)}_{m'm}(\theta)\right|^2$ can be considered as probabilities. We denote these probabilities as $p^{(j)}_{m'm}(\theta) = \left|d^{(j)}_{m',m}(\theta)\right|^2$. We shall use the map of numbers m' and m onto the numbers $1, 2, \ldots, N$, $N = 2j+1$ using the following rule $-j \Rightarrow 1, \quad -j+1 \Rightarrow 2, \quad \ldots, \quad j \Rightarrow N$. Thus, we can study the relation which can be obtained by considering the probability vector $\overrightarrow{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_N)$, where $\sum_{k=1}^{N} p_k = 1$, $p_k \geq 0$ hold. Hence, similarly to Sec. we can denote the probabilities as $\widetilde{m}_{ik}$, $i, k \in \{1, 2, \ldots N\}$. Fixing the index k and mapping the index i onto pairs $(\alpha(i), \beta(i))$ as in (73) or (74) we can write the entropy (75) of the whole system in terms of $\widetilde{m}_{ik} \equiv \widetilde{p}^{(k)}_{\alpha(i),\xi(i)}$, i.e.

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{H}}_m(12) = -\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\xi=1}^{N/2((N+1)/2)} \widetilde{p}^{(k)}_{\alpha(i),\xi(i)} \ln \widetilde{p}^{(k)}_{\alpha(i),\xi(i)} \\
= -\sum_{i=1}^{N(N+1)} \widetilde{m}_{ik} \ln \widetilde{m}_{ik} = -\sum_{m'=-j}^{j}\left|d^{(j)}_{m',m}(\theta)\right|^2 \ln\left|d^{(j)}_{m',m}(\theta)\right|^2.
\end{aligned}$$

Analogically, the partial entropies $\mathcal{H}_p(1)$ and $\mathcal{H}_p(2)$ can be written as

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{H}}_m(1) = -\sum_{m'=-j}^{-\frac{1}{2}(0)}\left(\left|d^{(j)}_{m'm}(\theta)\right|^2 + \left|d^{(j)}_{m'+\frac{N}{2},m}(\theta)\right|^2\right) \\
\ln\left(\left|d^{(j)}_{m'm}(\theta)\right|^2 + \left|d^{(j)}_{m'+\frac{N}{2},m}(\theta)\right|^2\right),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{H}}_m(2) = &-\sum_{m'=-j}^{-\frac{1}{2}(0)} \left|d^{(j)}_{m',m}(\theta)\right|^2 \ln\left(\sum_{m'=-j}^{-\frac{1}{2}(0)} \left|d^{(j)}_{m',m}(\theta)\right|^2\right)\\
&- \sum_{m'=\frac{1}{2}(1)}^{j} \left|d^{(j)}_{m',m}(\theta)\right|^2 \ln\left(\sum_{m'=\frac{1}{2}(1)}^{j} \left|d^{(j)}_{m',m}(\theta)\right|^2\right).
\end{aligned}
$$

The subadditivity condition (77) for the matrix from the $SU(2)$-group is the following

$$
\begin{aligned}
- & \sum_{m'=-j}^{-\frac{1}{2}(0)} \left(S^{(j)}_{m',m}(\theta)P^{(j)}_{m',m}(\theta)^2 + S^{(j)}_{m'+\frac{N}{2},m}(\theta)P^{(j)}_{m'+\frac{N}{2},m}(\theta)^2\right)\\
\cdot & \ln\left(S^{(j)}_{m',m}(\theta)P^{(j)}_{m',m}(\theta)^2 + S^{(j)}_{m'+\frac{N}{2},m}(\theta)P^{(j)}_{m'+\frac{N}{2},m}(\theta)^2\right) -
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& -\sum_{m'=-j}^{-\frac{1}{2}(0)} S^{(j)}_{m',m}(\theta)P^{(j)}_{m',m}(\theta)^2 \ln\left(\sum_{m'=-j}^{-\frac{1}{2}(0)} S^{(j)}_{m',m}(\theta)P^{(j)}_{m',m}(\theta)^2\right)\\
& - \sum_{m'=\frac{1}{2}(1)}^{j} S^{(j)}_{m',m}(\theta)P^{(j)}_{m',m}(\theta)^2 \ln\left(\sum_{m'=\frac{1}{2}(1)}^{j} S^{(j)}_{m',m}(\theta)P^{(j)}_{m',m}(\theta)^2\right)\\
\geq & \ -\sum_{m'=-j}^{j} S^{(j)}_{m',m}(\theta)P^{(j)}_{m',m}(\theta)^2 \left(\ln\left(S^{(j)}_{m',m}(\theta)P^{(j)}_{m',m}(\theta)^2\right)\right).
\end{aligned}
$$

The resulted inequality can be interpreted as the new inequality for the Jacoby polynomials.

Examples of systems with spins $j = 3/2$ and $j = 2$

Let us consider the state with the spin $j = 3/2$. As an example we take $m = 3/2$. Hence, the partial entropies are determined by

$$
\widetilde{\mathcal{H}}_{3/2}(12) = -\sum_{t=1}^{4}(p_t(\theta)\ln(p_t(\theta)),
$$

$$
\begin{aligned}
& \widetilde{\mathcal{H}}_{3/2}(1) = -((p_3(\theta)+p_1(\theta))\ln((p_3(\theta)+p_1(\theta))) + (p_4(\theta)+p_1(\theta))\\
& \cdot \ln((p_4(\theta)+p_1(\theta))) + (p_3(\theta)+p_2(\theta))\ln((p_3(\theta)+p_2(\theta)))\\
+ \quad & (p_4(\theta)+p_2(\theta))\ln((p_4(\theta)+p_2(\theta)))),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \widetilde{\mathcal{H}}_{3/2}(2) = -((p_3(\theta)+p_4(\theta))\ln((p_3(\theta)+p_4(\theta)))\\
+ \quad & (p_2(\theta)+p_1(\theta))\ln((p_2(\theta)+p_1(\theta)))),
\end{aligned}
$$

where we denote

$$
\begin{aligned}
p_1(\theta) &= (\cos\theta+1)^3/8, \quad p_2(\theta) = 3\sin^2(\theta/2)(\sin^2(\theta/2)-1)^2,\\
p_3(\theta) &= 3(\cos\theta-1)^2(\cos\theta+1)/8, \quad p_4(\theta) = -(\cos\theta-1)^3/8.
\end{aligned}
$$

Then we obtain the subadditivity condition (80).

Analogically, for the state with the spin $j = 2$ and $m = 2$ we can write the partial entropies as

$$\widetilde{\mathcal{H}}_2(12) = -\sum_{i=1}^{5}(t_i(\theta)\ln(t_i(\theta)),$$

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\mathcal{H}}_2(1) = -((t_1(\theta)+t_5(\theta))\ln((t_1(\theta)+t_5(\theta))) + (t_2(\theta)+t_5(\theta)) \\
&\cdot\ln(t_2(\theta)+t_5(\theta))) + (t_1(\theta)+t_4(\theta))\ln(t_1(\theta)+t_4(\theta))) \\
+\ &(t_1(\theta)+t_3(\theta))\ln(t_1(\theta)+t_3(\theta)) + (t_2(\theta)+t_3(\theta))\ln(t_2(\theta)+t_3(\theta))) \\
+\ &(t_2(\theta)+t_4(\theta))\ln(t_2(\theta)+t_4(\theta)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{H}}_2(2) &= -((t_2(\theta)+t_1(\theta))\ln((t_2(\theta)+t_1(\theta))) \\
&+ (t_1(\theta)+t_4(\theta)+t_5(\theta))\ln(t_1(\theta)+t_4(\theta)+t_5(\theta))),
\end{aligned}$$

where we denote

$$\begin{aligned}
t_1(\theta) &= (\cos\theta+1)^4/16 \quad t_2(\theta) = 4\cos(\theta/2)^6(1-\cos(\theta/2)^2), \\
t_3(\theta) &= 3\sin\theta^4/8, \quad t_4(\theta) = 4\sin(\theta/2)^6(1-\sin(\theta/2)^2), \\
t_5(\theta) &= (\cos\theta-1)^4/16.
\end{aligned}$$

Hence, we can write the subadditivity condition (80) for the system with the spin $j = 2$. The obtained results for various angles β are shown in Fig. 0.4 and 0.5. The sum of the entropies $\widetilde{\mathcal{H}}_m(1)$, $\widetilde{\mathcal{H}}_m(2)$ is shown by the black lines and the entropy of the whole system $\widetilde{\mathcal{H}}_m(12)$ by the dotted lines.

Needless to say that the sum of the partial entropies is higher than the entropy of the whole system. The equality is reached only in the points $\beta = \{0, \pi, 2\pi\}$.

Examples of other invertible mappings and entropies

Using various invertible mappings we can get many inequalities for the special functions. To this end, let us introduce the following mapping

$$\begin{aligned}
&1 \Leftrightarrow 11, \quad 2 \Leftrightarrow 12, \qquad \ldots, \quad N_1 \Leftrightarrow N_1 1, \\
&N_1+1 \Leftrightarrow 21, \quad \ldots, \quad N \Leftrightarrow N_1 N_2.
\end{aligned}$$

It means that we use the invertible map of natural numbers $1, 2, \ldots, N$ onto pairs of integers (i, k), $i \in \{1, 2, \ldots, N_1\}$, $k \in \{1, 2, \ldots, N_2\}$. Therefore, using the latter indices we can write the Shannon entropies as following

$$\mathcal{H}_p(12) = -\sum_{\alpha=1}^{N_1}\sum_{\xi=1}^{N_2} p^{(k)}_{\alpha(i),\xi(i)} \ln p^{(k)}_{\alpha(i),\xi(i)}, \tag{80}$$

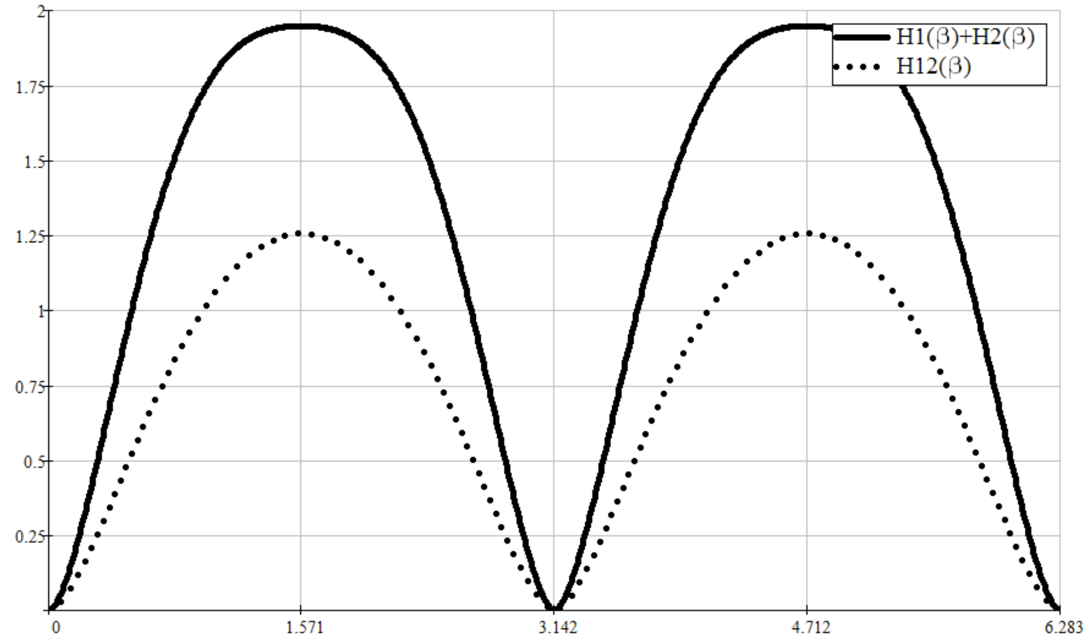

Figure 0.4: The left hand side (black line) and the right hand side (dotted line) of the subadditivity condition (80) for the system with the spin $j = 3/2$.

$$\mathcal{H}_p(1) \quad = \quad -\sum_{\xi=1}^{N_2} p^{(k)}_{\xi(i)}(1)\ln p^{(k)}_{\xi(i)}(1), \quad \mathcal{H}_p(2) = -\sum_{\alpha=1}^{N_1} p^{(k)}_{\alpha(i)}(2)\ln p^{(k)}_{\alpha(i)}(2).$$

Needless to say that the latter entropies satisfy the subadditivity condition. Hence, similarly to Sec. we can use it to write the new inequalities for the special functions.

In [21, 22] the following mapping has been introduced. The probability vector p introduced in Sec. with the components p_i, $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$, is mapped onto the table of numbers with three indices Π_{kjl}, $k \in \{1, 2, \ldots, N_1\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, N_2\}$, $l \in \{1, 2, \ldots, N_3\}$. Hence, we can consider that the system has three subsystems with the three random variables and the joint probability distribution describing the results of measurement of the random variables is related to the nonnegative numbers. The nonnegative numbers determine the marginal probability distributions. Hence, we can do the same procedure as in Sec. and write the new inequalities for the special functions.

