



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 63 за 2024 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

М.А. Кирюшина

**Моделирование течений
жидкости в кольцевом и
полукольцевом каналах**

Статья доступна по лицензии
[Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)



Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Кирюшина М.А. Моделирование течений жидкости в кольцевом и полукольцевом каналах // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2024. № 63. 23 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2024-63>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2024-63>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук**

М.А. Кирюшина

**Моделирование течений жидкости
в кольцевом и полукольцевом каналах**

Москва – 2024

Кирюшина М.А.

Моделирование течений жидкости в кольцевом и полукольцевом каналах

Приведены результаты численного моделирования течения вязкой несжимаемой изотермической жидкости в кольцевом канале, представляющем собой зазор между вращающимся и неподвижным цилиндрами, а также в полукольцевом канале между вращающимся цилиндром и неподвижной стенкой. Описана математическая модель и приведена ее реализация для данной задачи в пакете OpenFOAM. Показаны результаты для малых и больших чисел Рейнольдса, которые соответствуют формированию стационарного и стохастического режимов течения.

Ключевые слова: КГидД уравнения, вязкая несжимаемая жидкость, OpenFOAM, течение Куэтта-Тейлора, коаксиальные цилиндры, зона успокоения

Maria Alexandrovna Kiriushina

Fluid flow modeling in annular and semi-annular channels

Results of numerical simulation of flow of viscous incompressible isothermal liquid in annular channel, which represents gap between rotating and fixed cylinders, as well as in semi-annular channel between rotating cylinder and fixed wall, are given. A mathematical model and its implementation for this task in the OpenFOAM package are described. Results are shown for small and large Reynolds numbers, which correspond to the formation of stationary and stochastic flow modes.

Key words: QHD equations, viscous incompressible fluid, OpenFOAM, Couette-Taylor flow, coaxial cylinders, calming zone

Оглавление

1. Введение	3
2. Квазигидродинамические (КГидД) уравнения	4
3. Постановка задач для течений в кольцевом и полукольцевом каналах.....	8
4. Стационарный режим, $Re=100$	11
5. Нестационарный режим, $Re=50000$	13
6. Реализация алгоритма в OpenFOAM	17
7. Заключительные замечания	19
Приложение 1. Нестационарное течение в кольцевом канале, $Re=50000$	20
Приложение 2. Развитие течения с зоной успокоения, $Re=50000$	21
Библиографический список.....	22

1. Введение

Сдвиговые течения в зазоре между вращающимися цилиндрами являются широко известным типом течений, в которых наблюдаются различные варианты перехода от ламинарного режима к развитой турбулентности (см., например, [1-3]). Эти течения важны как в теоретических исследованиях, так и для технических приложений. Конкретные эксперименты и теоретические результаты по формированию вихрей Куэтта-Тейлора и Гертлера имеются, например, в [4-9]. Известно, что центробежные силы приводят к искажению профиля скорости течения Куэтта и возникновению вихрей Тэйлора-Гертлера. С увеличением числа Рейнольдса эти вихри становятся неустойчивыми, см., например, [4, 5]. Качественные картины перехода стационарного течения к нестационарному поясняются на рис. 1, [6], где показаны данные эксперимента и схематический вид течения, поясняющие его структуру при увеличении скорости вращения. В [9] приведена наблюдаемая картина перехода к турбулентности в круговом течении Куэтта, сочетающая в себе черты картины ламинарно-турбулентного перехода Ландау с элементами стохастического аттрактора.

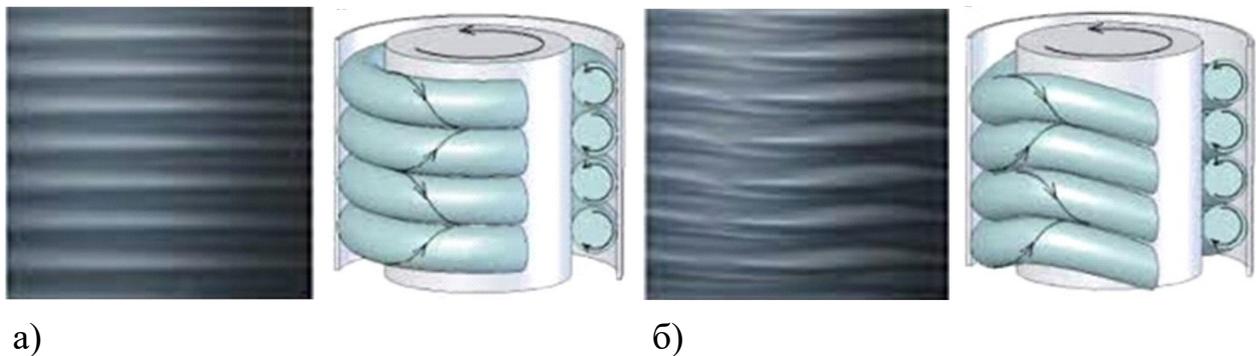


Рис. 1. Образование и развитие вихрей в течении Тейлора-Куэтта в кольцевом канале. Слева – небольшие скорости вращения, справа – искажение течения с ростом скорости

В работе приведены результаты численного моделирования течения вязкой несжимаемой изотермической жидкости в кольцевом канале, представляющем собой зазор между двумя цилиндрами, а также в полукольцевом канале между вращающимся цилиндром и неподвижной стенкой. Рассмотренная геометрия является аналогом пространственной геометрии ротационного вискозиметра, или вискозиметра типа Серле (Сирла, *Searle*) [6].

Экспериментальное изучение течения в вискозиметре представляет собой большие сложности, одной из которых является учет возмущений, вносимых

измерительными датчиками. Для измерения скорости потока необходимо использовать датчик термоанемометра внутри потока, который может изменять характеристики потока, особенно в условиях малого изменения давления [6].

Сравнение результатов численного расчета течения в зазоре между цилиндрами и в полукольцевом канале с зоной успокоения позволит оценить параметры течения в зазоре между цилиндрами без внесения соответствующего датчика.

Задача решается в нестационарной постановке, используется пространственная система координат Эйлера. В качестве математического алгоритма применяются квазигидродинамические (КГидД) уравнения [10-16].

Ранее КГидД уравнения применялись для моделирования спонтанно возникающих нестационарных режимов при конвекции Марангони [10,12,14], течениях за обратным уступом [12] и термогравитационной конвекции в прямоугольной области [16]. Родственная система квазигазодинамических (КГД) уравнений ранее использовалась для численного моделирования турбулентных течений вязкого сжимаемого газа [12, 17].

