



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 2 за 2025 г.



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

Ю.Ф. Голубев, В.В. Корянов

## Перевернутый маятник на колесе без обода

Статья доступна по лицензии  
Creative Commons Attribution 4.0 International



**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Голубев Ю.Ф., Корянов В.В. Перевернутый маятник на колесе без обода // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2025. № 2. 26 с.  
EDN: [ALCYDL](https://doi.org/10.26907/2071-2898.2025.2.26)  
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2025-2>

Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В. Келдыша  
Российской академии наук

Ю.Ф. Голубев, В.В. Корянов

Перевернутый маятник на колесе  
без обода

Москва – 2025

УДК 531.38

**Голубев Ю.Ф., Корянов В.В. Перевернутый маятник на колесе без обода**

Исследовано управляемое качение колеса без обода со штангой, прикреплённой к центру колеса. Колесо может катиться как вверх, так и вниз по склону. В качестве управления взят угол отклонения штанги от опорной спицы колеса. Найдены оптимальные для разгона колеса законы управления штангой, удовлетворяющие геометрическим ограничениям системы. Построены последовательность и диаграммы Пуанкаре для угловой скорости вращения колеса при смене опорных спиц, и выявлены условия существования неподвижных точек на диаграммах в зависимости от углов наклона штанги.

**Ключевые слова:** колесо без обода, штанга, оптимальное управление, склон

***Yury Filippovich Golubev, Victor Vladimirovich Koryanov. Inverted pendulum on a rimless wheel***

The controlled rolling of a rimless wheel with a rod attached to the center of the wheel is investigated. The wheel can roll both up and down the hill. The angle of deflection of the rod from the wheel support spoke is used as a control. The optimal laws of rod control for wheel acceleration satisfying the geometric constraints of the system are found. A sequence and Poincare diagrams are constructed for the angular velocity of rotation of the wheel when changing the support spokes and the conditions for the existence of fixed points on the diagrams depending on the angles of inclination of the rod are revealed.

**Key words:** rimless wheel, rod, optimal control, hill

## Содержание

Введение . . . . .	3
1. Кинетический момент и силовая функция системы . . . . .	4
2. Равновесие колеса с вращающейся штангой . . . . .	6
3. Управление штангой в одноопорной фазе движения . . . . .	9
4. Безударная фаза движения . . . . .	11
5. Отображение Пуанкаре . . . . .	13
6. Свойства отображения Пуанкаре . . . . .	16
7. Управление штангой . . . . .	18
8. Результаты расчётов . . . . .	20
Заключение . . . . .	24
Список литературы . . . . .	25

## Введение

В препринте исследуется возможность управления движением колеса без обода посредством изменения положения штанги, прикрепленной к центру колеса. Колесо без обода позволяет создать простейшую математическую модель двуногой ходьбы, а различные аспекты его пассивного движения под действием силы тяжести уже подробно исследованы [1–6]. Показано, что устойчивое безостановочное пассивное движение с постоянной скоростью может возникать при движении колеса вниз по склону, рассмотрены варианты, когда движение происходит по наклонной прямой, наклонной плоскости, спицы колеса снабжены стопами и коленями. Вместе с тем пассивное стационарное движение колеса без обода в горизонтальном направлении, а тем более вверх по склону, даже при наличии начальной скорости невозможно из-за невозможных потерь кинетической энергии при ударе спиц об опорную поверхность. В этом случае нужен дополнительный источник энергии, компенсирующий эти потери. Одним из эффективных внешних источников энергии может служить сила тяжести, как это показано, например, в работах [7, 8]. Для этого достаточно за счёт внутренних сил иметь возможность управляемо изменять конфигурацию системы и тем самым в нужном направлении менять положение вертикальной проекции центра масс системы на опорную поверхность. Колесо без обода со штангой, прикрепленной к центру колеса, представляет собой простейшую модель двуногого робота. Если штанга, находясь в своем верхнем положении, мало отклоняется от вертикали, то система отдаленно напоминает конфигурацию человеческого тела. Изменяя наклон штанги относительно вертикали, можно смещать положение центра масс системы и тем самым нужным образом влиять на движение колеса. По сути в одноопорной фазе движения система представляет собой двухзвенный маятник в окрестности вертикального неустойчивого положения равновесия. В такой конфигурации система уже будет способна преодолевать препятствия типа лестницы, что делает её интересной с медицинской точки зрения. Она относится к разряду систем с дефицитом управления по одной степени свободы, теория которых развита в работах [9–13].

В данной работе исследуется движение системы в вертикальной плоскости. Его можно интерпретировать как последовательность отдельных «шагов», осуществляемых спицами колеса. Целью управления служит максимальное увеличение угловой скорости колеса за один «шаг», а также уменьшение потерь энергии качения на последовательности шагов. Геометрически положение штанги ограничивается только тем, что она не должна пересекать опорную поверхность. Другие ограничения могут возникать из соображений без-

опасности и возможности реализации требуемого управления. Работа продолжает цикл исследований, представленных в [14].

В препринте изучена упрощенная динамическая модель движения системы «штанга на колесе без обода», которая находится на наклонной опоре. Найдены условия, при выполнении которых штанга вызывает движение колеса вверх по склону, в том числе и из положения равновесия. Выполнено качественное исследование полученных уравнений движения. Найдено оптимальное управление движением штанги в одноопорной фазе движения. Построено отображение Пуанкаре для последовательности шагов колеса, и выявлены условия существования неподвижных точек отображения. Дана оценка максимального управляющего штангой момента в зависимости от параметров системы.

## 1. Кинетический момент и силовая функция системы

Колесо без обода, рассматриваемое как абсолютно твёрдое тело, представляет собой однородный центральный диск, к которому по периферии равномерно прикреплены одинаковые однородные радиальные спицы длины  $l$  от центра колеса до края спицы. Угол между спицами пусть будет  $2\alpha > 0$ . Он предполагается одинаковым для любой пары спиц (см. рис. 1). Масса колеса равна  $M$ , его осевой момент инерции относительно конца спицы равен  $I$ , а центр масс колеса совпадает с центром диска. К центру диска шарнирно прикреплен штанга массы  $m$ . Центр масс штанги расположен в точке  $C$  на расстоянии  $a$  от центра колеса. Момент инерции штанги относительно её центра масс обозначим  $J$ . На систему действует сила тяжести с ускорением  $\mathbf{g}$ , реакция опоры, а также управляющий момент между колесом и штангой.

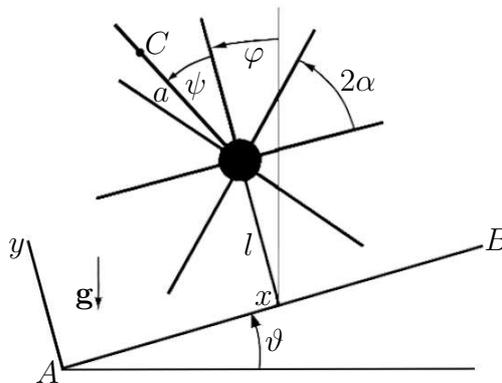


Рис. 1: Перевернутый маятник на колесе без обода

Направим ось  $Ax$  из точки  $A$  вдоль опорной прямой к точке  $B$ . Ось  $Ay$  расположим в вертикальной плоскости, проходящей через точки  $A$  и  $B$ , и направим её вверх перпендикулярно к опорной прямой. Ось  $Az$  дополняет систему координат до правой. Колесо одномоментно может иметь одну или две точки опоры на оси  $Ax$ . Пусть наиболее удалённая от  $A$  точка опоры колеса имеет координату  $x$ . Угол  $\varphi$  образован вертикалью, проходящей через точку опоры с координатой  $x$ , и соответствующей опорной спицей и отсчитывается от вертикали. Угол  $\psi$  между штангой и продолжением спицы, опирающейся в точке  $(x, 0)$ , характеризует положение штанги относительно колеса. Колесо может совершать движение лишь в связанной с опорной прямой  $AB$  вертикальной плоскости, содержащей точки  $A$  и  $B$  (рис. 1). Изменяя угол  $\psi$ , можно управлять движением колеса. Цель управления состоит в том, чтобы вывести колесо из положения равновесия с опорой на две спицы и заставить его катиться по прямой  $AB$ . Для определенности и без потери общности будем считать, что колесо катится от точки  $A$  к точке  $B$ , так что его перекатывание будет всегда происходить через точку опоры  $(x, 0)$ , наиболее удалённую от точки  $A$ .

Кинетический момент колеса относительно точки  $(x, 0)$  выражается равенством  $K_r = I\dot{\varphi}$ . Координаты и скорости центра масс штанги имеют вид

$$\begin{aligned} x_b &= x - l \sin(\varphi - \theta) - a \sin(\gamma - \theta), & y_b &= l \cos(\varphi - \theta) + a \cos(\gamma - \theta), \\ \dot{x}_b &= -l\dot{\varphi} \cos(\varphi - \theta) - a\dot{\gamma} \cos(\gamma - \theta), & \dot{y}_b &= -l\dot{\varphi} \sin(\varphi - \theta) - a\dot{\gamma} \sin(\gamma - \theta), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $\gamma = \varphi + \psi$  есть угол между штангой и вертикалью.