However, instead of using the Shannon entropy we can select other entropies, for example the q-deformed entropies like Tsallis and Rényi [25, 26]

$$S_q^T \quad = \quad \left(\sum_{i=1}^{\infty} p_i^q - 1\right)/(1-q), \quad S_q^R = \ln\left(\sum_{i=1}^{\infty} p_i^q\right)/(1-q).$$

These entropies being functions of an extra parameter contain more detailed information on properties of density matrices of the qudit states and the qudit subsystem states. The Tsallis entropy of the bipartite qudit system was shown to satisfy the

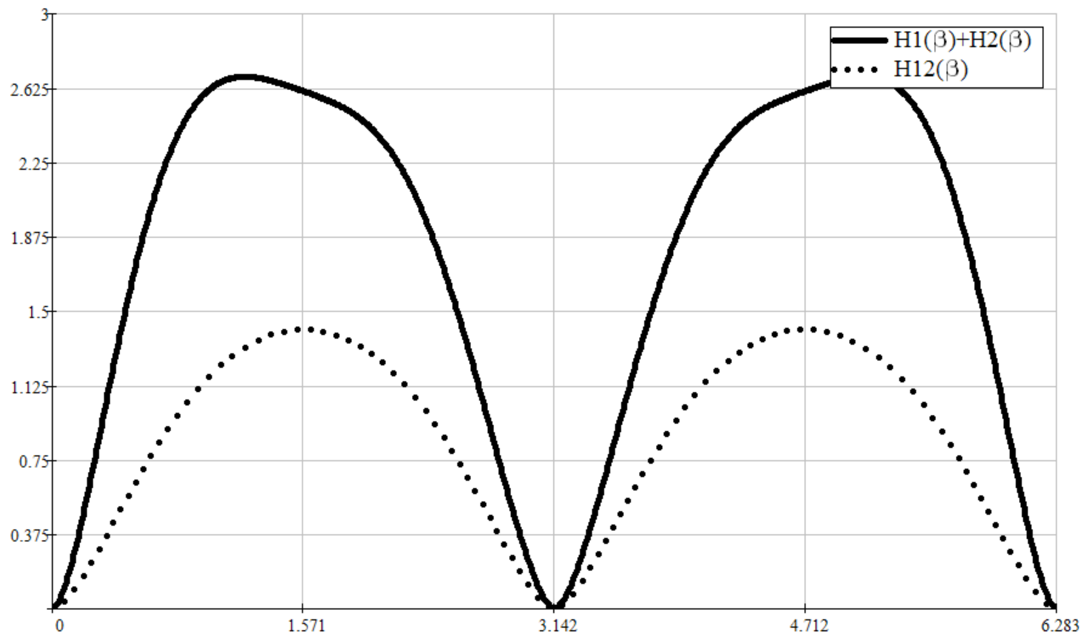

Figure 0.5: The left hand side (black line) and the right hand side (dotted line) of the subadditivity condition (80) for the system with the spin $j = 2$.

generalized subadditivity condition [27,28]. This condition is the inequality available for Tsallis entropy of the bipartite system state and Tsallis entropies of two subsystem states.

We can write the Tsallis entropies for the mapping obtained in Sec.

$$S_q^T(1,2) \;\;=\;\; \left(\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\xi=1}^{\frac{N}{2}(\frac{N+1}{2})}\left(p^{(k)}_{\alpha(i),\xi(i)}\right)^q - 1\right)/(1-q),$$

$$S_q^T(1) = \frac{\left(\sum_{\xi=1}^{\frac{N}{2}(\frac{N+1}{2})}\left(p^{(k)}_{\xi(i)}(1)\right)^q - 1\right)}{1-q}, S_q^T(2) = \frac{\left(\sum_{\alpha=1}^{2}\left(p^{(k)}_{\alpha(i)}(2)\right)^q - 1\right)}{1-q}.$$

Next, using the subadditivity of the Tsallis entropy we can write

$$\sum_{\xi=1}^{\frac{N}{2}(\frac{N+1}{2})}\left(p^{(k)}_{\xi(i)}(1)\right)^q + \sum_{\alpha=1}^{2}\left(p^{(k)}_{\alpha(i)}(2)\right)^q - 1 \geq \sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\xi=1}^{\frac{N}{2}(\frac{N+1}{2})}\left(p^{(k)}_{\alpha(i),\xi(i)}\right)^q.$$

Substituting the polynomial (78) in the latter inequality we obtain the new inequality for the Jacoby polynomials

$$\sum_{m'=-j}^{-\frac{1}{2}(0)} \left(S^{(j)}_{m',m}(\theta) \left(P^{(j)}_{m',m}(\theta)\right)^2 + S^{(j)}_{m'+\frac{N}{2},m}(\theta) \left(P^{(j)}_{m'+\frac{N}{2},m}(\theta)\right)^2 \right)^q$$
$$+ \sum_{m'=-j}^{-\frac{1}{2}(0)} \left(S^{(j)}_{m',m}(\theta) \left(P^{(j)}_{m',m}(\theta)\right)^2 \right)^q + \sum_{m'=\frac{1}{2}(1)}^{j} \left(S^{(j)}_{m',m}(\theta) \left(P^{(j)}_{m',m}(\theta)\right)^2 \right)^q \geq$$
$$\geq \sum_{m'=-j}^{j} \left(S^{(j)}_{m',m}(\theta) \left(P^{(j)}_{m',m}(\theta)\right)^2 \right)^q .$$

Needless to say that we can write the variety of such inequalities using various mappings and entropies.

The invertible mapping for the irreducible unitary representations of the $SU(1,1)$-groups

Let us consider the infinite sets of numbers $m', m \in \{-j, -j+1, -j+2, \ldots\}$, $m', m \in \{j, j-1, j-2, \ldots\}$, $m', m \in \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ or $m', m \in \{\pm 1/2, \pm 3/2, \ldots\}$. We shall use the map of the numbers m' and m onto the numbers $1, 2, \ldots$ using the following rules

$$-j \Rightarrow 1, \quad -j+1 \Rightarrow 2, \quad -j+2 \Rightarrow 3, \ldots$$
$$j \Rightarrow 1, \quad j-1 \Rightarrow 2, \quad j-2 \Rightarrow 3, \ldots,$$

$$0 \Rightarrow 1, \quad 1 \Rightarrow 2, \quad -1 \Rightarrow 3, \quad 2 \Rightarrow 4, \quad -2 \Rightarrow 5, \quad 3 \Rightarrow 6, \quad \ldots,$$
$$-1/2 \Rightarrow 1, \quad 1/2 \Rightarrow 2, \quad -3/2 \Rightarrow 3, \quad 3/2 \Rightarrow 4, -5/2 \Rightarrow 5, \quad 5/2 \Rightarrow 6, \ldots.$$

Thus, we can consider the probability vector $\overrightarrow{p} = (p_1, p_2, p_3, \ldots)$, where $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$, $p_k \geq 0$ hold.

Let us introduce the diagonal matrix ρ_{12} with the elements $p^{(m)}_{m'}$

$$\rho_{12} = \begin{pmatrix} p_1^{(m)} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & p_2^{(m)} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & p_3^{(m)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Let us partition the latter matrix into block matrices of the size 2×2. Hence, we can construct two new matrices using the following rules

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} p_1^{(m)} + p_2^{(m)} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & p_3^{(m)} + p_4^{(m)} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & p_5^{(m)} + p_6^{(m)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$\rho_2 = \begin{pmatrix} p_1^{(m)} & 0 \\ 0 & p_2^{(m)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_3^{(m)} & 0 \\ 0 & p_4^{(m)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_5^{(m)} & 0 \\ 0 & p_6^{(m)} \end{pmatrix} + \dots$$
$$= \begin{pmatrix} p_1^{(m)} + p_3^{(m)} + p_5^{(m)} + \dots & 0 \\ 0 & p_2^{(m)} + p_4^{(m)} + p_6^{(m)} \dots \end{pmatrix}.$$

Hence, the Shannon entropy can be written as

$$\mathcal{H}(12) = -\sum_{k=1}^{\infty} p_k^{(m)} \ln p_k^{(m)}.$$

The Shannon entropies for the subsystems are the following

$$\mathcal{H}(1) = -\sum_{k=0}^{\infty} (p_{2k+1}^{(m)} + p_{2k+2}^{(m)}) \ln(p_{2k+1}^{(m)} + p_{2k+2}^{(m)}),$$

$$\mathcal{H}(2) = -\left(\sum_{k=0}^{\infty} p_{2k+1}^{(m)}\right) \ln \left(\sum_{k=0}^{\infty} p_{2k+1}^{(m)}\right) - \left(\sum_{k=0}^{\infty} p_{2k}^{(m)}\right) \ln \left(\sum_{k=0}^{\infty} p_{2k}^{(m)}\right).$$

What's more, we can write the subadditivity condition as

$$\begin{aligned} &- \sum_{k=0}^{\infty} (p_{2k+1}^{(m)} + p_{2k+2}^{(m)}) \ln(p_{2k+1}^{(m)} + p_{2k+2}^{(m)}) - \left(\sum_{k=0}^{\infty} p_{2k+1}^{(m)}\right) \ln \left(\sum_{k=0}^{\infty} p_{2k+1}^{(m)}\right) \\ &- \left(\sum_{k=0}^{\infty} p_{2k}^{(m)}\right) \ln \left(\sum_{k=0}^{\infty} p_{2k}^{(m)}\right) \geq -\sum_{k=1}^{\infty} p_k^{(m)} \ln p_k^{(m)}. \end{aligned} \tag{81}$$

The inequalities for the representation of matrix elements of the $SU(1,1)$-group

Let us consider the $SU(1,1)$-group which has a representation as the group of complex matrices

$$SU(1,1) = \left\{ u = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad |a|^2 - |b|^2 = 1, \right\},$$

where $\det u = 1$, $a, b \in \mathbf{C}$. The $SU(1,1)$ is generated by J^3, K^1, K^2, $K^i = i\sigma^i/2$, $i \in \{1,2,3\}$. Unitary irreps of $SU(1,1)$ have two classes, the discrete and the continuous series. For the discrete series the spin $j = -k/2$, $k \in N$ and the states $|jm>$ have the eigenvalues $m \in \{-j, -j+1, -j+2, \dots\}$ and $m \in \{j, j-1, j-2, \dots\}$. For the continuous series the spin is $j = -1/2 + is$, $0 < s < \infty$ and $m \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ or $m \in \{\pm 1/2, \pm 3/2, \dots\}$.

If we consider the case of $SU(1,1)$ elements parameterized as in [29]

$$u = e^{i\psi J^3} e^{itK^2} e^{i\varphi J^3},$$
$$0 \le \psi \le 4\pi, \quad 0 \le t < \infty, \quad -\pi \le \varphi \le \pi.$$

For both the discrete and continuous series the D-function is

$$D^j_{m'm}(v) \quad = \quad e^{im'\psi} b^{(j)}_{m',m}(t) e^{im\varphi},$$

where $b^{(j)}_{m',m}(t)$ is the Bargmann b-function [30], the analog of the Wigner d-function (78) in the group $SU(1,1)$. It is connected with the d-function as follows

$$b^j_{m'm}(t) \quad = \quad \sqrt{(-1)^{m'-m}} d^j_{m'm}(it). \tag{82}$$

For the case when $m' + m \geq 0$, $m' - m \geq 0$ the explicit form of the latter is

$$b^j_{m'm}(t) \quad = \quad N^j_{m'm} F^j_{m'm}(z(it)), \tag{83}$$

where $z(it) = (1 - \cos it)/2$, the normalization factor is

$$N^j_{m'm} \quad = \quad \left(\frac{\Gamma(m'+j+1)\Gamma(m'-j)}{\Gamma(m+j+1)\Gamma(m-j)} \right)^{1/2}$$

and

$$\begin{aligned} & F^j_{m'm}(z(it)) = (1 - z(it))^{(m'+m)/2} z(it)^{(m'-m)/2} \\ \cdot \quad & {}_2F_1(-j + m', j + m' + 1, m' - m + 1; z(it)) \end{aligned}$$

where ${}_2F_1$ denotes the Gauss' hypergeometric function with $F^j_{m'm}(z(it)) = F^{-j-1}_{m'm}(z(it))$. For the other three variants of m', m we use (79).