Численный алгоритм реализован на базе открытой платформы OpenFOAM [15]. Расчет выполнен на вычислительном комплексе K100 Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН.

Работа построена следующим образом: во втором разделе приведен вид КГидД уравнений; в третьем разделе описана постановка задачи, показаны расчетные сетки; в четвертом приведены результаты расчетов для $Re=100$; в пятом – для $Re=50000$; в шестом разделе описаны особенности реализации задачи в рамках открытого пакета OpenFOAM. В заключении работы сделаны замечания, касающиеся основных результатов, и приведены два приложения, демонстрирующие развитие нестационарных течений в кольцевом и полукольцевом каналах.

2. Квазигидродинамические (КГидД) уравнения

Для численного моделирования используется КГидД метод, основой которого является регуляризованная система уравнений Навье-Стокса. Регуляризация уравнений основана на предположении, что массовая плотность потока жидкости отличается от среднего импульса единицы объема на малую величину. Это отличие приводит к появлению малых диссипативных добавок в системе уравнений, которые обеспечивают невозрастание кинетической энергии системы. Применительно к вычислительному алгоритму эти слагаемые позволяют использовать условно устойчивую явную по времени разностную схему при аппроксимации всех пространственных производных центральными разностями. Тем самым схема имеет второй порядок точности по пространству и первый по времени.

Приведем вид КГидД системы уравнений в приближении Буссинеска согласно [10-14]:

$$\operatorname{div}(\vec{u} - \vec{w}) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \operatorname{div}((\vec{u} - \vec{w}) \otimes \vec{u}) + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p = \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \Pi - \beta \vec{g}(T - T_0). \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{u}T) = \operatorname{div}(\vec{w}T) + \chi \Delta T + \operatorname{div}(\tau \vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{\nabla} T)). \quad (3)$$

Здесь p – давление, ρ – постоянная плотность жидкости, T – температура жидкости. Вектор поправки к скорости \vec{w} и тензор вязких напряжений Π вычисляются как

$$\vec{w} = \tau \left[(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \beta \vec{g}(T - T_0) \right], \quad \Pi = \Pi_{NS} + \rho \vec{u} \otimes \vec{w}. \quad (4)$$

$\Pi_{NS} = \mu [(\nabla \otimes \vec{u}) + (\nabla \otimes \vec{u})^T]$, где μ – коэффициент динамической вязкости, τ – параметр регуляризации, который имеет размерность времени.

КГидД система тесно связана с системой уравнений Навье-Стокса и имеет ряд точных решений, совпадающих с точными решениями этой системы [10,11]. При $\tau = 0$ регуляризованная система переходит в систему уравнений Навье-Стокса.

Базовое значение коэффициента τ_0 определим из условия, чтобы в безразмерном виде параметр регуляризации не превосходил коэффициент вязкости. Оценка предельного значения параметра регуляризации приводит к величине

$$\tau_0 = \frac{\nu}{u_0^2}, \quad (5)$$

где $\nu = \mu/\rho$ – коэффициент кинематической вязкости, u_0 – выбранное характерное значение скорости. Для проведения вычислений параметр τ следует выбирать в виде $\tau \leq \tau_0$.

В отличие от системы уравнений Навье-Стокса в КГидД системе уравнение Пуассона для давления непосредственно следует из уравнения неразрывности (1) с учетом добавки к скорости из (4):

$$\frac{1}{\rho} \Delta p = -\operatorname{div}[(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}] + \frac{1}{\tau} \operatorname{div} \vec{u} - \operatorname{div}(\beta \vec{g}(T - T_0)). \quad (6)$$

В случае $g = \text{const}$ последнее слагаемое обращается в ноль.

Граничные условия для давления на твердых непроницаемых стенках расчетной области вытекают из условия равенства нулю нормальной компоненты потока массы на непроницаемой границе

$$\vec{J}_m = \vec{u}_n - \vec{w}_n = 0. \quad (7)$$

Из условия (7) находится граничное условие для давления.

В частности, граничное условие для давления на твердых верхних и нижних стенках вертикального цилиндрического зазора обеспечивается соотношением (7) с учетом (4) и условий непротекания для скорости $\vec{u}_n = 0$ в виде

$$\vec{\nabla} p = -\rho_0 \beta \vec{g}(T - T_0), \text{ для } \vec{g} = 0 \quad \vec{\nabla} p = 0.$$

Соотношение (7) для стенки вращающегося цилиндра поясним с помощью записи КГидД системы в цилиндрической системе координат (r, φ, z) с компонентами $u_r = u_r(r, \varphi, z)$, $u_\varphi = u_\varphi(r, \varphi, z)$, $u_z = u_z(r, \varphi, z)$. Для простоты выпишем уравнения для изотермической жидкости согласно [11, 12]:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rw_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial w_z}{\partial z}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r^2)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(u_\varphi u_r)}{\partial \varphi} + \frac{\partial(u_z u_r)}{\partial z} - \frac{u_\varphi^2}{r} + \frac{\partial p}{\partial r} = 2\nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r\sigma_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\sigma_{\varphi r}}{\partial \varphi} + \right. \\ \left. \frac{\partial\sigma_{zr}}{\partial z} - \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{r} \right) + \frac{2}{r} \frac{\partial(rw_r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(w_\varphi u_r)}{\partial \varphi} + \frac{\partial(w_z u_r)}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(u_\varphi w_r)}{\partial \varphi} + \frac{\partial(u_z w_r)}{\partial z} - \\ 2 \frac{u_\varphi w_\varphi}{r}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r u_\varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(u_\varphi^2)}{\partial \varphi} + \frac{\partial(u_z u_\varphi)}{\partial z} + \frac{u_r u_\varphi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 2\nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r\sigma_{r\varphi})}{\partial r} + \right. \\ \left. \frac{1}{r} \frac{\partial\sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial\sigma_{z\varphi}}{\partial z} + \frac{\sigma_{\varphi r}}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial(rw_r u_\varphi)}{\partial r} + \frac{2}{r} \frac{\partial(w_\varphi u_\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial(w_z u_\varphi)}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r w_\varphi)}{\partial r} + \\ \frac{\partial(u_z w_\varphi)}{\partial z} + \frac{u_r w_\varphi + u_\varphi w_r}{r}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r u_z)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(u_\varphi u_z)}{\partial \varphi} + \frac{\partial(u_z^2)}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = 2\nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r\sigma_{rz})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\sigma_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} \right) + \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(rw_r u_z)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(w_\varphi u_z)}{\partial \varphi} + 2 \frac{\partial(w_z u_z)}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r w_z)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(u_\varphi w_z)}{\partial \varphi}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$w_r = \tau \left(u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\varphi^2}{r} + \frac{\partial p}{\partial r} \right), \quad (12)$$

$$w_\varphi = \tau \left(u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_z \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{u_r u_\varphi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right), \quad (13)$$

$$w_z = \tau \left(u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} \right). \quad (14)$$