Кинетическая энергия системы выражается формулой

$$T = (I + ml^2) \frac{\dot{\varphi}^2}{2} + mal\dot{\varphi}(\dot{\varphi} + \dot{\psi}) \cos \psi + (J + ma^2) \frac{(\dot{\varphi} + \dot{\psi})^2}{2} \quad (1.2)$$

или

$$T = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} [I + m(l^2 + 2al \cos \psi + a^2) + J] + \dot{\varphi}\dot{\psi} [m(al \cos \psi + a^2) + J] + \frac{\dot{\psi}^2}{2} (ma^2 + J). \quad (1.3)$$

Напишем выражение для кинетического момента  $\mathbf{K}$  системы относительно точки  $(x, 0)$ :

$$\mathbf{K} = \mathbf{e}_z \{ I\dot{\varphi} + m[l\dot{\varphi}(l + a \cos \psi) + a(\dot{\varphi} + \dot{\psi})(a + l \cos \psi)] + J(\dot{\varphi} + \dot{\psi}) \},$$

где  $\mathbf{e}_z$  — единичный вектор оси  $Az$ . Или

$$K = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{e}_z = \dot{\varphi} [I + ml(l + a \cos \psi)] + \dot{\gamma} [J + ma(a + l \cos \psi)]. \quad (1.4)$$

Силовая функция  $U$  системы дается выражением

$$U = -g[(M + m)l \cos \varphi + ma \cos \gamma]. \quad (1.5)$$

## 2. Равновесие колеса с вращающейся штангой

Пусть колесо первоначально стоит на месте, опираясь на две спицы в точках опоры  $(x - 2l \sin \alpha, 0)$  и  $(x, 0)$  соответственно, а штанга может вращаться. Требуется определить, при каких параметрах штанги и каком режиме её вращения можно заставить центр масс колеса пройти над точкой опоры без остановки. Для неподвижного колеса  $\dot{\varphi} \equiv 0$ ,  $\varphi = \varphi_0 = \alpha + \vartheta$ , а уравнение кинетического момента относительно неподвижной точки  $(x, 0)$  принимает вид

$$\ddot{\psi}[J + ma(a + l \cos \psi)] = -2N_y l \sin \alpha + g[(M + m)l \sin \varphi_0 + ma \sin(\varphi_0 + \psi)] + \dot{\psi}^2 mal \sin \psi, \quad (2.1)$$

где  $N_y$  — проекция реакции балки на ось  $Ay$  в точке опоры  $(x - 2l \sin \alpha, 0)$ . Связь между спицей и опорной прямой в точке опоры будем считать освобождающей. Необходимое условие неподвижности колеса состоит в том, что должно быть выполнено  $N_y \geq 0$ . Если  $N_y < 0$ , то колесо не может оставаться в покое, а будет вращаться вокруг точки  $(x, 0)$ . Когда штанга не вращается, равенство (2.1) упрощается

$$2N_y l \sin \alpha = g[(M + m)l \sin \varphi_0 + ma \sin(\varphi_0 + \psi)].$$

Таким образом, неравенство

$$\sin(\varphi_0 + \psi) \geq -\frac{(M + m)l}{ma} \sin \varphi_0 \quad (2.2)$$

охватывает все положения штанги, при которых возможно равновесие колеса вместе с неподвижной относительно колеса штангой. Оно, очевидно, будет выполнено для всех значений угла  $\psi$ , если оно окажется выполненным при  $\varphi_0 + \psi = -\pi/2$ , и в этом случае выведение колеса из состояния покоя возможно только в динамическом режиме, когда штанга в начальный момент получает достаточное угловое ускорение. Заметим здесь, что динамический режим не очень удобен, если угловое положение штанги ограничено, и надо следить, чтобы это ограничение не нарушалось. Если при  $\varphi_0 + \psi = -\pi/2$  условие (2.2) не выполняется, то найдутся постоянные углы  $\psi$ , при которых колесо не сможет оставаться в покое и начнёт движение. Таким образом, условие управляемости движением колеса посредством изменения положения штанги имеет вид

$$\frac{a}{l} > \frac{M + m}{m} \sin \varphi_0 = \frac{M + m}{m} \sin(\alpha + \theta), \quad (2.3)$$

и означает, что длина штанги должна быть достаточно большой и тем больше, чем круче наклонная плоскость. Другими словами, равновесие может

быть нарушено тогда, когда сила тяжести системы способна создать отрицательный момент относительно точки опоры  $(x, 0)$ . Это и происходит, если выполнено (2.3) и

$$\sin(\varphi_0 + \psi) < -\frac{(M+m)l}{ma} \sin \varphi_0,$$

что говорит о том, что для возможности поворота колеса вокруг точки  $(x, 0)$  необходимо, чтобы центр масс штанги оказался вынесен вправо относительно вертикали, проходящей через эту точку на достаточно большое расстояние. Справедлива теорема

**Теорема 2.1.** *Для любых значений параметров*

$$p_a = \frac{a}{l} > 0, \quad p_m = \frac{m}{M+m}, \quad 0 < p_m < 1 \quad (2.4)$$

*найдутся углы  $\alpha > 0$  и  $\theta > 0$ , удовлетворяющие неравенству (2.3).*

**Доказательство.** Неравенство (2.3) можно переписать в виде

$$\sin(\alpha + \theta) < p_a p_m. \quad (2.5)$$

Если  $p_a p_m > 1$ , то утверждение теоремы очевидно. Если же  $p_a p_m \leq 1$ , то тогда утверждение теоремы следует из свойства монотонности функции  $\arcsin(p_a p_m)$ .  $\diamond$

**Следствие 2.1.** *Чем меньше сумма  $\alpha + \theta$ , тем легче удовлетворяется неравенство (2.5). В частности, оно выполняется для любых  $p_a > 0$  и  $0 < p_m < 1$ , если  $\alpha = 0$  и  $\theta \leq 0$ , то есть колесо с ободом ( $\alpha = 0$ ) катится либо по горизонтальной, либо по наклонной вниз прямой.*

Параметр  $p_a$  ограничивает снизу длину штанги, так как центр масс штанги всегда располагается внутри самой штанги. Если углы  $\alpha$  и  $\theta$  заданы, то параметры  $p_a$  и  $p_m$  связаны соотношением

$$p_a \geq \frac{\sin(\alpha + \theta)}{p_m}, \quad (2.6)$$

которое выделяет на рис. 2 область  $D$  допустимых значений указанных параметров.

Положение штанги в пространстве, пригодное для разгона колеса, будет соответствовать отрицательным значениям угла  $\psi$ . В пределах одного отрицательного полуоборота будем иметь

$$-\pi - \varphi_0 + \beta < \psi < -\varphi_0 - \beta, \quad \beta = \arcsin\left(\frac{M+m}{ma} l \sin \varphi_0\right). \quad (2.7)$$

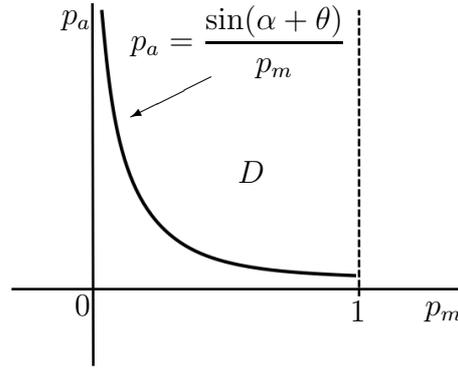


Рис. 2: Область допустимых значений параметров  $p_a$  и  $p_m$

Кроме того, следует учесть, что штанга должна находиться в верхней полуплоскости относительно оси  $Ax$  и не может иметь пересечения с этой осью. Пусть  $d > a$  — длина штанги. Тогда должно быть выполнено неравенство

$$l \cos \alpha + d \cos(\alpha + \psi) > 0.$$

Оно заведомо выполняется, если  $d < l \cos \alpha$ . Если  $d \geq l \cos \alpha$ , то в пределах одного оборота штанги решение этого неравенства, соответствующее положительному вращению штанги, записывается следующим образом:

$$-\alpha < \psi < \pi - \alpha - \arccos\left(\frac{l}{d} \cos \alpha\right),$$

а решение, соответствующее отрицательному вращению штанги, имеет вид

$$-\pi - \alpha + \arccos\left(\frac{l}{d} \cos \alpha\right) < \psi < -\alpha. \quad (2.8)$$

Последнее решение наиболее интересно, если учесть желаемое направление движения колеса в сторону точки  $B$ .

При выполнении неравенства

$$\theta \geq \beta - \arccos\left(\frac{l}{d} \cos \alpha\right) \quad (2.9)$$

наименьшая граница неравенства (2.8) не меньше наименьшей границы неравенства (2.7). Таким образом, пересечение областей, выделяемых неравенствами (2.7) и (2.8), записывается следующим образом:

$$\bar{\psi} < \psi < -(\varphi_0 + \beta), \quad (2.10)$$

где

$$\bar{\psi} = \begin{cases} -\pi - \varphi_0 + \beta, & \theta < \beta - \arccos\left(\frac{l}{d} \cos \alpha\right), \\ -\pi - \alpha + \arccos\left(\frac{l}{d} \cos \alpha\right), & \theta \geq \beta - \arccos\left(\frac{l}{d} \cos \alpha\right). \end{cases} \quad (2.11)$$

### 3. Управление штангой в одноопорной фазе движения

Уравнение изменения кинетического момента относительно точки  $(x, 0)$  принимает вид

$$\frac{dK}{dt} = g[(M + m)l \sin \varphi + am \sin \gamma], \quad (3.1)$$

где  $K$  определено формулой (1.4),  $\gamma = \varphi + \psi$  – угол между штангой и вертикалью (см. рис.1). Полученное уравнение свидетельствует о том, что рассматриваемая механическая система имеет дефицит управления по координате  $\varphi$ . Применим к ней теорию, развитую в работах [9–13]. Характеристическая функция  $f$  в данном случае принимает вид

$$f = [I + ml(l + a \cos \psi)] + (1 + \psi')[J + ma(a + l \cos \psi)], \quad (3.2)$$

где  $\psi' = d\psi/d\varphi$ . Пусть движение колеса происходит в направлении от точки  $A$  к точке  $B$ . Поставим задачу за счет управления функцией  $\psi(\varphi)$  обеспечить минимум отрицательной угловой скорости колеса  $\dot{\varphi}$  при заданном финальном значении угла  $\varphi = \varphi^- = -\alpha + \theta$ . Указанное значение  $\varphi^-$  соответствует возникновению очередной новой точки опоры из-за вращения колеса. Из теории, изложенной в работе [12], следует, что при  $f > 0$  такое управление выражается формулой

$$\tilde{\gamma}_m = \arg \min_{\gamma \in \bar{\Gamma}}(\sin \gamma), \quad (3.3)$$

где область  $\bar{\Gamma}$  определена неравенствами

$$\bar{\Gamma} = \{\gamma : \bar{\gamma}^* < \gamma < -\beta\}, \quad (3.4)$$

причём

$$\bar{\gamma}^* = \begin{cases} -\pi + \beta, & \theta < \beta - \arccos\left(\frac{l}{d} \cos(\varphi - \theta)\right), \\ -\pi + \theta + \arccos\left(\frac{l \cos(\varphi - \theta)}{d}\right), & \theta \geq \beta - \arccos\left(\frac{l}{d} \cos(\varphi - \theta)\right), \end{cases} \quad (3.5)$$

которые аналогичны неравенствам (2.10) и (2.11), но соответствуют случаю, когда опора осуществляется лишь на одну ногу.