Let us consider the class of $SU(1,1)$ elements parameterized as in [29, 31]

$$u = e^{i\psi J^3} e^{itK^2} e^{irK^1}, 0 \leq \psi \leq 4\pi, 0 \leq t, r < \infty.$$

In this mixed basis the left state belongs to the discrete basis ($m' \in \{-j, -j+1, -j+2, \ldots\}$ or $m' \in \{j, j-1, j-2, \ldots\}$) and the right state to the continuous basis. The D-function is the following

$$D^j_{m'm}(v) \quad = \quad e^{im'\varphi} c^{(j)}_{m'm}(t) e^{imr}.$$

The function $c^{(j)}_{m'm}(t)$ is

$$\begin{aligned} c^{(j)}_{m'm}(t) \quad &= \quad N^j_{m'm} F^j_{-m',-im}(z(-t)), \quad m' \geq -j, \\ c^{(j)}_{m'm}(t) \quad &= \quad g^{(j)}_{-m'm}(-t), \quad m' \leq j, \end{aligned}$$

where $z(t) = (1 - i \sinh t)/2$ and

$$N_{m'm} \quad = \quad \sqrt{2} 2^{-j-2} S^j_{m'} R^j_{m'm}/\pi,$$

$$S^j_{m'} \quad = \quad \sqrt{\Gamma(m'-j)\Gamma(m'+j+1)}/\Gamma(m'+j+1),$$

$$R^j_{m'm} = \frac{\Gamma(j+1+im)\Gamma(\frac{-j-im}{2})\Gamma(\frac{-j+1+im}{2})}{\Gamma(m'-j)\Gamma(-m'+1+im)}.$$

For the continuous series the D-function is

$$D^j_{m'm\sigma}(v) = e^{im'\varphi} l^{(j)}_{m'm\sigma}(t) e^{imr},$$

where

$$l^{(j)}_{m'm\sigma}(t) = S^j_{m'} \left(T^j_{m'm\sigma} F^j_{m',-im}(z(t)) - (-1)^\sigma T^j_{-m'm\sigma} F^j_{-m',-im}(z(-t)) \right). \quad (84)$$

The following notation is used

$$T^j_{m'm\sigma} = \frac{2^{j-1}}{i^\sigma \sin(\pi(-j+\sigma-im)/2)} \frac{\Gamma(-j+im)}{\Gamma(-m'-j)\Gamma(m'+1+im)}.$$

Using the results obtained in Sec. let us write the new inequalities for the Gauss' hypergeometric function. Hereafter, the unitary matrix U with the matrix elements $u^j_{m'm}$ is from the group $SU(1,1)$. If the series is discrete positive the indexes are $m' \in \{-j, -j+1, -j+2, \ldots\}$ and using (81) we can write

$$\begin{aligned}
&- \sum_{m'=-j+2i+1}^{\infty} (|u_{m',m}|^2 + |u_{m'+1,m}|^2) \ln(|u_{m',m}|^2 + |u_{m'+1,m}|^2) \qquad (85)\\
&- \left(\sum_{m'=-j+2t}^{\infty} |u_{m',m}|^2 \right) \ln \left(\sum_{m'=-j+2t}^{\infty} |u_{m',m}|^2 \right)\\
&- \left(\sum_{m'=-j+2i+1}^{\infty} |u_{m',m}|^2 \right) \ln \left(\sum_{m'=-j+2i+1}^{\infty} |u_{m',m}|^2 \right) \geq\\
&\geq - \sum_{m'=-j}^{\infty} |u_{m',m}|^2 \ln |u_{m',m}|^2
\end{aligned}$$

and for the discrete negative series the indexes are $m' \in \{j, j-1, j-2, \ldots\}$ and the inequality is

$$\begin{aligned}
&- \sum_{m'=j-2i-1}^{\infty} (|u_{m',m}|^2 + |u_{m'+1,m}|^2) \ln(|u_{m',m}|^2 + |u_{m'+1,m}|^2)\\
&- \left(\sum_{m'=j-2t}^{\infty} |u_{m',m}|^2 \right) \ln \left(\sum_{m'=j-2t}^{\infty} |u_{m',m}|^2 \right)\\
&- \left(\sum_{m'=j-2i-1}^{\infty} |u_{m',m}|^2 \right) \ln \left(\sum_{m'=j-2i-1}^{\infty} |u_{m',m}|^2 \right) \geq\\
&\geq - \sum_{m'=j}^{-\infty} |u_{m',m}|^2 \ln |u_{m',m}|^2,
\end{aligned}$$

where instead of $u^j_{m'm}$ we must substitute (82) and (84). For example, if the series is discrete negative and the matrix elements are defined in (83) we can write the following inequality for the Gauss' hypergeometric function

$$\begin{aligned}
- & \sum_{m'=-j+2i+1}^{\infty} (|N^j_{m'm}F^j_{m'm}(z)|^2 + |N^j_{m'+1m}F^j_{m'+1,m}(z)|^2) \\
\cdot & \ln(|N^j_{m'm}F^j_{m'm}(z)|^2 + |N^j_{m'+1,m}F^j_{m'+1,m}(z)|^2) \\
- & \left(\sum_{m'=-j+2t}^{\infty} |N^j_{m'm}F^j_{m'm}(z)|^2\right) \ln\left(\sum_{m'=-j+2t}^{\infty} |N^j_{m'm}F^j_{m'm}(z)|^2\right) \\
- & \left(\sum_{m'=-j+2i+1}^{\infty} |N^j_{m'm}F^j_{m'm}(z)|^2\right) \ln\left(\sum_{m'=-j+2i+1}^{\infty} |N^j_{m'm}F^j_{m'm}(z)|^2\right) \geq \\
\geq & -\sum_{m'=-j}^{\infty} |N^j_{m'm}F^j_{m'm}(z)|^2 \ln |N^j_{m'm}F^j_{m'm}(z)|^2.
\end{aligned}$$

For the continuous series the matrix elements are defined in (84) and the inequalities are

$$\begin{aligned}
- & \sum_{m'=0}^{-\infty} (|l^{(j)}_{m'm\sigma}(t)|^2 + |l^{(j)}_{m'+1,m\sigma}(t)|^2) \ln(|l^{(j)}_{m'm\sigma}(t)|^2 + |l^{(j)}_{m'+1,m\sigma}(t)|^2) \\
- & \left(\sum_{m'=0}^{-\infty} |l^{(j)}_{m'm\sigma}(t)|^2\right) \ln\left(\sum_{m'=0}^{-\infty} |l^{(j)}_{m'm\sigma}(t)|^2\right) \\
- & \left(\sum_{m'=1}^{\infty} |l^{(j)}_{m'm\sigma}(t)|^2\right) \ln\left(\sum_{m'=1}^{\infty} |l^{(j)}_{m'm\sigma}(t)|^2\right) \geq \\
\geq & -\sum_{m'=-\infty}^{\infty} |l^{(j)}_{m'm\sigma}(t)|^2 \ln |l^{(j)}_{m'm\sigma}(t)|^2
\end{aligned}$$

for the indexes $m' \in \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ and

$$\begin{aligned}
- & \sum_{m'=-\frac{1}{2}}^{-\infty} (|l^{(j)}_{m'm\sigma}(t)|^2 + |l^{(j)}_{m'+1,m\sigma}(t)|^2) \ln(|l^{(j)}_{m'm\sigma}(t)|^2 + |l^{(j)}_{m'+1,m\sigma}(t)|^2) \\
- & \left(\sum_{m'=-\frac{1}{2}}^{-\infty} |l^{(j)}_{m'm\sigma}(t)|^2\right) \ln\left(\sum_{m'=0}^{-\infty} |l^{(j)}_{m'm\sigma}(t)|^2\right) \\
- & \left(\sum_{m'=\frac{1}{2}}^{\infty} |l^{(j)}_{m'm\sigma}(t)|^2\right) \ln\left(\sum_{m'=\frac{1}{2}}^{\infty} |l^{(j)}_{m'm\sigma}(t)|^2\right) \geq \\
\geq & -\sum_{m'=-\infty}^{\infty} |l^{(j)}_{m'm\sigma}(t)|^2 \ln |l^{(j)}_{m'm\sigma}(t)|^2
\end{aligned}$$

for the indexes $m' \in \{\pm 1/2, \pm 3/2, \ldots\}$.If we substitute their the polynomials (84) we also can get the new inequalities for the Gauss' hypergeometric functions.

Summary

To conclude we point out the main results of the work. Considering the matrix elements of the unitary irreducible representations of the groups $SU(2)$ and $SU(1,1)$ and applying known subadditivity condition for joint probability distributions constructed from these matrix elements we obtained new inequalities for the Jacobi and the Gauss' hypergeometric polynomials. The inequalities correspond to entropic inequalities for Shannon entropies of bipartite classical systems. The results are illustrated by the examples of the systems with the spins $j = 3/2$ and $j = 2$, where the Shannon information of the bipartite system is expressed in terms of the polynomials. It is shown that using another mappings and entropies, i.e. Tsallis entropy, many other inequalities for the special functions can be written.

Acknowledgements

The research in sections 3 and 4 by Markovich L.A. was partly supported by the Russian Foundation for Basic Research, grant 14-50-00150

Bibliography

[1] N. J. Vilenkin, A. U. Klimyk, Representation of Lie Groups and Special Functions: Recent Advances (Mathematics and Its Applications), Springer, 1994.

[2] N. A. Gromov, V. I. Manko, The jordan-schwinger representations of cayley-klein groups. i. the orthogonal groups, J. Math. Phys. 31 (1990) 1054.

[3] N. A. Gromov, V. I. Manko, The jordan-schwinger representations of cayley-klein groups. ii. the unitary groups, J. Math. Phys. 31 (1990) 1054.

[4] N. A. Gromov, V. I. Manko, The jordan-schwinger representations of cayley-klein groups. iii. the symplectic groups, J. Math. Phys. 31 (1990) 1060.

[5] A. Malkin, V. I. Man'ko, D. A. Trifonov, J. Math. Phys. 14 (1973) 576–582.

[6] R. B. Nelsen, An Introduction to Copulas, Springer, 2006.

[7] E. H. Lieb, M. B. Ruskai, Proof of the strong subadditivity of quantum mechanical entropy, J. Math. Phys. 14 (1973) 1938–1941.

[8] V. N. Chernega, V. I. Man'ko, J. Russ. Laser Res. 29 (2008) 505.

[9] M. A. Man'ko, V. I. Man'ko, R. V. Mendes, J. Russ. Laser Res. 27 (2006) 507.

[10] V. I. Man'ko, L. A. Markovich, New inequalities for quantum von neumann and tomographic mutual information, J. Russ. Laser Res. 35(4) (2014) 355–361.

[11] V. I. Man'ko, L. A. Markovich, Entropic inequalities and properties of some special functions, J. Russ. Laser Res. 35(2) (2014) 200–210.

[12] N. M. Atakishiyev, Fourier-gauss transforms of some q-special functions, CRM Proceedings and Lecture Notes (Providence, RI: American Mathematical Society) 25 (2000) 13–21.

[13] N. M. Atakishiyev, J. P. Rueda, K. B. Wol, On q-extended eigenvectors of the integral and finite fourier transforms, J. Phys. A: Math. Theor. 40 (2007) 1–7.

[14] G. E. Andrews, R. Askey, R. Roy, Special functions, Cambridge: Cambridge University Press.

[15] G. Gasper, M. Rahman, Basic hypergeometric series 2nd edn, Cambridge: Cambridge University Press.

[16] S. M. Khoroshkin, I. I. Pop, M. E. Samsonov, A. A. Stolin, V. N. Tolstoy, On some lie bialgebra structures on polynomial algebras and their quantization, Communications in Mathematical Physics 282(3) (2008) 625–662.

[17] R. M. Asherova, V. A. Knyr, Y. F. Smirnov, V. N. Tolstoi, Some group-theory aspects of the method of generalized hyperspherical functions, Yad. Fiz. 21(5) (1975) 1126–1134.

[18] Y. F. Smirnov, S. K. Suslov, A. M. Shirokov, Clebsch-gordan coefficients and racah coefficients for the $su(2)$ and $su(1,1)$ groups as the discrete analogues of the poschl-teller potential wavefunctions, J. Phys.A 17(11) (1984) 2157.

[19] A. F. Nikiforov, S. K. Suslov, V. B. Uvarov, Orthogonal Polynomials in Discrete Variables, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[20] A. F. Nikiforov, V. B. Uvarov, Classical orthogonal polynomials in a discrete variable on non-uniform lattices, Preprint Inst. Prikl. Mat. M. V. Keldysh Akad. Nauk SSSR (In Russian), 17, Moscow, 1983.

[21] V. N. Chernega, O. V. Man'ko, V. I. Man'ko, Generalized qubit portrait of the qutrit-state density matrix, J. Russ. Laser Res. 34(4) (2013) 383–387.

[22] M. A. Man'ko, V. I. Man'ko, The quantum strong subadditivity condition for systems without subsystems, Physica Scripta T160.

[23] L. D. Landau, E. Lifshitz, Butterworth-Heinemann, Springer, 1977.

[24] C. E. Shannon, A mathematical theory of communication, Bell System Technical Journal 27 (1948) 379.

[25] A. Rényi, Probability Theory, North-Holland, Amsterdam, 1970.

[26] C. Tsallis, Possible generalization of boltzmann-gibbs statistics, J. Stat. Phys. 52 (1988) 479.

[27] K. M. R. Audenaert, Subadditivity of q-entropies for $q > 1$, J. Math. Phys. 48 (2007) 083507.

[28] D. Petz, D. L. Virosztek, Some inequalities for quantum tsallis entropy related to the strong subadditivity, arXiv:1403.7062.

[29] F. Conrady, J. Hnybida, Unitary irreducible representations of $sl(2,c)$ in discrete and continuous $su(1,1)$ bases, J.Math.Phys. 52 (2011) 012501.

[30] V. Bargmann, Irreducible unitary representations of the lorentz group, Annals Math. 48 (1947) 568.

[31] G. Lindblad, Eigenfunction expansions associated with unitary irreducible representations of $su(1,1)$, Phys.Scripta 1 (1970) 201.