Компоненты тензора скоростей деформаций определяются по формулам

$$\sigma_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{\varphi}, \sigma_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad (15)$$

$$\sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi r} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\varphi}{r} \right) \right), \quad (16)$$

$$\sigma_{\varphi z} = \sigma_{z\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \right), \quad (17)$$

$$\sigma_{zr} = \sigma_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} \right). \quad (18)$$

Нормальная к стенке компонента добавки в поток массы реализуется компонентой w_r . Поскольку на вращающейся стенке задается условие прилипания $\vec{u} = (u_r, u_\varphi, u_z) = (0, 0, 0)$, то условие непротекания потока массы через боковую стенку $\vec{u}_n - \vec{w}_n = 0$ обеспечивается граничным условием для давления, которое следует из равенства нулю компоненты $w_r = 0$, (12) и имеет вид

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{u_\varphi^2}{r}. \quad (19)$$

Для неподвижных боковых стенок внешнего цилиндра условие на границе упрощается и принимает вид $\frac{\partial p}{\partial r} = 0$.

Пространственная аппроксимация КГидД системы строится с помощью метода конечных объемов с вычислением всех пространственных производных с помощью центральных разностей. Используется явная по времени разностная схема, а слагаемые с молекулярной вязкостью аппроксимируются в неявном виде. Устойчивость алгоритма обеспечивает искусственная диссипация, нелинейная структура которой подстраивает ее величину в зависимости от градиентов давления и скорости. Шаг интегрирования по времени Δt , обеспечивающий условную устойчивость разностного алгоритма, близок к величине τ .

Уравнение Пуассона решается с помощью стандартного метода сопряженных градиентов с предобуславливателем PCG с точностью вычислений 10^{-9} . Граничные условия для решения уравнения Пуассона (7) и (19) на пространственной сетке реализуются подпрограммой qhdFlux. Условие (7) реализовано в рамках OpenFOAM для неструктурированной трехмерной сетки около заданной поверхности.

3. Постановка задач для течений в кольцевом и полукольцевом каналах

На рис. 2 показан вид экспериментальной установки [6], представляющей собой полукольцевой канал и так называемую зону успокоения. В приборе вращается только внутренний цилиндр. Для наглядности в установке снята верхняя крышка. В приборе могут использоваться различные газы или смеси газов.



Рис. 2. Вид экспериментальной установки

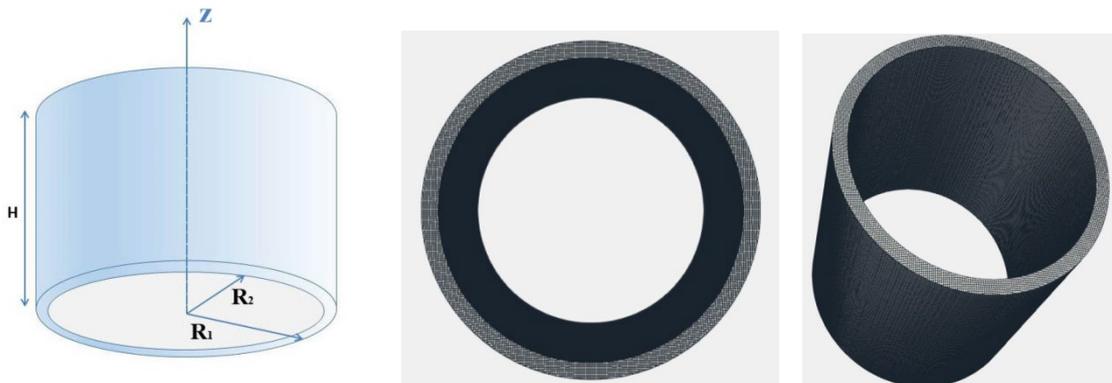


Рис. 3. Схема расчетной области и сетка для кольцевого канала

На рис. 3 и 4 представлены схемы расчетных областей и виды расчетных сеток в кольцевом и полукольцевом каналах.

Для кольцевого канала исследуется динамика течения вязкой несжимаемой жидкости (воды) между двумя соосными цилиндрами высотой $H=0.1$ м, диаметрами $D_1=2R_1=H$ и $D_2=2R_2=0.09$ м, из которых внутренний цилиндр вращается, рис. 3. Общее количество ячеек сетки составляет 381120, поперек коаксиального зазора расположено примерно 6-8 ячеек, число ячеек по высоте цилиндра составляет 172 ячейки. В сетке использованы близкие к равномерным кубам ячейки.

В полукольцевом канале, или канале с зоной успокоения, высота по z расчетной области также равна $H=0.1$ м, длина области по x равна $2D_1=4R_1=2H$, диаметр внутреннего вращающегося цилиндра $D_2=2R_2=0.09$ м. Здесь (рис. 4) количество ячеек сетки 964638. Число ячеек по высоте цилиндра составляет порядка 178, при этом поперек коаксиального полукольцевого зазора расположено порядка 8 ячеек. Особенности построения сетки описаны в разделе 6 о реализации алгоритма в OpenFOAM.

