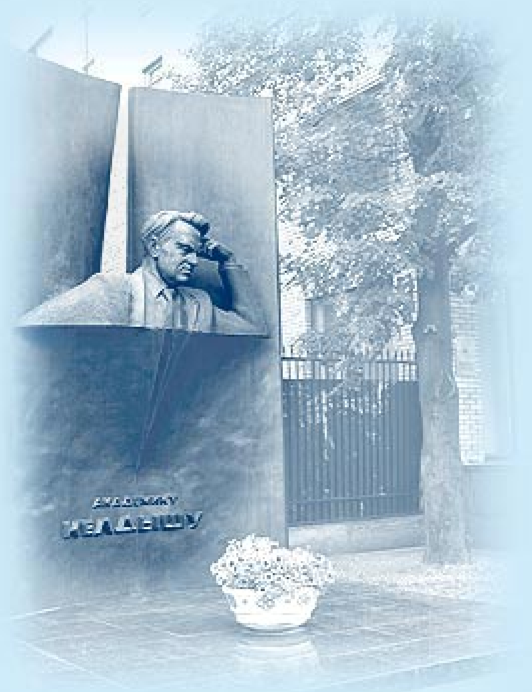
ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 9 за 2024 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

А.В. Колесниченко

К теории спиральной турбулентности немагнитного астрофизического диска. Образование крупномасштабных вихревых структур

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Колесниченко А.В. К теории спиральной турбулентности немагнитного астрофизического диска. Образование крупномасштабных вихревых структур // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2024. № 9. 56 с.
https://doi.org/10.20948/prepr-2024-9
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2024-9

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук

А.В. Колесниченко

К теории спиральной турбулентности немагнитного астрофизического диска. Образование крупномасштабных вихревых структур

Москва — 2024

Колесниченко А.В.

К теории спиральной турбулентности немагнитного астрофизического диска. Образование крупномасштабных вихревых структур

Приведена замкнутая система трехмерных гидродинамических уравнений масштаба среднего движения, предназначенная для моделирования спиральной турбулентности во вращающемся астрофизическом диске. Выведены уравнения диффузии для осредненного вихря и уравнение переноса интегральной вихревой спиральности. Сформулирована общая концепция возникновения энергоемких мезомасштабных когерентных вихревых структур в термодинамически открытой подсистеме турбулентного хаоса, связанная с реализацией обратного каскада кинетической энергии в зеркально несимметричной дисковой турбулентности. Показано, что отрицательная вязкость во вращающейся дисковой трехмерной системе является, по-видимому, проявлением каскадных процессов в спиральной турбулентности, когда осуществляется инверсный перенос энергии от малых вихрей к более крупным. Показано также, что относительно длительное затухание турбулентности в диске связано с отсутствием отражательной симметрии анизотропного поля турбулентных скоростей относительно его экваториальной плоскости.

Работа носит обзорный характер, сделанный с целью усовершенствования новых моделей астрофизических немагнитных дисков, для которых эффекты спиральной турбулентности играют определяющую роль.

Ключевые слова: астрофизический диск, спиральная турбулентность, обратный каскад энергии, отрицательная вязкость.

Aleksander Vladimirovich Kolesnichenko

Toward a theory of spiral turbulence of a nonmagnetic astrophysical disk. Formation of large-scale vortex structures

A closed system of three-dimensional hydrodynamic equations of the mean motion scale is presented for modeling spiral turbulence in a rotating astrophysical disk. The diffusion equations for the averaged vortex and the integral vortex spirality transport equation are derived. A general concept of the emergence of energy-consuming mezoscale coherent vortex structures in a thermodynamically open subsystem of turbulent chaos, associated with the realization of the inverse cascade of kinetic energy in mirror-nonsymmetric disk turbulence, is formulated. It is shown that negative viscosity in the rotating disk three-dimensional system is apparently a manifestation of cascade processes in spiral turbulence, when an inverse energy transfer from small vortices to larger ones is realized. It is also shown that a relatively long decay of turbulence in the disk is associated with the absence of reflective symmetry of the anisotropic field of turbulent velocities relative to its equatorial plane.

The work is of a review character, made with the aim of improving new models of astrophysical nonmagnetic disks for which the effects of spiral turbulence play a determining role.

Key words: astrophysical disk, spiral turbulence, reverse energy cascade, negative viscosity.

ВВЕДЕНИЕ

Понятия «порядок», «беспорядок» и «хаос» плохо поддаются определению в применении к турбулентности жидкости: например, в статистической термодинамике «беспорядок» может быть связан с энтропией системы, и обычно считается, что второй принцип термодинамики (т.е. тенденция к увеличению энтропии изолированной системы) подразумевает максимизацию беспорядка, а значит, и эволюцию системы от порядка к беспорядку. Верно или нет, но это последнее утверждение, во всяком случае, оказалось бесполезным для турбулентности жидкости, где адекватная функция, аналогичная энтропии, пока не определена.

Что касается слова «когерентность», то оно, по мнению ряда исследователей, является бесполезным для турбулентности жидкости, поскольку оно обычно используется в отношении вихрей, обладающих некоторой пространственной структурой, такой как слои смешения, крупные вихри, полосы пограничного слоя, или «диссипативные структуры». Эти исследователи либо отвергают существование когерентных вихревых структур в турбулентных потоках, либо предлагают рассматривать их отдельно, отказывая им в принадлежности к турбулентности. На самом деле представляется более разумным рассматривать подобные вихри, когда они существуют как часть турбулентности, хотя эволюция подобных вихрей, как правило, непредсказуема по фазе (т.е. положению в пространстве), но они тем не менее могут сохранять свою геометрическую форму в течение времени, значительно превышающего характерное время потери предсказуемости. Таким образом, возможна точка зрения (которой придерживается автор данной статьи (см. Marov, Kolesnichenko, 2012)), согласно которой турбулентность связывают с «порядком», если понимать под этим словом существование в потоке пространственно организованных «когерентных» вихрей. Такая трактовка турбулентности содержалась, например, еще в идеях латинского поэта Лукреция, который трактовал Вселенную как «турбулентный порядок», возникший из возмущения за счет неустойчивости первоначального «хаоса». Этот первоначальный хаос ассимилирован в то состояние, которое мы сейчас называем в гидродинамике ламинарным состоянием, так что обычная схема – неустойчивость ламинарного состояния (хаоса) порождает турбулентность (см. Lesieur, 2008; Колесниченко, Маров, 2009; Marov, Kolesnichenko, 2012), трансформировалась в «провокационное» утверждение: относительный порядок (т.е. турбулентность) возникает из ламинарного состояния (хаоса). На возникновение диссипативных структур как результат развития неустойчивостей в открытых термо-гидродинамических системах указывал и Пригожин (Пригожин, Стенгерс,1986).

В последнее время весьма интенсивно исследуются разнообразные когерентные вихревые структуры в турбулентной несжимаемой жидкости (см., например, Brown, Roshko, 1971; Crow, Champagne, 1971; Рабинович, Сущик, 1990; Климонтович, 2002; Хлопков и др., 2002; Колесниченко, 2004, 2005, 2017a,b; Marov. Kolesnichenko, 2002, 2005, 2006; Колесниченко, Маров, 2008; Голицын, 2021), которые оказывают существенное влияние на различные динамические характеристики турбулентных сред, в частности на эволюцию турбулентных астрофизических дисков. С фактической точки зрения наиболее богата подобными диссипативными структурами развитая турбулентность в термодинамически открытой системе (в смысле Шредингера), когда при очень больших числах Рейнольдса нарушаются различные симметрии (пространственные переносы, сдвиги по времени, вращения, галилеевы и масштабные преобразования и др.), допускаемые уравнениями Навье-Стокса и соответствующими краевыми условиями. В этом случае в турбулентном течении самоорганизовываются разнообразные пространственно-временные вихревые образования, такие как вихревые нити, спирали и клубки, турбулентные пятна, берстинги и т.п. (см. Ван Дайк, 1986; Фриш, 1998; Marov. Kolesnichenko, 2005, 2006; Голицын, 2021). Однако в тех случаях, когда поток свободен от внешнего принуждения (связанного, например, с крупномасштабным сдвигом скорости при вращении астрофизического объекта), развитая турбулентность в пределе больших чисел Рейнольдса имеет, как известно, тенденцию восстанавливать (в статистическом смысле) нарушенные симметрии вдали от границ течения (Монин, Яглом, 1996; Marov, Kolesnichenko, 2002; Kolesnichenko, Marov, 2007).

В этой связи уместно заметить, что знаменитая аналитическая теория локальной турбулентности Колмогорова (Колмогоров, 1941, 1962) и Обухова (Обухов, 1941, 1949) по существу базируется на гипотезе восстановления разномасштабных нарушений однородности, изотропности и зеркальной симметричности турбулентного течения на малых масштабах $l \ll l_0$ (здесь l_0 – характерный масштаб крупных энергосодержащих вихрей). В рамках этой теории взаимодействие возмущения поля скоростей больших вихрей с мелкомасштабной турбулентностью носит характер затухания этого возмущения из-за турбулентной вязкости и передачи его кинетической энергии по каскаду вихрей различных пространственно-временных масштабов в область мелкомасштабных пульсаций. Собственно, по этой причине существование долгоживущих больших вихревых образований с масштабом $l \gg l_0$ в «обычной» зеркально симметричной турбулентности несжимаемой жидкости представляется маловероятным.

Вместе с тем существует турбулентность, которая и при очень больших числах Рейнольдса Re не восстанавливает нарушенную отражательную симметрию (так называемый закон четности) поля пульсационных скоростей в случае преобразования $\mathbf{x} \to -\mathbf{x}$ координат (см. Marov, Kolesnichenko, 2012). Примером такой турбулентности является, в частности, пульсирующее поле скоростей в конвективной зоне астрофизического аккреционного диска: средние свойства этого поля не остаются инвариантными при зеркальном отражении в его экваториальной плоскости. Подобная турбулентность, как известно, называется гиротропной (или спиральной от английского слова «*helicity*») и возникает под влиянием массовых сил с псевдовекторными свойствами (например, силы Кориолиса, магнитного поля и т.п.). В атмосферных пограничных слоях она возникает непрерывно вследствие вращения Земли и трения о поверхность (см. Копров и др., 2005). Вихревая (гидродинамическая) спиральность играет также существенную роль в процессах генерации ураганов и тайфунов, полярных мезоциклонов, струйных течений, термической конвекции и т.п. (см. Вазаева и др., 2021).

Впервые на важность влияния спиральности локализованных вихревых возмущений на эволюцию трехмерной турбулентности обратил внимание Моффат (Moffatt, 1969), который и нашел связанный с ней интегральный инвариант $H(\mathbf{x},t) := \langle \mathbf{u}' \cdot \boldsymbol{\omega}' \rangle$ − среднюю вихревую спиральность, являющуюся мерой зацепленности силовых линий вихревого поля скоростей (Moffatt, 1978; Moffatt, Tsinober, 1992; Зельдович и др., 2006; Steenbeck и др., 1966; Сэффмэн, 2000; Арнольд, Хесин, 2007; Чхетиани, 2008). Здесь $\mathbf{u}' \cdot \boldsymbol{\omega}'$ − локальная плотность спиральности, являющаяся скалярным произведением полярного вектора пульсаций скорости $\mathbf{u}'(\mathbf{x},t)$ и аксиального вектора завихренности $\boldsymbol{\omega}'(\mathbf{x},t) := \nabla \times \mathbf{u}'$, которая, в конечном счете, и приводит к возникновению гиротропной турбулентности. Средняя вихревая спиральность − псевдоскаляр, который не является положительно определенной величиной и меняет знак при переходе от левой к правой системе координат (или наоборот). Заметим, что здесь и далее везде в качестве операции осреднения используется статистико-математическое осреднение по ансамблю возможных реализаций случайных термо- и гидродинамических полей (Монин, Яглом, 1996). Представляется также уместным напомнить, что только благодаря введению в рассмотрение так называемой перекрестной магнитной спиральности $H^{\mathrm{M}}(\mathbf{x},t) := \langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{B}' \rangle$ для адекватного описания магнитогидродинамической турбулентности (не обладающей зеркальной симметрией) удалось объяснить важнейший механизм турбулентного динамо в астрофизике (так называемый α-эффект), отвечающий за генерацию и поддержание крупномасштабных магнитных полей $\langle \mathbf{B} \rangle (\mathbf{x},t)$ у планет, звезд и галактик (см., например, Moffatt, 1978; Краузе, Рэдлер, 1984; Паркер, 1982; Brandenburg и др., 2002; Зельдович и др., 2006; Колесниченко, 2012).

Реальная турбулентность во вращающемся солнечном протопланетном диске также имеет спиральный характер (Вайнштейн и др., 1980; Краузе, Рэдлер, 1984; Зельдович и др., 2006; Marov, Kolesnichenko, 2012). Это связано с тем, что мелкомасштабное пульсационное поле скоростей $\mathbf{u}'(\mathbf{x},t)$ при наличии вращения дискового вещества с постоянной угловой скоростью $\mathbf{\Omega}_0$ (аксиальный вектор) и анизотропии, вызванной, например, воздействием поля силы тяжести $\mathbf{g}$ или поля вертикального градиента температуры $\nabla\theta$ (полярные векторы), не обладает отражательной симметрией относительно экваториальной плоскости диска, т.е. относительно преобразования $z \to -z$. Последнее означает, что в таком анизотропном мелкомасштабном пульсационном поле скоростей вихревые левовращательные движения в совокупности могут быть более вероятными, чем правовращательные, или наоборот.

Важно также иметь в виду, что для однородного соленоидального поля пульсационных скоростей $\mathbf{u}'(\mathbf{x},t)$ лишенная отражательной симметрии средняя вихревая спиральность $H(\mathbf{x},t)$ сохраняется в инерционной области (области, для которой вязкие эффекты диссипации энергии несущественны) энергетического спектра, т.е. в этой области существует еще один (помимо турбулентной энергии $b(\mathbf{x},t) := \langle |\mathbf{u}'|^2 / 2 \rangle$) дополнительный невязкий (при $\nu \to 0$) инвариант, а именно гидродинамическая спиральность $H(\mathbf{x},t)$ (см., например, Фриш, 1998). Это обстоятельство приводит, вообще говоря, к полному изменению характера процесса передачи пульсационной кинетической энергии по каскаду вихрей Ричардсона-Колмогорова в трехмерной турбулентности, поскольку теперь уже две величины $b(\mathbf{x},t)$ и $H(\mathbf{x},t)$ одновременно могут переноситься по спектру турбулентных пульсаций от одних масштабов к другим. При этом каскадный процесс переноса энергии по иерархии турбулентных вихрей определяется уже двумя параметрами –

скоростью диссипации турбулентной энергии $\varepsilon(\mathbf{x},t) := \nu\langle\,|\boldsymbol{\omega}'|^2\rangle$ и скоростью диссипации вихревой спиральности $\varepsilon_H(\mathbf{x},t) := 2\nu\langle\nabla\mathbf{u}' : \nabla\boldsymbol{\omega}'\rangle$. Другими словами, если турбулентная энергия и спиральность вносятся в поток на некоторых промежуточных масштабах волновых чисел k, далеких от диссипативного масштаба k_ν и от масштаба энергоснабжения k_0 ($k_0 << k << k_\nu$), то обе величины $\varepsilon(\mathbf{x},t)$ и $\varepsilon_H(\mathbf{x},t)$ определяют процесс передачи энергии по спектру. По аналогии с двухмерной зеркально симметричной турбулентностью, когда при свободной эволюции турбулентного потока возможен инверсный каскадный перенос энергии от мелкомасштабных к крупномасштабным вихрям (сопровождающийся одновременным переносом энстрофии $\Omega(\mathbf{x},t) := \langle|\boldsymbol{\omega}'|^2/2\rangle$ в сторону малых вихрей (см., например, Kraichnan, 1967; Batchelor 1969; Монин, Яглом, 1996; Charney, 1971; Lindborg, 2006), для гиротропной трехмерной турбулентности допустим режим, при котором также реализуется обратный каскад турбулентной энергии (см. Brissaund и др., 1973; Lesieur, 2008). При этом в случае его реализации локальные инварианты кинетической энергии $b(k)$ и спиральности $h(k)$ переносятся по волновым числам к противоположным концам инерционного спектра: спиральность – к мелким масштабам, а турбулентная энергия – к более крупным масштабам (Pouquet, Mininni, 2009; Mininni и др., 2009; Mininni, Pouquet, 2009a,b,c), что позволяет перекачать часть энергии мелкомасштабной турбулентности в энергию крупномасштабных вихревых структур. Важно, однако, иметь в виду, что в отличие от двумерной турбулентности, когда передача энергии происходит по всему спектру волновых чисел, в гиротропной турбулентности обратный каскад возможен, но только к определенному пространственному масштабу. Таким образом, спиральная турбулентность имеет дополнительный канал сброса пульсационной энергии, которым и оказывается механизм генерации мезомасштабных вихревых структур (обратный тому, что, как правило, имеет место в «обычной» турбулентности), приводящий к передаче части энергии мелкомасштабной турбулентности в область больших масштабов. По этой причине спиральная турбулентность может повышать устойчивость крупных энергетически емких турбулентных вихрей, увеличивая время их жизни (Kraichnan, 1973, 1976; Моисеев и др.,1988, 1983a,b; Branover и др., 1999; Kolesnichenko, 2003, 2011). Этот механизм естественно трактовать как вихревое динамо.

Другим специфическим проявлением спиральной турбулентности в трехмерной гидродинамике является наличие эффекта отрицательной турбулентной вязкости ν^{turb}(Onsage, 1949; Старр, 1971; Kolesnichenko, Marov,2006; Marov, Kolesnichenko, 2012). В природе отрицательная вязкость обнаруживается в глобальных (крупномасштабных) циркуляциях вещества на Солнце, Юпитере, Сатурне, Венере (вероятно, также на Уране и Нептуне), в глобальных течениях в земной атмосфере и в океане (см. Старр, 1971; Монин и др., 1989; Vergassola и др., 1993). Обычно для объяснения этого реально наблюдаемого эффекта, который, как известно, связан с инверсным энергетическим каскадом, принято привлекать теорию «умозрительной» двухмерной турбулентности. Однако истинно двухмерная турбулентность не реализуется, вообще говоря, в реальных течениях жидкости, поскольку механизм интенсификации вихревого поля за счет растяжения вихревых трубок, лежащий в основе процесса переноса энергии к малым масштабам (с одновременным ростом завихренности), имеет принципиально трехмерную природу. Тем не менее многие геофизические и астрофизические течения на сферических поверхностях космических тел могут быть исследованы в рамках квазидвухмерных гидродинамических уравнений, содержащих специальные дополнительные слагаемые, например, слагаемые с линейным трением в вязком погранслое (Vergassola и др., 1993; Sivashinsky, Frenkel, 1992; Gama и др., 1994). По-видимому, подобный подход допустим и при моделировании дисковой турбулентности, поскольку вращательным движениям космического вещества в тонких астрофизических дисках также присущи отдельные черты двухмерной геометрии (Bodenheimer, 1995; Klahr, Bodenheimer, 2003). Однако при этом часто возникает чисто формальная проблема: следует ожидать чрезмерного накопления энергии в вихрях некоторых больших масштабов, лежащих между масштабом накачки и характерным размером системы. В двухмерной модели дисковой турбулентности (турбулентности без четко выраженных твердых границ) избавиться от указанного затруднения нелегко, поскольку в этом случае необходимо вводить в рассмотрение некую виртуальную длинноволновую диссипацию (вступая при этом на путь чисто спекулятивных допущений), приводящую, в конечном счете, к отводу энергии из двухмерных вихрей на энергосодержащих масштабах. Таким образом, без учета законов симметрии реального (трехмерного) турбулентного поля бывает не просто построить вполне адекватную математическую модель процессов эволюции космической среды во вращающемся астрофизическом объекте.