Минимум функции  $\sin \gamma$  достигается при  $\gamma = -\pi/2$ . Поскольку  $0 < \beta < \pi/2$ , то первая строка соотношения (3.5) не влияет на выбор минимума этой функции. Следовательно,

$$\tilde{\gamma}_m = -\frac{\pi}{2}, \quad \text{если} \quad \theta < \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{l \cos(\varphi - \theta)}{d}\right), \quad (3.6)$$

Если же

$$\theta \geq \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{l \cos(\varphi - \theta)}{d}\right),$$

то

$$\tilde{\gamma}_m = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & -\frac{\pi}{2} \geq -\pi + \theta + \arccos\left(\frac{l \cos(\varphi - \theta)}{d}\right), \\ -\pi + \theta + \arccos\left(\frac{l \cos(\varphi - \theta)}{d}\right), & -\frac{\pi}{2} < -\pi + \theta + \arccos\left(\frac{l \cos(\varphi - \theta)}{d}\right). \end{cases} \quad (3.7)$$

Оптимальное значение угла  $\psi = \psi_m$  выражается формулой

$$\psi_m = -\varphi + \tilde{\gamma}_m. \quad (3.8)$$

В формуле (3.7) оптимальное значение  $\tilde{\gamma}_m$  зависит от  $\varphi$ . Для простоты можно несколько сузить область допустимых значений угла  $\gamma$ . С этой целью отметим, что в процессе движения в интервале времени существования одной и той же точки опоры выполнено неравенство

$$-\alpha < \varphi - \theta < \alpha. \quad (3.9)$$

Следовательно,

$$\arccos\left(\frac{l \cos(\varphi - \theta)}{d}\right) < \arccos\left(\frac{l \cos \alpha}{d}\right),$$

и мы можем выбирать в качестве оптимального управления

$$\gamma_m = \arg \min_{\gamma \in \Gamma} (\sin \gamma), \quad (3.10)$$

где область  $\Gamma$  определена неравенствами

$$\Gamma = \{\gamma : \bar{\gamma} < \gamma < -\beta\}, \quad (3.11)$$

причём

$$\bar{\gamma} = \begin{cases} -\pi + \beta, & \theta \leq \beta - \arccos\left(\frac{l \cos \alpha}{d}\right), \\ -\pi + \theta + \arccos\left(\frac{l \cos \alpha}{d}\right), & \theta > \beta - \arccos\left(\frac{l \cos \alpha}{d}\right). \end{cases} \quad (3.12)$$

Если  $\gamma \in \Gamma$ , то заведомо выполняется  $\gamma \in \bar{\Gamma}$ . Тогда вместо формулы (3.7) для простоты можно применить приближённую формулу

$$\gamma_m = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & -\frac{\pi}{2} \geq -\pi + \theta + \arccos\left(\frac{l \cos \alpha}{d}\right), \\ -\pi + \theta + \arccos\left(\frac{l \cos \alpha}{d}\right), & -\frac{\pi}{2} < -\pi + \theta + \arccos\left(\frac{l \cos \alpha}{d}\right). \end{cases} \quad (3.13)$$

Равенство (3.8) перепишется следующим образом:

$$\psi_m = -\varphi + \gamma_m. \quad (3.14)$$

Поэтому  $\psi'_m = -1$ . Формула (3.2) принимает вид

$$f = f_m = [I + ml(l + a \cos \psi_m)].$$

Поскольку справедливо соотношение  $-\alpha + \theta \leq \varphi \leq \alpha + \theta$ , то неравенство  $f > 0$  будет выполнено при

$$\frac{mla}{I + ml^2} < 1. \quad (3.15)$$

В дальнейшем условие (3.15) наряду с условием (2.3) будем предполагать выполненными.

Формула (3.8), так же как и формула (3.14), учитывают лишь ограничение на угол  $\psi$ , связанное с тем, что штанга не должна пересекать опорную плоскость. Это основное геометрическое ограничение рассматриваемой задачи. Вместе с тем могут иметь место и другие ограничения в зависимости от конструкции механизма и приводов системы. Даже в том случае, когда эти ограничения сводятся к заданию постоянной нижней границы изменения угла  $\gamma$ , оптимальным будет соответствующее постоянное значение, которое по-прежнему будем обозначать  $\gamma = \gamma_m$ :

$$\gamma_m = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & -\frac{\pi}{2} \in \Gamma^*, \\ \min_{\Gamma^*} \gamma, & -\frac{\pi}{2} \notin \Gamma^*, \end{cases} \quad (3.16)$$

где  $\Gamma^* \subset \Gamma$  — область допустимого изменения угла  $\gamma$ , учитывающая дополнительные ограничения.

#### 4. Безударная фаза движения

Если принять оптимальный в области  $\Gamma^*$  закон управления (3.16), то

$$f_m = (I + ml^2)[1 + c \cos(\gamma_m - \varphi)],$$

а уравнение (3.1) можно преобразовать к виду

$$p\dot{\varphi} \frac{d}{d\varphi} \{ \dot{\varphi} [1 + c \cos(\gamma_m - \varphi)] \} = (\sin \varphi + b \sin \gamma_m), \quad (4.1)$$

где  $\gamma_m = \text{const}$  определено формулой (3.13) и

$$b = \frac{ma}{(M + m)l}, \quad c = \frac{mla}{I + ml^2} < 1, \quad p = \frac{I + ml^2}{g(M + m)l}. \quad (4.2)$$

Уравнение (4.1) совпадает с уравнением Лагранжа, соответствующим координате  $\varphi$ . Движение определено в диапазоне

$$\varphi_0 \geq \varphi \geq \varphi^-, \quad \varphi_0 = \theta + \alpha, \quad \varphi^- = \theta - \alpha. \quad (4.3)$$

В соответствии с (2.3) принимается также, что

$$b > \sin \varphi_0. \quad (4.4)$$

Уравнение (4.1) интегрируется:

$$\frac{p}{2} \dot{\varphi}^2 [1 + c \cos(\gamma_m - \varphi)]^2 \Big|_{\varphi_0}^{\varphi^-} = \mathcal{I}, \quad (4.5)$$

где

$$\mathcal{I} = \int_{\varphi_0}^{\varphi^-} (\sin \varphi + b \sin \gamma_m) [1 + c \cos(\gamma_m - \varphi)] d\varphi, \quad \varphi_0 = \theta + \alpha, \quad \varphi^- = \theta - \alpha. \quad (4.6)$$

После преобразований найдем

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\gamma_m) = & - \left[ 2 \sin \theta \sin \alpha - \frac{c}{2} \sin(\gamma_m - 2\theta) \sin 2\alpha \right] - \\ & - \frac{b}{g} \sin \gamma_m \left[ 2gc \cos(\gamma_m - \theta) \sin \alpha + \left( g + \frac{l}{2p} \right) 2\alpha \right]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

С учетом того, что  $\varphi_0 > \varphi > \varphi^-$ , имеем  $\mathcal{I} > 0$ , если подынтегральное выражение в (4.6) отрицательно на интервале интегрирования, т.е. если выполнено неравенство

$$b \sin \gamma_m < -\sin \varphi_0 = -\sin(\theta + \alpha). \quad (4.8)$$

Из формулы (4.5) получим

$$\dot{\varphi}^- = -\sqrt{\frac{p\dot{\varphi}_0^2 [1 + c \cos(\gamma_m - \theta - \alpha)]^2 + 2\mathcal{I}(\gamma_m)}{p[1 + c \cos(\gamma_m - \theta + \alpha)]^2}}. \quad (4.9)$$

В том случае, когда наклон бруса невелик и другие ограничения необременительны, из (3.13) найдём  $\gamma_m = -\pi/2$ , и формулы (4.7) – (4.9) упрощаются:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\gamma_m) = \mathcal{I} = & (2b + c)\alpha - 2(1 + bc) \sin \theta \sin \alpha - \frac{c}{2} \sin 2\alpha \cos 2\theta > 0, \\ \dot{\varphi}^- = & -\sqrt{\frac{p\dot{\varphi}_0^2 [1 - c \sin(\theta + \alpha)]^2 + 2\mathcal{I}}{p[1 - c \sin(\theta - \alpha)]^2}}, \quad b > \sin(\theta + \alpha). \end{aligned} \quad (4.10)$$

## 5. Отображение Пуанкаре

При качении колеса координаты точек опоры спиц о балку образуют последовательность  $\{x_i\}$ , так что  $x_{i+1} = x_i + 2l \sin \alpha$ . Пусть безударная фаза движения осуществляется вокруг точки  $x_i$  с начальной угловой скоростью  $\dot{\varphi}_0 = \dot{\varphi}_i$ . После того, как колесо повернется на угол  $\Delta\varphi = -2\alpha$ , очередная спица колеса придёт в соприкосновение с балкой, а колесо будет иметь угловую скорость

$$\dot{\varphi}_{i+1}^- = -\sqrt{\frac{p\dot{\varphi}_i^2[1 + c \cos(\gamma_m - \theta - \alpha)]^2 + 2\mathcal{I}(\gamma_m)}{p[1 + c \cos(\gamma_m - \theta + \alpha)]^2}}, \quad (5.1)$$