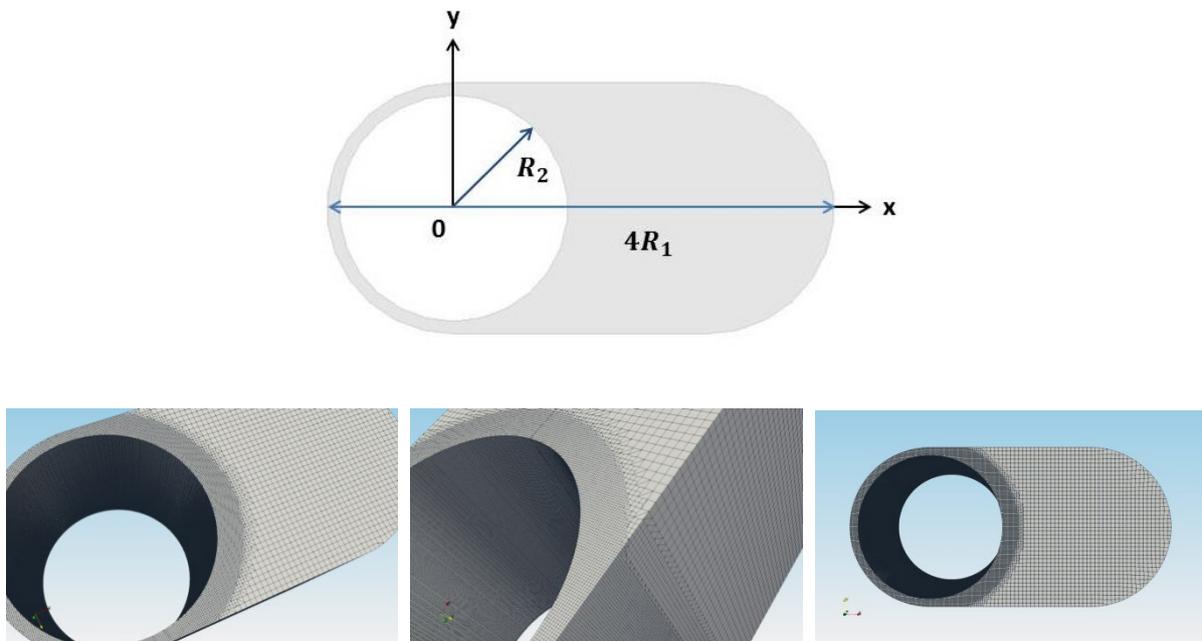


Рис. 4. Схема расчетной области и сетка для полукольцевого канала с зоной успокоения

Скорость вращения внутреннего цилиндра для кольцевого и полукольцевого каналов составляет $U_{R_2}=50$ см/с=0.5 м/с, что соответствует постоянной угловой скорости $\omega = \frac{U_{R_2}}{R_2} = \frac{0.5}{0.045} = 11.1$ рад/с. Температура среды полагается постоянной. Для этого случая в расчете температура задается в качестве начальных условий и полагается равным нулю ускорение свободного падения $\vec{g}=0$.

В таблице 1 задаются параметры воды при температуре 20°C (293.15 K) и нормальном атмосферном давлении 101325 Па .

Таблица 1

Параметры воды в размерном виде

Молярная масса M	18 г/моль
Динамическая вязкость μ	$1.0 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$
Кинематическая вязкость ν	$1.0 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$
Теплопроводность	$0.00603 \text{ Вт}/(\text{см} \cdot \text{К})$
Число Прандтля Pr	7.0
Плотность ρ_0	$1000 \text{ кг}/\text{м}^3$
Теплоемкость при постоянном давлении C_p	$4.182 \cdot 10^3 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$

В данной задаче принято использование значений числа Рейнольдса, которые определяются как $Re = \frac{UD_1\rho}{\mu}$ и $Re = \frac{\omega R_2(R_1 - R_2)\rho}{\mu}$. В дальнейшем используется вариант

$$Re = \frac{UD_1\rho}{\mu}. \quad (20)$$

Задание граничных и начальных условий приведено в таблицах 2 и 3.

Таблица 2

Граничные условия расчета

	Внешний цилиндр/ внешняя область, состоящая из полукольца и зоны успокоения	Внутренний цилиндр	Кольцо сверху/ полукольцо и область успокоения	Кольцо сверху/ полукольцо и область успокоения
Давление p	$\vec{\nabla} p = 0$	$\vec{u}_n - \vec{w}_n = 0, \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{u_\varphi^2}{r}$	$\vec{\nabla} p = 0$	$\vec{\nabla} p = 0$
Скорость U	$\omega = 0 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$	$\omega = 11.1 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$	$\vec{U} = 0$	$\vec{U} = 0$
Температура T	$\frac{\partial T}{\partial \vec{n}} = 0$	$\frac{\partial T}{\partial \vec{n}} = 0$	$\frac{\partial T}{\partial \vec{n}} = 0$	$\frac{\partial T}{\partial \vec{n}} = 0$

Начальные условия расчета

Давление p	Скорость U	Температура
101325 Па	(0, 0, 0) м/с	293.15 ° К

Расчет ведется в размерных переменных в системе СИ в рамках платформы OpenFOAM, все величины далее будут использоваться без указания размерности.

Скорость вращения внутреннего цилиндра постоянна, число Рейнольдса задается путем выбора коэффициента кинематической вязкости ν . Соответственно выбираются параметр τ и шаг расчета по времени.

4. Стационарный режим, $Re=100$

Данный режим соответствует числу Рейнольдса $Re = \frac{UD_1\rho}{\mu} = 100$, что задается значением коэффициента динамической вязкости $\mu=0.5$. Характерная величина параметра регуляризации (5) составляет $\tau_0 = \frac{\mu/\rho}{U^2} = 2 * 10^{-3}$ с. В кольцевом канале параметр регуляризации выбран $\tau = 10^{-3}$, шаг по времени составляет $\Delta t = 10^{-3}$. В полукольцевом канале параметр регуляризации выбран равным $\tau = 10^{-4}$, шаг по времени взят $\Delta t = 10^{-4}$.

Стационарный режим в расчете для кольцевого и полукольцевого каналов установился за время, не превосходящее $t=0.1$ с.

На рис. 5 представлена общая картина установившегося течения в кольцевом (а) и полукольцевом (б) каналах. Линии тока окрашены в соответствии с величиной скорости. Их толщина и количество выбраны из соображений наглядности.