Остановимся еще на одной особенности спиральной турбулентности в астрофизическом немагнитном диске. Как уже отмечалось, спиральная турбулентность в электропроводящей космической жидкости благодаря α-эффекту генерирует и поддерживает крупномасштабные магнитные поля звезд и планет. В работе (Моисеев и др., 1983a) было показано, что, несмотря на формальную аналогию линейного уравнения индукции для магнитного поля $\mathbf{B}(\mathbf{x},t)$ и нелинейного уравнения для завихренности $\boldsymbol{\omega} := \nabla \times \mathbf{u}$ в вязкой непроводящей жидкости, для однородной изотропной турбулентности при наличии только одной спиральности аналог подобного эффекта для завихренности отсутствует. Тем не менее спиральная турбулентность в астрофизических объектах, в которых существуют и другие факторы нарушения симметрии течения космического вещества (такие, например, как сила тяжести, градиент температуры и т.п.), часто способна действовать как генератор крупно- и мезомасштабного вихревого поля, усиливая и укрупняя вихри и тем самым порождая разнообразные когерентные вихревые структуры (Marov, Kolesnichenko, 2012).

В связи со сказанным следует отметить, что теория возникновения крупномасштабных вихревых структур за счет механизма вихревого динамо развивалась во многих работах (см., например, Моисеев и др., 1988, 1983a,b; Березин, Жуков, 1990; Березин, Трофимов, 1996; Левина, 2006) применительно к турбулентной атмосфере и океану. Особое внимание в этих работах было уделено спиральности, образующейся под воздействием силы Кориолиса на конвективные процессы. Этими авторами была изучена задача о конвекции подогреваемой снизу жидкости, находящейся в плоскопараллельном слое. Было показано, что закручивание возникающих над перегретой поверхностью океана конвективных ячеек и рост их размеров из-за эффекта вихревого динамо приводят к формированию в спиральной атмосфере одного крупного вихря, который может быть интерпретирован как тропический циклон, возникающий над перегретой поверхностью океана.

Вместе с тем, влияние эффекта вихревого динамо на когерентное структурирование космического вещества учитывалось при моделировании эволюции астрофизических объектов крайне редко (см., в частности, Вайнштейн и др., 1980; Bodenheimer, 1995; Dubrulle, Valdettaro, 1992; Lindborg, 2008). По этой причине в настоящем обзоре ряда работ автора (18 наименований) предлагается вернуться к обсуждению данной проблемы, но уже с учетом надежных результатов проведенных численных экспериментов, доказывающих реальное существование обратного энергетического каскада в трехмерной спиральной турбулентности (см., например, Mininni и др., 2009; Mininni, Pouquet, 2009a,b,c; Smith и др., 1996; Копров и др., 2005). При этом основной побудительный мотив автора сводится к следующему: поскольку в настоящее время эффект инверсного каскада энергии в спиральной турбулентности является уже надежно установленным фактом, то включение в математическую модель эволюции астрофизического немагнитного диска механизма вихревого динамо, способствующего возникновению в нем мезо- и крупномасштабных когерентных вихревых образований, приобретает веское основание. Исходя из этих соображений, содержание этого обзора можно рассматривать как дополнительную теоретическую основу для адекватного численного моделирования широкого класса физико-механических процессов в протопланетном немагнитном аккреционном диске (окружавшем, в частности, Солнце на ранней стадии его существования), для которого специфика спиральной турбулентности играет существенную роль.

1. ОСРЕДНЕННЫЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ГИРОТРОПНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Рассмотрим астрофизическую турбулентность при наличии стратификации жидкости и вращения изучаемого космического объекта. Далее для простоты будем считать, что жидкость несжимаема (это означает, что мы исключаем из рассмотрения некоторые явления, связанные с понятием скорости звука), а допустимые небольшие вариации плотности обусловлены исключительно изменчивостью температуры. Тогда, в соответствии с приближением Буссинеска, непостоянство плотности проявляется только в виде архимедовой силы, входящей в уравнение движения. При описании реального течения в виде суммы средней $\langle \mathrm{f} \rangle(\mathbf{x},t)$ и пульсационной $\mathrm{f}'(\mathbf{x},t)$ составляющих гидродинамических полей $\mathrm{f}(\mathbf{x},t)$, осредненные гидродинамические уравнения для турбулентной жидкости, записанные в системе координат, вращающейся с постоянной угловой скоростью $\mathbf{\Omega}_0$, имеют вид (Колесниченко, Маров, 2007):

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{D}\langle \mathbf{u} \rangle}{\mathrm{D}t} = -\nabla \langle P \rangle - 2\mathbf{\Omega}_0 \times \langle \mathbf{u} \rangle + \nu \Delta \langle \mathbf{u} \rangle + \nabla \cdot \mathbf{R} - \alpha_\theta (\langle \theta \rangle - \theta_0)\mathbf{g}, \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{D}\langle \theta \rangle}{\mathrm{D}t} \cong -\nabla \cdot \mathbf{q}_\theta^{turb} + \kappa_\theta \Delta \langle \theta \rangle + \Phi_D. \tag{3}$$

Здесь $\mathrm{D}/\mathrm{D}t := \partial/\partial t + \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \nabla$ – индивидуальная производная по времени для осредненного континуума; $\Delta := \partial^2/\partial \mathbf{x}^2$ – оператор набла; $\langle \mathbf{u} \rangle(\mathbf{x},t)$, $\langle p \rangle(\mathbf{x},t)$, $\langle \theta \rangle(\mathbf{x},t)$ – соответственно осредненные поля скорости, давления и температуры; $\mathbf{g}$ – сила тяжести на единицу массы жидкости (далее будем считать, что вектор $\mathbf{g}$ направлен вниз, а ось z – вверх, так что $\mathbf{g} = -\mathbf{i}_z g$; $\mathbf{i}_z$– вертикальный орт); $\rho_0(z)$, $\theta_0(z)$ – значения плотности и температуры в покоящейся стратифицированной по направлению силы тяжести среде, удовлетворяющие уравнению гидростатики $\nabla p_0 = \rho_0 \mathbf{g}$ и уравнению состояния $p_0 = p_0(\rho_0, \theta_0)$; $P(\mathbf{x},t) := (p - p_0)/\rho_0$; $\nu(\mathbf{x},t)$, $\kappa_\theta(\mathbf{x},t) = \lambda_\theta / \langle \rho \rangle c_\mathrm{p}$ – соответственно молекулярные коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности; $\alpha_\theta(\mathbf{x},t)$ – коэффициент термического расширения (для идеального газа $\alpha_\theta = 1/\theta$); $\mathbf{R}(\mathbf{x},t) := -\langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle$, $\mathbf{q}_\theta^{turb}(\mathbf{x},t) := \langle \theta' \mathbf{u}' \rangle$ – одноточечные корреляционные моменты второго порядка, имеющие соответственно смысл сдвиговых турбулентных напряжений (тензор Рейнольдса) и турбулентного потока тепла; $\Phi_D(\mathbf{x},\mathrm{t}) := c_p^{-1} \mathbf{R} : \nabla \langle \mathbf{u} \rangle$ – диссипативная функция.

Следует отметить, что уравнение притока тепла (3) записано здесь для случая развитой турбулентности, когда в структуре пульсационного поля устанавливается такое квазистационарное состояние, при котором турбулентная энергия приблизительно сохраняется как во времени, так и в пространстве (см. Колесниченко, Маров, 2009). Кроме этого в уравнении движения (2) не учтена сила Пуанкаре $(D\mathbf{\Omega}/Dt) \times \mathbf{x}$, которая важна при изучении турбулентности, вызванной прецессией оси вращения, например, в случае геомагнитного динамо (см., например, Malkus, 1968; Vanyo, 1991).

1.1. Уравнение диффузии для осредненного вихря

Приведем уже здесь вывод диффузионного уравнения для осредненного вихря $\langle \boldsymbol{\omega} \rangle(\mathbf{x},t)$, которое играет ключевую роль при адекватном описании гиротропной турбулентности. Уравнение для завихренности $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x},t) := \nabla \times \mathbf{u}$ мгновенного движения относительной скорости $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ получим, исходя из кинематического уравнения Бельтрами (см. Серрин, 1963)

$$\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\right)=\left(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\right)\mathbf{u}+\nabla\times\mathbf{w},\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}:=\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla\ , \tag{4}$$

где
$$\mathbf{w}:=\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}=-2\,\boldsymbol{\Omega}_0\times\mathbf{u}-\frac{1}{\rho}\nabla p+\mathbf{f} \tag{5}$$

– ускорение элемента массы в относительной системе отсчета; $\mathbf{f}(\mathbf{x},t)$ – сумма ускорений силы молекулярной вязкости $\mathbf{f}_{\mathrm{vics}}(\mathbf{x},t)=\rho^{-1}\nabla\mathbf{P}$ и приведенной (с учетом центробежной силы, возникающей от вращения системы координат) силы тяжести $\mathbf{g}(\mathbf{x},t)=-\nabla\Psi_{\mathrm{G}}$; $\Psi_{\mathrm{G}}:=-\frac{1}{2}\left|\boldsymbol{\Omega}_0\times\mathbf{x}\right|^2+G\mathcal{M}_{\odot}/\left|\mathbf{x}\right|$ – геопотенциал силы тяжести; G – гравитационная постоянная; $\mathcal{M}_{\odot}$ – масса притягивающего центра; $\mathbf{x}$ – радиус-вектор, проведенный из центра тела в рассматриваемую точку пространства (сила Лоренца далее не учитывается); $\mathbf{P}(\mathbf{x},t)$ – тензор вязких молекулярных напряжений, задаваемый формулой Навье-Стокса.

Заметим, что подстановка (5) в (4) приводит к известному уравнению Фридмана для гелмгольциана:

$$\mathrm{helm}\,\mathbf{u}:=\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\right)-(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\mathbf{u}=2\left(\boldsymbol{\Omega}_0\cdot\nabla\right)\mathbf{u}+\rho^{-2}\left(\nabla\rho\times\nabla p\right)+\nabla\times\mathbf{f},$$

гидродинамический смысл которого состоит, в частности, в том, что равенство $\mathrm{helm}\,\mathbf{u}=0$ означает «вмороженность» векторного поля $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ в движущуюся жидкость.

В рассматриваемом здесь приближении Буссинеска (когда уравнение неразрывности заменяется условием $\nabla\cdot\mathbf{u}=0$ (соленоидальности поля скорости) и используется справедливое с точностью до величин первого порядка малости равенство $-\rho^{-1}\nabla p+\mathbf{g}\approx-\nabla P+\mathbf{g}\rho^{*}/\rho_0$, где $\rho^{*}=\rho-\rho_0$ – отклонение плотности от его равновесного значения ρ_0 (удовлетворяющего уравнению состояния $\rho_0=\rho(p_0,\,T_0)$ и уравнению гидростатики $\nabla p_0=\rho_0\mathbf{g}$), два последних члена в правой части равенства (5) принимают вид $-\rho^{-1}\nabla p+\mathbf{f}=-\nabla P+\mathbf{g}\rho^{*}/\rho_0+\nu\Delta\mathbf{u}$. Подстановка этого выражения в уравнение (4) приводит, при учете известной формулы векторного анализа

$$\nabla\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\left(\mathbf{b}\cdot\nabla\right)\mathbf{a}-\left(\mathbf{a}\cdot\nabla\right)\mathbf{b}+\mathbf{a}\nabla\mathbf{b}-\mathbf{b}\nabla\mathbf{a}\ ,$$

к уравнению для эволюции мгновенной завихренности турбулентного потока

$$\mathrm{d}\,\boldsymbol{\omega}/\,\mathrm{d}t - \nabla\mathbf{u} = 2\left(\,\boldsymbol{\Omega}_0\cdot\nabla\right)\mathbf{u} - \mathbf{g}\times\nabla\left(\rho/\rho_0\right) + \nu\Delta\boldsymbol{\omega}, \tag{6}$$

или

$$\mathrm{d}\,\boldsymbol{\omega}_a\,/\,\mathrm{d}t = \left(\boldsymbol{\omega}_a\cdot\nabla\right)\mathbf{u} - \mathbf{g}\times\nabla\left(\rho/\rho_0\right) + \nu\Delta\boldsymbol{\omega},$$

где $\boldsymbol{\omega}_\mathrm{a} = \boldsymbol{\omega} + 2\Omega_0$ – так называемый абсолютный вихрь. Из уравнения (6) следует, что мгновенная завихренность изменяется вследствие конвекции, деформации и вращения жидкого элемента (соответственно первое и второе слагаемые слева), вихреобразующего воздействия от кориолисового и архимедова ускорений (соответственно слагаемые $-\nabla\times(2\boldsymbol{\Omega}_0\times\mathbf{u})$ и $\nabla\times(\mathbf{g}\rho^*/\rho_0)$), а также под влиянием диффузии за счет молекулярной вязкости ν. Заметим, что определение $\boldsymbol{\omega} := \nabla\times\mathbf{u}$ делает уравнение (6) нелинейным.

Искомое уравнение для угловой скорости среднего движения $\langle\boldsymbol{\omega}\rangle = \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}'$ получим путем осреднения уравнения (6) по ансамблю возможных реализаций турбулентного поля; в результате будем иметь:

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\langle\boldsymbol{\omega}_a\rangle = \left(\langle\boldsymbol{\omega}_a\rangle\cdot\nabla\right)\langle\mathbf{u}\rangle - \mathbf{g}\times\nabla\left(\frac{\langle\rho\rangle}{\rho_0}\right) + \nu\Delta\langle\boldsymbol{\omega}\rangle + \nabla\times\mathcal{G}^{\omega}, \tag{7}$$

где $\langle\boldsymbol{\omega}_\mathrm{a}\rangle := \langle\boldsymbol{\omega}\rangle + 2\boldsymbol{\Omega}_0$. При выводе уравнения (7) был введен в рассмотрение вектор

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}^{\omega}(\mathbf{x},t) := \langle\mathbf{u}'\times\boldsymbol{\omega}'\rangle, \tag{8}$$

связанный с процессом вихревого динамо (аналог турбулентной электродвижущей силы $\boldsymbol{\mathcal{G}}(\mathbf{x},t) := c^{-1}\overline{\mathbf{u}'\times\mathbf{B}'}$ в законе Ома для средних электромагнитных полей (см., например, Краузе, Рэдлер, 1984; Зельдович и др., 2006; Колесниченко, Маров, 2008), которое имеет следующее представление:

$$\nabla\times\boldsymbol{\mathcal{G}}^{\omega} := \nabla\times\langle\mathbf{u}'\times\boldsymbol{\omega}'\rangle = \left\langle\left(\boldsymbol{\omega}'\cdot\nabla\right)\mathbf{u}' - \left(\mathbf{u}'\cdot\nabla\right)\boldsymbol{\omega}' - \boldsymbol{\omega}'\left(\nabla\cdot\mathbf{u}'\right)\right\rangle. \tag{9}$$

Следует особо подчеркнуть, что уравнение (7) для осредненной завихренности $\langle\boldsymbol{\omega}\rangle(\mathbf{x},t)$ совместно с уравнением Пуассона для давления

$$\Delta\left(\langle P\rangle + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2}\right) = \langle\mathbf{u}\rangle\cdot\Delta\langle\mathbf{u}\rangle + \langle\boldsymbol{\omega}\rangle\cdot\langle\boldsymbol{\omega}_a\rangle + \mathbf{g}\cdot\nabla\left(\frac{\langle\rho\rangle}{\rho_0}\right) \tag{10}$$

(результат взятия дивергенции от уравнения (2)) составляют систему двух уравнений, полностью эквивалентную уравнению движения (2). Поскольку распределение завихренности $\langle\boldsymbol{\omega}\rangle(\mathbf{x},t)$ в турбулентном потоке часто является локальным (даже в тех случаях, когда поля $\langle\mathbf{u}\rangle(\mathbf{x},t)$ и (∇P) распространяются на все координатное пространство), то моделирование осредненного движения турбулентной жидкости при помощи поля завихренности $\langle\boldsymbol{\omega}\rangle(\mathbf{x},t)$ во многих случаях может оказаться более адекватным, чем при помощи осредненного поля скоростей $\langle\mathbf{u}\rangle(\mathbf{x},t)$.

При учете тождества $\mathbf{a}\times(\nabla\times\mathbf{a}) = \tfrac{1}{2}\nabla|\mathbf{a}|^2 - (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{a}$ выражение (8) для вектора $\boldsymbol{\mathcal{G}}^{\omega}(\mathbf{x},t)$ может быть преобразовано к следующему виду

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}^{\omega} := \left\langle \mathbf{u}'\times(\nabla\times\mathbf{u}')\right\rangle = \nabla\langle \tfrac{1}{2}|\mathbf{u}'|^2\rangle - \nabla\cdot\langle\mathbf{u}'\mathbf{u}'\rangle = \nabla b + \nabla\cdot\mathbf{R}. \tag{11}$$

Из этого выражения следует, что вихревое динамо $\nabla\times\boldsymbol{\mathcal{G}}^{\omega}$ отлично от нуля лишь в том случае, когда статистические свойства поля пульсационной скорости $\mathbf{u}'(\mathbf{x},t)$ зависят от координат (иными словами, поле $\mathbf{u}'(\mathbf{x},t)$ является пространственно неоднородным). Такая неоднородность может быть вызвана, в частности, с неоднородностью деформирующего воздействия крупномасштабного поля скорости $\langle\mathbf{u}\rangle(\mathbf{x},t)$. Если для тензора Рейнольдса $\mathbf{R}(\mathbf{x},t)$ использовать традиционное градиентное представление (см. формулу (13)), то $\nabla\times\mathbf{G}^{\omega} = \nu^{turb}\Delta\langle\boldsymbol{\omega}\rangle$. Таким образом, в этом случае изотропная отражательно-симметричная (в статистическом смысле) турбулентность может вызывать только турбулентную диффузию осредненной завихренности $\langle\boldsymbol{\omega}\rangle(\mathbf{x},t)$, которая, как правило, много эффективней молекулярной. С другой стороны, возникающая во вращающихся астрофизических объектах спиральная турбулентность способна действовать и как генератор крупномасштабного вихревого поля $\langle\boldsymbol{\omega}\rangle(\mathbf{x},t)$ в том случае, когда

$$\nabla\times\boldsymbol{\mathcal{G}}^{\omega} = \nabla\times(\nabla\cdot\mathbf{R}) \neq \nu^{turb}\Delta\langle\boldsymbol{\omega}\rangle$$

или когда $\nu^{turb} < 0$ (см. ниже), обеспечивая при надлежащем определении тензора сдвиговых турбулентных напряжений [см. ниже (37) и (38)] его экспоненциальный рост. Другими словами, спиральная турбулентность через механизм вихревого динамо

$$\left|\nabla\times\boldsymbol{\mathcal{G}}^{\omega}\right|_p=\left|\nabla\times(\nabla\cdot\mathbf{R})\right|_p=\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_j}\varepsilon_{pki}R_{ij}=\nu^{turb}\Delta\langle\boldsymbol{\omega}\rangle_p-$$

$$-\frac{1}{2}\nu_h^{turb}\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_j}\varepsilon_{pki}\left\{\langle\omega_{ai}\rangle\frac{\partial H}{\partial x_j}+\langle\omega_{aj}\rangle\frac{\partial H}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\left(\langle\boldsymbol{\omega}_a\rangle\cdot\nabla H\right)\delta_{ij}\right\} \qquad (12)$$

может усиливать и укрупнять вихри, порождая когерентные вихревые структуры во вращающемся газе (см., например, Моисеев и др., 1983a,b, 1988; Березин, Жуков, 1990; Березин, Трофимов, 1996; Левина, 2006). Более того, механизмом вихревого динамо в спиральной турбулентности, когда в результате реализации обратного энергетического каскада генерируются и поддерживаются мезо- и крупномасштабные вихревые образования, осуществляется и их энергетическая подпитка. Таким образом, вследствие перераспределения турбулентной энергии вихревое динамо в дисковой турбулентности может породить иерархическую систему «плотно упакованных пакетов» энергетически емких вихрей (определенного размера и, в общем случае, с фрактальным распределением массовой плотности (Колесниченко, Маров, 2009), приводящую, в конечном счете, к интенсификации механических и физико-химических взаимодействий между частицами космического вещества (в общем случае гетерогенного), в результате чего возможны самопроизвольное образование и рост газопылевых кластеров, стимуляция процессов конденсации и фазовых переходов, процессов массо- и теплообмена между различными областями диска, существенная модификация спектра колебаний и т.п. Естественно, на заключительной фазе процесса образования крупномасштабных газопылевых сгущений в области внутренних планет решающая роль должна принадлежать силе самогравитации (Маров и др., 2008).