Конечно-аддитивные меры на банаховых пространствах, инвариантные относительно сдвигов

В. Ж. Сакбаев[1]

Аннотация

Изучаются меры на банаховых пространствах числовых последовательностей l_p, $1 \leq p \leq \infty$, инвариантные относительно сдвигов на произвольные векторы из рассматриваемого банахова пространства. Согласно теореме А. Вейля не существует меры Лебега на бесконечномерном банаховом пространстве. В статье исследован ее конечно-аддитивный аналог – неотрицательная конечно-аддитивная мера λ, определенная на минимальном кольце подмножеств бесконечномерного банахова пространства, содержащем все измеримые бесконечномерные прямоугольники (произведения длин сторон которых сходятся), и являющаяся инвариантной относительно сдвигов на произвольный вектор банахова пространства. Показано, что поскольку группа сдвигов на векторы пространства l_q шире группы сдвигов на векторы пространства l_p при $q > p$, то множество мер на пространстве l_∞, инвариантных относительно сдвигов на векторы из l_p, включает в себя множество мер на пространстве l_∞, инвариантных относительно сдвигов на векторы из l_q, как собственное подмножество. Кроме того, показано, что применение процедуры продолжения Каратеодори-Лебега к рассматриваемой конечно-аддитивной мере на пространстве l_p (см. [1]) порождает счетно-аддитивную меру, не совпадающую с исходной конечно-аддитивной мерой.

Введение

При исследовании решений дифференциальных уравнений с помощью усреднения случайных блужданий в координатном пространстве (см. [6]) эффективным инструментом являются инвариантные меры на координатном пространстве. Так, в работах [3, 8] сильно непрерывные однопараметрические полугруппы операторов, разрешающих задачу Коши для уравнения диффузии, уравнения дробной диффузии или уравнения Шредингера с различными гамильтонианами, получены посредством усреднения случайных однопараметрических семейств операторов сдвига на векторы координатного пространства по мерам или псевдомерам на множестве таких операторов.

[1]Московский физико-технический институт

Для применения такого подхода к описанию решений дифференциальных уравнений для функций на бесконечномерных пространствах возникакт задача изучения мер на бесконечных пространствах, инвариантных относительно сдвигов на векторы этого пространства или относительно других групп преобразований (см. [10]).

Как известно (см. [4]), не существует меры Лебега на бесконечномерном топологическом векторном пространстве, то есть не существует ненулевой счетно-аддитивной σ-конечной меры на σ-кольце борелевских подмножеств бесконечномерного топологического векторного пространства, инвариантной относительно сдвигов на векторы этого пространства. В связи с этим изучались вопросы о существовании мер на бесконечномерных топологических векторных пространствах, инвариантных относительно сдвига на векторы из некоторого максимальеого допустимого подпространства (см. [5]), о существовании инвариантных мер, не являющихся σ-конечными ([1]), о существовании мер, не являющихся счетно-аддитивными (см. [10]).

В настоящей статье рассматривается задача о существовании мер на бесконечномерных банаховых пространствах, инвариантных относительно сдвигов на произвольный вектор этого пространства. Будут исследованы банаховы пространства l_p, $1 \leq p \leq \infty$ числовых последовательностей; для пространства l_2 в статье [10] исследован класс мер, инвариантных не только относительно сдвига на произвольный вектор, но и относительно произвольного поворота (унитарного преобразования)

Дано описание множества конечно-аддитивных мер на банаховых пространствах l_p, где $1 \leq p < \infty$ и l_∞, инвариантных относительно сдвига на произвольных вектор из этого банахова пространства, и заданных на минимальном кольце, содержащем совокупность измеримых параллелерипедов с ребрами, параллельными координатным осям (т.е. таких, что бесконечное произведение длин их ребер сходится, см. ниже и в [1, 10]). Показано, что инвариантных относительно сдвига на произвольный вектор мер на пространстве l_p, $1 \leq p < \infty$ больше, чем инвариантных относительно сдвига на произвольный вектор мер на пространстве l_∞, ибо значения инвариантных мер на непустых множествах точек пространства, заключенных в измеримых параллелепипедах, связанных сдвигом на вектор из $l_\infty \backslash l_p$, должны совпадать для мер на пространстве l_∞ и никак не связаны для мер на пространстве l_p. В заключительной части статьи проанализированы перспективы применения процедуры продолжения конечно-аддитивной меры, заданной на кольце, порожденной измеримыми параллелепипедами, до счетно-аддитивной меры по схеме Каратеодори-Лебега (см. [1]). Установлено, что на пространствах l_p, $p \in [1, +\infty)$ такое продолжение порождает меру, не совпадающую с исходной мерой на измеримых параллелепипедах, и равную 0 на всех множествах, где исходная конечно-аддитивная мера принимает конечные значения.

Инвариантные меры на пространстве l_∞

Как и в статье [1], определим на пространстве отображений $\mathbf{N} \to R$, снабженном супремум-нормой либо топологией поточечной сходимости, семейство множеств $\mathcal{B}$ вида

$$\Pi_{a,b} = \{x \in l_\infty : \ \forall\, j \in \mathbf{N}\, x_j \in \langle a_j, b_j \rangle\}, \ a, b \in l_\infty.$$

Здесь символ $\langle a_j, b_j \rangle$ означает ограниченный промежуток с концами a_j и b_j при условии $a_j \leq b_j$ (если $a_j = b_j$, то представляющий собой либо одноточечечное, либо пустое множество); и пустое множество при условии $a_j > b_j$. (Топологическое векторное пространство отображений $\mathbf{N} \to R$, снабженное топологией поточечной сходимости обозначается символом R^∞, а линейное нормированное пространство отображений $x : \ \mathbf{N} \to R$ таких, что $\sup\limits_{n \in \mathbf{N}} |x(n)| < \infty$, снабженное супремум-нормой – символом l_∞).

Множества вида $\Pi_{a,b}$ при произвольных $a, b \in l_\infty$, удовлетворяющих условиям, что $a_j \leq b_j \ \forall \ j \in \mathbf{N}$, будем называть брусами; брус $\Pi_{a,b}$ является пустым множеством, если $\exists\, j \in \mathbf{N} : \ \langle a_j, b_j \rangle = \oslash$.

Следуя подходу из работы [1], дадим следующее определение измеримости бруса.

Определение 1. Будем называть брус $\Pi_{a,b} \in \mathcal{B}$ измеримым, если выполняется условие

$$\sum_{j=1}^{\infty} ln(b_j - a_j) \in [-\infty, +\infty), \tag{1}$$

где сумма ряда считается равной $-\infty$ если хотя бы один член ряда имеет значение $-\infty$.

Символом $\mathcal{P}$ обозначим совокупность измеримых брусов.

В работе [10] рассматривается более сильное, чем (1), условие измеримости бруса, связанное с требованием независимости свойства измеримости от изменения порядка координат.

Определение 2. Будем называть брус $\Pi_{a,b} \in \mathcal{B}$ абсолютно измеримым, если ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \max\{0,\, ln(b_j - a_j)\} \tag{2}$$

сходится.

Символом $\mathcal{Q}$ обозначим совокупность абсолютно измеримых брусов.

Очевидно, условие (1) следует из условия (2), то есть $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$.

На множестве измеримых брусов $\mathcal{P}$ определим функцию $\mu: \ \mathcal{P} \to [0,+\infty)$ равенством

$$\mu(\Pi_{a,b}) = \exp(\sum_{j=1}^{\infty} ln(b_j - a_j)). \tag{3}$$

В силу опреднления измеримости для любого бруса $\Pi_{a,b} \in \mathcal{P}$ выполняется условие $\mu(\Pi) \in [0,+\infty)$, причем если $a,b \in l_\infty$ удовлетворяют условию $\exists\ j \in \mathbf{N}:$ $a_j = b_j$, то сумма ряда из (1) равна $-\infty$ и $\mu(\Pi_{a,b}) = 0$; в частности, $\mu(\oslash) = 0$.

Пусть $\mathcal{R}$ – минимальное кольцо, содержащее класс множеств $\mathcal{P}$.

Заметим, что класс $\mathcal{P}$ является замкнутым относительно пересечений: действительно, пусть Π_{a_1,b_1}, $\Pi_{a_2,b_2} \in \mathcal{P}$. Тогда при условии, что $\alpha_j = \max\{a_{1,j}, a_{2,j}\} < \min\{b_{1,j}, b_{2,j}\} = \beta_j$ выполнены при всех $j \in \mathbf{N}$, то $\Pi_{a_1,b_1} \bigcap \Pi_{a_2,b_2} = \Pi_{\alpha,\beta}$ и множество $\Pi_{\alpha,\beta}$ непусто, является брусом, и, поскольку $\beta_j - a_j \leq \min\{b_{1,j} - a_{1,j},\ b_{2,j} - a_{2,j}\}\ \forall\ j \in \mathbf{N}$, то $\mu(\Pi_{\alpha,\beta}) \leq \min\{\mu(\Pi_{a_1,b_1}), \mu(\Pi_{a_2,b_2})\}$. При условии, что при некотором $j \in \mathbf{N}$ выполняется противоположное неравенство $\alpha_j = \max\{a_{1,j}, a_{2,j}\} \geq \min\{b_{1,j}, b_{2,j}\} = \beta_j$, то либо множество $\Pi_{a_1,b_1} \bigcap \Pi_{a_2,b_2} = \Pi_{\alpha,\beta}$ является пустым множеством, либо оно является брусом с ребром нулевой длины, но в каждом из этих случаев $\mu(\Pi_{a_1,b_1} \bigcap \Pi_{a_2,b_2}) = 0$.

Лемма 1. *Класс Λ множеств вида $A = \Pi \backslash (\bigcup\limits_{j=1}^{n} \Pi_j)$, состоящих из разностей бруса из класса $\mathcal{P}$ и объединения конечной совокупности брусов из класса $\mathcal{P}$, является полукольцом.*

Действительно, класс Λ содержит пустое множество, замкнут относительно пересечений, а разность двух множеств из класса Λ представима как объединение конечной совокупности множеств из этого класса.

Лемма 2. *Класс множеств $\mathcal{R}$, состоящий из конечных объединений множеств из класса Λ, является минимальным кольцом, содержащем класс измеримых брусов $\mathcal{P}$.*

Функция μ, заданная на классе множеств $\mathcal{S}$, называется аддитивной, если из условий $A, A_1, ..., A_m \in \mathcal{S}$, $A = \bigcup\limits_{j=1}^{m} A_j$, $A_j \bigcap A_k$, $j,k \in \overline{1,m}, j \neq k$, следует, что $\mu(A) = \sum\limits_{j=1}^{m} \mu(A_j)$.

Лемма 3. *Функции μ, заданная на классе $\mathcal{P}$ равенством (3), является аддитивной функцией множества на классе $\mathcal{P}$, инвариантной относительно сдвига на любой вектор пространства l_∞.*

Действительно, как установлено в работе [10], если $\Pi = \bigcup\limits_{i=1}^{m} \Pi_i$, где $\Pi, \Pi_1, ..., \Pi_m \in \mathcal{P}$, то существует лишь конечное множество пар Π_{i_1}, Π_{i_2}, $i_1, i_2 \in \overline{1,m}$ различных брусов, имеющих общую грань коразмерности 1. Поэтому существует такое число $N \in \mathbf{N}$, такой брус $\Pi_0 = \{x_j,\ j \geq N+1:\ x_j \in \langle a_j, b_j \rangle\}$ и такие N-мерные брусы $\Pi', \Pi'_1, ..., \Pi'_m$, что $\Pi = \Pi' \times \Pi_0$, $\Pi_1 = \Pi'_1 \times \Pi_0, ..., \Pi_m =$

$\Pi'_m \times \Pi_0$ и выполнено равенство $\Pi' = \bigcup\limits_{i=1}^{m} \Pi'_j$. Тогда аддитивность функции μ на классе $\mathcal{P}$ следует из формулы (3). Инвариантность функции множества (3) относительно сдвига на вектор пространства l_∞ очевидна.

Теорема 1. *Функция множества μ, заданная на классе $\mathcal{P}$, допускает единственное аддитивное продолжение на полукольцо Λ.*

Для каждого $n \in \mathbf{N}$ определим через Λ_n совокупность множеств вида

$$\Pi \backslash (\bigcup_{j=1}^{n} \Pi_j), \ \Pi, \Pi_1, ..., \Pi_n \in \mathcal{P}. \tag{4}$$

Тогда $\Lambda_{n+1} \supset \Lambda_n$ и $\Lambda = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Lambda_n$.

Утверждение теоремы 1 будет доказано, если мы покажем, что функция множества μ допускает единственное аддитивное продолжение с класса $\mathcal{P}$ на класс Λ_n при произвольном $n \in \mathbf{N}$.

При каждом $n \in \mathbf{N}$ обозначим через $\mathcal{V}_n$ совокупность конечных объединений n измеримых брусов из класса $\mathcal{P}$.

Лемма 4. *Для каждого $n \in \mathbf{N}$ функция множества (3) на классе $\mathcal{P}$ допускает единственное аддитивное продолжение на классы $\mathcal{V}_n$ и Λ_n.*

Докажем это утверждение леммы 4 с помощью метода математической индукции. Действительно, при $n = 1$ функция μ однозначно определена и аддитивна на классе $\mathcal{V}_1 = \mathcal{P}$ в силу леммы 3.