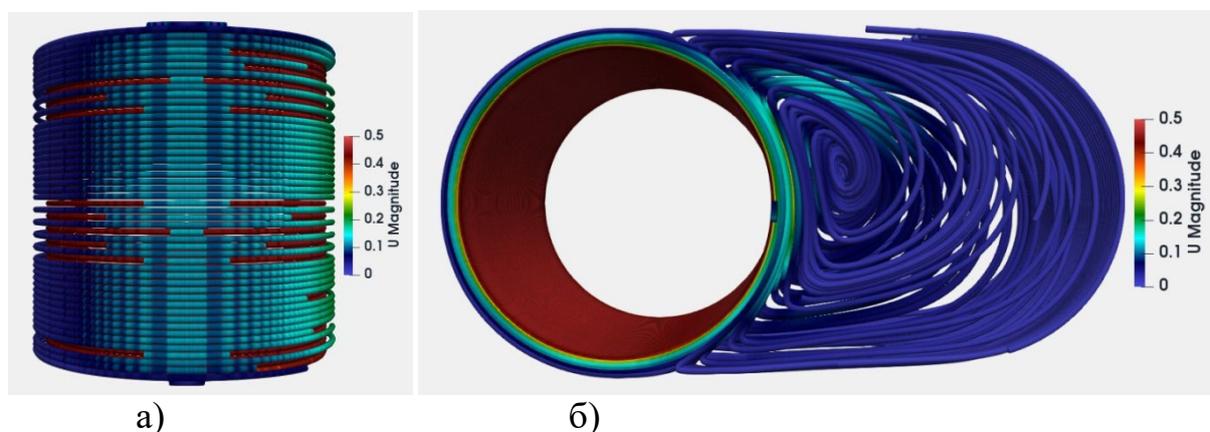


Рис. 5. Общий вид линий тока в кольцевом и полукольцевом каналах $Re=100$

Детали течения представлены на рисунках далее.

На рис. 6 представлены разрезы вдоль вертикальной плоскости для указанных течений. На рисунках слева направо соответственно представлены изолинии модуля скорости, значения радиальной скорости и линии тока. Для полукольцевого канала дополнительно справа представлены линии тока в зоне успокоения. Видно, что наличие зоны успокоения сказывается на течении в зазоре, даже в его части, расположенной на противоположной стороне от зоны успокоения. Величина радиальной скорости (обозначена как u_x) в кольцевом канале на два порядка выше, чем ее значение в полукольцевом канале. Линии тока в кольцевом канале имеют регулярную слоистую структуру, близкую к изображенной на рис. 1а, в отличие от линий тока в канале с успокоением.

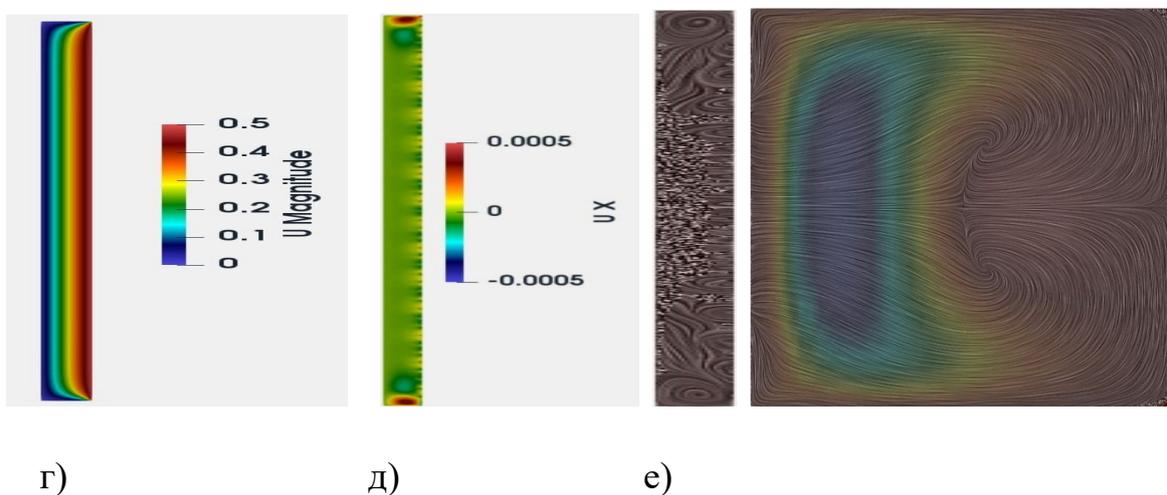
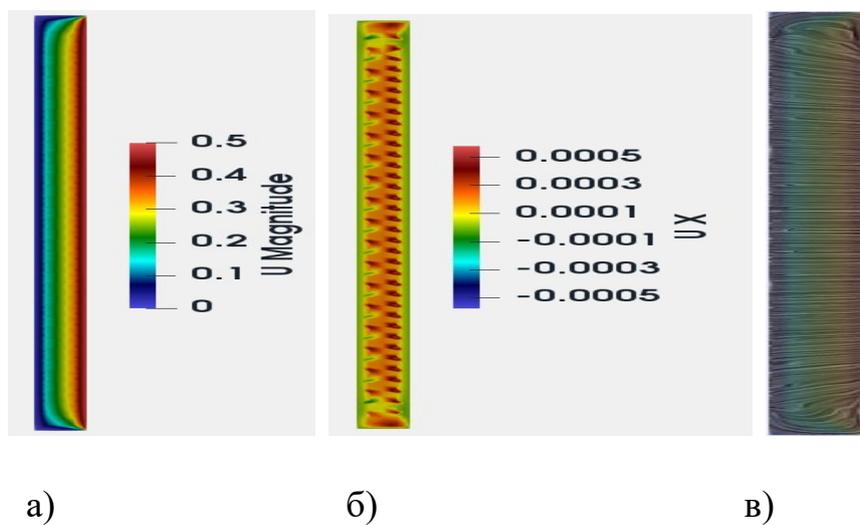


Рис. 6. Модуль скорости, изолинии радиальной скорости, линии тока. Сверху в кольцевом канале а)-в), снизу – в полукольцевом канале – г)-е)