1.2. Замыкающие соотношения для локально изотропной турбулентности

Статистические характеристики и трансформационные свойства пульсирующих мелкомасштабных полей $\mathbf{u}'(\mathbf{x},t)$ и $\theta'(\mathbf{x},t)$ играют, как известно, ключевую роль в проблеме замыкания известной цепочки моментных уравнений в турбулентности (в частности, уравнений для средних моментов низкого порядка), поскольку именно они обусловливают характер определяющих соотношений, связывающих турбулентные потоки количества движения $\mathbf{R}(\mathbf{x},t)$ и температуры $\mathbf{q}_\theta^{turb}(\mathbf{x},t)$ с крупномасштабными полями

$\langle\mathbf{u}\rangle(\mathbf{x},t)$ и $\langle\theta\rangle(\mathbf{x},t)$, определяя к тому же и саму структуру турбулентных коэффициентов переноса. Напомним, что мелкомасштабное турбулентное поле является изотропным, когда любая характеризующая ее статистическая величина инвариантна относительно поворотов системы отсчета. Если кроме этого все осредненные характеристики инвариантны при отражении $\mathbf{x} \to -\mathbf{x}$ в произвольной плоскости, то турбулентное поле является зеркально симметричным. Далее мы будем различать эти два вида симметрии.

Часто для реальной, достаточно развитой астрофизической турбулентности, подверженной слабому воздействию массовых сил с псевдовекторными свойствами, вполне допустимым приближением является классическая модель локально изотропной (однородной, изотропной и зеркально симметричной) турбулентности, позволяющая в ряде случаев правдоподобно описывать и крупномасштабную (например спиральную) структуру турбулентного течения в каком-либо космическом объекте, например в Галактике [50]. Согласно концепции Колмогорова (К41, К61) в пределе больших чисел Рейнольдса $\mathrm{Re} >> 1$ (здесь $\mathrm{Re} := u_0 l_0 / \nu$, $u_0 := \sqrt{\langle|\mathbf{u}'|^2\rangle}$ – характеристическая скорость пульсационного поля скорости) мелкомасштабное турбулентное поле гидродинамических параметров является локально изотропным, т.е. инвариантным относительно любых параллельных переносов, вращений и зеркальных отражений. В этом традиционном случае часто можно ограничиться следующими градиентными соотношениями для симметричного тензора Рейнольдса $\mathbf{R}(\mathbf{x},t)$ и вектора турбулентного переноса тепла $\mathbf{q}_\theta^{\mathrm{turb}}(\mathbf{x},t)$ (Marov, Kolesnichenko, 2012):

$$\mathbf{R}(\mathbf{x},t) := -\langle\mathbf{u}'\mathbf{u}'\rangle = -\tfrac{2}{3} b\,\mathbf{I} + 2\nu^{turb}\mathbf{S}, \tag{13}$$

$$\mathbf{q}_\theta^{turb}(\mathbf{x},t) := \langle\theta'\mathbf{u}'\rangle = -\kappa_\theta^{turb}\left(\nabla\langle\theta\rangle - (\nabla\langle\theta\rangle)_{ad}\right), \tag{14}$$

$$\nu^{turb} = C_b b^2/\varepsilon, \quad C_b = 0.09, \quad (\kappa_\theta^{turb} = \nu^{turb}/\sigma_\theta, \quad \sigma_\theta = 0.7 - 1). \tag{15}$$

Здесь $b(\mathbf{x},t) := \langle|\mathbf{u}'|^2/2\rangle$ – турбулентная энергия; $\varepsilon(\mathbf{x},t)$ – диссипация турбулентной энергии (величина, характеризующая скорость превращения турбулентной энергии $b(\mathbf{x},t)$ в тепловую энергию по мере того, как мелкие вихри $\boldsymbol{\omega}'(\mathbf{x},t) := \nabla\times\mathbf{u}'$ деформируются под действием вязких напряжений);

$$(\mathbf{S})_{jk} = \tfrac{1}{2}\left(\partial\langle u_k\rangle / \partial x_j + \partial\langle u_j\rangle / \partial x_k\right)$$

– симметричный тензор деформации среднего поля скорости; $\nu^{turb}(\mathbf{x},t)$, $\kappa_\theta^{turb}(\mathbf{x},t) = \lambda_\theta^{turb} / \langle\rho\rangle c_p$ – соответственно турбулентные коэффициенты вязкости и температуропроводности; $(\nabla\langle\theta\rangle)_{ad}$ – адиабатический градиент средней температуры (для идеального газа $(\nabla\langle\theta\rangle)_{ad} = \mathbf{g}/c_p = -\mathbf{i}_z g/c_p$); $\mathbf{I}$ – единичный тензор Кронекера, $(\mathbf{I})_{\mathrm{jk}} = \delta_{jk}$. Для расширения области применения определяющих соотношений (13)-(14) на более реалистичный случай отсутствия внутреннего равновесия между полем мелкомасштабной турбулентности и полем осредненных параметров течения в астрофизической литературе нередко используется один из вариантов полуэмпирической модели Прандтля– Колмогорова, например «$b-\varepsilon$» модель.

\

1.3. Уравнение переноса турбулентной энергии

Для жидкости со свойствами Буссинеска уравнение переноса для кинетической энергии турбулентных пульсаций $b(\mathbf{x},t)$ принимает вид (см. Колесниченко, Кадет, 2012):

$$\frac{\mathrm{D}b}{\mathrm{D}t} + \nabla\cdot\mathbf{J}_b^{turb} = \mathbf{R}:\nabla\langle\mathbf{u}\rangle - \alpha_\theta\,\mathbf{q}_\theta^{turb}\cdot\mathbf{g} - \varepsilon, \tag{16}$$

где

$$\mathbf{J}_b^{turb} := \left\langle \left(\frac{|\mathbf{u}'|^2}{2} + p'\right)\mathbf{u}' - \nu\nabla\left(\frac{|\mathbf{u}'|^2}{2}\right)\right\rangle = -\left(\nu + \frac{\nu^{turb}}{\sigma_b}\right)\nabla b, \quad (\sigma_b = 0.6) \tag{17}$$

– диффузионный поток турбулентной энергии $b(\mathbf{x},t)$, связанный с различными механизмами ее переноса в координатном пространстве; величина $-\alpha_T\mathbf{q}_\theta^{turb}\cdot\mathbf{g}$, определяемая в рассматриваемом случае формулой

$$-\alpha_\theta\mathbf{q}_\theta^{turb}\cdot\mathbf{g} = \frac{\nu^{turb}}{\sigma_\theta}\frac{\mathbf{g}}{\langle\theta\rangle}\cdot\left(\nabla\langle\theta\rangle - \frac{\mathbf{g}}{c_p}\right) \cong -\frac{\nu^{turb}}{\sigma_\theta}\frac{g}{\langle\theta\rangle}\left(\frac{\partial\langle\theta\rangle}{\partial z} + \frac{g}{c_p}\right), \tag{18}$$

описывает генерацию турбулентной энергии $b(\mathbf{x},t)$, обусловленную неоднородным распределением температуры в стратифицированной в поле силы тяжести космических газовых масс. Заметим, что для самоподдерживающегося турбулентного поля скорость диссипации $\varepsilon(\mathbf{x},t)$ должна иметь тот же порядок величины, что и скорость генерации турбулентности сдвиговым потоком $\mathbf{R}:\nabla\langle\mathbf{u}\rangle = \nu^{turb}\nabla\langle\mathbf{u}\rangle:\nabla\langle\mathbf{u}\rangle$.

Уравнение (16) удобно переписать в виде

$$\frac{\mathrm{D}b}{\mathrm{D}t} - \nabla\cdot\left(\frac{\nu^{turb}}{\sigma_b}\nabla b\right) = \nu^{turb}\left(1-\frac{1}{\sigma_\theta}\mathrm{Ri}\right)\left(\nabla\langle\mathbf{u}\rangle:\nabla\langle\mathbf{u}\rangle\right) - \varepsilon, \qquad (19)$$

где

$$\nu^{turb} := C_b\frac{b^2}{\varepsilon}; \quad \mathrm{Ri} := \frac{\mathbf{g}}{\langle\theta\rangle}\cdot\left(\nabla\langle\theta\rangle + \frac{\mathbf{g}}{c_p}\right)/\left(\nabla\langle\mathbf{u}\rangle:\nabla\langle\mathbf{u}\rangle\right) \qquad (20)$$

– градиентное число Ричардсона, учитывающее влияние термической стратификации среды на эволюцию турбулентности. Из (19) следует, что если число Ричардсона меньше его критического значения, $\mathrm{Ri} < \mathrm{Ri}_{cr} = \sigma_\theta$, то турбулентная энергия генерируется сдвигом скорости; когда $\mathrm{Ri}\to\sigma_\theta$, то соответствующая сумма членов в уравнении баланса турбулентной энергии обращается в нуль, а это означает, что турбулентное движение не поддерживается. Если $\mathrm{Ri} > 0$ (архимедова сила является возвращающей, стратификация гидростатически устойчива), то турбулентность тратит энергию на работу против архимедовой силы и потому развивается относительно слабо. При $\mathrm{Ri} < 0$ сила Архимеда, которая в этом случае является ускоряющей (стратификация неустойчива), всегда служит дополнительным источником энергии турбулентной конвекции.

1.4. Уравнение переноса для скорости диссипации турбулентной энергии

Второе необходимое для замыкания системы (1)-(3) уравнение – это уравнение для скорости диссипации турбулентной энергии

$$\varepsilon(\mathbf{x},t) := \nu\langle(\partial u'_k/\partial x_j)^2\rangle = \nu\langle\,|\boldsymbol{\omega}'|^2\rangle = 2\nu\Omega. \qquad (21)$$

В приближении Буссинеска это уравнение принимает вид (см. Колесниченко, Маров, 2009):

$$\frac{\mathrm{D}\varepsilon}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\varepsilon\langle\mathbf{u}\rangle\right) = -\nabla\cdot\mathbf{J}_\varepsilon^{turb} + C_{\varepsilon1}\frac{\varepsilon}{b}\left(\mathbf{R}:\nabla\langle\mathbf{u}\rangle - \alpha_\theta\mathbf{q}_\theta^{turb}\cdot\mathbf{g}\right) - C_{\varepsilon2}\frac{\varepsilon^2}{b}, \qquad (22)$$

где

$$\mathbf{J}_{\varepsilon}^{turb}(\mathbf{x},\mathrm{t}) := \left\langle \nu\left(\nabla\mathbf{u}' : \nabla\mathbf{u}'\right)\mathbf{u}' + 2\nu\nabla\mathbf{u}'\cdot\nabla p' - \nu\nabla\left|\boldsymbol{\omega}'\right|^{2} \right\rangle = -\left(\nu + \frac{\nu^{turb}}{\sigma_{\varepsilon}}\right)\nabla\varepsilon \qquad (23)$$

– диффузионный турбулентный поток скорости диссипации $\varepsilon(\mathbf{x},t)$, связанный с различными механизмами ее турбулентного переноса в координатном пространстве $\mathbf{x}$;

$$C_{\varepsilon 1} = 1.43,\ C_{\varepsilon 2} = 1.92,\ \sigma_{b} = 1,\ \sigma_{\varepsilon} = 1.13$$

– универсальные константы.

Решение системы уравнений (1)-(3), (16) и (22) зависит от начальных и граничных условий, налагаемых на величины $\langle\mathbf{u}\rangle(\mathbf{x},t)$, $\langle\theta\rangle(\mathbf{x},t)$, $b(\mathbf{x},t)$ и $\varepsilon(\mathbf{x},t)$. Необходимость в формулировании этих условий возникает в связи с постановкой конкретных модельных задач, касающихся, например, проблемы воссоздания эволюции немагнитного астрофизического диска. Простейшими граничными условиями для системы (1)-(3) в этом случае оказываются так называемые свободные граничные условия)

$$\langle u_{z}\rangle(\mathbf{x},t)\big|_{\pm H} = 0,\quad \frac{\partial}{\partial z}\langle u_{x}\rangle(\mathbf{x},\mathrm{t})\bigg|_{\pm H} = \frac{\partial}{\partial z}\langle u_{y}\rangle(\mathbf{x},t)\bigg|_{\pm H} = 0,\quad \langle\theta\rangle(\mathbf{x},t)\big|_{\pm H} = 0, \quad (24)$$

где $\pm H$ − верхняя и нижняя граница диска.

Из приведенных замыкающих соотношений видно, что коэффициенты турбулентной теплопроводности $\kappa_{\theta}^{turb}(\mathbf{x},t) = \lambda_{\theta}^{turb} / \langle\rho\rangle c_{p}$ и вязкости $\nu^{turb}(\mathbf{x},t)$, являясь функциями осредненных параметров состояния среды, зависят также от статистических характеристик мелкомасштабного поля пульсационных скоростей $\mathbf{u}'(\mathbf{x},t)$, таких как $b(\mathbf{x},t)$ и $\varepsilon(\mathbf{x},t)$. Эти коэффициенты обычно считаются положительными величинами. Однако, как уже упоминалось выше, для двумерного течения было показано, что турбулентная вязкость может быть отрицательной величиной (Vergassola и др., 1993; Gama и др., 1994). В этой связи важно иметь в виду, что в отличие от молекулярных коэффициентов вязкости ν и теплопроводности λ_{θ} (характеризующих физические свойства жидкости), положительность которых имеет глубокое обоснование в термодинамике необратимых процессов (де Гроот, Мазур, 1954), положительность турбулентных коэффициентов переноса (характеризующих статистические свойства турбулентного движения) не имеет термодинамического доказательства (Мирабель, Монин, 1979).

В работах (Колесниченко, 2002; Колесниченко, Маров, 2009), посвященных термодинамическому моделированию процессов переноса в турбулентной жидкости, было показано, что в подсистеме вихревого хаоса, отвечающей мелкомасштабным пульсациям структурных параметров (стохастический компонент турбулентного течения), по мере развития турбулентности устанавливается квазистационарный режим между отбором энергии у «внешней среды» (континуумом, связанным с осредненным турбулентным движением) и потерей энергии из-за диссипативных процессов в самом вихревом континууме, при котором производство энтропии хаоса компенсируется ее оттоком в подсистему осредненного движения. Другими словами, для поддержания такого квазистационарного состояния внутри открытой подсистемы турбулентного хаоса необходим приток отрицательной энтропии (негэнтропии) от «внешней среды». Именно эта поступающая в подсистему мелкомасштабных вихрей негэнтропия расходуется на возникновение и последующую эволюцию в ней мезомасштабных пространственно-временных вихревых структур. Подобное явление относится ко все еще недостаточно изученной тенденции турбулентного течения самоорганизовываться при больших числах Рейнольдса в крупно- и мезомасштабные когерентные вихревые образования (см. Пригожин, Стенгерс, 1986).

Заметим, что своеобразие термодинамического подхода к выводу замыкающих соотношений в турбулентной жидкости состоит в том, что исключение одной термодинамической силы X_k (или части сил) может изменить всю матрицу онзагеровских феноменологических коэффициентов L_{kj}. С учетом этого обстоятельства становится необязательным обычное требование положительной определенности каждого отдельного слагаемого в выражении для полного производства энтропии $\sigma_S := \sum_{k,j} L_{kj} X_k X_j > 0$ в турбулентной системе. Вследствие этого суперпозиция различных термодинамических потоков в системе может приводить, в общем случае, к отрицательным значениям некоторых диагональных элементов матрицы феноменологических коэффициентов L_{kj} и тем самым к отрицательным значениям отдельных коэффициентов турбулентного обмена. В монографии (Колесниченко, Маров, 2009) в рамках термодинамического подхода была показана возможность отрицательных значений коэффициента турбулентной вязкости $(\nu^{turb} < 0)$ для некоторых трехмерных течений, которая для развитой гиротропной турбулентности может реализоваться благодаря воздействию вихревого динамо, когда мелкомасштабная турбулентность усиливает и укрупняет вихри, порождая крупные вихревые образования.

В заключение этого пункта заметим, что диссипативную функцию $\Phi_D(\mathbf{x},t)$ с учетом соотношения Прандтля (13) можно представить в следующем виде:

$$\Phi_D(\mathbf{x},t) := \frac{1}{c_p}\mathbf{R} : \nabla\langle\mathbf{u}\rangle = 2\frac{\nu^{turb}}{c_p}\mathbf{S} : \nabla\langle\mathbf{u}\rangle = \frac{\nu^{turb}}{2c_p}\left(\frac{\partial\langle u_k\rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial\langle u_j\rangle}{\partial x_k}\right)^2. \qquad (25)$$

Из этого выражения следует, что если турбулентный коэффициент кинематической вязкости $\nu^{turb} < 0$, то функция $\Phi_D(\mathbf{x},t)$ также будет отрицательной, т.е. в этом случае турбулентная энергия мелкомасштабных пульсаций (см. Колесниченко, Маров, 2008**)** уже «не диссипирует» в тепло, а наоборот, расходуется на генерирование крупно- и мезомасштабных когерентных вихревых структур. Следовательно, при наличии отрицательной турбулентной вязкости осредненное течение (в том числе крупномасштабные вихревые образования) получает кинетическую энергию от мелкомасштабных вихревых движений

$$D(|\langle\mathbf{u}\rangle|^2/2)/Dt = -\mathbf{R} : \nabla\langle\mathbf{u}\rangle + \ldots; \qquad (26)$$

при этом сами хаотические вихревые движения либо постепенно ослабевают, либо поддерживаются за счет локального притока тепла в систему, связанного с некоторыми другими внутренними процессами (см. Старр, 1971), например, регулярным преобразованием «химического» тепла в кинетическую энергию мелкомасштабных возмущений. В частности, для влажной гиротропной атмосферы мелкомасштабная турбулентность может поддерживаться за счет скрытых потоков тепла при конденсации водяного пара (Хапаев, 2002).