Значение функции μ на множестве $A = \Pi \backslash \Pi_1 \in \Lambda_1$ определим равенством $\mu(\Pi \backslash \Pi_1) = \mu(\Pi) - \mu(\Pi \bigcap \Pi_1)$. Пусть $A = \Pi' \backslash \Pi'_1 = \Pi' \backslash (\Pi'_1 \bigcap \Pi')$ и $A = \Pi'' \backslash \Pi''_1 = \Pi'' \backslash (\Pi''_1 \bigcap \Pi'')$. Тогда $A = \Pi \backslash \Pi_1$, где $\Pi = \Pi' \bigcap \Pi''$ и $\Pi_1 = \Pi \bigcap P'_1 = \Pi \bigcap \Pi''_1$. При этом $\Pi' = \Pi \bigcup (\Pi' \backslash Pi) \in \mathcal{P}$, следовательно $\mu(\Pi') = \mu(\Pi) + \mu(\Pi' \backslash Pi)$. А поскольку $\Pi' \backslash (\Pi'_1 \bigcap \Pi') = \Pi \backslash (\Pi_1 \bigcap \Pi)$, то $\Pi' \backslash \Pi = (\Pi'_1 \bigcap \Pi') \backslash (\Pi_1 \bigcap \Pi)$, поэтому $\mu(\Pi') = \mu(\Pi) + \mu(\Pi'_1 \backslash Pi') - \mu(\Pi_1 \bigcap \Pi)$, то есть $\mu(\Pi') - \mu(\Pi'_1 \backslash Pi') = \mu(\Pi) + -\mu(\Pi_1 \bigcap \Pi)$. Аналогично $\mu(\Pi) - \mu(\Pi \bigcap \Pi_1) = \mu(\Pi'') - \mu(\Pi'' \bigcap \Pi''_1)$. Таким образом, функция множества μ определена допускает единственное аддитивное продолжение на классы множеств Λ_1 и $\mathcal{V}_1$.

Предположим, что функция множества μ допускает единственное аддитивное продолжение на классы множеств Λ_n и $\mathcal{V}_n$ при некотором $n \in \mathbf{N}$. Покажем, что тогда функция μ допускает однозначное аддитивное продолжение на класс $\mathcal{V}_{n+1}$ и на класс Λ_{n+1}.

Произвольное множество $A \in \mathcal{V}_{n+1}$ представимо в виде $A = \bigcup\limits_{k=1}^{n+1} \Pi_k = D \bigcup \Pi_{n+1} \backslash D$, где $D = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \Pi_k \in \mathcal{V}_n$ и $\Pi_{n+1} \backslash D \in \Lambda_n$. Из условия аддитивности продолжения функции μ на класс $\mathcal{V}_{n+1}$

$$\mu(A) = \mu(D) + \mu(\Pi_{n+1} \backslash D). \tag{5}$$

Докажем сначала, что величина $\mu(\bigcup\limits_{k=1}^{n+1}\Pi_k)$ не зависит от немерации брусов $\Pi_1, ..., \Pi_{n+1}$.

Положим $D = \bigcup\limits_{k=1}^{n}\Pi_k$, $D' = \bigcup\limits_{k=1}^{n-1}\Pi_k \bigcup \Pi_{n+1}$ и $D_0 = \bigcup\limits_{k=1}^{n-1}\Pi_k$. Тогда $\mu(A) = \mu(D) + \mu(\Pi_{n+1}\backslash D) = \mu(D_0) + \mu(\Pi_n\backslash D_0) + \mu(\Pi_{n+1}\backslash D)$. Поскольку функция μ аддитивна на классе Λ_n и поскольку $\Pi_n = (\Pi_n\backslash\Pi_{n+1})\bigcup(\Pi_n\bigcap\Pi_{n+1})$, $\quad \Pi_{n+1}\backslash D = (\Pi_{n+1}\backslash\Pi_n)\backslash D_0$, то справедливо равенство $\mu(A) = \mu(D_0) + \mu((\Pi_n\backslash\Pi_{n+1})\backslash D_0) + \mu((\Pi_n\bigcup\Pi_{n+1})\backslash D_0)+\mu((\Pi_{n+1}\backslash\Pi_n)\backslash D_0)$. С другой стороны $\mu(A) = \mu(D')+\mu(\Pi_n\backslash D') = \mu(D_0) + \mu(\Pi_{n+1}\backslash D_0) + \mu(\Pi_n\backslash D')$. В силу аддитивности функции μ на классе Λ_n и в силу соотношения $\Pi_{n+1} = (\Pi_{n+1}\backslash\Pi_n)\bigcup(\Pi_n\bigcap\Pi_{n+1})$ справедливо равенство $\mu(A) = \mu(D_0)+\mu((\Pi_n\backslash\Pi_{n+1})\backslash D_0)+\mu((\Pi_{n+1}\backslash\Pi_n)\backslash D_0)+\mu((\Pi_{n+1}\bigcup\Pi_n)\backslash D_0)$. Таким образом, величина $\mu(A)$ не изменится, если поменять нумерацию брусов Π_n и Π_{n+1} и, следовательно, не зависит от нумерации системы брусов $\Pi_1, ..., \Pi_{n+1}$.

Предположим теперь, что $A = D\bigcup\Pi = D'\bigcup\Pi'$, где $D, D' \in \mathcal{V}_n$. Тогда $(D'\bigcup\Pi')\backslash D = \Pi\backslash D \in \Lambda_n$. А в силу предположения индукции функция μ определена на классе Λ_n и ее значение на множестве из Λ_n не зависит от представления множества из Λ_n в виде (4). Поэтому в силу аддитивности продолжения функции μ с классов $\mathcal{V}_n$ и Λ_n на класс $\mathcal{V}_{n+1}$ справедливо равенство $\mu(D'\bigcup\Pi') = \mu(D) + \mu((D'\bigcup\Pi')\backslash D) = \mu(D) + \mu(\Pi\backslash D)$ и, с другой стороны, $\mu(D'\bigcup\Pi') = \mu(D') + \mu(\Pi'\backslash D')$. Таким образом, значение аддитивной на классах Λ_n и $\mathcal{V}_{n+1}$ функции μ на множестве $A \in \mathcal{V}_{n+1}$ определено равенством (5) и не зависит от его представления в виде $A = D\bigcup\Pi$, $\Pi \in \mathcal{P}$, $D \in \mathcal{V}_n$.

Покажем, что если функция μ определена и аддитивна на классе $\mathcal{V}_{n+1}$ и на классе Λ_n, то она допускает однозначное аддитивное продолжение на класс Λ_{n+1}.

Произвольное множество $A \in \Lambda_{n+1}$ представимо в виде $A = \Pi\backslash D$, где $\Pi \in \mathcal{P}$ и $D = \bigcup\limits_{j=1}^{n+1}\Pi_j \in \mathcal{V}_{n+1}$ и $D \subset \Pi$. Тогда для произвольного аддитивного продолжения функции μ на класс Λ_{n+1} выполняется равенство

$$\mu(\Pi\backslash D) = \mu(\Pi) - \mu(D). \tag{6}$$

Если $A = \Pi'\backslash D' = \Pi''\backslash D''$ где $\Pi', \Pi'' \in \mathcal{P}$, $D', D'' \in \mathcal{V}_{n+1}$ и $D' \subset \Pi'$, $D'' \subset \Pi''$, то $A = \Pi\backslash D$, где $\Pi = \Pi'\bigcap\Pi''$ и $D = \Pi\bigcap D' = \Pi\bigcap D'' \in \mathcal{V}_{n+1}$. Тогда $D' = D\bigcup\Pi'\backslash\Pi \in \mathcal{V}_{n+1}$ и $D'' = D\bigcup\Pi''\backslash\Pi \in \mathcal{V}_{n+1}$. И поскольку функция μ аддитивна на классе $\mathcal{V}_{n+1}$, то $\mu(D'') = \mu(D)+\mu(\Pi''\backslash\Pi)$ и $\mu(D') = \mu(D)+\mu(\Pi'\backslash\Pi)$. Поэтому $\mu(\Pi'') - \mu(D'') = \mu(\Pi') - \mu(D') = \mu(\Pi) - \mu(D)$. Таким образом, значение аддитивной на классе Λ_{n+1} функции μ на множестве $A \in \Lambda_{n+1}$ определено равенством (6) и не зависит от представления множества в виде $A = \Pi\backslash D$, $\Pi \in \mathcal{P}$, $D \in \mathcal{V}_{n+1}$.

В силу предположения индукции каждое слагаемое в правой части равенства

(6) определено однозначно, поэтому функция множества μ допускает единственное аддитивное продолжение на класс Λ_{n+1}. Лемма 4 доказана.

Из леммы 4 следует утверждение теоремы 1 поскольку $\Lambda = \bigcup\limits_{n \in \mathbf{N}} \Lambda_n$

Лемма 5. *Функция множества μ, заданная на классе $\mathcal{P}$, допускает единственное аддитивное продолжение до меры μ на кольце $\mathcal{R}$.*

Действительно, определенная на полукольце множеств Λ функция множества μ допускает, согласно теореме 1 главы 5.2 [7], единственное продолжение до аддитивной функции множества на минимальной кольце $\mathcal{R}$.

Лемма 6. *Мера μ на пространстве l_∞, заданная на кольце $\mathcal{R}$, инвариантна относительно сдвига на любой вектор из пространства R^∞.*

Инвариантность функции μ на классе множеств $\mathcal{P}$ относительно сдвига на произвольный вектор пространства l_∞ очевидна. Из нее следует инвариантность функции μ на классе множеств Λ_1 и, по индукции, на классе Λ_n при любом $n \in \mathbf{N}$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть на множестве измеримых брусов $\mathcal{P}$ задана функция $\mu : \mathcal{P} \to [0, +\infty]$, аддитивная и инвариантная относительно сдвига на произвольный вектор из l_∞. Тогда функция μ однозначно продолжается до аддитивной и инвариантной относительно сдвига на произвольный вектор из l_∞ функции на кольце $\mathcal{R}$.*

Таким образом, для любых двух множеств $A, B \in \mathcal{R}$, связанных между собой преобразованием сдвига на вектор из l_∞, выполняется равенство $\mu(A) = \mu(B)$.

Замечание. Подобная конструкция меры на пространстве l_∞ изучалась в работе [1]. Основными отличиями меры λ из работы [1] и меры μ из настоящей работы являются два обстоятельства. Во-первых, мера λ не инвариантна относительно изменения нумерации координат поскольку при ее определении требуется лишь сходимость а не абсолютная сходимость произведений длин ребер брусов. Во-вторых, в работе [1] показано, что мера λ является счетно-аддитивной, это можно показать также на основании теоремы 3.5.1 монографии [2]. Используя эту теорему можно показать, что мера μ также является счетно аддитиной и допускает счетно аддитивное продолжение на минимальное σ-кольцо подмножеств пространства l_∞, содержащее кольцо $\mathcal{R}$. Но, как будет показано ниже, на пространстве l_p при $p \in [1, +\infty)$ по предложенной теоремой 2 схеме можно построить лишь конечно аддитивную меру, не обладающую свойством счетной аддитивности.

Два множества пространства l_∞ назовем l_∞-эквивалентными, если одно из них является образом другого при сдвиге на вектор из пространства l_∞. Введенное отношение эквивалентности на кольце $\mathcal{R}$ позволяет представить кольцо $\mathcal{R}$ как объединение непересекающихся классов l_∞-эквивалентных множеств. Мера μ

из теоремы 2 принимает равные значения на множествах из одного класса l_∞-эквивалентности. В то же время, условие инвариантности меры μ относительно сдвигов на векторы из l_∞ требует постоянства значения меры на множествах из класса l_∞-эквивалентности и мера из теоремы 2 удовлетворяет этому требованию.

Пусть $p \in [1, +\infty)$. Назовем два вектора пространства l_∞ l_p-эквивалентными, если их разность является вектором из пространства l_p; два множества пространства l_∞ назовем l_p-эквивалентными, если одно из них является образом другого при сдвиге на вектор из пространства l_p.

Введенное отношение эквивалентности на кольце $\mathcal{R}$ позволяет представить кольцо $\mathcal{R}$ как объединение непересекающихся классов l_p-эквивалентных множеств. Следовательно, сдвиги на произвольный вектор из пространства l_p преобразуют множество из некоторого класса в множество из того же самого класса. Поскольку пространство l_∞ шире пространства l_p, то один класс l_∞-эквивалентности содержит множество различных классов l_p-эквивалентности. Условие инвариантности меры μ относительно сдвигов на векторы из l_p требует постоянства значения меры на множествах из класса l_p-эквивалентности, но значения меры на множествах из различных классов l_p-эквивалентности никак не связаны между собой условием инвариантности меры μ относительно сдвигов на векторы из l_p.

Два бруса являются l_∞-эквивалентными тогда и только тогда, когда последовательности длин их ребер совпадают.

Поэтому мера на кольце $\mathcal{R}$ подмножеств пространства l_∞, определенная в теореме 2, является единственной мерой на кольце $\mathcal{R}$, инвариантной относительно сдвигов на произвольный вектор из пространства l_∞, нормированной условием: значение меры на единичном кубе $\{x \in l_\infty : \ \forall\, j \in \mathbf{N}\ x_j \in [0,1]\}$ равно единице. Тем более, такая мера является инвариантной относительно сдвигов на произвольный вектор из пространства l_p. Но есть и другие l_p-инвариантные меры, поскольку значения таких мер на кубах $\{x \in l_\infty : \ \forall\, j \in \mathbf{N}\ x_j \in [a_j, a_j+1]\}$ и $\{x \in l_\infty : \ \forall\, j \in \mathbf{N}\ x_j \in [\alpha_j, \alpha_j+1]\}$ могут быть различны для векторов $a, \alpha \in l_\infty$ таких, что $a - \alpha \notin l_p$.