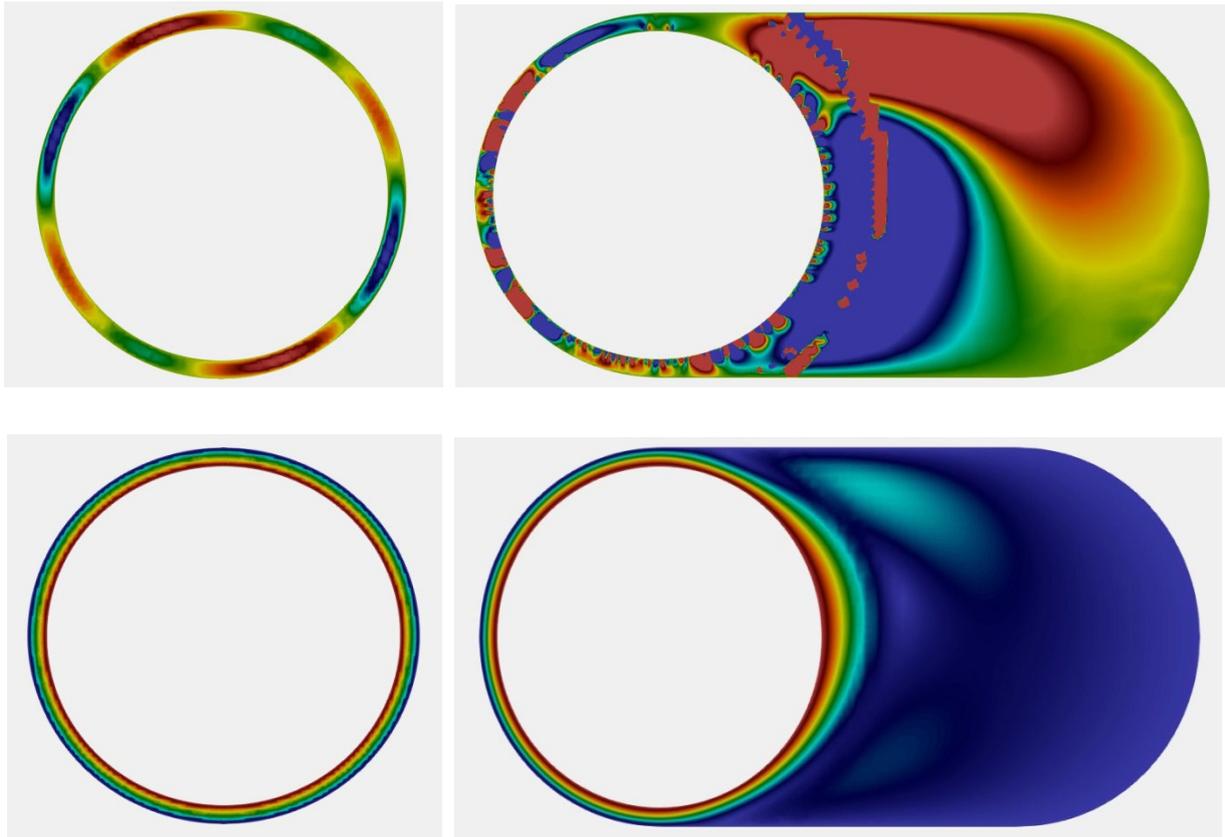


Рис. 7. Срез картины течения по $z = 0.05$, сверху – компонента скорости u_z (видна особенность за счет дробления сетки), внизу – модуль скорости

На рис. 7 представлено то же течение в срезе посередине области при $z = 0.05$. Слева – в кольцевом канале, справа – в канале с расширением. Из рисунка видно, что скорость в кольцевом канале u_z очень мало зависит от угла и ее значения не превосходят $\pm 10^{-6}$, и модуль скорости течения практически не зависит от угла. Тем самым задачу о течении в кольцевом канале можно моделировать в цилиндрическом приближении, без учета угловой скорости. В канале с расширением это упрощение невозможно.

5. Нестационарный режим, $Re=50000$

Для этого варианта $Re = \frac{UD_1\rho}{\mu} = 50000$, что соответствует коэффициенту динамической вязкости флюида $\mu = 10^{-3}$, что соответствует течению воды, Табл. 1.

В кольцевом канале расчеты проведены для трех вариантов параметров расчета: $\tau = 10^{-3}$, $\Delta t = 10^{-4}$; $\tau = 10^{-4}$, $\Delta t = 10^{-4}$; $\tau = 10^{-5}$, $\Delta t = 5 * 10^{-6}$. Результаты расчета для всех перечисленных вариантов оказались близкими. В канале с расширением расчет проводился при $\tau = 10^{-4}$, $\Delta t = 10^{-4}$.

На последующих рисунках для кольцевого и полукольцевого каналов представлены расчеты для варианта $\tau = 10^{-4}$.

Для обоих вариантов течение оказывается нестационарным, его статистически неменяющийся вид устанавливается к времени t порядка 5 с. Характерный вид мгновенного поля течения для обоих вариантов показан на рис. 8.

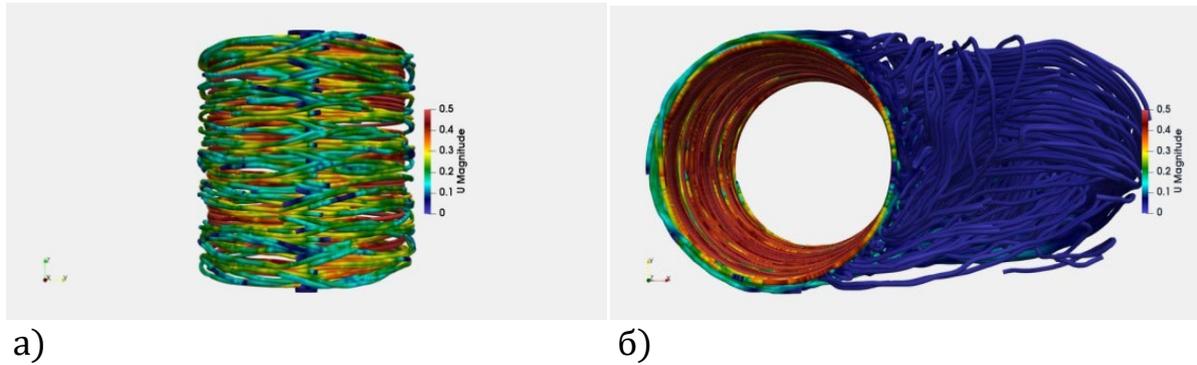


Рис. 8. Общий вид нестационарного течения в кольцевом (а) и полукольцевом (б) каналах, $Re=50000$