Итак, в случае зеркально симметричной турбулентности определяющие соотношения (13) и (14), совместно с уравнениями (16) и (22) полностью замыкают гидродинамические уравнения (1)-(3) для осредненных полей скорости $\langle\mathbf{u}\rangle(\mathbf{x},t)$ и температуры $\langle\theta\rangle(\mathbf{x},t)$. Однако практика моделирования показала, что подобный подход, не учитывающий возможности образования разномасштабных когерентных вихревых структур, оказывающих сильное влияние на структуру и динамику течения космического вещества, имеет узкую область применения ко многим астрофизическим объектам, в частности при анализе процессов турбулентного переноса в немагнитном астрофизическом диске.

2. ЗЕРКАЛЬНО НЕСИММЕТРИЧНАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ В ДИСКЕ

Важно подчеркнуть, что зеркальная симметрия не является фундаментальным свойством приведенных выше уравнений сохранения, поскольку в определение некоторых гидродинамических характеристик течения заведомо включена правосторонность (или левосторонность). Такой псевдовекторной величиной является, в частности, завихренность поля пульсирующих скоростей $\boldsymbol{\omega}'(\mathbf{x},t) = \nabla \times \mathbf{u}'$, а для быстро вращающейся (например, вокруг фиксированной оси) мелкомасштабной турбулентности – такая ее статистическая характеристика, как вихревая спиральность $H(\mathbf{x},t)$ (лишенный зеркальной симметрии псевдоскаляр) (см., например, Steenbeck и др., 1966). Напомним, что векторы $\mathbf{A}$, ведущие себя как величины $\mathbf{A}^{ref}(\mathbf{x},t) = -\mathbf{A}(-\mathbf{x},t)$, получили название полярных, а те, для которых справедливо соотношение $\mathbf{A}^{ref}(\mathbf{x},t) = \mathbf{A}(-\mathbf{x},t)$ – аксиальных, или псевдовекторов (здесь индекс «*ref*» обозначает оператор отражения в произвольной плоскости или в произвольной точке). Скаляр

$$V^{ref} := (\mathbf{A}^{ref} \times \mathbf{B}^{ref}) \cdot \mathbf{C}^{ref} = -(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = -V,$$

зависящий от использования правосторонности, является псевдоскаляром; последнее означает, что он меняет знак при замене правосторонней системы координат на левостороннюю. Таким образом, псевдовектор $\boldsymbol{\omega}'(\mathbf{x},t)$ обеспечивает смену знака спиральности при переходе от правовинтовой системы координат к левовинтовой.

При существовании зеркальной симметрии мелкомасштабного поля пульсационных скоростей $\mathbf{u}'(\mathbf{x},t)$ вихревая спиральность $H(\mathbf{x},t)$ (в случае преобразования $\mathbf{x} \to -\mathbf{x}$ координат) должна оставаться, с одной стороны, неизменной, поскольку все статистические свойства этого поля не меняются при зеркальном отражении, но, с другой стороны, она должна изменить знак, поскольку $H(\mathbf{x},t)$ – псевдоскаляр. По этой причине для зеркально симметричной турбулентности справедливо равенство $H(\mathbf{x},t) = 0$. Таким образом, гидродинамическая спиральность $H(\mathbf{x},t)$, связанная с топологической структурой сложного поля завихренности, является фундаментальной мерой «отсутствия отражательной симметрии» в турбулентном потоке.

Следует особо отметить, что пульсационное поле скоростей $\mathbf{u}'(\mathbf{x},t)$ с отличной от нуля средней спиральностью $H(\mathbf{x},t) \neq 0$, являющееся континуумом, образованным множеством произвольно ориентированных мелкомасштабных вихрей (в котором преобладают правовращательные или левовращательные вихревые структуры), может не проявлять зеркальную симметрию только по отношению лишь к одной плоскости. Примером такого поля является турбулентное поле пульсационных скоростей во вращающейся конвективной зоне солнечного протопланетного диска, когда возможно генерирование спиральности под воздействием силы Кориолиса $2\mathbf{\Omega}_0 \times \langle \mathbf{u} \rangle$ или стратификации массовой плотности в поле силы тяжести $\mathbf{g}$. Средние свойства такого поля не остаются инвариантными при отражениях в центральной плоскости диска, $\mathrm{z} \to -\mathrm{z}$.

Таким образом, важно отметить, что для спиральной турбулентности определяющие соотношения (13) и (14) уже не вполне пригодны и нуждаются в определенной модификации, учитывающей вероятную анизотропию поля мелкомасштабной турбулентности (см., например, Краузе, Рэдлер, 1984; Rüdiger, 1980a,b, 1982; Berezin, Trofimov**,** 1995; Колесниченко, Маров, 2009**)**. Более того, в случае спиральной турбулентности закон парности (симметричности) тензора Рейнольдса $\mathbf{R}(\mathbf{x},t)$ может нарушаться на макроуровне, $R_{ij} \neq R_{ji}$ (Rüdiger, 1974; Krause, Rüdiger, 1974a,b ; Николаевский, 1984; Berezin, Trofimov, 1995). Напомним, что при пространственном осреднении гидродинамических уравнений для мгновенного движения, исключающем постулат Рейнольдса о коммутативности операций осреднения и дифференцирования, получается осредненное уравнение движения с несимметричным тензором Рейнольдса $R_{ij} := \mathrm{Q}_{ij}(\mathbf{x},0,t,0)$, где $\mathrm{Q}_{ij}(\mathbf{x},\xi,t,\tau) = \langle u_i'(\mathbf{x},t) u_j'(\mathbf{x}+\xi,\, t+\tau) \rangle$ − несимметричный корреляционный тензор второго порядка (Николаевский, 1984). Заметим также, что еще Рейнольдс в своей оригинальной публикации (Reynolds,1894**)**, осредняя поля скоростей по объему и отнеся различные средние значения к центру масс этого объема, полагал компоненты турбулентных напряжений R_{ij} и R_{ji} различными.

Прежде чем привести возможный вариант такого рода обобщенных реологических соотношений для турбулентных термодинамических потоков $\mathbf{R}(\mathbf{x},t)$ и $\mathbf{q}_\theta^{turb}(\mathbf{x},t)$, рассмотрим ключевое при моделировании процессов переноса в гиротропной турбулентности эволюционное уравнение для осредненной гидродинамической спиральности $h(\mathbf{x},t)$.

2.1. Уравнение переноса для интегральной спиральности

В связи с относительно редким использованием в литературе эволюционного уравнения для спиральности $H := \langle \mathbf{u}' \cdot \boldsymbol{\omega}' \rangle$ рассмотрим здесь его подробный вывод в предположении, что система отсчета координат вращается вокруг фиксированной в пространстве оси $0z$ с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}_0 = \mathbf{i}_z \Omega_0$. Учитывая (6) и (7), а также тождественное преобразование $\mathrm{D}\boldsymbol{\omega}'/\mathrm{D}t \equiv \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}/\mathrm{d}t - \mathrm{D}\langle\boldsymbol{\omega}\rangle/\mathrm{D}t - (\mathbf{u}' \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega}$, приходим к следующему уравнению для пульсирующей завихренности

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{\omega}'}{\mathrm{D}t} = -(\mathbf{u}' \cdot \nabla)\langle \boldsymbol{\omega}_a \rangle - (\mathbf{u}' \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega}' + (\boldsymbol{\omega}' \cdot \nabla)\mathbf{u}' + (\boldsymbol{\omega}' \cdot \nabla)\langle \mathbf{u} \rangle +$$

$$+\left(\langle \boldsymbol{\omega}_\mathrm{a} \rangle \cdot \nabla\right)\mathbf{u}' - \mathbf{g} \times \nabla\left(\rho'/\rho_0\right) + \nu\Delta\boldsymbol{\omega}' - \nabla \times G^{\omega}. \tag{27}$$

Если теперь скалярно умножить уравнение (27) на $\mathbf{u}'$, а уравнение для пульсационной составляющей $\mathbf{u}'$ скорости течения

$$\frac{\mathrm{D}\mathbf{u}'}{\mathrm{D}t} = -\left(\mathbf{u}' \cdot \nabla\right)\mathbf{u} - 2\boldsymbol{\Omega}_0 \times \mathbf{u}' - \nabla\left(\rho'/\rho_0\right) + \nu\Delta\mathbf{u}' - \nabla\mathbf{R} \tag{28}$$

на $\boldsymbol{\omega}'$ и сложить результаты, то получим уравнение для локальной спиральности в следующем виде:

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\boldsymbol{\omega}' \cdot \mathbf{u}') = -\mathbf{u}' \cdot \left(\mathbf{u}' \cdot \nabla\right)\langle \boldsymbol{\omega}_a \rangle - \mathbf{u}' \cdot \left(\mathbf{u}' \cdot \nabla\right)\boldsymbol{\omega}' - \boldsymbol{\omega}' \cdot \left(\mathbf{u}' \cdot \nabla\right)\mathbf{u}' + \left(\boldsymbol{\omega}' \cdot \nabla\right)\frac{|\mathbf{u}'|^2}{2} +$$

$$+\mathbf{u}' \cdot \left(\langle \boldsymbol{\omega}_a \rangle \cdot \nabla\right)\mathbf{u}' - \mathbf{u}' \cdot \left[\mathbf{g} \times \nabla\left(\rho'/\rho_0\right)\right] + \nu\left(\mathbf{u}' \cdot \Delta\boldsymbol{\omega}' + \boldsymbol{\omega}' \cdot \Delta\mathbf{u}'\right) - \boldsymbol{\omega}' \cdot \left(\mathbf{u}' \cdot \nabla\right)\langle \mathbf{u} \rangle -$$

$$-\boldsymbol{\omega}' \cdot \left(\nabla \cdot \mathbf{R}\right) + +\mathbf{u}' \cdot \left(\boldsymbol{\omega}' \cdot \nabla\right)\langle \mathbf{u} \rangle - 2\boldsymbol{\omega}' \cdot (\boldsymbol{\Omega}_0 \times \mathbf{u}') - \nabla \cdot \left(\frac{p'}{\rho_0}\boldsymbol{\omega}'\right) - \mathbf{u}' \cdot \left(\nabla \times \mathcal{G}^{\omega}\right). \tag{29}$$

Искомое уравнение для интегральной спиральности $H(\mathbf{x},t)$ можно теперь получить путем осреднения уравнения (29) по ансамблю реализаций случайных термогидродинамических полей при учете следующих тождественных соотношений:

$$\left\langle (\boldsymbol{\omega}' \cdot \nabla)\frac{|\mathbf{u}'|^2}{2} \right\rangle = \nabla \cdot \left\langle \frac{|\mathbf{u}'|^2}{2}\boldsymbol{\omega}' \right\rangle; \quad \left\langle \mathbf{u}' \cdot \left(\langle \boldsymbol{\omega}_a \rangle \cdot \nabla\right)\mathbf{u}' \right\rangle = \langle \boldsymbol{\omega}_a \rangle \cdot \nabla b;$$

$$\left\langle \mathbf{u}'\cdot\left(\mathbf{u}'\cdot\nabla\right)\langle\boldsymbol{\omega}_a\rangle\right\rangle=-\mathbf{R}:\nabla\langle\boldsymbol{\omega}_a\rangle;\quad \left\langle\boldsymbol{\omega}'\cdot(\boldsymbol{\Omega}_0\times\mathbf{u}')\right\rangle=\boldsymbol{\Omega}_0\cdot\langle\mathbf{u}'\times\boldsymbol{\omega}'\rangle=\boldsymbol{\Omega}_0\cdot\boldsymbol{\mathcal{G}}^{\omega};$$

$$\left\langle\mathbf{u}'\cdot\left(\boldsymbol{\omega}'\cdot\nabla\right)\langle\mathbf{u}\rangle-\boldsymbol{\omega}'\cdot\left(\mathbf{u}'\cdot\nabla\right)\langle\mathbf{u}\rangle\right\rangle=\left\langle\boldsymbol{\omega}'\times\mathbf{u}'\right\rangle\cdot\left(\nabla\times\langle\mathbf{u}\rangle\right)=-\boldsymbol{\mathcal{G}}^{\omega}\cdot\langle\boldsymbol{\omega}\rangle;$$

$$\nu\left\langle\mathbf{u}'\cdot\Delta\boldsymbol{\omega}'+\boldsymbol{\omega}'\cdot\Delta\mathbf{u}'\right\rangle=\nabla\cdot\left(\nu\nabla H\right)-2\nu\left\langle\nabla\omega'_j\cdot\nabla u'_j\right\rangle;$$

$$\left\langle\boldsymbol{\omega}'\cdot\left(\mathbf{u}'\cdot\nabla\right)\mathbf{u}'+\mathbf{u}'\cdot\left(\mathbf{u}'\cdot\nabla\right)\boldsymbol{\omega}'\right\rangle=\left\langle\left(\mathbf{u}'\cdot\nabla\right)\left(\mathbf{u}'\cdot\boldsymbol{\omega}'\right)\right\rangle=\nabla\cdot\left\langle\left(\mathbf{u}'\cdot\boldsymbol{\omega}'\right)\mathbf{u}'\right\rangle;$$

$$\left\langle\mathbf{u}'\cdot\left[\mathbf{g}\times\nabla\left(\rho'/\rho_0\right)\right]\right\rangle=\mathbf{g}\cdot\left\langle\nabla\left(\rho'/\rho_0\right)\times\mathbf{u}'\right\rangle=-\alpha_\theta\mathbf{g}\cdot\left\langle\nabla\theta'\times\mathbf{u}'\right\rangle=$$

$$=-\alpha_\theta\mathbf{g}\cdot\left(\nabla\times\left\langle\theta'\mathbf{u}'\right\rangle\right)+\alpha_\theta\mathbf{g}\cdot\left\langle\theta'\boldsymbol{\omega}'\right\rangle\cong\alpha_\theta\mathbf{g}\cdot\left\langle\theta'\boldsymbol{\omega}'\right\rangle,$$

при выводе которых были использованы следующие формулы векторного анализа:

$$2\mathbf{a}\cdot\left(\mathbf{c}\cdot\nabla\right)\mathbf{a}=\mathbf{c}\cdot\nabla\left|\mathbf{a}\right|^2,\quad \mathbf{c}\cdot\nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})=\mathbf{a}\cdot\left(\mathbf{c}\cdot\nabla\right)\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\left(\mathbf{c}\cdot\nabla\right)\mathbf{a},$$

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}),\ (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\left(\nabla\times\mathbf{c}\right)=\mathbf{b}\cdot\left(\mathbf{a}\cdot\nabla\right)\mathbf{c}-\mathbf{a}\cdot\left(\mathbf{b}\cdot\nabla\right)\mathbf{c},$$

$$\mathbf{a}\cdot\left(\mathbf{b}\cdot\nabla\right)\mathbf{c}=\mathbf{ab}:\nabla\mathbf{c}.$$

В результате уравнение для интегральной вихревой спиральности принимает вид:

$$\frac{\mathrm{D}H}{\mathrm{D}t}:=\frac{\partial H}{\partial t}+\left(\langle\mathbf{u}\rangle\cdot\nabla\right)H=-\nabla\cdot\left\{\mathbf{J}_h^{turb}-\nu\nabla H\right\}+\mathbf{R}:\nabla\langle\boldsymbol{\omega}_a\rangle-$$

$$-\left(\boldsymbol{\mathcal{G}}^{\omega}-\nabla H\right)\cdot\langle\boldsymbol{\omega}_a\rangle-\alpha_\theta\mathbf{g}\cdot\left\langle\theta'\boldsymbol{\omega}'\right\rangle-\varepsilon_H, \tag{30}$$

или, при использовании (11), следующую форму

$$\frac{\mathrm{D}H}{\mathrm{D}t}=-\nabla\cdot\left\{\mathbf{J}_h^{turb}-\nu\nabla H\right\}+\mathbf{R}:\nabla\langle\boldsymbol{\omega}_a\rangle-\nabla\mathbf{R}\cdot\langle\boldsymbol{\omega}_a\rangle-\frac{\alpha_\theta H}{b}\mathbf{g}\cdot\mathbf{q}_\theta^{turb}-\varepsilon_H, \tag{31}$$

где

$$\mathbf{J}_h^{turb}:=\left\langle\left(\mathbf{u}'\cdot\boldsymbol{\omega}'\right)\mathbf{u}'-\left(\frac{\left|\mathbf{u}'\right|^2}{2}-\frac{p'}{\rho_0}\right)\boldsymbol{\omega}'\right\rangle=-\mathrm{C}_{H1}\frac{b^2}{\varepsilon}\nabla H\ ,\quad \left(\mathrm{C}_{H1}\cong 0.16\right) \tag{32}$$

– диффузионный поток спиральности $H(\mathbf{x},t)$, связанный с различными механизмами ее турбулентного переноса в координатном пространстве;

$$\varepsilon_H(\mathbf{x},t) := 2\nu\langle\nabla\mathbf{u}' : \nabla\boldsymbol{\omega}'\rangle = C_{H2}\frac{\varepsilon}{b}H, \quad (C_{H2} \cong 1) \tag{33}$$

– скорость диссипации спиральности в турбулентном потоке. Для моделирования корреляции $\langle\theta'\boldsymbol{\omega}'\rangle$ в уравнении (31) использовано следующее приближенное соотношение

$$\langle\theta'\boldsymbol{\omega}'\rangle \cong \frac{H}{b}\mathbf{q}_\theta^{turb}. \tag{34}$$

Из уравнения (31) видно, что спиральность $H(\mathbf{x},t)$ генерируется в дифференциально вращающейся отражательно-несимметричной турбулентности благодаря вращению, неоднородности плотности и интенсивности турбулентных пульсаций.