Теорема 3. *Пусть на множестве измеримых брусов $\mathcal{P}$ задана функция $\nu : \mathcal{P} \to [0, +\infty]$, аддитивная (если $A, A_1, ..., A_n \in \mathcal{P}$, $A = \bigcup_{j=1}^n A_j$ и множества $A_1, ..., A_n$ попарно не пересекаются, то $\nu(A) = \sum\limits_{j=1}^{n} \nu(A_j)$) и инвариантная относительно сдвига на произвольный вектор из l_p. Тогда функция ν однозначно продолжается до аддитивной и инвариантной относительно сдвига на произвольный вектор из l_p функции на классе Λ и на кольце $\mathcal{R}$.*

Если поставить задачу определения меры на кольце $\mathcal{R}$ подмножеств пространства l_∞, инвариантной относительно сдвигов на произвольный вектор из пространства l_p, то помимо меры μ найдутся и другие такие меры. Например, выделим в кольце $\mathcal{R}$ систему брусов, имеющих точку 0 пространства l_∞ своим геометрическим центром симметрии, а также брусов, входящих с ними в один класс l_p-эквивалентности. Пусть $\mathcal{R}_0$ – минимальное кольцо, содержащее систему центрированных и l_p-эквивалентных им брусов. Определим меру ν из условия $\nu|_{\mathcal{R}_0} = \mu_{\mathcal{R}_0}$, $\nu(A) = 0$ для любого множества $A \in \mathcal{R}$, не входящего в подкольцо $\mathcal{R}_0$. Тогда ν – также мера на кольце $\mathcal{R}$, инвариантная относительно сдвигов на векторы из пространства l_p.

Таким образом, множество l_p-эквивалентных мер на кольце $\mathcal{R}$ шире множества l_∞-эквивалентных мер на кольце $\mathcal{R}$ и имеет место неоднозначность в выборе l_p-эквивалентных мер на кольце $\mathcal{R}$, связанная с различием значений мер на брусах с равными ребрами, входящими в различные классы l_p-эквивалентности.

Инвариантные меры на пространствах l_p при $p \in [1, \infty)$

При произвольном $p \in [1, +\infty)$ обозначим через $\mathcal{P}_p$ совокупность множеств вида

$$\Pi_{a,b} = \{x \in l_p : \ \forall j \in \mathbf{N}\, x_j \in \langle a_j, b_j \rangle\}, \ a, b \in l_\infty,$$

таких, что $a_j \leq b_j$ при всех $j \in \mathbf{N}$ и таких, что выполняется условие (1). Множества $\Pi_{a,b}$ являются пустыми если либо $\exists\, j \in \mathbf{N} : \ \langle a_j, b_j \rangle = \oslash$, либо $c \notin l_p$, где c – отображение $\mathbf{N} :\to R$, определяемое равенствами $c_j = min\{x : x \in [a_j, b_j]\}$.

Определим на семействе брусов $\mathcal{P}_p$ функцию μ_p таким образом, что ее значение на пустом множестве равно нулю, а на всяком непустом брусе $\Pi_{a,b}$ значение меры μ_p определяется равенством (3). Тогда функция множества μ_p на классе $\mathcal{P}_p$ подмножеств пространства l_p определена, аддитивна и инвариантна относительно сдвигов на векторы из пространства l_p.

Обозначим через $\mathcal{R}_p$ минимальное кольцо подмножеств пространства l_p, содержащее класс $\mathcal{P}_p$. Поставим задачу определить меру на кольце $\mathcal{R}_p$ подмножеств пространства l_p, инвариантной относительно сдвигов на произвольный вектор из пространства l_p

Теорема 4. *Пусть на множестве измеримых брусов $\mathcal{P}$ пространства l_∞ задана функция $\nu : \mathcal{P} \to [0, +\infty]$, аддитивная, инвариантная относительно сдвига на произвольный вектор из l_p и такая, что ее значение обращается в нуль на любом брусе $\Pi_{a,b} \in \mathcal{P}$ таком, что $\Pi_{a,b} \bigcap l_p = \oslash$. Тогда если ν – единственная мера на l_∞, являющаяся аддитивным продолжением функции ν с класса $\mathcal{P}$ на кольцо $\mathcal{R}$, то мера ν инвариантна относительно сдвига на произвольный вектор из l_p и ее сужение μ_p на кольцо $\mathcal{R}_p$ является инвариантной относительно сдвига мерой на пространстве l_p.*

О продолжении меры на l_p при $p \in [1, +\infty)$ с класса $\mathcal{P}$ измеримых брусов по схеме Лебега-Каратеодори

В работе [1] проведено построение меры на топологическом векторном пространстве R^∞, в котором мера из теоремы 1 продолжается на минимальное σ-кольцо Σ, содержащее кольцо $\mathcal{R}$, с помощью внешней меры по схеме Каратеодори.

В работе [1] по аддитивной функции множества μ на совокупности измеримых брусов $\mathcal{P}$ (см. (3)), задается внешняя мера $\lambda : 2^{l_\infty} \to [0, +\infty]$, определяемая равенством

$$\lambda(A) = \inf_{\bigcup\limits_{j \in \mathbf{N}} B_j \supset A,\ B_j \in \mathcal{P}} \sum_{j \in \mathbf{N}} \mu(B_j) \ \forall\ A \in 2^{l_\infty}. \tag{7}$$

Функция множества λ, определенная равенством (7), является внешней мерой на пространстве l_∞ – она определена на алгебре всех подмножеств, счетно-субаддитивна и удовлетворяет условию $\lambda(\oslash) = 0$.

Кроме того, внешняя мера λ порождена мерой μ, заданной на минимальном кольце $\mathcal{R}$, содержащем класс $\mathcal{P}$.

Поскольку (см. [1], а также [2], стр. 223) мера μ удовлетворяет условию счетной аддитивности на классе $\mathcal{P}$ (то есть для любой последовательности множеств $A_j \in \mathcal{R}$, $j \in \mathbf{N}$, такой, что $A_{j+1} \subset A_j$ и $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} A_j = \oslash$, выполняется равенство $\lim\limits_{j \to \infty} \mu(A_j) = 0$), то сужение внешней меры λ на класс $\mathcal{P}$ (и на кольцо $\mathcal{R}$) совпадает с мерой μ согласно теореме 1.5.6. [2] (см. также теорему 10.2 [9]).

Следуя конструкции работы [1] по аддитивной функции множества μ_p (см. теорему 4) на совокупности измеримых брусов $\mathcal{P}_p$ (см. (3)), зададим внешнюю меру $\lambda_p : 2^{l_p} \to [0, +\infty]$, определяемая равенством

$$\lambda_p(A) = \inf_{\bigcup\limits_{j \in \mathbf{N}} B_j \supset A,\ B_j \in \mathcal{P}_p} \sum_{j \in \mathbf{N}} \mu_p(B_j) \ \forall\ A \in 2^{l_p}. \tag{8}$$

Функция множества λ_p, определенная равенством (8), является внешней мерой на пространстве l_p – она определена на алгебре всех подмножеств, счетно-субаддитивна и удовлетворяет условию $\lambda_p(\oslash) = 0$.

Кроме того, внешняя мера λ_p порождена мерой μ_p, заданной на минимальном кольце $\mathcal{R}_p$, содержащем класс $\mathcal{P}_p$.

И если бы мера μ_p удовлетворяла условию счетной аддитивности на классе $\mathcal{P}_p$ (то есть для любой последовательности множеств $A_j \in \mathcal{R}_p$, $j \in \mathbf{N}$, такой, что $A_{j+1} \subset A_j$ и $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} A_j = \oslash$, выполняется равенство $\lim\limits_{j \to \infty} \mu(A_j) = 0$), то тогда сужение внешней меры λ_p на класс $\mathcal{P}_p$ (и на кольцо $\mathcal{R}_p$) должно было бы совпасть с мерой μ согласно теореме 1.5.6. [2] (см. также теорему 10.2 [9]). Но, как показывают примеры (см. [2, 9]), если мера μ_p является лишь конечно аддитивной, то построенная по ней внешняя мера λ_p может не совпадать с мерой μ_p на классе $\mathcal{P}_p$.

Пример. Пусть ν – чисто конечно аддитивная мера, заданная на алгебре $2^{\mathbf{N}}$ всех подмножеств множества натуральных чисел $\mathbf{N}$. Тогда если внешняя мера λ, порожденная мерой ν по правилу

$$\lambda(A) = \inf_{\bigcup\limits_{j\in\mathbf{N}} B_j \supset A,\ B_j \in 2^{\mathbf{N}}} \sum_{j\in\mathbf{N}} \nu(B_j)\ \forall\ A \in 2^{\mathbf{N}},$$

то $\lambda(\mathbf{N}) = 0$. Действительно, поскольку $\mathbf{N} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \{k\}$, а мера ν чисто конечно аддитивна, $\nu(\{k\}) = 0\ \forall\ k \in \mathbf{N}$, поэтому $0 \leq \lambda(\mathbf{N}) \leq \sum\limits_{j\in\mathbf{N}} \nu(\{j\}) = 0$.

Лемма 7. *Внешняя мера λ_p отличается от меры μ_p на множествах из класса $\mathcal{P}_p$.*

Действительно, для единичного куба $\Pi_{0,1} \in \mathcal{P}_p$ выполняется равенство $\mu_p(\Pi_{0,1}) = 1$. С другой стороны $\bigcup\limits_{j\in\mathbf{N}} \Pi_{0,1-\frac{1}{j}} \supset \Pi_{0,1}$ при всех $p \in [1,+\infty)$ ибо для произвольной точки $x \in l_p$ выполняется условие $\lim\limits_{j\to\infty} x_j = 0$ (но это не так для $x \in l_\infty$ и поэтому в пространстве l_∞ условие $\bigcup\limits_{j\in\mathbf{N}} \Pi_{0,1-\frac{1}{j}} \supset \Pi_{0,1}$ не выполняется). Так как $\mu(\Pi_{0,1-\frac{1}{j}}) = 0$ для любого $j \in \mathbf{N}$, то тогда согласно (8) выполнены условия $0 \leq \lambda_p(\Pi_{0,1}) \leq \sum\limits_{j\in\mathbf{N}} \mu_p(\Pi_{0,1-\frac{1}{j}}) = 0$, то есть $0 = \lambda_p(\Pi_{0,1}) < \mu_p(\Pi_{0,1}) = 1$.

Таким образом, отличие внешней меры λ_p от меры μ_p на множестве измеримых брусов $\mathcal{P}_p$ установлено. Можно доказать, что в предположении, что ряд (2) сходится, внешняя мера λ_p обращается в нуль на всех множествах, на которых мера μ_p принимает конечные положительные значения.

Обозначим через $\mathcal{Q}$ совокупность абсолютно измеримых брусов, для которых ряд (2) сходится, и через $\mathcal{S}$ – минимальное кольцо множеств, содержащее $\mathcal{Q}$. Тогда $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$, $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$; обозначим через ν сужение функции μ, определенной равенством (3), на класс множеств $\mathcal{Q}$.

При произвольном $p \in [1,+\infty)$ обозначим через $\mathcal{Q}_p$ совокупность множеств вида

$$\Pi_{a,b} = \{x \in l_p:\ \forall\, j \in \mathbf{N}\, x_j \in \langle a_j, b_j\rangle\},\ a, b \in l_\infty,$$

таких, что $a_j \leq b_j$ при всех $j \in \mathbf{N}$ и таких, что выполняется условие (2). Множества $\Pi_{a,b}$ являются пустыми если либо $\exists\, j \in \mathbf{N}:\ \langle a_j, b_j\rangle = \oslash$, либо $c \notin l_p$, где c – отображение $\mathbf{N} :\to R$, определяемое равенствами $c_j = min\{x : x \in [a_j, b_j]\}$.

Определим на семействе брусов $\mathcal{Q}_p$ функцию μ_p таким образом, что ее значение на пустом множестве равно нулю, а на всяком непустом брусе $\Pi_{a,b} \in \mathcal{Q}_p$ значение меры μ_p определяется равенством (3). Тогда функция множества μ_p на классе $\mathcal{Q}_p$ подмножеств пространства l_p определена, аддитивна и инвариантна относительно сдвигов на векторы из пространства l_p. Обозначим через $\mathcal{S}_p$ минимальное кольцо подмножеств пространства l_p, содержащее класс $\mathcal{Q}_p$.