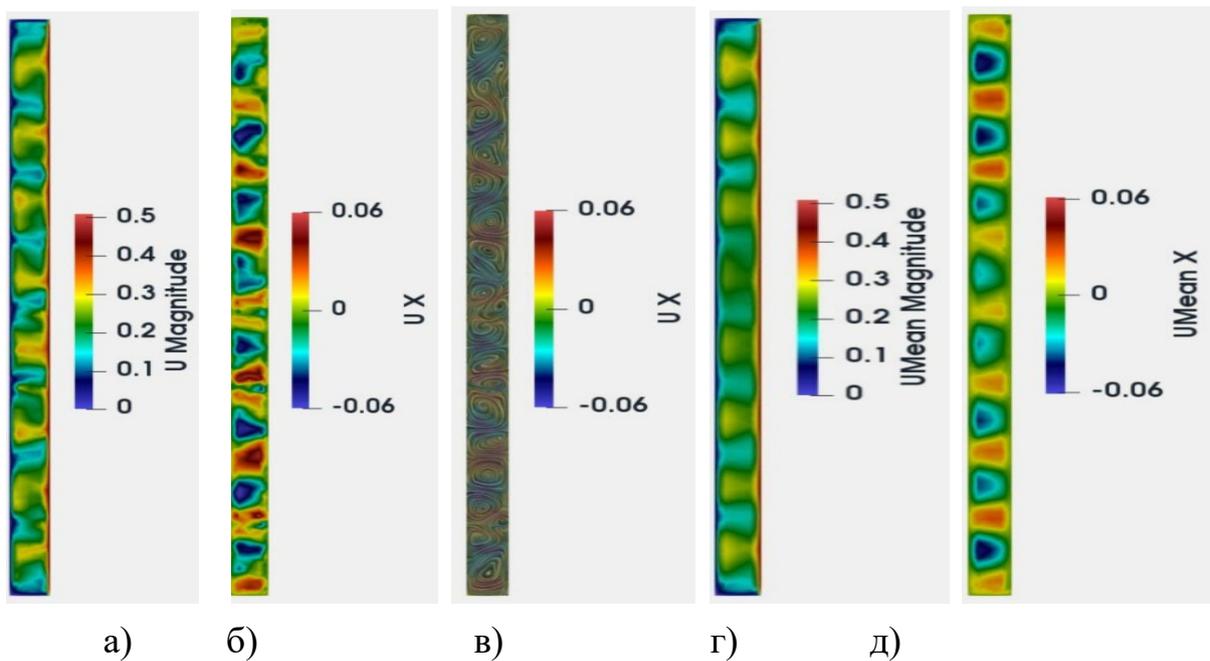
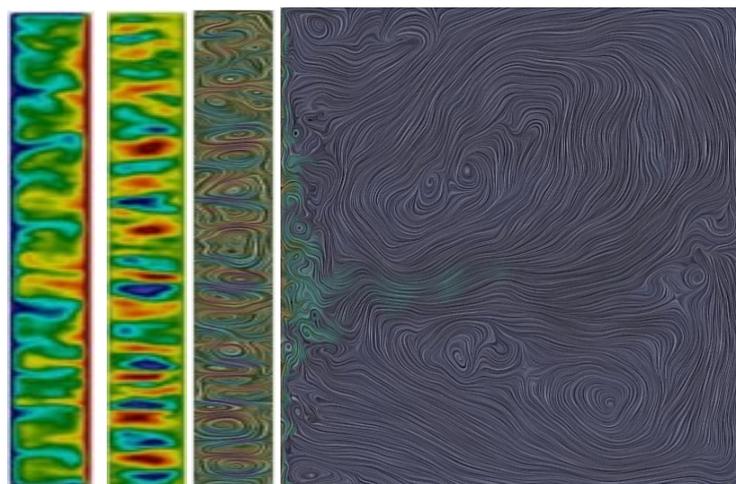
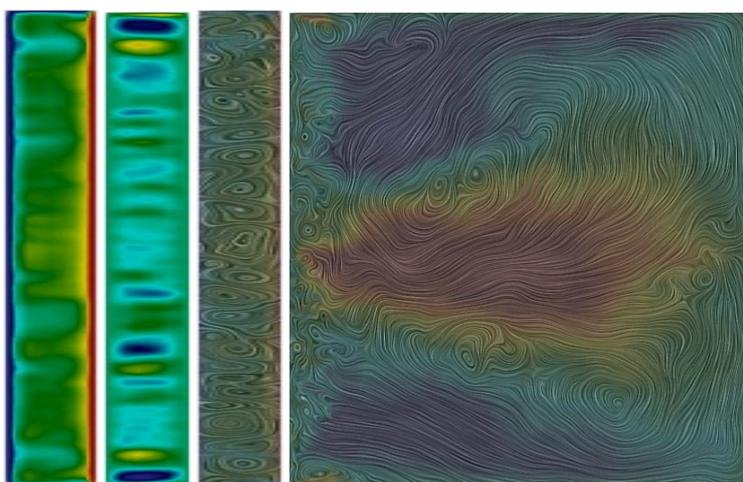


Рис. 9. Кольцевой канал, $Re=50000$, $t=9.5$ с. Мгновенные значения модуля скорости (а), радиальной скорости (б), линии тока (в), осредненные значения модуля скорости (г) и радиальной скорости (д)



а) б) в) г)



д) е) ж) з)

Рис. 10. Полукольцевой канал, $Re=50000$. Сверху – мгновенные значения модуля скорости (а), радиальной скорости (б), линии тока слева и справа (в-г), $t=9.5$ с. Снизу – осредненные модуль скорости (д), радиальная скорость в зазоре (е) и линии тока слева и справа (ж-з)

Детали течения для полученного нестационарного течения представлены в виде мгновенных картин в установившемся режиме и осредненных по времени полей скорости.

На рис. 9 и 10 представлены разрезы вдоль вертикальной плоскости. На рисунках слева направо соответственно представлены изолинии модуля скорости, значения радиальной скорости и линии тока. Для полукольцевого канала дополнительно справа представлены линии тока в зоне успокоения. Видно, что зона успокоения существенно влияет на течение в зазоре, изменяя его по сравнению с вариантом течения в кольцевом канале, даже в части, расположенной на противоположной стороне от зоны успокоения.

Картина мгновенных полей скорости существенно отличается от осредненных по времени картин течения. Осреднение проводилось на временном интервале от 7.2 до 9.5 с. Особенно существенным является отличие мгновенных и осредненных картин течения для канала с зоной успокоения, рис. 10.

На рис. 11 приведены зависимости от времени компонент скорости в кольцевом и полукольцевом каналах в точках с координатами 1 (0 0.05 0.02), 2 (0 0.05 0.04) и 3 (0 0.05 0.06) для стадии установившегося хаотического течения. Точки находятся правее на 90° от точки, лежащей напротив зоны успокоения.

Шаг записи составляет 200 временных слоев. Учитывая, что шаг расчета по времени составляет $\Delta t = 10^{-4}$, и что 1 пичок занимает порядка ~ 0.1 с, получаем, что на один пичок приходится около 5 точек записи, или 10^3 шагов по времени. Таким образом, разностный расчет детально отражает временную нестационарную картину течения.