В частном случае развитой турбулентности (при больших числах Рейнольдса), когда в потоке устанавливается локально стационарное состояние поля спиральности (локально равновесное приближение), из (34), в предположении пространственной однородности крупномасштабного осредненного течения $\langle\mathbf{u}\rangle(\mathbf{x},t)$, можно найти явную алгебраическую связь величины $H(\mathbf{x},t)$ с угловой скоростью вращения астрофизического диска, неоднородностью его температуры (плотности) и интенсивности турбулентных пульсаций. Действительно, в этом случае уравнению (31), при использовании тождественного преобразования

$$\mathbf{R} : \nabla\langle\boldsymbol{\omega}_a\rangle - (\nabla\cdot\mathbf{R})\cdot\langle\boldsymbol{\omega}_a\rangle = \nabla\cdot(\mathbf{R}\cdot\langle\boldsymbol{\omega}\rangle) - 2(\nabla\cdot\mathbf{R})\cdot(\langle\boldsymbol{\omega}\rangle + \boldsymbol{\Omega}_0),$$

можно придать следующий вид

$$-2(\nabla\cdot\mathbf{R})\cdot(\langle\boldsymbol{\omega}\rangle + \boldsymbol{\Omega}_0) - \alpha_\theta\mathbf{g}\cdot\langle\theta'\boldsymbol{\omega}'\rangle - \varepsilon_H = 0.$$

Отсюда с учетом определяющего соотношения (13) для тензора Рейнольдса $\mathbf{R}(\mathbf{x},t)$ (в предположении пространственной однородности осредненного течения) получим

$$\frac{4}{3}\nabla b\cdot\boldsymbol{\Omega}_0 + \frac{\alpha_\theta}{b}H\mathbf{g}\cdot\mathbf{q}_\theta^{turb} + C_{H2}\frac{\varepsilon_H}{b}H \cong 0. \tag{35}$$

Из (35) следует искомое соотношение для спиральности (Kolesnichenko, 2011)

$$H(\mathbf{x},t) = -\frac{2}{3}\frac{\mathbf{\Omega}_0 \cdot \nabla b^2}{\alpha_\theta \mathbf{q}_\theta^{turb} \cdot \mathbf{g} + C_{H2}\varepsilon_H} \cong \frac{2}{3}\frac{\mathbf{\Omega}_0 \cdot \nabla b^2}{\dfrac{\nu^{turb}}{\sigma_\theta}\dfrac{\mathbf{g}}{\langle\theta\rangle}\cdot\left(\nabla\langle\theta\rangle + \dfrac{\mathbf{g}}{c_\mathrm{p}}\right) - C_{H2}\varepsilon}. \qquad (36)$$

Таким образом, спиральность в астрофизическом диске зависит от его вращения, градиента температуры и неоднородности интенсивности турбулентных пульсаций в зонах с развитой турбулентной конвекцией. Например, тепловая турбулентная конвекция в вертикальном направлении аккреционного диска на некоторых расстояниях от протозвезды (на определенных этапах ее эволюции) в областях между его экваториальной плоскостью и «верхней» поверхностью с большей вероятностью приводит к левовинтовым спиральным движениям, поскольку поднимающееся вещество будет расширяться и вращаться под действием сил Кориолиса, приводя, таким образом, к левовинтовому спиральному движению. При этом опускающееся вещество будет сжиматься и под действием этих сил будет вращаться в противоположном направлении, опять-таки совершая левовинтовое движение. Напротив, в «нижней» части диска будут преобладать правовинтовые спиральные движения. Баланс левовинтовых и правовинтовых движений возможен только в окрестности экваториальной плоскости диска при отсутствии градиента ∇b интенсивности турбулентности, т.е. уже на самых поздних этапах эволюции аккреционного диска.

Рассмотрим теперь влияние спиральности на структуру определяющих законов турбулентности во вращающейся системе.

2.2. Определяющие соотношения для зеркально несимметричной турбулентности

Проблема замыкания для зеркально несимметричной турбулентности оказывается более сложной, чем в традиционном изотропном случае (Краузе, Рэдлер, 1984), поскольку в модифицированных уравнениях (13)-(14) для тензора Рейнольдса $\mathbf{R}(\mathbf{x},t) := -\langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle$ и вектора турбулентного переноса тепла $\mathbf{q}_\theta^{turb}(\mathbf{x},t) := \langle \theta' \mathbf{u}' \rangle$ появляется целый ряд дополнительных членов, обусловленных теми векторными полями, благодаря которым возникает анизотропия мелкомасштабного турбулентного поля. В частности, при моделировании дисковой спиральной турбулентности в структуре феноменологических коэффициентов следует учитывать возможную анизотропию поля мелкомасштабной турбулентности, обусловленную действием кориолисовой и гравитационной сил.

Чтобы не осложнять изложение, рассмотрим здесь относительно простую модификацию определяющих соотношений (13)-(14), отвечающую пространственной изотропии коэффициентов турбулентного переноса. Более общие определяющие соотношения для спиральных турбулентных течений, в частности, с тензорными феноменологическими коэффициентами, можно найти, например, в работах (Rüdiger, 1974, 1980a,b; Yoshizava, 1990). Ограничимся также случаем простых алгебраических моделей замыкания, когда в определяющих соотношениях достаточно учитывать пространственные производные только первого порядка. Тогда в линейном приближении относительно направления анизотропии (неоднородности) мелкомасштабного турбулентного поля, характеризуемого вектором $\mathbf{g}$ или градиентом ∇H, возможна следующая модификация градиентных соотношений (4)-(5) (см., например, Березин, Трофимов, 1996; Rüdiger, 1974, 1980a,b; Yoshizava, 1990; Колесниченко, 2011):

$$(\mathbf{R})_{ij}(\mathbf{x},t) = -\tfrac{2}{3}b\,\delta_{ij} + 2\nu^{turb}S_{ij} - \nu_H^{turb}\left\{\langle\omega_{ai}\rangle\frac{\partial H}{\partial x_j} + \langle\omega_{aj}\rangle\frac{\partial H}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\left(\langle\boldsymbol{\omega}_a\rangle\cdot\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}\right)\delta_{ij}\right\} -$$

$$-C_s\nu_H^{turb}\left\{\varepsilon_{ilm}S_{jm} + \varepsilon_{jlm}S_{im}\right\}\frac{\partial H}{\partial x_l} - \nu_\theta^{turb}\left(q_{qi}^{turb}g_j + q_{\theta j}^{turb}g_i - \tfrac{2}{3}(\mathbf{q}_\theta^{turb}\cdot\mathbf{g})\delta_{ij}\right), \quad (37)$$

$$(\mathbf{q}_\theta^{turb})_i(\mathbf{x},t) = -\kappa_\theta^{turb}\left(\frac{\partial\langle\theta\rangle}{\partial x_i} - \frac{g_i}{c_p}\right) + \kappa_{\theta 1}^{turb}S_{ij}\left(\frac{\partial\langle\theta\rangle}{\partial x_j} - \frac{g_j}{c_p}\right) +$$

$$+\kappa_{\theta 2}^{turb}\,\varepsilon_{ijk}\langle\omega_{aj}\rangle\left(\frac{\partial\langle\theta\rangle}{\partial x_k} + \frac{g_k}{c_p}\right). \quad 38)$$

Здесь ε_{ijk} – единичный антисимметричный тензор Леви-Чивита (напомним, что тензоры Кронекера δ_{ij} и Леви-Чивиты ε_{ijk} являются примерами изотропных тензоров соответственно второго и третьего ранга. Эти тензоры имеют одинаковые компоненты во всех координатных системах, а значит, имеют неизменные компоненты при произвольном вращении);

$$\nu^{turb} = C_b\frac{b^2}{\varepsilon}, \quad \nu_H^{turb} = C_{\nu 1}\frac{b^4}{\varepsilon^3}, \quad \nu_\theta^{turb} = C_{\nu 2}\alpha_\theta\frac{b^3}{\varepsilon^2}, \quad C_b = 0.09, \quad C_{\nu 1}\approx 0.5, \quad (39)$$

$$\kappa_{\theta}^{turb}=\frac{\nu^{turb}}{\sigma_{\theta}};\ \ \kappa_{\theta s}^{turb}=C_{\theta s}\frac{b^{3}}{\varepsilon^{2}}\quad (s=1,2);\ \ \sigma_{\theta}=0.7-1;\ \ C_{\theta s}-\mathrm{const};\ \ C_{s}=1 \quad (40)$$

– скалярные феноменологические коэффициенты. Третий и четвертый члены в соотношении (37) описывают влияние интегральной спиральности на симметричную часть тензора напряжений, т.е. влияние двух возможных направлений винтовых движений.

3. ОТРИЦАТЕЛЬНАЯ ВЯЗКОСТЬ ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Перейдем теперь к интерпретации возможного в спиральной трехмерной турбулентности обратного энергетического каскада в терминах отрицательной вязкости.

3.1. Затруднения теории переноса количества движения в астрофизических дисках

Начнем с того, что в последнее время в громадном большинстве астрофизической литературы в моделях эволюции вращающегося турбулентного облака используются обычные уравнения гидродинамики, в которых, однако, молекулярная вязкость заменяется на турбулентную. В этом случае авторы, естественно, используют линейную связь

$$(\mathbf{R})_{ij}=\rho K_{ijmn}(\mathbf{S})_{mn} \quad (41)$$

между симметричным тензором напряжений Рейнольдса и симметричным тензором скоростей деформации $(\mathbf{S})_{jk}=\tfrac{1}{2}\left(\partial\langle u_k\rangle/\partial x_j+\partial\langle u_j\rangle/\partial x_k\right)$ (т.е. теорию Прандтля переноса количества движения). Коэффициенты K_{ijmn} (компоненты некоторого тензора четвертого ранга, симметричного по i,j и m,n) этой линейной функции имеют смысл коэффициентов турбулентной вязкости и определяются статистическими характеристиками мелкомасштабной турбулентности. По самому определению изотропной крупномасштабной турбулентности все связанные с ней средние величины остаются неизменными при вращениях (но необязательно относительно отражений); тензоры, обладающие этим свойством, являются изотропными тензорами. Если предположить изотропность (но не зеркальную симметричность) тензора турбулентной вязкости K_{ijmn}, то в этом случае справедливо разложение

$K_{ijmn} = a\delta_{ij}\delta_{mn} + b\delta_{im}\delta_{jn} + c\delta_{in}\delta_{jm}$ (см. Коренев, 1996), подставляя которое в (41), будем иметь

$$R_{ij} = -\tfrac{2}{3}\rho b\delta_{ij} + \rho\nu^{turb} S_{mn}\ , \quad (\nu^{turb} := b + c). \tag{42}$$

Заметим уже здесь, что численные значения основных параметров турбулентных коэффициентов, как диффузионных, так и гиротропных, в условиях аккреционных дисков можно найти в следующих публикациях (Andre, Lesieur, 1977ab; Shakura и др., 1978*;* Biferale и др., 1998; Ditlevsen, Giuliani, 2001*;* Kolesnichenko, Marov, 2007; Ditlevsen, 2011; Kolesnichenko, 2011). Отметим также, что в (42) коэффициент турбулентной вязкости ν^{turb}, определяемый мелкомасштабным полем пульсационной скорости $\mathbf{u}'(\mathbf{x},t)$, обычно считается положительным. Однако не исключена также и «экзотическая» возможность $\nu^{turb} < 0$, которая согласно (Kraichnan, 1976) может реализовываться в гиротропной турбулентности.

Используя общую формулу (42) для модели вращающегося турбулентного облака, получим, что касательные напряжения $R_{r\varphi}$ зависят от градиента угловой скорости $\Omega(r)$ вращения среды следующим образом:

$$R_{r\varphi} = \rho\nu^{turb} r \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\langle u\rangle_\varphi}{r}\right) = \rho\nu^{turb} r \frac{\partial\Omega(r)}{\partial r}. \tag{43}$$

Поскольку угловая скорость в кеплеровском диске убывает с расстоянием от Солнца, то и направление переноса количества движения (вещества диска) будет в этом случае также в сторону от Солнца. Таким образом, теория переноса количества движения Прандтля, примененная ко всему протопланетному облаку (без учета влияния сильного гравитационного поля Солнца на внутренние части облака), приводит, вообще говоря, к заключению (явно ошибочному!) о повсеместном переносе во вращающемся турбулентном облаке вещества наружу.

В связи с подобного рода затруднениями теории переноса количества движения в общем случае криволинейных потоков еще создатель полуэмпирической теории турбулентности Тейлор (Taylor, 1915), а вслед за ним и Карман (1936) предложили такое логическое обобщение выражения (43), когда касательные напряжения принимаются зависящими от градиента момента количества движения

$$R_{r\varphi} = \rho \nu_s^{turb} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \Omega(r) \right]. \tag{44}$$

Для модели эволюции протопланетного облака различие в формулах (43) и (44) оказалось очень важным, поскольку в диске угловая скорость убывает с расстоянием от Солнца, а момент количества движения увеличивается, а значит, направление переноса, согласно этим двум точкам зрения, оказывается противоположным. По этой причине формулы (43) и (44), взятые в отдельности, не могут объяснить всех особенностей турбулентного вращательного движения вещества во всех частях диска, когда имеется эффективный перенос внешних частей вещества облака – наружу, а внутренних – к Солнцу (см. Сафронов, 1989). В связи с этим Васютинский (Wasiutynski, 1946) предложил более общее выражение (которое не является компонентной какого-либо тензора; оно применимо только в конкретной системе координат) для касательных напряжений $R_{r\varphi}$ во вращающейся среде

$$R_{r\varphi} = \rho K_r^r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \Omega(r) \right] - 2\rho K_\varphi^\varphi \Omega(r), \tag{45}$$

охватывающее оба рассмотренных выше случая и связанное с действием анизотропной вязкости. Это соотношение при чисто радиальном течении ($K_\varphi^\varphi = 0$) приводит к формуле (44), а в изотропной среде ($K_\varphi^\varphi = K_r^r$) – к обычному гидродинамическому выражению (43). Следует, однако, отметить, что вид тензора напряжений Васютинского (частным случаем которого является выражение (45)), широко используемый в астрофизической литературе (Тассуль, 1982) при объяснении дифференциального вращения разнообразных космических объектов «анизотропной вязкостью», до настоящего времени не аргументирован физически, т.е. пока остается неясным, является ли это обобщение лишь формальным или характеризует турбулентное течение более точно. Возможный вариант обоснования формулы (45) в рамках несимметричной гидродинамики турбулентных сред будет предложен ниже. Но прежде покажем, что даже в случае использования классической теории турбулентного напряжения Прандтля (т.е. формулы (43)) возможно проявление эффекта отрицательной вязкости в трехмерной дисковой турбулентности.

3.2. Отрицательная вязкость (термодинамический подход)

В этом подразделе мы будем исходить из концепции двухуровневого макроскопического описания турбулентной среды протопланетного облака с помощью двух взаимодействующих континуумов (взаимно открытых подсистем), которые заполняют одновременно один и тот же объем координатного пространства непрерывно: подсистемы осредненного движения и подсистемы турбулентного хаоса (Колесниченко, 2009). Континуум осредненного движения, получающийся в результате теоретико-вероятностного осреднения мгновенных гидродинамических уравнений, предназначен для исследования эволюции осредненных гидродинамических полей, включая крупные вихревые образования в диске. Подсистема турбулентного хаоса (в общем случае вихревой анизотропный континуум с внутренней структурой) представляет собой собственно поле пульсационных скоростей $\mathbf{u}'(\mathbf{x},t)$, связанное со стохастическим мелкомасштабным пульсационным движением завихренной жидкости (для которой $\boldsymbol{\omega}'(\mathbf{x},t)\neq 0$). Подобное деление реального турбулентного течения на воображаемые – осредненное и пульсационное, зависит, вообще говоря, от выбора пространственно-временной области осреднения (при выполнении условий эргодичности), для которой установлены средние значения локальных гидродинамических переменных, являющихся непрерывными функциями координат и времени, т.е. имеет до некоторой степени условный характер.

Турбулентный хаос далек от полного хаоса термодинамического равновесия, поскольку он обладает некоторой упорядоченностью: даже развитая локально-изотропная турбулентность в инерционном интервале масштабов имеет далекий от равномерного ($b(k)=\mathrm{const}$) колмогоровский спектр $b(k)\propto k^{-5/3}$ распределения кинетической энергии (пульсационного движения) по пространству волновых чисел k (см. ниже).

При феноменологическом описании квазиравновесной подсистемы структурированного турбулентного хаоса будем исходить из формализма обобщенной статистической термодинамики, предполагающего исследование ансамбля макроскопически одинаковых систем турбулентного хаоса с одними и теми же обобщенными термодинамическими параметрами состояния (такими как энергия турбулентности $b(\mathbf{x},t)$, температура турбулизации $T_{turb}(\mathbf{x},t)$ (не сводится в общем случае к абсолютной температуре), удельный объем $1/\rho(\mathbf{x},t)$ и т.п.) и требующего вероятностного подхода (Колесниченко, 2002; Marov, Kolesnichenko, 2002). Причиной последнего являются крупномасштабные турбулентные флуктуации некоторых дополнительных параметров состояния хаоса $q_k(\mathbf{x},t)$ ($k=\overline{1,n}$) (так называемых внутренних координат), которые и служат мерой различий в любом множестве подобных термодинамически одинаковых систем. Заметим, что крупномасштабные турбулентные флуктуации следует отличать от статистических молекулярных флуктуаций, обусловленных атомной структурой системы. Заметим также, что часть внутренних координат $q_k(\mathbf{x},t)$ может относиться к некогерентной составляющей подсистемы турбулентного хаоса, а другая часть – характеризовать мезомасштабные индивидуальные когерентные структуры. К числу внутренних координат, описывающих термодинамическое состояние хаоса, можно отнести такие флуктуирующие положительно определенные параметры, которые адекватно характеризуют завихренную жидкость (включая и мезомасштабные когерентные образования) внутри физически бесконечно малого элементарного объема $\mathrm{d}\mathbf{x}$. В частности, в качестве стохастических величин q_k могут быть выбраны: скорость диссипации турбулентной энергии ε, обобщенные угловые скорости (характеризующие мезомасштабные когерентные вихревые образования), энстрофия $\Omega(\mathbf{x},t)$ (в случае плоского течения) и т.п.

Методами неравновесной термодинамики в работе (Колесниченко, 2002) было показано, что в случае принятого нами здесь двухуровневого описания предельно развитой турбулентности, в вихревом континууме, отвечающем мелкомасштабным составляющим пульсирующих термогидродинамических параметров, устанавливается такой квазистационарный режим между отбором энергии у «внешнего источника» (континуума, связанного с осредненным движением дискового вещества) и диссипацией энергии из-за внутренних диссипативных процессов в подсистеме хаоса, при котором производство энтропии турбулизации $S_{turb}(\mathbf{x},t)$ компенсируется ее оттоком в подсистему осредненного движения, так что суммарное возникновение энтропии хаоса будет минимально. Из этого следует, что подсистема турбулентного хаоса экспортирует энтропию во «внешнюю среду» (т.е. отдает ее подсистеме осредненного движения). Другими словами, для поддержания стационарного состояния внутри подсистемы турбулентного хаоса необходим приток отрицательной энтропии (негэнтропии) от «внешней среды» (т.е. подсистемы осредненного движения); эта поступающая в подсистему хаоса негэнтропия расходуется на поддержание и совершенствование ее внутренней структуры. Как известно (см., например, Пригожин, Стенгерс, 1986), условие такого рода является достаточным для возникновения диссипативных когерентных (мезомасштабных) структур в самом вихревом континууме.