где  $\mathcal{I}(\gamma_m)$  вычисляется по формуле (4.7). В новой точке опоры  $(x_{i+1}, 0)$  произойдёт удар. Примем, что при ударе предыдущая точка опоры с координатой  $(x_i, 0)$  мгновенно исчезает и сохраняется только кинетический момент колеса относительно новой точки опоры. Остальная часть кинетического момента теряется из-за удара. Пусть  $\mathbf{K}_i$  — вектор кинетического момента системы относительно опорной точки  $(x_i, 0)$  до удара, а  $\mathbf{K}_{i+1}$  — вектор кинетического момента системы относительно опорной точки  $(x_{i+1}, 0)$  после удара. Справедлива формула

$$\mathbf{K}_{i+1} = \mathbf{K}_i - (x_{i+1} - x_i, 0, 0) \times (M + m)(\dot{x}_c, \dot{y}_c, 0), \quad (5.2)$$

где скорости центра масс системы выражаются формулами

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= -\frac{(M + m)l\dot{\varphi} \cos(\varphi - \theta) + ma\dot{\gamma} \cos(\gamma - \theta)}{M + m}, \\ \dot{y}_c &= -\frac{(M + m)l\dot{\varphi} \sin(\varphi - \theta) + ma\dot{\gamma} \sin(\gamma - \theta)}{M + m}. \end{aligned}$$

Учтем, что в конечный момент безударной фазы движения  $\varphi = \varphi_{i+1}^- = \theta - \alpha$ ,  $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_{i+1}^-$ ,  $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_m = 0$ . Тогда с учетом формулы (1.4) и того, что после удара отсчет угла  $\varphi$  меняется в связи со сменой опорной ноги, так что  $\varphi_{i+1}^+ = \theta + \alpha$ , получим параметры системы до и после удара:

$$\begin{aligned} K_i &= \dot{\varphi}_{i+1}^- [I + ml^2 + mla \cos(\gamma_m - \theta + \alpha)], \\ K_{i+1} &= \dot{\varphi}_{i+1}^- [I + ml^2 + mla \cos(\gamma_m - \theta - \alpha)], \\ \dot{x}_c &= -\frac{(M + m)l\dot{\varphi}_{i+1}^- \cos \alpha}{M + m}, \quad \dot{y}_c = \frac{(M + m)l\dot{\varphi}_{i+1}^- \sin \alpha}{M + m}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

где  $\dot{\varphi}_{i+1}^-$  — угловая скорость вращения колеса после удара, которую требуется найти. Подставив значения (5.3) в формулу (5.2), найдём

$$K_{i+1} = K_i - 2(M + m)\dot{\varphi}_{i+1}^- l^2 \sin^2 \alpha. \quad (5.4)$$

Видим, что если штанга движется поступательно, то потеря кинетического момента при ударе не зависит от того, какой угол штанга составляет с вертикалью. Таким образом, отсутствует возможность влиять на потерю кинетического момента посредством изменения положения штанги.

Равенство (5.4) можно переписать следующим образом:

$$\dot{\varphi}_{i+1}^+ = \dot{\varphi}_{i+1}^- S(\gamma_m), \quad (5.5)$$

где

$$S(\gamma_m) = \frac{I + ml^2 + mla \cos(\gamma_m - \theta + \alpha) - 2(M + m)l^2 \sin^2 \alpha}{I + ml^2 + mla \cos(\gamma_m - \theta - \alpha)} \quad (5.6)$$

— коэффициент преобразования скорости при ударе. Его можно представить в виде

$$S(\gamma_m) \equiv S(\delta_m) = 1 - \frac{2 \sin \alpha [b \sin \delta_m + \sin \alpha]}{e + b \cos(\delta_m - \alpha)}, \quad (5.7)$$

где параметры  $b$  определены формулами (4.2) и

$$e = 1 + \frac{I_c}{(M + m)l^2}. \quad (5.8)$$

Угол  $\delta_m = \gamma_m - \theta$  отсчитывается от направления оси  $Ay$  до штанги. Для рассматриваемого движения этот угол должен быть отрицателен.

Если  $\alpha = 0$ , то  $S(\delta_m) \equiv 1$  независимо от значения  $\delta_m$ . В этом случае удары вообще отсутствуют.

Из формулы (3.15) следует, что знаменатель правой части выражения (5.7) положителен. Следовательно, знак дроби в правой части формулы (5.7) совпадает со знаком величины

$$D(\delta_m) = b \sin \delta_m + \sin \alpha. \quad (5.9)$$

В ней первое слагаемое отвечает за изменение скорости вследствие уменьшения момента инерции системы при смене точки опоры, а второе — за рассеивание энергии в процессе удара.

Если  $\alpha > 0$  и  $b < \sin \alpha$ , то  $S(\delta_m) < 1$ , а угловая скорость колеса ожидаемо уменьшается при ударе.

Пусть выполнено

$$\alpha > 0, \quad b \geq \sin \alpha. \quad (5.10)$$

Тогда существуют значения угла  $\delta_m$ , при которых  $S(\delta_m) = 1$ . Они удовлетворяют уравнению

$$\sin \delta_m = -\frac{\sin \alpha}{b}. \quad (5.11)$$

**Теорема 5.1.** Если  $b > \sin \alpha$ , то значения угла  $\delta_m$ , для которых  $S(\delta_m) > 1$ , лежат в диапазоне

$$-\pi + \arcsin \frac{\sin \alpha}{b} < \delta_m < -\arcsin \frac{\sin \alpha}{b} \Rightarrow S(\delta_m) > 1. \quad (5.12)$$

**Доказательство.** Из формулы (5.7) видно, что  $S(\delta_m) > 1 \Leftrightarrow D(\gamma_m) < 0$ . Поэтому должно быть

$$\sin \delta_m < -\frac{\sin \alpha}{b}.$$

В пределах одного оборота по  $\delta_m$  последнее неравенство будет выполнено тогда и только тогда, когда угол  $\delta_m$  выбран в диапазоне (5.12).  $\diamond$

**Следствие 5.1.** В диапазоне (5.12) функция  $S(\delta_m)$  имеет единственный максимум, причем

$$\bar{\delta}_m = \operatorname{argmax} S(\delta_m) = -\chi - \sigma, \quad (5.13)$$

где

$$\begin{aligned} \chi &= \arcsin \frac{2b \cos \alpha}{\sqrt{(2e-1)^2 + 2(2e-1) \cos 2\alpha + 1}}, \\ \sigma &= \arcsin \frac{2e-1 + \cos 2\alpha}{\sqrt{(2e-1)^2 + 2(2e-1) \cos 2\alpha + 1}}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

**Доказательство.** В пределах одного оборота по углу  $\delta_m$  уравнение (5.11) имеет два решения:

$$\delta_1 = -\arcsin \frac{\sin \alpha}{b}, \quad \delta_2 = -\pi + \arcsin \frac{\sin \alpha}{b}.$$

В интервале  $\delta_1 > \delta_m > \delta_2$  функция  $S(\delta_m) > 1$ . Следовательно, в указанном диапазоне эта функция имеет хотя бы один максимум. Найдём производную

$$\frac{d}{d\delta_m} \left[ \frac{b \sin \delta_m + \sin \alpha}{e + b \cos(\delta_m - \alpha)} \right] = b \frac{e \cos \delta_m + b \cos \alpha + \sin \alpha \sin(\delta_m - \alpha)}{[e + b \cos(\delta_m - \alpha)]^2}.$$

Экстремумы функции  $S(\delta_m)$  удовлетворяют уравнению

$$e \cos \delta_m + b \cos \alpha + \sin \alpha \sin(\delta_m - \alpha) = 0. \quad (5.15)$$

Это уравнение можно преобразовать к виду

$$(e - \sin^2 \alpha) \cos \delta_m + \sin \alpha \cos \alpha \sin \delta_m = -b \cos \alpha,$$

или

$$(2e - 1 + \cos 2\alpha) \cos \delta_m + \sin 2\alpha \sin \delta_m = -2b \cos \alpha.$$

Применив вспомогательный угол  $\sigma$ , определённый формулами (5.14), для которого

$$\begin{aligned}\sin \sigma &= \frac{2e - 1 + \cos 2\alpha}{\sqrt{(2e - 1)^2 + 2(2e - 1) \cos 2\alpha + 1}}, \\ \cos \sigma &= \frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{(2e - 1)^2 + 2(2e - 1) \cos 2\alpha + 1}},\end{aligned}\tag{5.16}$$

получим уравнение

$$\sin(\delta_m + \sigma) = -\frac{2b \cos \alpha}{\sqrt{(2e - 1)^2 + 2(2e - 1) \cos 2\alpha + 1}},$$

которое в пределах одного оборота по углу  $\delta_m$  имеет лишь два корня:

$$\delta_{1m} = -\chi - \sigma, \quad \delta_{2m} = -\pi + \chi - \sigma,\tag{5.17}$$

где угол  $\chi$  определён формулами (5.14). Очевидно, что

$$\delta_{1m} - \delta_{2m} = \pi - 2\chi > 0.$$

Кроме того, имеем

$$\left. \frac{dS(\delta_m)}{d\delta_m} \right|_{\delta_m=0} = -2 \sin \alpha \frac{e + \sin \alpha - \sin^2 \alpha + b}{[e + b \cos(\delta_m - \alpha)]^2} < 0.$$

Следовательно, именно корень  $\delta_{1m}$  представляет собой аргумент единственного максимума функции  $S(\delta_m)$ . Корень  $\delta_{2m}$  служит в пределах одного оборота по углу  $\delta_m$  аргументом минимума указанной функции.  $\diamond$