Также, как и теоремы 2 и 4, доказываются следующие утверждения:

Теорема 5. *Пусть на множестве абсолютно измеримых брусов $\mathcal{Q}$ задана функция $\nu : \mathcal{P} \to [0, +\infty]$, аддитивная и инвариантная относительно сдвига на произвольный вектор из l_∞. Тогда функция ν однозначно продолжается до аддитивной и инвариантной относительно сдвига на произвольный вектор из l_∞ функции на кольце $\mathcal{S}$.*

Теорема 6. *Пусть на множестве абсолютно измеримых брусов $\mathcal{Q}$ пространства l_∞ задана функция $\nu : \mathcal{Q} \to [0, +\infty]$, аддитивная, инвариантная относительно сдвига на произвольный вектор из l_p и такая, что ее значение обращается в нуль на любом брусе $\Pi_{a,b} \in \mathcal{Q}$ таком, что $\Pi_{a,b} \bigcap l_p = \oslash$. Тогда если ν – единственная мера на l_∞, являющаяся аддитивным продолжением функции ν с класса $\mathcal{Q}$ на кольцо $\mathcal{S}$, то мера ν инвариантна относительно сдвига на произвольный вектор из l_p и ее сужение μ_p на кольцо $\mathcal{S}_p$ является инвариантной относительно сдвига мерой на пространстве l_p.*

Автор благодарит Г.Г. Амосова, М.М. Галламова, Ю.Н. Орлова, О.Г. Смолянова, Е.Т. Шавгулизде и Н.Н. Шамарова за плодотворные обсуждения затронутых в работе проблем.

Работа выполнена за счет средств гранта Российского научного фонда (проект № 14-11-00687) в МИАН им. В.А. Стеклова РАН.

Литература

[1] R. Baker. *Lebesgue measure on* R^∞// Proceedings of the AMS. 113:4, (1991), 1023–1029.

[2] В.И. Богачев.*Основы теории меры. Том 1.* РХД. Москва-Ижевск: 2006.

[3] Л. А. Борисов, Ю. Н. Орлов, В. Ж. Сакбаев.*Формулы Фейнмана для усреднения полугрупп, порождаемых операторами типа Шредингера*// Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2015, 057.

[4] А. Вейль *Интегрирование в топологических группах и его применение*// М.: Изд. иностр. лит. 1950.

[5] А.М. Вершик *Существует ли мера Лебега в бесконечномерном пространстве?* Труды МИАН им. В.А. Стеклова. 2007. Т. 259. 256–281.

[6] Ю.Л. Далецкий, С.В. Фомин. *Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах.* М.: Наука, 1983.

[7] А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. *Элементы теории функций и функционального анализа.* М.: Физматлит. 2004.

[8] Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г. *Случайные неограниченные операторы и формулы Фейнмана.* Изв. РАН, 80:6 (2016): 141–172.

[9] Порошкин А.Г. *Теория меры и интеграла.* М.: УРСС. 2006.

[10] В.Ж. Сакбаев *Усреднение случайных блужданий и меры на гильбертовом пространстве, инвариантные относительно сдвигов* // ТМФ 2017. 191:3. 473–502.

Антисимметричное пространство Фока и алгебры Грассмана с унитарным (супер-) преобразованием Фурье

Г. Г. Амосов*, М. Кпекпасси**, Н Н. Шамаров**, Э. Ю. Шамарова**

Аннотация

В антисимметричном пространстве Фока, порожденном конечномерным гильбертовым пространством, вводится такая структура алгебры Грассмана, что некоторые естественные аналоги преобразования Фурье, включая предложенный Березиным, оказываются унитарными.

Введение

Наблюдение, изложенное в статье, возникло при обсуждении авторами различных определений *аналога операции преобразования Фурье на алгебре Грассмана с заданным набором образующих* (далее — преобразования Грассмана–Фурье, или ПГФ); одно из таких определений ПГФ (оно приводится ниже) предложено в работах Ф.А. Березина и М.С. Маринова [1, 2][1], другое (оно также приводится далее вместе с указанием некоторых его преимуществ перед ПГФ Березина), являющееся фактически модификацией первого, предложено в недавней работе О.Г. Смолянова и Н.Н. Шамарова [3] о выводе уравнения Паули для электрона.

Второе определение использовалось для построения операторов в подходящем гильбертовом (супер-) пространстве функций, определенных на $\mathbb{R}^3$ и принимающих значения в грассмановой алгебре, которую далее обозначим A . Структура этого гильбертова пространства функций связана с гильбертовой структурой на A и специально подбиралась так, чтобы ПГФ по второму определению (а с ним и ПГФ Березина) оказывалось унитарным оператором (точнее, изометричным линейным) на A .

Существование унитарной версии “классического” преобразования Фурье в комплексном гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$ в смысле теоремы Планшереля является, таким образом, аргументом в пользу “естественности” обоих определений ПГФ, сохраняющих гильбертову норму. Однако эта гильбертова структура на A индуцирует структуру гильбертова подпространства (которое,

*МИАН им. В.А. Стеклова

**МГУ им. М.В. Ломоносова

[1]В этих работах алгебры Грассмана используются для описания спина электрона

в свою очередь, обозначим H) на комплексной линейной оболочке исходных образующих.

С другой стороны, тензорная природа антисимметричного пространства Фока $\Phi_a(H)$, порожденного гильбертовым пространством H (точное определение этого пространства Фока приведено далее), позволяет ввести — но, вообще говоря, далеко не единственным способом — аналог операции внешнего умножения, превращающему это пространство $\Phi_a(H)$ в алгебру Грассмана над исходным гильбертовым пространством, рассмотренным лишь как линейное комплексное пространство. Количество таких способов, приводящих к попарно различным алгебрам Грассмана на $\Phi_a(H)$, при $\dim_{\mathbb{C}} H > 1$ континуально (хотя все такие алгебры и изоморфны): стандартное однопараметрическое множество этих способов указано далее.

Таким образом, с одной стороны, имеется некоторая согласованная с операторами ПГФ гильбертова структура на исходной алгебре A, содержащей гильбертово подпространство H, и с другой стороны — другое гильбертово пространство $\Phi_a(H)$, также содержащее пространство H в качестве гильбертова подпространства, но несущее континуум попарно различных (хотя и изоморфных) структур алгебр Грассмана (среди которых имеется континуум явно задаваемых).

Получившиеся гильбертовы пространства A и $\Phi_a(H)$ имеют одинаковую размерность, а также, в силу специального выбора алгебры A, общее гильбертово подпространство H_1 , являющееся линейной оболочкой H и общего комплексного поля $\mathbb{C}$, но вне H_1 эти пространства могут быть устроены совсем по-разному, причем A имеет исходную структуру алгебры Грассмана, некоторым образом согласованную с гильбертовой структурой, тогда как на $\Phi_a(H)$ имеется континуум различных (но изоморфных) структур грассмановой алгебры (далее СГА).

В этой ситуации и возникает следующий вопрос (положительно решаемый в следующих разделах): существует ли среди континуума СГА на $\Phi_a(H)$ такая, что её единственный изоморфизм на данную СГА A, оставляющий на месте точки из H_1, окажется одновременно и гильбертовым изоморфизмом между $\Phi_a(H)$ и A?

Далее в разделе 2 указывается подходящая СГА на $\Phi_a(H)$, а в разделе 3 обсуждаются различные определения операторов ПГФ на этой алгебре, изометричные в смысле гильбертовой структуры.

Пространство Фока и алгебры Грассмана над гильбертовым пространством

Для каждого n-мерного пространства H мы реализуем антисимметричное пространство Фока $\Phi_a(H)$ как образ гильбертовой прямой суммы $T(H) = \oplus_{k=0}^{\infty} H^{\otimes k}$ (конечных гильбертовых тензорных степеней пространства H) относительно линейной операции в $T(H)$, далее называемой альтернацией, обозначаемой Alt и определяемой тем, что она отображает каждое тензорное произведение $\otimes_{j=1}^{k} h_j$ $(h_j \in H)$ в сумму

$$\sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \otimes_{j=1}^{k} h_{\sigma_j} \ ,$$

где S_k — множество (симметрическая группа) всех биекций множества $\{1, ..., k\}$ на себя (перестановок), $\sigma_j = \sigma(j)$ — значение такой биекции $\sigma \in S_k$ на элементе j, и $\operatorname{sgn}(\sigma)$ $(= (-1)^{\sigma})$ — знак перестановки σ.

По построению, пространства $H^{\otimes k}$ инвариантны относительно оператора Alt; их гильбертовы подпространства $\operatorname{Alt}(H^{\otimes k})$ обозначим $H^{\wedge k}$, так что $\Phi_a(H) = \operatorname{Alt}(T(H)) = \oplus_{k=0}^{n} H^{\wedge k}$.

Используем далее также линейный непрерывный оператор

$$P_a : T(H) \to \Phi_a(H),$$

определенный на каждой декартовой степени вида $H^{\otimes k}$ формулой $P_a(t) = \frac{1}{k!} \operatorname{Alt} t$. Непосредственно проверяется, что P_a, будучи оператором на гильбертовом пространстве $T(H)$ (и на его подпространствах $H^{\otimes k}$), является ортогональным проектором на $\Phi_a(H)$ (соотв., на $H^{\wedge k} \equiv H^{\otimes k} \cap \Phi_a(H)$).

Далее используем такую реализацию билинейной операции $\wedge : \Phi_a(H) \times \Phi_a(H) \to \Phi_a(H)$, что её сужения на декартовы произведения вида $H^{\wedge k_1} \times H^{\wedge k_2}$ определяются формулой[2]

$$t_1 \wedge t_2 = \left(\frac{(k_1 + k_2)!}{k_1! \ k_2!} \right)^{1/2} \cdot P_a(t_1 \otimes t_2) \quad \left(\equiv \frac{1}{\sqrt{(k_1 + k_2)! \ k_1! \ k_2!}} \cdot \operatorname{Alt}(t_1 \otimes t_2) \right) \quad (1)$$

$(t_1 \in H^{\wedge k_1}, \ t_2 \in H^{\wedge k_2})$. Непосредственно проверяется теперь, что для каждого линейного базиса $(\xi_1, ..., \xi_n)$ пространства H операция $\wedge$ определяет в линейном пространстве $\Phi_a(H)$ структуру алгебры Грассмана с n образующими $\xi_1, ..., \xi_n$ [3], (заменяя в первом равенстве формулы (1) показатель “1/2” на произвольный вещественный положительный — при этом равенство в скобках может нарушиться — получаем континуум попарно различных, но изоморфных друг другу, алгебр Грассмана).

[2] Ср. [11], где описан случай бесконечномерного H.

[3] Детали рассуждения можно увидеть, в частности, на образовательном сайте `https://www.cefns.nau.edu/~schulz/grassmann.pdf`

Построенную алгебру Грассмана $(\Phi_a(H), \wedge)$ назовём алгеброй Грассмана–Фока (над H)[4]. Аналогично проверяется, что для каждого набора $(h_1, ..., h_k) \in H^k$ с $k \leqslant n$ выполняется равенство $\wedge_{j=1}^k h_j = \frac{1}{\sqrt{k!}} \cdot \mathrm{Alt}(\otimes_{j=1}^k h_j)$, и что если $(e_1, ..., e_n)$ — ортонормированный базис в H , то линейный базис алгебры Грассмана–Фока $(\Phi_a(H), \wedge)$, состоящий из всех произведений вида $\wedge_{j=1}^n e_j^{a_j} \equiv \vec{e}^{\,\vec{a}}$ (где $a_j \in \{0;1\}$ и, как обычно, $e_j^0 = 1$ и $e_j^1 = e_j$ для $j \in \{1, 2, ..., n\}$), также ортонормирован.[5] В следующем разделе показано, что различные аналоги преобразований Лапласа и Фурье на алгебре Грассмана–Фока являются унитарными относительно скалярного произведения в ней.

Преобразования Грассмана–Фурье, или суперпреобразования Фурье

Следуя некоторым обозначениям Березина [1,2] (его подход к суперанализу отличается от так называемого функционального подхода, развитого в [6]–[9] и [5]), если $(e_1, ..., e_n)$ — набор образующих элементов алгебры Грассмана $G = G(e_1, ..., e_n)$ над $\mathbb{C}$ (где будем опускать знак $\wedge$ или заменять его точкой), то обозначаем эти порождающие $\xi_1, ..., \xi_n$ соотв., и называем их "антикоммутирующими переменными", и каждый элемент $g = \sum_{\vec{a} \in \{0;1\}^n} c_{\vec{a}} e^{\vec{a}}$ этой алгебры называем "многочленом от этих переменных" (с комплексными коэффициентами) и обозначаем его $g(\xi_1, ..., \xi_n) \equiv \sum_{\vec{a} \in \{0;1\}^n} c_{\vec{a}} \xi^{\vec{a}}$.

Если такой полином $g = g(\xi_1, ..., \xi_n) = \sum_{\vec{a} \in \{0;1\}^n} c_{\vec{a}} \xi^{\vec{a}}$ не зависит от ξ_{j_0} , для некоторого $j_0 \in \{1, ..., n\}$ (т.е., $c_{\vec{a}} = 0$ при $a_{j_0} = 1$), то линейные операторы $\overleftarrow{\partial}_{\xi_{j_0}}$ и $\vec{\partial}_{\xi_{j_0}} : G \to G$ "частного дифференцирования справа и слева по ξ_{j_0}" определяется формулами $\overleftarrow{\partial}_{\xi_{j_0}} g = \vec{\partial}_{\xi_{j_0}} g = 0$, $\overleftarrow{\partial}_{\xi_{j_0}} (g \xi_{j_0}) = \vec{\partial}_{\xi_{j_0}} (\xi_{j_0} g) = g$, и операторы $\overleftarrow{\int} d\xi_{j_0}$ ($\vec{\int} d\xi_{j_0}$) "определенного частного интегрирования справа (слева) по ξ_{j_0}" определяется формулами $\overleftarrow{\int} d\xi_{j_0} = \overleftarrow{\partial}_{\xi_{j_0}}$ и $\vec{\int} d\xi_{j_0} = \vec{\partial}_{\xi_{j_0}}$ ([12], ср. [9]).