В работе (Колесниченко, 2002) было показано, что в этом квазистационарном случае суммарное возникновение турбулентной энтропии

$S_{turb}(\mathbf{x},t)$ (рассеяние энергии $\sigma_{turb}(\mathbf{x},t)$) будет иметь структуру билинейной формы $T_{turb}\,\sigma_{turb} := \sum_{\alpha} \Im_{\alpha}(\mathbf{x},t) X_{\alpha}(\mathbf{x},t)$, явный вид которой определяется конкретной моделью турбулизованной среды, т.е. набором учитываемых в модели гидродинамических процессов. Согласно основному постулату неравновесной термодинамики (см., например, де Гроот, Мазур, 1964) эта форма позволяет найти определяющие (замыкающие) соотношения между термодинамическими потоками $\Im_{\alpha}(\mathbf{x},t)$ и силами $X_{\alpha}(\mathbf{x},t)$ в виде линейных соотношений $\Im_{\alpha i}(\mathbf{x},t) = \sum_{\beta} L^{ij}_{\alpha\beta} X_{\beta j}(\mathbf{x},t),\ (\alpha,\beta = 1,2,...)$. Своеобразием вихревого континуума является то, что матрица онзагеровских коэффициентов $\boldsymbol{L}_{\alpha\beta}$ зависит не только от осредненных термодинамических параметров состояния среды (как в ламинарном случае), но также и от статистических характеристик подсистемы турбулентного хаоса, в частности от величины ε – потока энергии по каскаду турбулентных вихрей (согласно Колмогорову (К41) характерным параметром в подсистеме мелкомасштабной турбулентности является поток энергии η по иерархии турбулентных вихрей вплоть до молекулярного уровня, который в квазистационарном случае совпадает со скоростью диссипации энергии ε и является, таким образом, одним из термодинамических потоков системы) или от потока гидродинамической спиральности, эффективно генерирующейся в случае гиротропной мелкомасштабной турбулентности.

Подобная ситуация, типичная для любых самоорганизующихся (синергетических) систем (Хакен, 1985), приводит, вообще говоря, к тому, что отдельные слагаемые $\Im_{\alpha}(\mathbf{x},t) X_{\alpha}(\mathbf{x},t)$ в сумме $T_{turb}(\mathbf{x},t)\sigma_{turb}(\mathbf{x},t)$ не будут положительно определенными величинами, хотя вся сумма в целом положительна, $\sigma_{turb} \geq 0$. Известно, что в этом случае наложение различных термодинамических потоков в принципе может приводить к отрицательным значениям отдельных диагональных элементов матрицы $\mathbf{L}_{\alpha\beta}$ и тем самым к отрицательности отдельных коэффициентов турбулентного обмена (Хакен, 1985).

Таким образом, нельзя исключить возникновения такой ситуации в эволюции турбулентного протопланетного облака, когда в некоторых его областях возможно появление режимов движения вещества, при которых коэффициенты турбулентного обмена будут принимать отрицательные значения (например, коэффициент вязкости ν^{turb} в выражении (43)) (см., например, Старр, 1971; Sivashinsky, 1992). В частности, обратный каскад кинетической энергии $b(\mathbf{x},t)$, при котором энергия мелкомасштабного хаотического движения затрачивается на энергетическую накачку мезомасштабных вихревых структур, имеет место в случае двумерной турбулентности. Энергия $b(\mathbf{x},t)$ в этом случае переносится к большим масштабам, а к малым масштабам направлен поток энстрофии $\Omega(\mathbf{x},t) := \langle |\boldsymbol{\omega}'|^2 / 2 \rangle$. При конечной вязкости в двумерном потоке энстрофия может только монотонно убывать со временем вместе с величиной $\varepsilon = 2\nu\Omega$. Это связано с тем, что в двумерном потоке блокирован механизм растяжения вихревых трубок, который обеспечивает рост энстрофии в трехмерном течении. Этот эффект, получивший название отрицательной вязкости (см.; Vergassola и др., 1993; Gama и др., 1994), свойствен, как отмечалось во Введении, многим космическим квазидвумерным объектам.

Из вышеприведенного анализа следует, что статистической характеристикой мелкомасштабной турбулентности, которая могла бы обеспечить инверсный каскад турбулентной энергии и в случае трехмерной турбулентности (и тем самым вызвать эффект появления отрицательной вязкости), может явиться гидродинамическая спиральность $H(\mathbf{x},t)$. Итак, для турбулентного течения жидкости положительность коэффициента ν^{turb} в общем случае не имеет места (в отличие от молекулярных коэффициентов переноса, положительность которых имеет глубокое обоснование в термодинамике необратимых процессов).

3.3. Вращательная вязкость

Вернемся теперь к тому затруднению прандтлевской теории переноса количества движения в турбулизованной среде, с которым столкнулись астрофизики при попытке объяснения дифференциальных вращений газовых астрофизических объектов. Используемый в астрофизике стандартный подход к выводу осредненных гидродинамических уравнений, предназначенных, в частности, для моделирования протопланетного облака (основанный на постулатах Рейнольдса) нельзя, по-видимому, считать вполне адекватным, поскольку действительная картина турбулентного переноса в диске, как уже упоминалось, существенно отличается от классической (см., например, Сафронов, 1969). Хотя в литературе начиная с основателя феноменологической теории турбулентности О. Рейнольдса, а затем итальянского ученого Г.

Маттиоли и обсуждались подходы, связанные с несимметричностью тензора турбулентных напряжений ($R_{ij} \neq R_{ji}$) и привлечением к рассмотрению таких дополнительных внутренних характеристик состояния турбулентного поля, как вихрь, момент инерции и момент внутренних сил, к сожалению, это направление в последующем не было по достоинству оценено и развито.

Вместе с тем в последнее время вновь возродился интерес к асимметричной турбулентности, обусловленный существенными достижениями в области пространственного осреднения различных уравнений движения в механике сплошных сред, включая, например, течения жидкости в пористых средах, течение взвесенесущих потоков и т.п. Так, в ряде работ (см., например, Николаевский, 1975, 1984; Ferrari, 1972; Nikolaevskiy, 2003) было показано, что при более аккуратном пространственном осреднении гидродинамических уравнений (не использующем традиционный постулат Рейнольдса о коммутативности операций осреднения и дифференцирования) с целью описания движений малых элементов жидкости в макромасштабе, получаются уравнения движения с несимметричным тензором Рейнольдса $R_{ik}(\mathbf{x},t) \neq R_{ki}(\mathbf{x},t)$. Эти уравнения содержат, в частности, составляющие с вращательной вязкостью, связанные с антисимметричной частью $R^{a}_{ij}(\mathbf{x},t) := \frac{1}{2}(R_{ij} - R_{ji})$ турбулентного тензора напряжений $\mathbf{R}(\mathbf{x},t)$. В работе автора (Колесниченко, Маров, 2007) было показано, что в отличие от ламинарного течения в спиральной турбулентности, когда течение утрачивает симметрию при отражении, закон парности $R_{ij}(\mathbf{x},t) = R_{ji}(\mathbf{x},t)$ турбулентных напряжений, соответствующих такому течению, может нарушаться (заметим, что это утверждение противоречит концепции Моффата (Моффат, 1980**)**, который сохранил симметрию тензора турбулентных напряжений). При этом роль статистической характеристики мелкомасштабного поля скорости $\mathbf{u}'(\mathbf{x},t)$, способной обеспечить появление этого эффекта, может выполнять лишенная отражательной симметрии вихревая спиральность.

Для асимметричного турбулентного течения в работе (Nikolaevskiy, 2003) методами моментной гидромеханики получено следующее связанное с вязкостными процессами выражение для рассеяния энергии:

$$T_{turb}\sigma'_{turb} = \left(\tfrac{2}{3}\rho b\,\mathbf{I} + \mathbf{R}^{s}\right) : \mathbf{S} - \mathbf{R}^{a} \cdot \boldsymbol{\omega}' + \mathbf{T} : \nabla\left[\nabla \times \langle \mathbf{u} \rangle) + \boldsymbol{\omega}'\right] \geq 0, \qquad (46)$$

где $\mathbf{R}^s(\mathbf{x},t)$, $\mathbf{R}^a(\mathbf{x},t)$ – соответственно симметричная и антисимметричная части тензора напряжений Рейнольдса; $\boldsymbol{\omega}' := \nabla \times \mathbf{u}'$ – вектор внутренней угловой скорости, характеризующий вихревую «анизотропию» течения на микромасштабе l (напомним, что в «элементарном» объеме масштаба l^3 в случае диска может находиться значительное количество вращающихся вихревых образований (кластеров), что является серьезным аргументом в пользу использования моментной турбулентной гидромеханики и концепции двухуровневого макроскопического описания турбулентной среды при моделировании протопланетного облака); $\mathbf{T}(\mathbf{x},t)$ – тензор турбулентных моментных напряжений, связанный с пульсационным переносом флуктуаций момента количества движения мелкомасштабных вихрей (в асимметричной турбулентной гидромеханике этот тензор фигурирует в дополнительном эволюционном уравнении баланса внутреннего момента количества движения (в уравнении для $\boldsymbol{\omega}'(\mathbf{x},t)$) (см. Ferrari, 1972; Николаевский, 1975, 1984; Nikolaevskiy, 2003).

В общем случае анизотропной жидкости потоки и термодинамические силы, входящие в (46), связаны следующей простой системой определяющих соотношений:

$$R_{ij}^s := \tfrac{1}{2}(R_{ij} + R_{ji}) = -\tfrac{2}{3}\rho b \delta_{ij} + \rho K_{ijmn} S_{mn}, \tag{47}$$

$$R_{ij}^a := \tfrac{1}{2}(R_{ij} - R_{ji}) = -\rho K_{ijmn}^{*} \varepsilon_{mnk} \omega_k', \tag{48}$$

$$T_{ij} = \rho K_{ijmn}^{**} \partial_n \left(\varepsilon_{mlk} \partial \langle u_k \rangle / \partial x_l + \omega_m' \right) / \partial x_n, \tag{49}$$

характерной для асимметричной гидродинамики Коссера (Nikolaevskiy, 2003). Здесь феноменологические турбулентные коэффициенты $K_{ijmn}(\mathbf{x},t)$, $K_{ijmn}^{*}(\mathbf{x},t)$ и $K_{ijmn}^{**}(\mathbf{x},t)$ являются сильно меняющимися функциями осредненных параметров состояния среды и зависят от статистических характеристик турбулентного поля скорости $\mathbf{u}'(\mathbf{x},t)$.

Далее мы остановимся только на самых простых выводах, следующих из изотропной (но не зеркально симметричной) структуры турбулентных коэффициентов переноса. Заметим, что для большей части жидкости после очень короткого времени релаксации ротор $\nabla \times \mathbf{u}$ осредненной скорости становится равным угловой скорости $\boldsymbol{\omega}'(\mathbf{x},t)$, определяющей внутреннее вращение элементов массы континуума. При этом обращаются в нуль и термодинамическая сила в линейных конститутивных соотношениях (49), и соответствующие плотности потока момента количества движения мелкомасштабных вихрей, т.е. исчезает взаимодействие между вихрями макроскопического поля скоростей и внутренним вращательным движением частиц (Ferrari, 1972). Тем не менее в случае турбулентного континуума закон парности $R_{ij}(\mathbf{x},t) = R_{ji}(\mathbf{x},t)$ касательных напряжений на макроуровне нарушается (в отличие от ламинарного течения) и соотношение (42) должно быть заменено на

$$R_{ik} = R_{ik}^{s} + R_{ik}^{a} = -\tfrac{2}{3}\rho\, b\,\delta_{ik} + \rho\nu^{turb} S_{ik} + \rho\nu_{rot}^{turb}\,\varepsilon_{ikp}[\nabla\times\langle\mathbf{u}\rangle]_{p}\,. \qquad (50)$$

Коэффициенты $\nu^{turb}(\mathbf{x},t)$ и $\nu_{rot}^{turb}(\mathbf{x},t)$ являются величинами, определяемыми полем турбулентной скорости $\mathbf{u}'(\mathbf{x},t)$, при этом коэффициент $\nu_{rot}^{turb}(\mathbf{x},t)$ − вращательная турбулентная вязкость, которая, являясь функцией осредненных параметров состояния среды, зависит также от статистических характеристик мелкомасштабного поля пульсационных скоростей $\mathbf{u}'(\mathbf{x},t)$, в частности, от завихренности $\nabla\times\mathbf{u}'$, характеризующей вихревую “анизотропию” турбулентного течения на микроуровне. Коэффициент $\nu_{rot}^{turb}(\mathbf{x},t)$ является псевдоскаляром. Именно по этой причине вращательная вязкость $\nu_{rot}^{turb}(\mathbf{x},t)$, может быть отличной от нуля только тогда, когда само поле пульсационных скоростей не является статистически инвариантным относительно преобразования четности, в частности, когда спиральность $H(\mathbf{x},t)\neq 0$. Действительно, в случае турбулентности с зеркальной симметрией коэффициент $\nu_{rot}^{turb}(\mathbf{x},t)$ не изменяется при выполнении преобразования отражения, но, с другой стороны, коэффициент $\nu_{rot}^{turb}(\mathbf{x},t)$ должен изменить свой знак, поскольку он является псевдоскаляром. Отсюда следует, что для изотропной и зеркально симметричной турбулентности коэффициент $\nu_{rot}^{turb} = 0$. Итак, вращательная вязкость $\nu_{rot}^{turb}(\mathbf{x},t)$ может быть отличной от нуля только тогда, когда само поле вихревых скоростей не является статистически инвариантным относительно преобразования четности, в частности когда спиральность $H(\mathbf{x},t)\neq 0$.

Для модели дисковой турбулентности соотношение (50) для напряжения сдвига принимает простой вид

$$R_{r\varphi} = \rho\nu^{turb} r \frac{\partial\Omega(r)}{\partial r} + \rho\nu^{turb}_{rot} \frac{1}{r}\frac{\partial r^2\Omega}{\partial r} = \rho\nu^{turb}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r^2\Omega}{\partial r} - 2\Omega\right) + \rho\nu^{turb}_{rot}\frac{1}{r}\frac{\partial r^2\Omega}{\partial r} =$$

$$= \rho(\nu^{turb} + \nu^{turb}_{rot})\frac{1}{r}\frac{\partial r^2\Omega}{\partial r} - 2\rho\nu^{turb}\Omega \qquad (51)$$

(сравните с формулой (43)). Таким образом, выражение для касательных напряжений во вращающейся среде, предложенное Васютинским, может быть физически обосновано в рамках асимметричной механики турбулизованных сред с несимметричным тензором напряжений Рейнольдса. Существенным следствием формулы (51) является вывод о взаимодополняемости теорий переноса момента количества движения Прандтля и переноса вихря Тейлора во вращающейся среде. Из-за появления дополнительной степени свободы $\boldsymbol{\omega}'(\mathbf{x},t)$ в асимметричной гидродинамике оба подхода оказываются необходимыми для решения тех или иных задач. В частности, для вращающегося протопланетного облака будет преобладать тот или другой из конкурирующих механизмов в зависимости от численного значения коэффициентов сдвиговой и вращательной вязкости в соответствующих областях диска.

По поводу соотношения (51) следует заметить также следующее. Как известно, согласно классической теореме Нетер каждому топологическому свойству динамической системы соответствует свой закон сохранения. В работе (Березин, Трофимов, 1996) было показано, что появление дополнительных топологических особенностей течения в спиральной турбулентности обязано закону сохранения момента импульса турбулентных вихрей (молей). Однако этот закон нетривиален лишь при антисимметричности тензора напряжений Рейнольдса. Таким образом, для замыкания соотношения (51) необходимо, вообще говоря, дополнительно привлекать к рассмотрению (как и в асимметричной гидромеханике Коссера (Nikolaevskiy, 2003) закон сохранения собственного момента импульса турбулентных вихрей, который добавляет в полную систему осредненных гидродинамических уравнений для спиральной турбулентности собственный спин турбулентного вихря (см., например, Николаевский, 1984).

Следует отметить, что соотношение (51), содержащее члены с вращательной турбулентной вязкостью $\nu^{turb}_{rot}(\mathbf{x},t)$, является одним из вариантов так называемого $\Lambda-$эффекта (Kichatinov, Rüdiger, 1993) в спиральной турбулентности немагнитной жидкости, поскольку именно спиральность является той специфической характеристикой анизотропного турбулентного поля, на которой основываются физические модели Λ – эффекта. Этот эффект, представляющий собой аналог α-эффекта в МГД-турбулентности, описывает, в конечном счете, механизм генерации мезомасштабных вихрей полем гиротропной турбулентности, в более общем случае асимметричной турбулентности − механизм генерации крупномасштабных вихрей полем завихренности среднего движения при взаимодействии его с собственными моментами импульса $m_k(\mathbf{x},t)$ турбулентных молей − сопряженными переменными завихренности (см. Николаевский, 1984; Heinloo, 2008).

4. СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ В СПИРАЛЬНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Предположим, что источник пульсационной кинетической энергии на масштабе возбуждения турбулентности $k_0 = 1/l_0$ (т.е. вдали от диссипативного интервала) в результате взаимодействия архимедовых и кориолисовых сил в сильно вращающемся дисковом веществе генерирует отличную от нуля вихревую спиральность $H(\mathbf{x},t)$. В частном случае пространственно однородной турбулентности турбулентная энергия $b(\mathbf{x},t)$ и спиральность $H(\mathbf{x},t)$, согласно уравнениям (16) и (21), вырождаются по законам

$$\partial b/\partial t = -\varepsilon := -\nu\left\langle (\partial u'_k / \partial x_j)^2 \right\rangle = -\nu\left\langle |\boldsymbol{\omega}'|^2 \right\rangle, \tag{52}$$

$$\partial H / \partial t = -\varepsilon_h := -2\nu\left\langle (\partial u'_k / \partial x_j)(\partial \omega'_k / \partial x_j) \right\rangle. \tag{53}$$

Отсюда видно, что в невязком пределе $\nu \to 0$, в отсутствие диссипации и накачки движения (в частности, во всем инерционном интервале $k_0 << k << k_\nu = 1/l_\nu$, разделяющем зоны генерации и диссипации турбулентной энергии в пространстве волновых чисел k) спиральность $H(\mathbf{x},t)$, пульсационного поля скоростей, подобно турбулентной энергии $b(\mathbf{x},t)$, является сохраняющейся величиной (здесь $l_\nu := (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$ – колмогоровский диссипативный масштаб). Заметим, что сохранение спиральности в каскадном процессе означает также сохранение структуры «узловатости» (т.е. общего числа зацеплений вихревых трубок друг с другом при гладкой деформации течения и условии сохранения циркуляции скорости) вихревого поля, которая остается неизменной в каскадном процессе в инерционной области, но уничтожается вязкостью на масштабах l_ν. Напомним, что когда отдельная вихревая нить C_j, прежде чем замкнуться, обвивается вокруг себя, то на ней появляется узел. Вихревая спиральность как раз и определяет число заузленных и зацепленных вихревых трубок в объеме, занятом жидкостью: $H := \sum_{ij} 2\alpha_{ij} \Gamma_i \Gamma_j$; здесь α_{ij}– коэффициенты зацепления вихревых нитей – положительные или отрицательные целые числа, связанные с числом витков одной нити C_i вокруг другой C_j; Γ_j – циркуляция отдельной вихревой нити (см., например, Сэффмэн, 2000; Арнольд, Хесин, 2007; Монин, Яглом, 1996; Колесниченко, Маров, 1998, 2009; Marov, Kolesnichenko, 2002; Kolesnichenko, Marov, 2007). Таким образом, при генерировании вихревой спиральности появляются крупномасштабные зацепления вихревых линий в турбулентном потоке.