Отображение Пуанкаре принимает вид

$$\dot{\varphi}_{i+1} = -S(\delta_m) \sqrt{\frac{p\dot{\varphi}_i^2 [1 + c \cos(\delta_m - \alpha)]^2 + 2\mathcal{I}(\gamma_m)}{p[1 + c \cos(\delta_m + \alpha)]^2}}.\tag{5.18}$$

## 6. Свойства отображения Пуанкаре

Отображение Пуанкаре (5.18) можно представить в виде

$$\dot{\varphi}_{i+1}^2 = \varkappa^2 \dot{\varphi}_i^2 + \mathcal{J},\tag{6.1}$$

где

$$\begin{aligned}\varkappa &= \frac{S(\delta_m)[e + b \cos(\delta_m - \alpha)]}{e + b \cos(\delta_m + \alpha)} = 1 - \frac{2 \sin^2 \alpha}{e + b \cos(\delta_m + \alpha)} \leq 1, \\ \mathcal{J} &= \frac{2S^2(\delta_m)\mathcal{I}(\gamma_m)}{p[1 + c \cos(\delta_m + \alpha)]^2}.\end{aligned}\tag{6.2}$$

**Замечание 6.1.** Отношение

$$\frac{e + b \cos(\delta_m - \alpha)}{e + b \cos(\delta_m + \alpha)} > 0. \quad (6.3)$$

Поэтому  $S \leq 0 \Leftrightarrow \varkappa \leq 0$ , причем  $\varkappa = 0 \Leftrightarrow S = 0$ .

**Теорема 6.1.** При  $S > 0$  и  $\mathcal{J} \geq 0$  отображение Пуанкаре (5.18) имеет устойчивую неподвижную точку вида

$$\dot{\varphi}^* = -\sqrt{\frac{\mathcal{J}}{1 - \varkappa^2}}. \quad (6.4)$$

**Доказательство.** Неподвижная точка  $\dot{\varphi}^*$  угловой скорости колеса удовлетворяет уравнению

$$(1 - \varkappa^2)(\dot{\varphi}^*)^2 = \mathcal{J}.$$

Поскольку согласно условию теоремы имеем  $0 < \varkappa < 1$  и  $\mathcal{J} > 0$ , это уравнение имеет положительное решение, которое при  $\varkappa > 0$  с учётом выбранного ранее направления движения соответствует формуле (6.4). Для доказательства устойчивости неподвижной точки сделаем замену  $\dot{\varphi}_i^2 = (\dot{\varphi}^*)^2 + \xi_i$ . Тогда  $\xi_i$  удовлетворяет уравнению

$$\xi_{i+1} = \varkappa^2 \xi_i.$$

Относительно  $\xi_i$  получилась монотонно убывающая по абсолютной величине геометрическая прогрессия.  $\diamond$

**Следствие 6.1.** Если  $\gamma_m$  не меняется от шага к шагу, то

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \dot{\varphi}^* = -\infty, \quad \dot{\varphi}_i|_{\alpha=0} = -\sqrt{\dot{\varphi}_0^2 + i\mathcal{J}}, \quad i \in \mathbb{N}. \quad (6.5)$$

**Доказательство.** Из формул (6.2) и (4.10) видно, что при  $\alpha \rightarrow +0$  выполняется  $\mathcal{J}(\alpha) = O(\alpha)$  и  $1 - \varkappa = O(\alpha^2)$ . Поэтому справедливо первое соотношение (6.5). С другой стороны, при  $\alpha = 0$  имеем  $\varkappa = 1 > 0$ , и равенство (6.1) принимает вид

$$\dot{\varphi}_{i+1}^2 = \dot{\varphi}_i^2 + \mathcal{J},$$

откуда и получается вторая формула (6.5).  $\diamond$

Если угол  $\alpha$  увеличивается, то  $\varkappa$  убывает.

**Теорема 6.2.** Значения параметров  $\alpha$  и  $\delta_m$ , для которых будет выполнено  $\varkappa = 0$ , существуют тогда и только тогда, когда  $b < e \leq 3b$ .

**Доказательство.** Из формул (5.8) и (6.2) следует, что  $\varkappa = 0$ , если углы  $\alpha$  и  $\delta_m$  удовлетворяют уравнению

$$\cos(\delta_m + \alpha) = 2 \sin^2 \alpha - \frac{e}{b} = 1 - \frac{e}{b} - \cos 2\alpha = - \left[ \frac{e}{b} - 1 + \cos 2\alpha \right]. \quad (6.6)$$

Это уравнение относительно  $\delta_m$  имеет решение тогда и только тогда, когда

$$-\frac{e}{b} \leq \cos 2\alpha \leq -\frac{e}{b} + 2.$$

Но согласно (3.15) имеем  $e > b$ . Поэтому левая часть полученного неравенства будет выполнена всегда, и решение будет существовать, если значение его правой части не меньше  $-1$ .  $\diamond$

**Следствие 6.2.** Если  $e > 3b$ , то  $\varkappa > 0$ ,  $\forall(\delta_m, \alpha)$ .

**Доказательство.** При  $e > 3b$  параметр  $\varkappa$ , как следует из теоремы 6.2, не может обратиться в ноль, какие бы ни были углы  $\delta_m$  и  $\alpha$ . Кроме того, из (6.2) следует, что если  $\alpha = 0$ , то  $\varkappa = 1$ .  $\diamond$

**Замечание 6.2.** При  $\varkappa = 0$  колесо будет катиться вверх по склону, но приращение скорости, полученное за одноопорную фазу движения, будет полностью «съедено» при ударе. Неподвижная точка в этом случае окажется  $\dot{\varphi}^* = 0$ , поскольку тогда будет  $S = 0$  и  $\mathcal{J} = 0$ .

В случае, когда  $b < e \leq 3b$  и

$$\cos(\delta_m + \alpha) < - \left[ \frac{e}{b} - 1 + \cos 2\alpha \right], \quad (6.7)$$

имеем  $S < 0$ . При малых значениях  $|S|$  это означает, что после соприкосновения новой опорной спицы с прямой  $AB$  колесо из-за удара получит положительную угловую скорость, и новая точка опоры исчезнет. Возникнет вращение вокруг исходной опорной точки. В результате действия силы тяжести это вращение замедлится, и колесо в конце концов снова ударится об опору. Возникнет некое подобие последовательности ударов с отскоками.

## 7. Управление штангой

Управление по углу  $\psi$  можно найти из соответствующего этому углу уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} [mal\dot{\varphi} \cos \psi + (J + ma^2)(\dot{\varphi} + \dot{\psi})] = gma \sin \gamma + Q_\psi,$$

где  $Q_\psi$  — управляющий момент, приложенный в точке крепления штанги к центру колеса. Примем во внимание, что оптимальное управление по углу  $\psi$

должно обеспечивать равенство  $\varphi + \psi = \gamma_m = \text{const}$ . Тогда уравнение для определения  $Q_\psi$  предстанет в виде

$$mal \frac{d}{dt} [\dot{\varphi} \cos(\gamma_m - \varphi)] = gma \sin \gamma_m + Q_\psi, \quad (7.1)$$

откуда

$$Q_\psi = ma \left[ -g \sin \gamma_m + l \frac{d^2}{dt^2} \sin(\varphi - \gamma_m) \right]. \quad (7.2)$$

Это значит, что управляющий момент должен компенсировать момент, создаваемый весом штанги и силой инерции от проекции ускорения центра колеса на ось, перпендикулярную к штанге и повернутую относительно штанги в положительном направлении.

Уравнение (3.1), описывающее изменение кинетического момента, можно представить в виде

$$(I + ml^2)\ddot{\varphi} - mal \frac{d^2}{dt^2} \sin(\gamma_m - \varphi) = g[(M + m)l \sin \varphi + am \sin \gamma_m] \quad (7.3)$$

или в форме, более удобной для интегрирования,

$$l \frac{d}{dt} [\dot{\varphi} (1 + c \cos(\gamma_m - \varphi))] = \frac{l}{p} \sin \varphi + gc \sin \gamma_m. \quad (7.4)$$

Полученное уравнение допускает интегрирующий множитель

$$\dot{\varphi} [1 + c \cos(\gamma_m - \varphi)].$$

Приняв, что в начальный момент  $\varphi_0 = \alpha + \theta$  и  $\dot{\varphi}_0 = 0$ , после умножения на интегрирующий множитель и последующего интегрирования получим

$$\frac{l}{2} \left\{ \dot{\varphi}^2 [1 + c \cos(\gamma_m - \varphi)]^2 \right\} \Big|_{\varphi_0}^{\varphi} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \left( \frac{l}{p} \sin \varphi + gc \sin \gamma_m \right) [1 + c \cos(\gamma_m - \varphi)] d\varphi,$$

или

$$\begin{aligned} & \frac{l}{2} \left\{ \dot{\varphi}^2 [1 + c \cos(\gamma_m - \varphi)]^2 \right\} \Big|_{\varphi_0}^{\varphi} = \\ & = \left\{ -\frac{l}{p} \left[ \cos \varphi + \frac{c}{4} \cos(\gamma_m - 2\varphi) \right] - c \sin \gamma_m \left[ gc \sin(\gamma_m - \varphi) - \left( g + \frac{l}{2p} \right) \varphi \right] \right\} \Big|_{\varphi_0}^{\varphi}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Из уравнения (7.4) также найдем

$$l[\ddot{\varphi}(1 + c \cos(\gamma_m - \varphi)) + c\dot{\varphi}^2 \sin(\gamma_m - \varphi)] = \frac{l}{p} \sin \varphi + gc \sin \gamma_m,$$

или

$$\ddot{\varphi} = \frac{1}{1 + c \cos(\gamma_m - \varphi)} \left[ \frac{1}{p} \sin \varphi + \frac{gc}{l} \sin \gamma_m - c\dot{\varphi}^2 \sin(\gamma_m - \varphi) \right]. \quad (7.6)$$

Кроме того,

$$\frac{d^2}{dt^2} \sin(\gamma_m - \varphi) = \dot{\varphi}^2 \sin(\gamma_m - \varphi) - \ddot{\varphi} \cos(\gamma_m - \varphi).$$

Последняя формула вместе с формулами (7.5) и (7.6) дают возможность вычислить управляющий момент по формуле (7.2).