В работах Березина такая супералгебра G наделяется также антилинейным оператором инволюции $* : G(\xi_1, ..., \xi_n) \to G(\xi_1, ..., \xi_n)$, $*(g) \equiv g^*$, таким, что элементы $1 = e_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ инвариантны относительно $*$ и

$$\forall\, g_1, g_2 \in G(\xi_1, ..., \xi_n) \ \ (g_1 g_2)^* = g_2^* g_1^* \ .$$

При этом $*$-инвариантное вещественное подпространство в G, порожденное всеми образующими ξ_j , интерпретируется как антикоммутативный аналог координатного (геометрического) пространства, а другое вещественное подпространство, полученное умножением предыдущего на мнимую единицу — как

[4]Одним из следствий результатов статьи [5] является тот факт, что произвольная такая алгебра Грассмана–Фока не является банаховой алгеброй, то есть, что если $\|e_0\| = 1$, то норма билинейного оператора $\wedge$ не равна 1 ($\| \wedge \| \geq 2/\sqrt{3}$).

[5]это можно вывести также из равенств на с. 107 (111-я страница файла) в разделе 6.2 книги [`https://www.cefns.nau.edu/~schulz/grassmann.pdf`].

аналог пространства импульсов. В другом контексте таким анти-изоморфизмам иногда приписывают другой физический смысл — переобразований, переводящих частицы в античастицы [10]. Мы далее используем инволюцию при сравнении разных преобразований Грассмана–Фурье.

Суперпреобразование Фурье по Березину

По-видимому, впервые аналог преобразования Фурье (ПФ) на алгебре Грассмана предложен в [1]; в наших обозначениях это оператор между двумя подалгебрами — $G(\xi_1,...,\xi_n)$ и $G(\eta_1,...,\eta_n)$ более широкой алгебры Грассмана $G(\xi_1,...,\xi_n,\eta_1,...,\eta_n)$, в которой упорядоченный набор $(\xi_1,...,\xi_n,\eta_1,...,\eta_n)$ образующих состоит из $2n$ независимых антикоммутирующих “переменных”. Обозначая этот аналог ПФ, введенный Березиным, как

$$\mathcal{F}_B^{\vec{\xi}\to\vec{\eta}} : G(\xi_1,...,\xi_n) \to G(\eta_1,...,\eta_n)$$

можно задать его формулой

$$\mathcal{F}_B^{\vec{\xi}\to\vec{\eta}}(f(\xi_1,...,\xi_n)) = (\mathcal{F}_B^{\vec{\xi}\to\vec{\eta}}f)(\eta_1,...,\eta_n)) = \overleftarrow{\int} d\xi_1 \cdots \overleftarrow{\int} d\xi_n \ (e^{i\vec{\xi}\cdot\vec{\eta}}\ f(\xi_1,...,\xi_n)),$$

где мы пишем $\vec{\xi}$ вместо $(\xi_1,...,\xi_n)$ и $\vec{\xi}\cdot\vec{\eta}$ вместо $\sum_{j=1}^n \xi_j\eta_j)$.

Обратный оператор [2] —

$$(\mathcal{F}_B^{\vec{\xi}\to\vec{\eta}})^{-1} = i^{-n^2}\mathcal{F}_B^{\vec{\eta}\to\vec{\xi}} : g(\eta_1,...,\eta_n) \mapsto i^{-n^2}\overleftarrow{\int} d\eta_1 \cdots \overleftarrow{\int} d\eta_n \ (e^{-i\vec{\xi}\cdot\vec{\eta}}\ g(\eta_1,...,\eta_n)).$$

Посклькy коэффициент i^{-n^2} равен 1 для четных n и $-i$ для нечетных n, то неясно, как должен быть выражен бесконечномерный или бескоординатный (не зависящий от размерности) аналог этой формулы. Это обстоятельство является аргументом для поиска формулы более симметричного варианта оператора ПГФ.

Сохраняющее базис суперпреобразование.

Найдем подходящий оператор, варьируя комплексные коэффициенты c_j в показателе экспоненциального выражения $K_{c_1,...,c_n}(\vec{\xi},\vec{\eta}) = e^{\sum_{j=1}^n c_j\xi_j\eta_j}$, которое при $c_j = i$ является интегральным ядром оператора $\mathcal{F}_B^{\vec{\xi}\to\vec{\eta}}$.

Если все c_j — комплексные ненулевые и $\vec{c} = (c_1,...,c_n)$, то непосредственное вычисление показывает, что оператор $\mathcal{F}_{\vec{c}}^{\vec{\xi}\to\vec{\eta}} : G(\xi_1,...,\xi_n) \to G(\eta_1,...,\eta_n)$, определяемый формулой

$$\mathcal{F}_{\vec{c}}^{\vec{\xi}\to\vec{\eta}} : f(\xi_1,...,\xi_n) \mapsto \overleftarrow{\int} d\xi_1 \cdots \overleftarrow{\int} d\xi_n \ (e^{\sum_{j=1}^n c_j\xi_j\eta_j}\ f(\xi_1,...,\xi_n)) \ ,$$

отображает базисный элемент $\vec{\xi}^{\vec{a}} \equiv \xi_1^{a_1} \cdots \xi_n^{a_n}$ $(a_j \in \{0;1\})$ в произведение

$$((-1)^{1-1}c_1\eta_1)^{1-a_1} \cdots ((-1)^{n-1}c_n\eta_n)^{1-a_n} \equiv \prod_{j=1}^{\vec{n}} ((-1)^{j-1}c_j\eta_j)^{1-a_j} \ .$$

Таким образом, если в положить $c_j = (-1)^{j-1}$, то оператор $\mathcal{F}_{\vec{c}}^{\vec{\xi}\to\vec{\eta}}$ отобразит базисный элемент $\vec{\xi}^{\vec{a}}$ снова в базисный элемент: $\vec{\eta}^{\vec{1}-\vec{a}} \equiv \prod_{j=1}^{\vec{n}} \eta_j^{1-a_j}$ (формула для образа произведения $\overleftarrow{\xi}^{\overleftarrow{a}}$ более громоздка). В этом случае $(c_j = (-1)^{j-1})$ обратный оператор, $(\mathcal{F}_{\vec{c}}^{\vec{\xi}\to\vec{\eta}})^{-1}$, совпадает с $\mathcal{F}_{\vec{c}}^{\vec{\eta}\to\vec{\xi}}$, то есть, ядро обратного оператора имеет вид

$$K_{+1,-1,+1,-1,\ldots,(-1)^{n-1}}(\vec{\eta},\vec{\xi}) = e^{\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\eta_j\xi_j} = e^{-\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\xi_j\eta_j} \ .$$

Полученный оператор $\mathcal{F}_{+1,-1,+1,-1,\ldots,(-1)^{n-1}}^{\vec{\xi}\to\vec{\eta}}$, обозначение для обратного к которому получается простой переменой порядка букв ξ и η, будет далее называться каноническим оператором преобразования Грассмана–Фурье из $G(\vec{\xi})$ в $G(\vec{\eta})$ и обозначаться $\mathcal{F}_{\mathrm{can}}^{\vec{\xi}\to\vec{\eta}}$. С одной стороны, этот оператор, не содержащий в показателе мнимых коэффициентов, но содержащий, вообще говоря, отрицательные, естественно считать обобщением скорее преобразования Лапласа. Однако имеет место следующее обстоятельство.

Воспользуемся реализацией алгебры Грассмана $G(\xi_1,...,\xi_n,\eta_1,...,\eta_n)$ в виде алгебры Грассмана–Фока $\Phi_a(H \oplus H)$, наделенной сохраняющим степень и норму тензора анти-эндоморфизмом (инволюции) $*$ и такой, что последовательность $(\xi_1,...,\xi_n,\eta_1,...,\eta_n)$ является ортонормированной в $H \oplus H$. Следуя терминологии Березина, $*$-инвариантные элементы алгебры будем называть ($*$-) вещественными, тогда как анти-инвариантные (меняющие знак при действии на них инволюции) — ($*$-) мнимыми.

Аналоги наблюдаемых вещественных величин (например, геометрических координат или координат вектора импульса) естественно считать вещественными, поэтому предположим, что элементы $\xi_1,...,\xi_n,\eta_1,...,\eta_n$ вещественны. Тогда аргумент экспоненты $i\vec{\xi}\vec{\eta}$ в формуле для интегрального ядра оператора $\mathcal{F}_B^{\vec{\xi}\to\vec{\eta}}$ является вещественным, и с этой точки зрения оператор Березина, несмотря на наличие мнимой единицы, аналогичен скорее оператору Лапласа, нежели Фурье[6]. При этом аргумент экспоненты интегрального ядра оператора $\mathcal{F}_{\mathrm{can}}^{\vec{\xi}\to\vec{\eta}}$ – сумма $\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\xi_j\eta_j$ — является $*$-мнимым, что и согласуется с понятием преобразования Фурье.

[6] Следует отметить ещё, что в работе [4] вводятся супераналоги функции Гамильтона H и “функционала” действия, являющиеся $*$-вещественными элементами комплексной алгебры Грассмана с инволюцией, порожденной тремя $*$-вещественными образующими ζ_k, набор которых представляет аналог “точки фазового пространства”, тогда как о выделении некоммутативных аналогов отдельно компонент импульсных переменных ничего не сказано. При этом в более поздней работе [2] явно предлагается считать некоммутативные аналоги как компонент импульса, так и координат пространственного положения невещественными.

Кроме того, приведенная выше формула для образов базисных произведений $\overleftarrow{\xi}^{\overleftarrow{a}}$ доказывает следующую теорему.

Теорема. Операторы $\mathcal{F}_B^{\vec{\xi}\to\vec{\eta}}$ и $\mathcal{F}_{\mathrm{can}}^{\vec{\xi}\to\vec{\eta}}$ из $G(\xi_1,...,\xi_n)$ в $G(\eta_1,...,\eta_n)$ сохраняют норму, индуцированную в этих алгебрах нормой алгебры Грассмана–Фока $(\Phi_a(H_\xi \oplus H_\eta), \wedge)$, в которой наборы $(\xi_1,...,\xi_n)$ и $(\eta_1,...,\eta_n)$ служат ортонормированными базисами пространств H_ξ и H_η соответственно. Более общо, всякий оператор вида $\mathcal{F}_{\vec{c}}^{\vec{\xi}\to\vec{\eta}}$ сохраняет описанную норму, если (и только если) $|c_j| = 1$ $(j = 1,...,n)$.

Третий автор пользовался поддержкой гранта РФФИ № 14-01-00516.

Литература

[1] Ф. А. Березин, *Метод вторичного квантования*, Наука, М., 1965.

[2] F.A.Berezin, M. S. Marinov *Particle spin dynamics as the Grassmann variant of classical mechanics* // Ann. Phys. (NY) 104 (1977) 336–362.

[3] Смолянов О.Г., Шамаров Н.Н. *Спиновая динамика как результат суперoccаналога qp-квантования* // Современные проблемы математики и механики, 2014, 9:2, 47–53

[4] F.A. Berezin, M.S. Marinov *Classical spin and Grassmann algebra* // JETP Lett., 21:11, 320–321.

[5] J. Kursch, O.G. Smolyanov *Hilbert norms for graded algebras* // Proceedings of the American Mathematical Society, 128:6 (2000), 1647–1653

[6] A. Rogers, *A global theory of supermanifolds* // J. Math. Phys., 21 (1980), 1352–1365.

[7] B. DeWitt, *Supermanifolds, Cambridge Monographs on Mathematical Physics*. CUP, Cambridge, 2nd edition, 1992.

[8] V. S. Vladimirov, I.V. Volovich *Differential calculus* // TMF, 59:1 (1984), 3–27

[9] V. S. Vladimirov, I.V. Volovich *Superanalysis. II. Integral calculus* // TMF, 60:2 (1984), 16–198

[10] J. Kupsch, O.G. Smolyanov *Functional representations for Fock superalgebras* // Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics, v. 1, no. 2, 1998, 285–324.

[11] Э.Ю.Шамарова, Н.Н.Шамаров *Дифференциальные формы на локально выпуклых пространствах и формула Стокса* // Известия высших учебных заведений. Математика. 2016, № 8, 84—97.

[12] F. A. Berezin *Introduction to super analysis* // D. Reidel Publishing Co., Inc. New York, NY, USA 1987

Участники конференции

Амосов Григорий Геннадьевич, МИАН им. В.А. Стеклова, д.ф.-м.н.

Борисов Леонид Андреевич, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, аспирант

Ждановский Илья Юрьевич, МФТИ, к.ф.-м.н.

Кочерова Анна Сергеевна, МФТИ, к.ф.-м.н.

Манько Владимир Иванович, ФИАН им. П.Н. Лебедева, д.ф.-м.н.

Орлов Юрий Николаевич, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, д.ф.-м.н.

Сакбаев Всеволод Жанович, МФТИ, д.ф.-м.н.

Смолянов Олег Георгиевич, Мехмат МГУ, д.ф.-м.н.

Шавгулидзе Евгений Тенгизович, Мехмат МГУ, д.ф.-м.н.

Шамаров Николай Николаевич, Мехмат МГУ, д.ф.-м.н.

Оглавление