Свободная эволюция трехмерной изотропной турбулентности несжимаемой жидкости сопровождается, как известно, каскадным переносом турбулентной энергии $b := \langle |\mathbf{u}'|^2 /2 \rangle = \int b(k)\mathrm{d}k$ к малым масштабам (Monin, Yaglom 1975). Поскольку в терминах спектральной плотности энергии $b(k)$ это соответствует переносу энергии к большим волновым числам k, то прямой каскад часто называют синим каскадом. Скорость диссипации турбулентной энергии ε, считавшаяся в первоначальной теории Колмогорова (K1941) универсальной константой, характеризует в этом случае также и поток кинетической энергии $b(k)$, который переносится каскадным образом без потерь вдоль последовательно возрастающих волновых чисел $k_n >> k_{n-1}$ (уменьшающихся масштабов длины, $l_n = 1/k_n$) внутри инерционного интервала до тех пор, пока не достигает диссипативного масштаба l_ν. Так как в инерционном интервале изотропная спектральная плотность энергии $b(k)$ статистически не связана с источником энергии, ограниченным волновым числом k_0, то она описывается классической формулой Колмогорова

$$b(k) = \mathrm{K}_b\, \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}, \quad (k_0 << k << (\varepsilon / \nu^3)^{1/4}), \tag{54}$$

которая может быть получена из соображений размерности (см. Голицын, 2021). Здесь $\mathrm{K_b} = 1.44 \pm 0.06$ – безразмерная постоянная константа Колмогорова.

По аналогии с энергетическим спектром $b(k)$ можно ввести в рассмотрение спектральную плотность спиральности $h(k)$ таким образом, что $H := \langle \mathbf{u}' \cdot \boldsymbol{\omega}' \rangle = \int h(k)\ \mathrm{d}k$ (Borue, Orszag, 1997). В отличие от турбулентной энергии $b(k)$ и энстрофии $\Omega(k)$, спиральность $h(k)$ не является положительно определенной величиной. Эта величина является псевдоскаляром и отлична от нуля лишь в случае, когда в потоке жидкости существуют спиральные вихри, причем количество вихрей с правой закруткой больше (или меньше), чем с левой.

Если в двумерном случае спектральные плотности энергии и энстрофии связаны соотношением $\Omega(k) \propto k^2 b(k)$, то для спектральной плотности спиральности существует только ограничение сверху (см., например, Lesieur, 2008)

$$|h(k)| \le 2k\,b(k) \tag{55}$$

и известные аргументы, приводящие к выводу о существовании двух инерционных интервалов (как это имеет место в двумерной турбулентности), в этом случае не работают (см., например, Монин, 1996). Неравенство (55) позволяет, однако, реализоваться двум сценариям поведения спиральности в гиротропном турбулентном потоке (Brissaund и др., 1973). Во-первых, возможен режим, при котором имеет место одновременный прямой каскад обеих сохраняемых величин $b(k)$ и $h(k)$ к малым масштабам. Во-вторых, в отдельных случаях, по аналогии с двумерной турбулентностью, реализуется каскад этих величин к противоположным концам инерционного интервала, причем прямой каскад спиральности $h(k)$ к мелким масштабам сопровождается синхронным обратным (красным, поскольку он направлен в длинноволновую часть спектра) каскадом энергии $b(k)$ к крупным масштабам, т.е. противоположно тому, что происходит в «обычном» турбулентном потоке. Какой сценарий осуществляется для данного турбулентного течения, зависит от интегральных свойств системы, а также от граничных и начальных условий.

4.1. Каскад турбулентной энергии и спиральности при отсутствии вращения

Рассмотрим вначале классическую феноменологию Колмогорова (К1941, К1962), распространенную на спирально-энергетический каскад в отсутствие вращения. Первый сценарий предполагает пассивное поведение спиральности в турбулентном потоке (см. Ditlevsen, Giuliani, 2001; Kolesnichenko, Marov, 2007). Это означает, что реализуется обычный колмогоровский каскад энергии $b(k)$ к малым масштабам с законом (54). Пусть скорость генерации спиральности на волновых числах $\sim k_0$ равна $\varepsilon_H(k)$. Поскольку спиральность возникает одновременно с энергией, то, очевидно, она ограничена неравенством вида $\left|\varepsilon_H\right| \le k_0\varepsilon$ (см. Brissaund и др., 1973; Ditlevsen, 1997; Ditlevsen, Giulani, 2001ab). Если спиральность инжектируется с максимальной скоростью, то $\left|\varepsilon_H\right| \sim k_0\varepsilon \sim u_0^3 / l_0^2$. Так как спектр $h(k)$ должен быть пропорционален $\varepsilon_H(k)$ (в силу псевдоскалярного характера обеих величин), а единственными дополнительными параметрами, определяющими $h(k)$ в инерционной области $k_0 << k << k_\nu$, могут быть величины $\varepsilon(k)$ и k, то из соображений размерности следуют равенства (Голицын, 2021):

$$h(k) \cong C_H \varepsilon_H \varepsilon^{-1/3} k^{-5/3}, \quad b(k) = \mathrm{K}_b\, \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}, \tag{56}$$

т.е. спектральные функции $b(k)$ и $h(k)$ зависят от k одинаковым образом (см. Моффат, 1980). Здесь C_h – универсальная постоянная, аналогичная колмогоровской постоянной C_b. Итак, в рассматриваемом сценарии спиральность переносится по всему инерционному масштабу как пассивная примесь, а диссипация энергии и спиральности происходит на одних и тех же масштабах (см. Chen и др., 2003; Колесниченко, 2014).

При этом следует иметь в виду, что если рассматриваемом потоке жидкости реализуется режим генерирования почти максимальной спиральности для каждого значения волнового числа k, то суммарный перенос кинетической энергии к более высоким волновым числам будет значительно ослаблен, а потому процесс затухания турбулентности будет существенно растянут во времени (см. Kraichnan, 1973; Andre, Lesieur, 1977a). Для рассматриваемого здесь случая дисковой турбулентности отсюда можно сделать следующий важный вывод: относительно длительное существование турбулентности во вращающемся астрофизическом диске (в частности, в солнечном аккреционном диске) с полным основанием может быть объяснено ее гиротропным характером.

Во втором возможном сценарии обычно используется гипотеза о том, что энергетический спектр $b(k)$ может зависеть только от волнового числа k и постоянного во всем инерционном интервале спектрального потока энергии ε (вносимой в поток на макромасштабе $l_0 = 1/k_0$). Спектральная функция спиральности $h(k)$ определяется при этом процессом переноса спиральности от источника, действующего на волновых числах k_0, к вязкому стоку на волновых числах k_ν и далее. Соображения размерности приводят в этом случае к следующим спектральным законам для энергии и спиральности

$$b(k) \propto \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}, \quad h(k) \propto \varepsilon^{2/3} k^{-2/3}. \qquad (57)$$

Фактически возможность такого двойного каскада энергии и спиральности в развитой гиротропной турбулентности была предсказана еще в работе (Brissaud и др., 1973). Используя феноменологические соображения, авторы этой статьи (см. также Moffatt, Tsinober, 1992) по аналогии с двумерной турбулентностью полагали, что возможен чистый каскад спиральности к большим волновым числам (с нулевым энергетическим потоком), наряду с обратным энергетическим каскадом к низким волновым числам (без потока спиральности).

Следует, однако, отметить, что выполненные ранее численные эксперименты не убедили некоторых исследователей в правдоподобности идеи обратного каскада (см., например, Kraichnan, 1973; Andre, Lesieur, 1977b). Однако в более поздних работах (Borue, Orszag, 1997) существование двойного каскада кинетической энергии и спиральности в трехмерной турбулентности было надежно подтверждено при прямом численном моделировании спиральной турбулентности, в частности в рамках *LES* – теории (*large-eddy simulation*) (см. Lesieur, 2008).

Наряду с этим в работах (Tsinober, Levich 1983; Moffatt, 1986) была высказана продуктивная гипотеза о спиральной природе трехмерных когерентных вихревых образований, возникающих в некоторых случаях в турбулентном потоке при больших числах Рейнольдса. Согласно этой гипотезе, в турбулентном потоке возможно существование неких локальных областей с ненулевой спиральностью $(h \neq 0)$, в которых, из-за возможного в диссипативном интервале волновых чисел подавления спиральностью процесса рассеяния мелкомасштабной кинетической энергии (см. выше), диссипация турбулентной энергии будет происходить менее активно, чем в областях, лишенных спиральности. В результате, в трехмерном потоке возможно возникновение совокупности когерентных спиральных структур, разделенных неспиральными («обычными») диссипативными вихревыми образованиями (возможно с фрактальной размерностью), которые могут взаимодействовать друг с другом, видоизменяясь и объединяясь. Данная гипотеза нашла непосредственное подтверждение в численном эксперименте при компьютерном моделировании эволюции потока вихрей Тейлора-Грина (Shtilman и др. 1985). Заметим, что существуют, однако, и другие численные расчеты турбулентного течения изотропной неоднородной жидкости, в которых не наблюдается такого рода корреляции между локальной спиральностью и рассеянием мелкомасштабной кинетической энергии (см., например, Rogers, Moin, 1987a,b). В конечном счете, это пример того, как мелкомасштабные движения в спиральной турбулентности на основе обратного спирального каскада могут приводить к появлению крупномасштабных вихревых структур, в частности смерчей, тайфунов, тропических циклонов и других мощных вихрей в атмосфере (см., например, Kerr, Darkow, 1996).

4.2. Каскад турбулентной энергии и спиральности при учете вращения

Поскольку спиральность во вращающихся астрофизических дисках часто обязана своим появлением силе Кориолиса, то источник гиротропности имеется на всех масштабах волновых чисел, в том числе и в инерционном масштабе, что, естественно, должно оказывать влияние на механизм энергетического каскада. Поэтому важно рассмотреть специфику прямого и обратного каскада при наличии угловой скорости вращения $\mathbf{\Omega}$ турбулентной среды (см. Brissaund и др., 1973; Smith и др., 1996; Kolesnichenko, Marov, 2007; Mininni и др., 2009, Mininni, Pouquet, 2009a).

Вращение среды с угловой скоростью $|\mathbf{\Omega}|$ задает масштаб времени в системе. Основной величиной, возбуждающей турбулентность, остается скорость генерции/диссипации кинетической энергии пульсационной скорости $\varepsilon(k)$, которая может возбуждаться либо механически, либо системой источников и стоков, имеющих место в системе. Анализ размерностей дает следующие масштабы длины $l_\Omega := \sqrt{\varepsilon / |\mathbf{\Omega}|^3}$, скорости и коэффициента турбулентного перемешивания $u_\Omega := \sqrt{\varepsilon / |\mathbf{\Omega}|}$. Когда существенна кинематическая вязкость, то можно ввести и вращательное число Рейнольдса $\mathrm{Re}_\Omega := u_\Omega l_\Omega / \nu = \varepsilon / \nu |\mathbf{\Omega}|^2$ и вращательное число Россби $\mathrm{Ro} := u_\Omega / 2|\mathbf{\Omega}| l_\Omega = \varepsilon^{1/2} / 2|\mathbf{\Omega}|^{1/2} l_\Omega$ (Голицын, 2021). Вращение существенно при $\mathrm{Ro} \ll 1$ для динамики потока, когда сила Кориолиса уравновешивается градиентом давления (геострофическое течение). Пусть l – рассматриваемый масштаб движений, и при $l_\Omega \ll l \ll l_0$ и $l_\nu \ll l$ из соображений размерности и подобия можно написать, что спектры турбулентной энергии и спиральности имеют следующий общий вид:

$$b(k) \cong C_b \varepsilon^a \varepsilon_H^b \left|\mathbf{\Omega}\right|^f k^{-e}, \quad h(k) \cong C_H \varepsilon^c \varepsilon_H^d \left|\mathbf{\Omega}\right|^g k^{-h}. \tag{58}$$

Такой вид этих функций, принимающий во внимание энергию, спиральность и вращение, охватывает все исследованные в литературе случаи. Фигурирующие в (58) восемь спектральных индексов могут быть определены из анализа размерностей и феноменологии явления. Результаты подобного анализа суммированы в табличном виде в работе (Pouquet, Mininni, 2009). В частном случае, когда $e = h = 5/3,\ \ a = 2/3,\ \ b = 0,\ \ c = -1/3,\ \ d = 1,\ f = \mathrm{g} = 0,$ из (58) следует классическая феноменология Колмогорова (54), (56), распространенная на объединенный каскад с энергетической спиральностью.

В отличие от стандартной трехмерной турбулентности без вращения, когда энергия передается по каскаду к мелким масштабам, или двумерного случая с инверсным каскадом, в присутствии спиральности наблюдается как прямой, так и обратный каскад. В частности, в работах (Smith и др., 1996; Dubrulle, Valdettaro, 1992; Zhou, 1995; Smith, Waleffe, 1999; Mininni, Pouquet, 2009 a,b,c) исследована турбулентность, которая наблюдалась в лаборатории, в атмосферных потоках и исследовалась при прямом численном моделировании. Рассмотренный в них феноменологический подход, основанный на каскаде спиральности к мелким масштабам, приводит к различным спектральным индексам. Например, в работах (Dubrulle, Valdettaro 1992; Zhou 1995) был изучен связанный с инерционными волнами энергетический каскад. В этом случае спектры турбулентной энергии и спиральности имеют вид

$$b(k) = C_b \varepsilon^{1/2} \left|\mathbf{\Omega}\right|^{1/2} k^{-2}, \quad h(k) = C_H \varepsilon_H \varepsilon^{-1/2} \left|\mathbf{\Omega}\right|^{1/2} k^{-2}. \tag{59}$$

В работах (Mininni, Pouquet, 2009 *a,b,c*) исследовано влияние спиральности на каскад энергии с помощью прямого численного моделирования вращающейся турбулентности при значениях числа Россби 0.02. Полученные при этом результаты свидетельствуют о том, что присутствие спиральности играет важную роль в динамике турбулентного течения. Так, было показано, что в атмосфере Земли, когда существует взаимодействие турбулентных вихрей с инерционными волнами, при небольших значениях числа Россби осуществляется каскад энергии к большим масштабам; спиральность при этом передается по каскаду к малым масштабам. В связи со сказанным отметим еще раз, что в рамках спиральной турбулентности, допускающей возможность реализации обратного энергетического каскада Ричардсона–Колмогорова, возможно не только прогнозировать образование относительно устойчивых и энергетически емких крупномасштабных когерентных вихревых образований, но и объяснить эффект отрицательной вязкости в трехмерной турбулентности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Целью данного обзора является обсуждение гидродинамического подхода к феноменологическому моделированию трехмерного турбулентного движения вращающейся жидкости, максимально приближенной к реальности и отвечающей различным динамическим условиям в космических и природных средах, в частности в астрофизических немагнитных дисках. По мере все более надежного подтверждения в численных экспериментах концепции обратного каскада энергии, присутствующего в спиральной турбулентности, включение в математическую модель эволюции аккреционного диска этого эффекта, существенно влияющего на его структуру и динамику, приобретает в настоящее время веское основание. В работе показано, что ключевой статистической характеристикой трехмерной зеркально неинвариантной дисковой турбулентности, которая способна обеспечить в нем появление инверсного каскада энергии, может служить вихревая спиральность, возникающая благодаря быстрому вращению неустойчиво стратифицированной астрофизической среды и воздействию ряда других факторов нарушения симметрии течения космического вещества, таких, например, как кориолисова сила, сила гравитации и т.п. Показано, что известный эффект отрицательной вязкости также обязан своему возникновению в спиральной турбулентности инверсному каскаду переноса мелкомасштабной кинетической энергии от малых вихрей к более крупным. Обсуждается также концепция возможной энергетической подпитки мезомасштабных когерентных вихревых структур в термодинамически открытой подсистеме турбулентного хаоса механизмом вихревого динамо, когда спиральная турбулентность в результате реализации обратного энергетического каскада генерирует и поддерживает крупномасштабные вихревые поля. Вследствие такого перераспределения турбулентной энергии инверсный каскад может породить иерархическую компактную систему когерентных энергетически емких вихрей (различного размера и с фрактальным распределением массовой плотности космического вещества), приводящую в конечном счете к интенсификации механических и физико-химических взаимодействий между частицами вещества (в общем случае газопылевого) в аккреционном диске. В результате этого возможны самопроизвольное образование и рост газопылевых кластеров, стимуляция процессов конденсации и фазовых переходов, процессов массо- и теплообмена между различными областями диска, существенная модификация спектра колебаний и т.п. (см. Маров и др., 2008**)**. Естественно, на заключительной стадии процесса образования крупномасштабных газопылевых сгущений в области внутренних планет решающая роль должна принадлежать силе самогравитации. Исходя из приведенных соображений, данную работу можно рассматривать как альтернативный традиционному теоретический подход, придающий большую достоверность математическому моделированию динамических явлений в астрофизических немагнитных дисках, в которых эффекты спиральной турбулентности играют определяющую роль.

В заключение процитируем слова выдающегося отечественного механика академика Л.И. Седова: «Существенный прогресс в науке, как правило, связан с все более полным и детальным проникновением в сущность макроскопических эффектов, проявляющихся на грани существующих методов наблюдений и измерений…Нередко учёт малых эффектов, едва уловимых на первоначальной стадии исследования, впоследствии, при более глубоком проникновении в сущность природы явлений и при расширении поля приложений, становится основой возникновения прогресса» (Седов, 1973**)**.

Работа выполнена в рамках Госзадания ИПМ им. М.В. Келдыша РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Арнольд В.И., Хесин Б.А. Топологические методы в гидродинамике. М.: МЦНМО, 2007. 392 с.

Березин Ю.А., Жуков В.П. Конвективная неустойчивость в среде со спиральной турбулентностью // Изв. РАН. МЖГ. 1990. № 6. С. 61-66.

Березин Ю.А., Трофимов В.М. Генерация крупномасштабных вихрей под действием неравновесной турбулентности // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 1. С. 47-55.

Вайнштейн С.И., Зельдович Я.Б., Рузмайкин А.А. Турбулентное динамо в астрофизике. М.: Наука, 1980. 352 с.

Ван Дайк М. Альбом движений жидкости и газа. М.: Мир, 1986. 184 с.

Вазаева Н.В., Чхетиани О.Г., Курганский М.В., Каллистратова М.А. Спиральность и турбулентность в атмосферном пограничном слое // Изв. РАН. ФАО. 2021. Т. 57. № 1. С. 34-52.

Голицын Г.С. Вероятностные структуры макромира: землетрясения, ураганы, наводнения... М.: Физматлит, 2021. 174 с.

де Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1964. 456 с.

Зельдович Я.Б., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д. Магнитные поля в астрофизике. Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». Институт компьютерных исследований, 2006. 386 с.

Карман Т. Некоторые вопросы теории турбулентности // Проблемы турбулентности. М.: Онти. НКТП СССР, 1936. С. 35-74.

Климонтович Ю.Л. Введение в физику открытых систем. М.: ТОО «Янус-К», 2002. 284 с.

Колесниченко А.В. Синергетический подход к описанию развитой турбулентности // Астрон. вестн. 2002. т. 36. № 2. с. 121-139. (*Kolesnichenko A.V.* A Synergetic Approach to the Description of Advanced Turbulence // Sol. Syst. Res. 2002. V. 36, Issue 2, P. 107-124).

Колесниченко А.В. Термодинамическое моделирование развитой структурной турбулентности при учете флуктуаций диссипации энергии // Астрон. вестн. 2004. Т. 38. С. 144–170. (*Kolesnichenko A.V.* Thermodynamic Modeling of Developed Structural Turbulence Taking into Account Fluctuations of Energy Dissipation // Sol. Syst. Res. 2004. V. 38, Issue 2, P. 124-146).