Для неподвижной точки отображения Пуанкаре расчёт величины  $Q_\psi$  упрощается. Соответствующая стационарная скорость постоянна. В этом случае центр масс колеса будет испытывать только центробежное ускорение от вращения с постоянной угловой скоростью вокруг опорной точки. Следовательно,

$$Q_\psi = ma[-g \sin \gamma_m + l(\dot{\varphi}^*)^2 \sin(\gamma_m - \varphi)]. \quad (7.7)$$

Поэтому

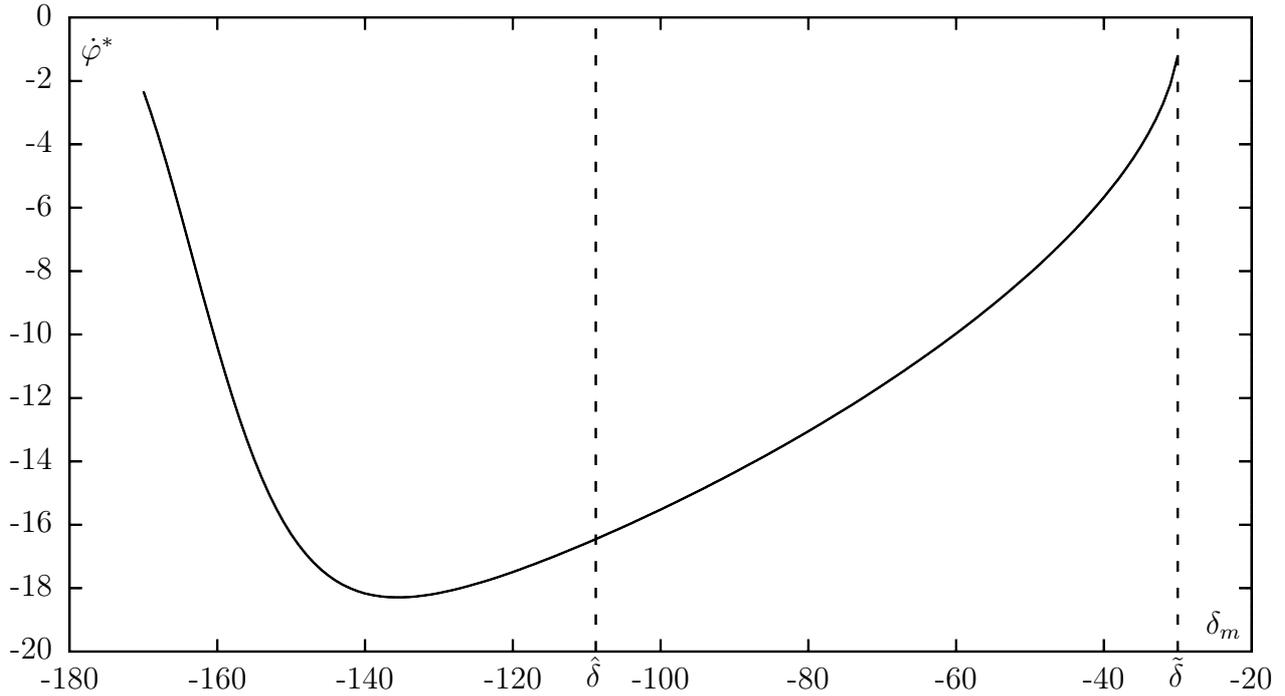
$$\bar{Q}_\psi = \max_{\varphi} Q_\psi = ma[-g \sin \gamma_m + l(\dot{\varphi}^*)^2]. \quad (7.8)$$

## 8. Результаты расчётов

Для вычислений были выбраны следующие параметры системы. Колесо состоит из центрального сплошного однородного диска радиусом  $l_d = 0.1$  м и массой  $M_d = 1$  кг. Из диска торчат однородные спицы каждая длиной  $l = 0.25$  м, отсчитываемой от центра колеса, и массой  $m_c = 0.01$  кг. Таким образом, центральный момент инерции колеса равен  $I_c = M_d l_d^2 / 2 + \nu m_c l^2 / 3$ , где  $\nu$  — число спиц. Зададим угол  $\alpha = 15^\circ$ . Так что число спиц  $\nu = 12$ . Следовательно,  $I_c = 0.0075$  кг м<sup>2</sup>, а масса колеса составляет  $M = 1.12$  кг. Угол наклона опоры примем равным  $\theta = 15^\circ$ . Длина штанги  $d \leq l \cos \alpha / \sin \theta \approx 4l$ . Расстояние от центра колеса до центра масс штанги примем  $a = 3l = 0.75$  м. Масса штанги равна  $m = Mp_m / (1 - p_m)$ . Далее согласно ограничению (2.5) имеем  $p_m > \sin(\theta + \alpha) / p_\alpha = \sin 30^\circ / 3 = 1/6$ . Поэтому можно принять  $p_m = 1/3$ . Тогда оказывается, что в данном случае  $m = 0.56$  кг. Будем считать, что вся масса штанги сосредоточена в её центре масс. В этом предположении момент инерции штанги относительно центра колеса равен  $J = ma^2 = 0.315$  кг м<sup>2</sup>. Таким образом, согласованные параметры задачи можно взять следующими:

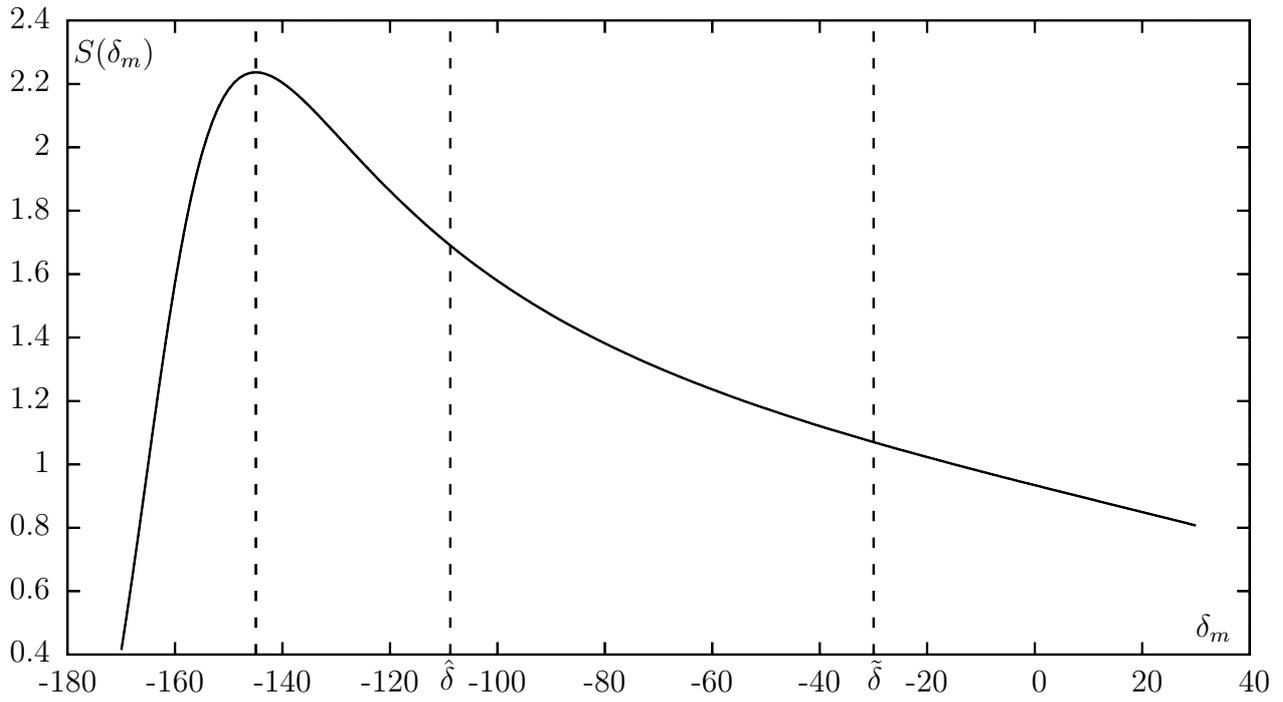
$$l = 0.25 \text{ м}, \quad M = 1.12 \text{ кг}, \quad I_c = 0.0075 \text{ кг м}^2, \quad a = 0.75 \text{ м}, \quad m = 0.56 \text{ кг}, \quad (8.1)$$

$$\alpha = 15^\circ, \quad \theta = 15^\circ, \quad d = 0.8 \text{ м}, \quad I = 0.0775 \text{ кг м}^2, \quad J = 0.315 \text{ кг м}^2.$$

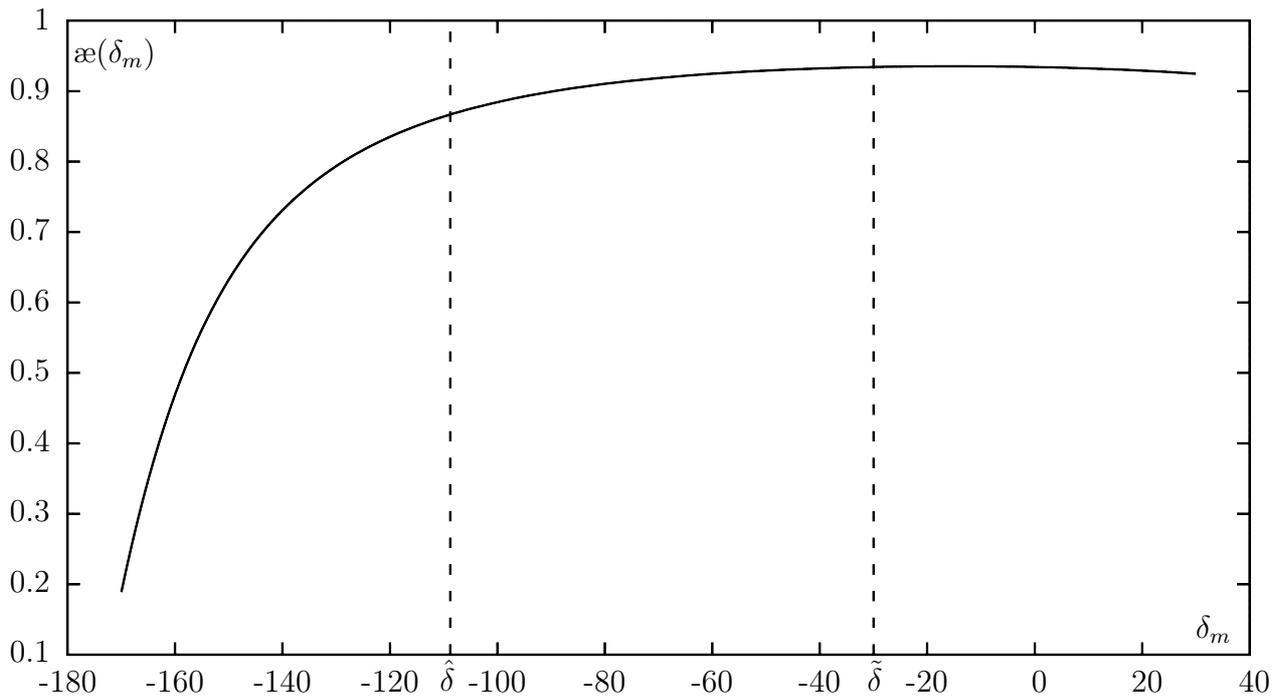
Рис. 3: Зависимость  $\dot{\varphi}^*$  от  $\delta_m$ 

На рис. 3 показана зависимость неподвижных точек отображений Пуанкаре для различных значений углов  $\delta_m$ .

При  $\delta_m > \tilde{\delta}$  неподвижные точки отсутствуют из-за того, что наклон штанги не позволяет получить достаточное приращение квадрата скорости, и тогда оказывается  $\mathcal{J} < 0$ . При  $\delta_m \leq \hat{\delta}$  конец штанги находится на или ниже опорной поверхности. Таким образом, рабочий диапазон изменения положения штанги выглядит как  $\hat{\delta} < \delta_m < \tilde{\delta}$ . Изображенная зависимость в рабочем диапазоне монотонно возрастает. За пределами рабочего диапазона она оказывается немонотонной и имеет минимум в окрестности значения  $\delta_m = -140^\circ$ . Другими словами, значение  $\gamma_m = -90^\circ$ , локально оптимальное для одноопорной фазы движения, не является оптимальным для отображения Пуанкаре в целом. Причина состоит в том, что в рабочем диапазоне изменения угла  $\delta_m$  и, в частности, вблизи значения  $\gamma_m = -90^\circ$  коэффициент диссипации  $S(\delta_m)$  убывает, что хорошо видно на рис. 4. Из-за этого выигрыш в угловой скорости, полученный в ходе одноопорной фазы движения за счёт выбора оптимального значения угла  $\gamma$ , увеличивается при ударе очередной спицы об опору из-за уменьшения момента инерции системы при смене опорных ног. Как уже отмечалось выше, функция  $S(\delta_m)$  имеет максимум, который для принятого набора параметров задачи не попадает в рабочий диапазон изменения угла  $\delta_m$ .

Рис. 4: Зависимость  $S(\delta_m)$ 

На рис. 5 представлена зависимость  $\varkappa(\delta_m)$ , которая характеризует изменение энергии системы при ударе. Видно, что при любом значении  $\delta_m$  коэффициент  $\varkappa(\delta_m) < 1$ , что говорит о рассеивании энергии при взаимодействии спиц с опорой.

Рис. 5: Зависимость  $\varkappa(\delta_m)$

На рис. 6 показана зависимость параметра  $\mathcal{J}(\delta_m)$ . В рабочем диапазоне она монотонно убывает, оставаясь положительной. Но если  $\delta_m > \tilde{\delta}$ , то возникает режим торможения, поскольку здесь  $\mathcal{J}(\delta_m) < 0$  и отображение Пуанкаре монотонно убывает, не имея неподвижных точек.

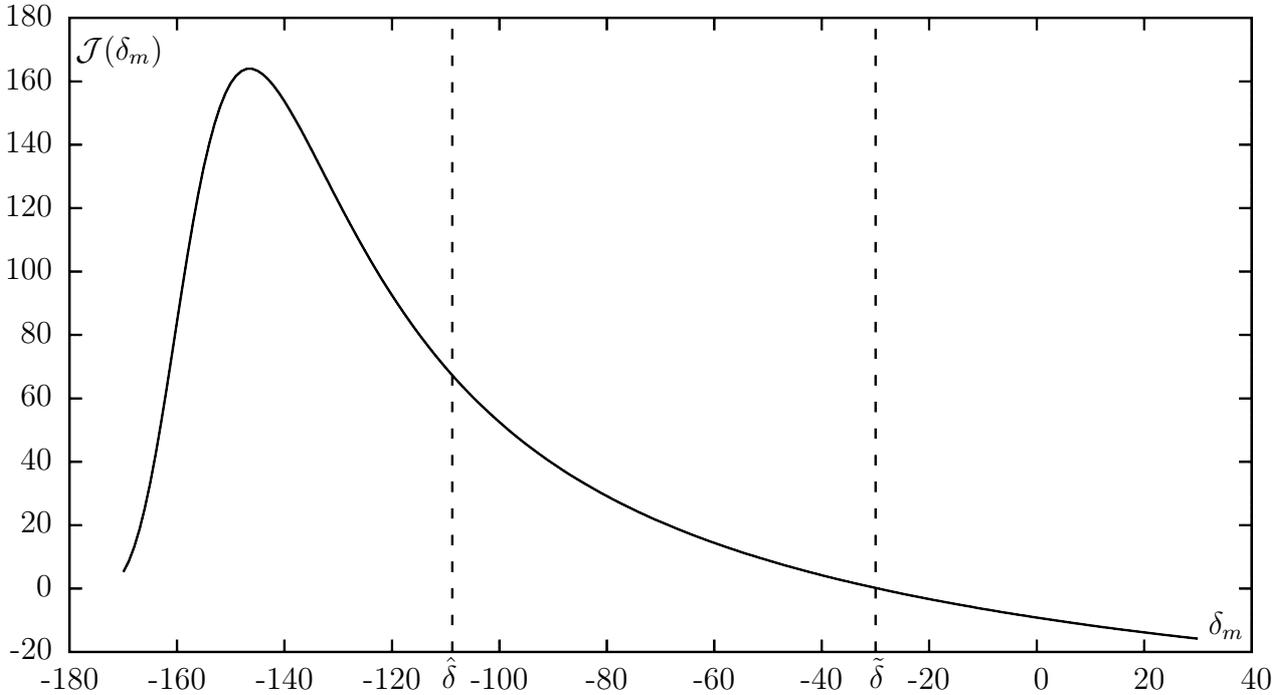


Рис. 6: Зависимость  $\mathcal{J}(\delta_m)$

На рис. 7 приведены диаграммы Пуанкаре для значений  $\delta_m = -105^\circ$  ( $\gamma_m = -90^\circ$ ) и  $\delta_m = -30^\circ$  ( $\gamma_m = -15^\circ$ ). Неподвижная точка отмечена кружочком. Как и следовало ожидать, разгон колеса при  $\delta_m = -105^\circ$  происходит более интенсивно, чем при  $\delta_m = -30^\circ$ . Вместе с тем если небольшая угловая скорость, соответствующая неподвижной точке, годится, то малые углы наклона штанги обладают некоторыми преимуществами по сравнению с большими углами, так как момент  $\bar{Q}_\psi$  в неподвижной точке для малых углов наклона штанги будет меньше, чем для больших. На рис. 8 показана зависимость максимального управляющего момента для неподвижных точек, соответствующих различным значениям угла  $\delta_m$ . Эта зависимость имеет максимум в окрестности значения  $\delta_m = -135^\circ$ , коррелирующий с минимумом на графике 3. В рабочем диапазоне изменения угла  $\delta_m$  функция  $\bar{Q}_\psi(\delta_m)$  монотонно убывает. На рис. 8 видно, что для принятых значений параметров (8.1) будет вполне достаточно двигателя, развивающего момент, соответствующий силе 5.5 кГс, приложенной к центру масс штанги, для того, чтобы обеспечить работоспособность системы во всём целесообразном диапазоне значений углов  $\delta_m$ .