Колесниченко А.В. О возможности синергетического рождения мезомасштабных когерентных структур в макроскопической теории развитой турбулентности // Мат. моделирование. 2005. Т. 17. № 10. С. 47–79**.**

Колесниченко А.В. К теории инверсного каскада энергии в спиральной турбулентности астрофизического немагнитного диска // Препр. ИПМ им. М.В. Келдыша. 2014. № 70. 36 с.

Колесниченко А.В. К моделированию спиральной турбулентности в астрофизическом немагнитном диске // Астрон. вестн. 2011. Т. 45. № 3. С. 253–272.
(*Kolesnichenko A.V.* On the simulation of helical turbulence in an astrophysical nonmagnetic disk //Sol. Syst. Res. 2011. V. 45, Issue 3. P.246-263).

Колесниченко А.В. Некоторые проблемы конструирования космических сплошных сред. Моделирование аккреционных протопланетных дисков. М.: Изд-во ИПМ им. М.В. Келдыша, 2017а. 372 с.

Колесниченко А.В. Континуальные модели природных космических сред. Проблемы термодинамического моделирования. М.: ЛЕНАНД, 2017б. 400 с. (Синергетика: от прошлого к будущему. № 79)

Колесниченко А.В., Маров М.Я. Турбулентность многокомпонентных сред. М.: МАИК «Наука», 1998. 336 с.

Колесниченко А.В., Маров М.Я. Роль гидродинамической спиральности в эволюции протопланетного турбулентного диска // Мат. моделирование. 2007. Т. 20. № 10. С. 99–125.

Колесниченко А.В. Маров М.Я. Термодинамическая модель МГД-турбулентности и некоторые ее приложения к аккреционным дискам // Астрон. вестн. 2008. Т. 42. № 3. С. 1–50. (*Kolesnichenko A.V.*, Marov M. Ya. Thermodynamic model of MHD turbulence and some of its applications to accretion disks //Sol. Syst. Res. 2008. V. 42, Issue 3, P.226-255).

Колесниченко А.В., Маров М.Я. Турбулентность и самоорганизация: Проблемы моделирования космических и природных сред. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. 632 с.

Колесниченко А.В., Кадет В.В. Турбулентность. Проблемы термодинамического моделирования многокомпонентных и электропроводных сред. М.: Издательский центр РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина, 2012. 296 с.

Колмогоров А.Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // Докл. АН СССР. 1941. Т. 30. С. 299–303.

Колмогоров А.Н. Уточнение представлений о локальной структуре турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при больших числах Рейнольдса // Mecanique de la turbulence: Colloq. Intern. CNRS, Marseille, aout - sept. 1961. (На рус. и фр. яз.) Paris, 1962. P. 447–458.

Коренев Г.В. Тензорное исчисление. М.: Из-во МФТИ, 1996. 239 с.

Копров Б.М., Копров В.М., Пономарев В.М., Чхетиани О.Г. Измерение турбулентной спиральности и ее спектра в пограничном слое атмосферы // Докл. АН. 2005. Т. 403. № 5. С. 627–630.

Краузе Ф., Рэдлер К.-Х. Магнитная гидродинамика средних полей и теория динамо. М.: Мир, 1984. 315 с.

Левина Г.В. Параметризация спиральной турбулентности в численных моделях интенсивных атмосферных вихрей // Докл. АН. 2006. Т. 411. № 3. С. 400–404.

Маров М.Я., Колесниченко А.В., Макалкин А.Б., Дорофеева В.А., Зиглина И.Н. От протосолнечного облака к планетной системе: Модель ранней эволюции газопылевого диска // Проблемы зарождения и эволюции биосферы / Ред. Галимов Э.М. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2008. С. 223–275.

Мирабель А.П., Монин А.С. Двумерная турбулентность // Успехи механики. 1979. Т. 2. № 3. С. 47–95.

Монин А.С., Полубаринова-Кочина П.Я., Хлебников В.И. Космология, гидродинамика, турбулентность: А.А. Фридман и развитие его научного наследия. М.: Наука, 1989. 326 с.

Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидродинамика. Т. 2. СПб: Гидрометеоиздат, 1996. 742 с.

Моисеев С.С., Сагдеев Р.З., Тур А.В., Хоменко Г.А., Яновский В.В. Теория возникновения крупномасштабных структур в гидродинамической турбулентности // ЖЭТФ. 1983b. Т. 85. Вып. 6(12). С. 1979-1987.

Моисеев С.С., Руткевич П.Б., Тур А.В., Яновский В.В. Вихревое динамо в конвективной среде со спиральной турбулентностью // ЖЭТФ. 1988. Т. 94. Вып. 2. С. 144-153.

Моисеев С.С., Сагдеев Р.З., Тур А.В., Хоменко Г.А., Шукуров А.М. Физический механизм усиления вихревых возмущений в атмосфере // Докл. АН СССР. 1983a. Т. 273. № 3. С. 549–552.

Моффат Г. Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. М.: Мир, 1980. 339 с.

Николаевский В.Н. Пространственное осреднение и теория турбулентности // Вихри и волны. М.: Мир, 1984. С. 266–335.

Николаевский В.Н. Тензор напряжений и метод осреднения в механике сплошных сред // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 1. С. 374–379.

Обухов А.М. О распределении энергии в спектре турбулентного потока // Изв. АН СССР. Сер. географ. и геофиз. 1941. Т. 5. № 4. С. 453–466.

Обухов А.М. Структура температурного поля в турбулентном потоке // Изв. АН СССР. Сер. географ. и геофиз. 1949. Т. 13. № 1. С. 58–69.

Паркер Е. Космические магнитные поля: их образование и проявления. Ч. 2. М.: Мир, 1982. 479 с.

Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса. Новый диалог человека с природой. М.: Прогресс, 1986. 310 с.

Рабинович М.И., Сущик М.М. Регулярная и хаотическая динамика структур в течениях жидкости // УФН. 1990. Т. 160. №. 1. С. 1–64.

Сафронов В.С. Эволюция допланетного облака и образование Земли и планет. М.: Наука, 1969. 244 с.

Седов Л.И. Мысли об ученых и науке прошлого и настоящего. М.: Наука, 1973. 118 с.

Серрин Д. Математические основы классической механики жидкости. М.: Иностр. лит. 1963. 256 с.

Старр В. Физика явлений с отрицательной вязкостью. М.: Мир, 1971. 259 с.

Сэффмэн Ф. Дж. Динамика вихрей. М.: Научный Мир, 2000. 375 с.

Тассуль Ж.Л. Теория вращающихся звезд. М.: Мир, 1982. 472 с.

Фриш У. Турбулентность. Наследие Колмогорова. М.: Фазис, 1998. 343 с.

Чхетиани О.Г. О локальной структуре спиральной турбулентности // Докл. РАН. 2008. Т. 422. № 5. С. 618–621.

Хакен Г. Синергетика. Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. М.: Мир, 1985. 419 с.

Хапаев А.А. Генерация вихревых структур в атмосфере под действием спиральной турбулентности конвективного происхождения // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 2002. Т. 38. № 3. С. 331–336.

Хлопков Ю.И., Жаров В.А., Горелов С.Л. Когерентные структуры в турбулентном пограничном слое. М.: МФТИ, 2002. 267 с.

Andre J.C., Lesieur M. Influence of helicity on high Reynolds number isotropic turbulence // J. Fluid Mech. 1977. V. 81. P. 187–207.

Batchelor G.K. Computation of the energy spectrum in homogeneous two dimensional turbulence // Phys. Fluids. Suppl. II. 1969. V. 12. № 12. P. 233–239.

Biferale L., Pierotti D., Toschi F. Helicity transfer in turbulent models // Phys. Rev. E. 1998. V. 57. P. R2515-R2518.

Berezin Yu., Trofimov V.M. A model of non-equilibrium turbulence with an asymmetric stress. Application to the problems of thermal convection // Continuum Mech. Thermodynamics. 1995. V. 7. P. 415–437.

Bodenheimer P. Angular momentum evolution of young stars and disks // Ann. Rev. Astron. and Astrophys. 1995. V. 33. P. 199–238.

Borue J., Orszag S.A. Spectra in helical three-dimensional isotropic turbulence // Phys. Rev. E. 1997. V. 55. P. 7005–7009.

Brandenburg A., Dobler W., Subramanian K. Magnetic helicity in stellar dynamos: new numerical experiments // Astron. Nachr. 2002. V. 323. P. 99–122.

Branover H., Moiseev S.S., Golbraikh E., Eidelman A. Turbulence and structures: Chaos, fluctuations, and helical self-organization in nature and laboratory. San Diego: Acad. Press, 1999. 270 p.

Brissaund A., Frisch U., Leorat J., Lessieur M., Mazure A. Helicity cascade in fully developed turbulence // Phys. Fluids. 1973. V. 16. P. 1366–1367.

Brown G.L., Roshko A. On density effects and large structures in turbulent mixing layers // J. Fluid Mech. 1974. V. 64. P. 775–816.

Charney J. Geostrophic turbulence // J. Atmos. Sci. 1971. V. 29. № 6. P. 1087–1095.

Chen Q., Chen S., Eyink G. The joint cascade of energy and helicity in three-dimensional turbulence // Phys. Fluids. 2003. V. 15. № 2. P. 361–374.

Crow S.C., Champagne F.H. Orderly structures in jet turbulence // J. Fluid Mech. 1971. V. 48. P. 547–591.

Ditlevsen P., Giuliani P. Cascades in helical turbulence // Phys. Rev. E., 2001a. V. 63. id. 036304.

Ditlevsen P., Giuliani P. Dissipation in helical turbulence // Phys. Fluids. 2001b. V. 13. P. 3508–3509.

Ditlevsen P. Turbulence and shell models. Cambridge, New York: Cambridge Univ. Press, 2011. 152 p.

Ditlevsen P. Cascades of energy and helicity in the GOY shell model of turbulence // Phys. Fluids. 1997. V. 9. P. 1482–1484.

Dubrulle B., Valdettaro L. Consequences of rotation in energetics of accretion disks // Astron. and Astrophys. 1992. V. 263. P. 387–400.

Ferrari C. On the differential equations of turbulent flow // Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М.: Наука, 1972. 336 с.

Gama S., Vergassola M., Frisch U. Negative eddy viscosity in isotropically forced two-dimensional flow: linear and nonlinear dynamics // J. Fluid. Mech. 1994. V. 260. P. 95–126.

Heinloo J. Setup of turbulence mechanics accounting for a preferred orientation of eddy rotation // Concepts of Physics. 2008. V. 5. № 2. P. 205–218.

Kerr B.W., Darkow G.L. Storm-relative winds and helicity in the tornadic thunderstorm environment // Weath. and Forecast. 1996. V. 11. P. 489–496.

Kichatinov L.L., Rüdiger G. Λ -effect and differential rotation in stellar convection zones // Astron. and Astrophys. 1993. V. 276. P. 96–102.

Klahr H.H., Bodenheimer P. Turbulence in accretion disks: vorticity generation and angular momentum transport via the global baroclinic instability // Astrophys. J. 2003. V. 582. P. 869–892.

Kolesnichenko A.V., Marov Ya. The effect of spirality on the evolution of turbulence in the solar protoplanetary cloud // Sol. Syst. Res. 2007. V. 41. P. 1–18.

Kolesnichenko A.V. A synergetic approach to the description of stationary non-equilibrium turbulence of astrophysical present-day problems of mechanics and physics of space. To M.Ya. Marov’s anniversary. M.: Fizmatlit, 2003. P. 123–162.

Kolesnichenko A.V. On the possibility of synergetic origin of mesoscale coherent structures in macroscopic theory of developed turbulence // Mat. Model. 2005. V. 17. № 10. P. 47–79.

Kolesnichenko A.V. On the simulation of helical turbulence in an astrophysical nonmagnetic disk // Sol. Syst. Res. 2011. V. 45. P. 246–263.

Kolesnichenko A.V., Marov M.Ya. Fundamentals of the mechanics of heterogeneous media in the circumsolar protoplanetary cloud: The effects of solid particles on disk turbulence // Sol. Syst. Res. 2006. V. 40. P. 1–56.

Kraichnan R.H. Inertial ranges in two-dimensional turbulence // Phys. Fluids. 1967. V. 10. № 7. P. 1417–1423.

Kraichnan R.H. Helical turbulence and absolute equilibrium // J. Fluid Mech. 1973. V. 59. P. 745–752.

Kraichnan R.H. Diffusion of passive-scalar and magnetic fields by helical turbulence // J. Fluid. Mech. 1976. V. 77. P. 753–774.

Krause F., Rüdiger G. On the Reynolds stresses in mean-field hydrodynamics. I. Incompressible homogeneous isotropic turbulence // Astron Nachr. 1974a. V. 295. H. 2. P. 93–99.

Krause F, Rüdiger G. On the Reynolds stresses in mean-field hydrodynamics. II. Two-dimensional turbulence and the problem of negative viscosity // Astron Nachr. 1974b. V. 295. H. 4. P. 185–193.

Lindborg E. The energy cascade in a strongly stratified fluid // J. Fluid Mech. 2006. V. 550. P. 207–242.

Lindborg E. Stratified turbulence: a possible interpretation of some geophysical turbulence measurements // J. Atmos. Sci. 2008. V. 65. № 11. P. 2416–2424.

*Lesieur M***.** Turbulence in Fluids (4th edition). Dordrecht: Springer, 2008. 558 p.

Marov M.Ya., Kolesnichenko A.V. Mechanics of turbulence of multicomponent gases. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Acad. Publ., 2002. 375 p.

Marov M.Ya. Kolesnichenko A.V. Chaotic and ordered structures in the developed turbulence // Astrophysical disks: Collective and stochastic phenomena / Eds: Fridman A.M., Marov M.Ya. Dordrecht: Springer, 2006. P. 23–54.

Marov M.Y., Kolesnichenko A.V. Turbulence and Self-Organization. Modeling Astrophysical Objects. New York, Heidelberg, Dordrecht, London: Springer, 2012. 657 p.

Malkus W.V.R. Precession of the Earth as the cause of geomagnetism // Science. 1968. V. 160. P. 259–264.

Mininni P.D., Alexakis A., Pouquet A. Scale interactions and scaling laws in rotating flows at moderate Rossby numbers and large Reynolds numbers // Phys. Fluids. 2009. V. 21. id. 015108.

*Mininni P.D., Pouquet A***.** Helicity cascades in rotating turbulence // Phys. Rev. E. 2009a. V. 79. id. 026304.

Mininni P.D., Pouquet A. Rotating helical turbulence. Part I. Global evolution and spectral behavior // Phys. Rev. E. 2009b, see also arXiv: 0909.1272. 2009. P. 1–9.

Mininni P.D., Pouquet A. Helical rotating turbulence. Part II. Intermittency, scale invariance and structures // Phys. Rev. E. 2009c, see also arXiv: 0909. 1275. 2009. P. 1–11.

Monin A.S., Yaglom A.M. Statistical Fluid Mechanics. Cambridge: MIT Press, 1975. 874 p.

Moffatt H.K. The degree of knottedness of tangled vortex lines // J. Fluid Mech. 1969. V. 35. P. 117–129.

Moffatt H.K. Geophysical and astrophysical turbulence // Advances in turbulence / Eds: Comte-Bellot G., Mathieu J. Verlag, Springer-1986. P. 228–244.

Moffatt H.K., Tsinober A. Helicity in laminar and turbulent flow // Ann. Rev. Fluid Mech. 1992. V. 24. P. 281–-312.

Moffatt H. K. Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluids. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1978.

Nikolaevskiy V.N. Angular Momentum in Geophysical Turbulence. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2003. 243 p.

Onsager L. Statistical hydrodynamics // Nuovo Cim. 1949. V. 6. Suppl. 2. P. 279-287.

Pouquet A., Mininni P.D. The interplay between helicity and rotation in turbulence: Implications for scaling laws and small-scale dynamics // arXiv.org/ads/0910.4522 vl.[physics.flu-dyn]. 2009.

Reynolds O. On the dynamical theory of turbulent incompressible viscous fluids and the determination of the criterion // Phil. Trans. Roy. Soc. London A. 1895. V. 186. P. 123-161.

Rüdiger G. On the Reynolds stresses in mean-field hydrodynamics. III. Two-dimensional turbulence and the problem of differential rotation // Astron. Nachr. 1974. V. 295. H. 5. P. 229–235.

Rüdiger G. Reynolds stresses and differential rotation. I. On recent calculations of zonal fluxes in slowly rotating stars // Geophys and Astrophys. Fluid Dyn. 1980a. V. 16. P. 239–261.

Rüdiger G. On negative eddy viscosity in MHD turbulence // Magnetic Hydrodynamics (Riga). 1980b. № 1. P. 3-14.

Rogers M.M., Moin P. The structure of the vorticity field in homogeneous turbulent flows // J. Fluid Mech. 1987a. V. 176. P. 33-66.

Rogers M.M., Moin P. Helicity fluctuations in incompressible turbulent flows // Phys. Fluids. 1987b. V. 30. P. 2662-2671.

Sivashinsky G.I., Frenkel A.L. On negative eddy viscosity under conditions of isotropy // Phys. Fluids. 1992. V. A4. P. 1608-1610.

Shakura N.I., Sunyaev R.A., Zilitinkevich S.S. On the turbulent energy transport in accretion discs // Astron. and Astrophys. 1978. V. 62. P. 179–187.

Shtilman L., Levich E., Orszag S.A., Pelz R.B., Tsinober A. On the role of helicity in complex fluid flows // Phys. Lett. A. 1985. V. 113**.** P. 32-37.

Smith L.M., Chasnov J., Waleffe F. Crossover from two- to three-dimensional turbulence // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 77. P. 2467-2470.

Smith L.M., Waleffe F. Transfer of energy to two-dimensional large scales in forced, rotating three-dimensional turbulence // Phys. Fluids. 1999. V. 11. P. 1608-1622.

Steenbeck M., Krause F., Radler K.-H. A calculation of the mean electromotive force in an electrically conducting fluid in turbulent motion, under the influence of Coriolis forces // Z. Naturforsch. 1966. V. 21a. P. 369-376.

Taylor G.I. Eddy motion in atmospheree // Phil. Trans. Roy. Soc. London A. 1915. V. 215. P. 1-26.

Tsinober A., Levich E. On the helical nature of three-dimensional coherent structures in turbulent flows // Phys. Lett. A. 1983. V. 99. 321-324.

Vergassola M., Gama S., Frisch U. Proving the existence of negative isotropic eddy viscosity // NATO-ASI: Solar and Planetary Dynamos / Eds: Proctor M.R.E., Mathews P.C., Rucklidge A.M. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993. P. 321-327.

Yoshizava A. Self-consistent turbulent dynamo modeling of reversed field pinches and planetary magnetic fields // Phys. Fluids. 1990. V. B2 (7). P. 1589-1600.

Wasiutynski J. Studies in hydrodynamics and structure of stars and planets // Astrophys. Norv. 1946. V. 4. P. 86.

Zhou Y. A phenomenological treatment of rotating turbulence // Phys. Fluids. 1995. V. 7. P. 2092-2099.

ОГЛАВЛЕНИЕ