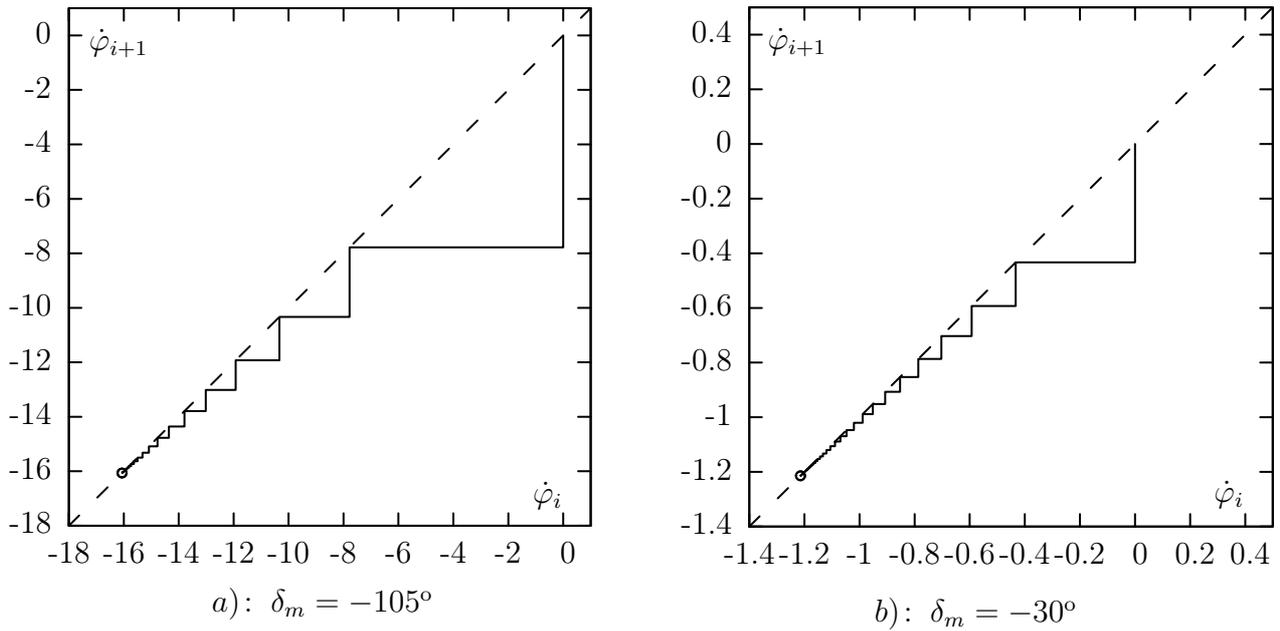
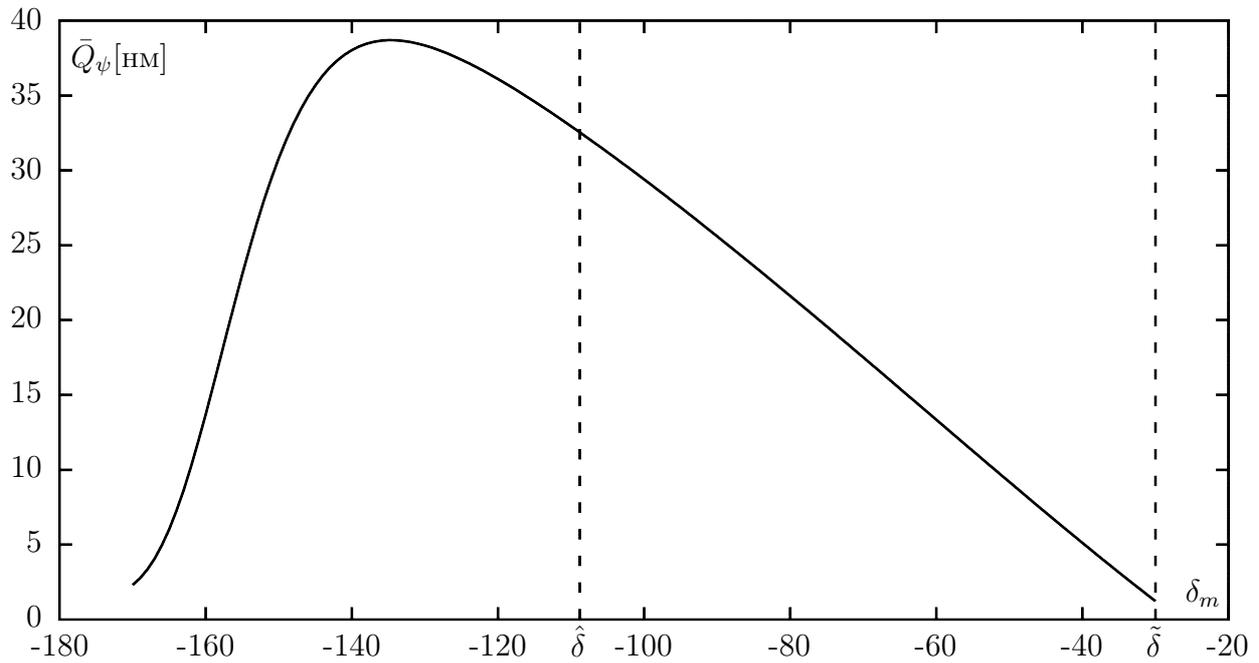


Рис. 7: Диаграммы Пуанкаре

Рис. 8: Зависимость  $\bar{Q}_\psi$  от  $\delta_m$ 

## Заключение

В работе исследована новая задача о динамике колеса без обода с прикрепленной к центру колеса штангой. Штанга имитирует корпус системы, с помощью которого можно разгонять или тормозить колесо, используя для этого силу тяжести.

По результатам исследования можно сделать следующие выводы.

1. Корпус при двуногой ходьбе может играть активную роль, способствуя движению аппарата или затрудняя его.

2. Для обеспечения максимального ускорения колеса в одноопорной фазе движения штанга должна быть в допустимых пределах максимально отклонена от вертикали в сторону желаемого ускорения колеса. При отсутствии ограничений на наклон штанги она должна составлять с вертикалью прямой угол.

3. Оптимальный в смысле максимума угловой скорости колеса закон управления штангой на последовательности шагов отличается от локально оптимального закона управления, полученного для одноопорной фазы движения. Оптимальный закон требует сохранять положение штанги, соответствующее нижней границе допустимой зоны отклонения штанги от вертикали.

4. Последовательность угловых скоростей при смене опорных ног, сопровождаемой ударами об опорную поверхность, имеет при достаточном угле наклона штанги устойчивую неподвижную точку, соответствующую стационарной угловой скорости вращения колеса. Стационарная угловая скорость колеса зависит от ограничений на управление.

5. Установлено, что силовой управляющий момент зависит лишь от момента, создаваемого весом штанги, и от момента, создаваемого силой инерции, соответствующей проекции ускорения центра колеса на перпендикуляр к штанге, повернутый относительно штанги в положительном направлении. Найдена расчетная формула для максимального управляющего силового момента, соответствующая стационарному движению колеса в зависимости от углов поворота штанги.

## Список литературы

1. *Tad McGeer*. Passive Dynamic Walking // International Journal of Robotics Research, vol. 9, no. 2, pp. 62-82, April, 1990.  
DOI: 10.1177/027836499000900206
2. *Jean-Paul Laumond, Mehdi Benallegue, Justin Carpentier, Alain Berthoz*. The Yoyo-Man // International Symposium on Robotics Research, Sep 2015, Sestri Levante, Italy. <hal-01175591>.
3. *Yasushi Iwatani*. Dynamics of rimless wheel robots during collision // SICE Journal of Control, Measurement, and System Integration, 15:1, 1-9, DOI: 10.1080/18824889.2022.2029032
4. *Боровин Г.К., Лапшин В.В.* Колесо без обода // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2022. № 20. 17 с.

<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2022-20>. DOI: 10.20948/prepr-2022-20 EDN: BXYAUJ

5. *Asano F., Luo Z.-W.* Asymptotically Stable Biped Gait Generation based on Stability Principle of Rimless Wheel. *Robotica*, 2009, Vol. 27, No. 6, p. 949-958. DOI: 10.1017/S0263574709005372
6. *Narukawa T., Takamashi M., Yoshida K.* Design and Stability Analysis of a 3D Rimless Wheel with Flat Feet and Ankle Springs // *Journal of System Design and Dynamics*, 2009, Vol. 3, No. 3, p. 258-269. DOI: 10.1299/jsdd.3.258
7. *Голубев Ю.Ф., Корянов В.В.* Управление движением инсектоморфного робота на подвижном шаре // *Изв. РАН. ТиСУ*. 2009. № 5. С. 131-142; *Golubev Yu.F., Koryanov V.V.* Motion Control for an Insectomorphic Robot on a Movable Ball. Pleiades Publishing, Ltd., *Journal of Computer and System Sciences International*. 2009. Vol. 48, No. 5. Pp. 801-813. DOI: 10.1134/S1064230709050141 EDN: MWYOVL
8. *Коновалов А.* Модный колобок // *Бизнес-журнал* № 6 2014.
9. *Голубев Ю.Ф.* Метод оптимального управления колебаниями механических систем // *Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша*. 2021. № 33. 37 с. <https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2021-33>. DOI: 10.20948/prepr-2021-33 EDN: RRDKAQ
10. *Golubev, Yu.F.* Optimal Control for Nonlinear Oscillations of Natural Mechanical Systems // *Lobachevskii J Math* V. 42, No 11, pp. 2596-2607 (2021). ISSN: 1995-0802. DOI: 10.1134/S199508022111010X EDN: QCSTPB
11. *Голубев Ю.Ф.* Оптимизация колебаний механических систем // *Доклады российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления*, ISSN (PRINT): 2686-9543, 2022, том 502, с. 52-57. DOI: 10.31857/S2686954322010040 EDN: LASLAL
12. *Голубев Ю.Ф.* Управление амплитудой колебаний механических систем // *Известия РАН. Теория и системы управления*, ISSN: 0002-3388, 2022, № 4, с. 22-30. DOI: 10.31857/S0002338822040084 EDN: KSPRLT
13. *Голубев Ю.Ф.* Оптимизация колебаний механических систем с трением // *Доклады российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления*, ISSN (PRINT): 2686-9543, 2023, том 512, с. 18-26. DOI: 10.31857/S2686954323600052 EDN: PKNCIY
14. *Голубев Ю.Ф., Корянов В.В.* Экстремальные локомоторные возможности инсектоморфных роботов. — М: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2018. — 212 с. DOI: 10.20948/mono-2018-golubev ISBN: 978-5-98354-040-8 EDN: YTGZTQ