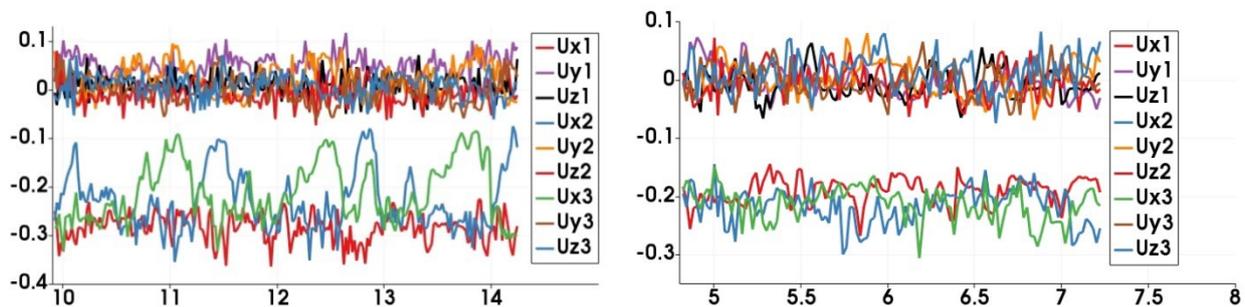


Рис. 11. Кольцевой (слева) и полукольцевой (справа) каналы, $Re=50000$. Компоненты скорости в точках 1, 2 и 3 посередине зазора между цилиндрами

На рис. 12 приведены профили модуля скорости в кольцевом и полукольцевом каналах для чисел Рейнольдса $Re=100$ и $Re=50000$. Для $Re=50000$ использованы осредненные по времени величины. В кольцевом канале скорость в среднем сечении выше, чем в полукольцевом. Такой же эффект, но в меньшей степени, виден для $Re=100$.

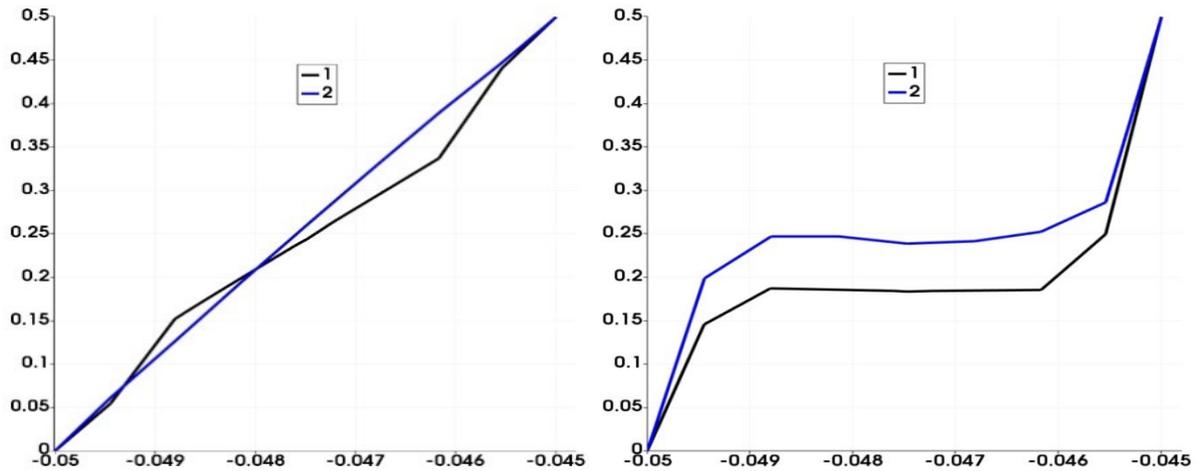


Рис. 12. Профили модуля скорости. 1 – кольцевой канал, 2 – полукольцевой канал. $y=0$, $z=0.05$, x от -0.05 до -0.045 . Слева $Re=100$, справа осредненные значения для $Re=50000$

В [4] приведена схема существования различных режимов течения жидкости в кольцевом зазоре и возможных переходов между ними в зависимости от соотношения скоростей вращения внутреннего и внешнего цилиндров, которые характеризуются соответствующими числами Рейнольдса. К таким режимам относятся взаимопроникающие спирали, ламинарные спирали, спиральная турбулентность, неустойчивые пятна турбулентности. Режим $Re=50000$ соответствует числу Рейнольдса для внутреннего цилиндра $Re_{\text{внут}} = R_2(R_1 - R_2) \frac{\omega}{\nu} \sim 2500$, и $Re_{\text{внеш}} = 0$ для наружного цилиндра. Этот режим не помещен в схему из [4] и должен располагаться в верхней части за границами рисунка на линии $Re_{\text{внеш}} = 0$. Согласно схеме [4], этот режим должен включать в себя взаимопроникающие турбулентные спирали и неустойчивые пятна турбулентности. Режим $Re=100$ располагается внизу схемы на той же линии в зоне течения Куэтта.

6. Реализация алгоритма в OpenFOAM

Кейс с течением в кольцевом канале для $Re=100$, посчитанный солвером `mulesQHDFoam` и настроенный для расчета течения вязкой несжимаемой жидкости, выложен на github [18].

Солвер `mulesQHDFoam`, производный от исходного `QHDFoam` для КГидД алгоритма, применялся для моделирования течений вязкой несжимаемой жидкости с тепловой конвекцией. Для моделирования течения вязкой изотермической жидкости в данном солвере достаточно задать величину ускорения свободного падения $\vec{g} = 0$ или положить величину теплового расширения $\beta = 0$ в папках `/constant/gravitationalProperties` и `/constant/thermophysicalProperties`.

Граничные условия для гидродинамических величин задаются в соответствующих словарях папки 0/.

Граница разбита на четыре области: walls, cylinder, up и down, см. таблицу 3.

Таблица 3

Задание граничных условий в кейсе [18]

	Боковая поверхность walls	Вращающийся цилиндр cylinder	Верхняя поверхность up	Нижняя поверхность down
Давление p	{type qhdFlux; value uniform 101325;}	{type qhdFlux; value uniform 101325;}	{type qhdFlux; value uniform 101325;}	{type qhdFlux; value uniform 101325;}
Скорость U	Walls {type rotating WallVelocity; origin (0 0 0); axis (0 0 1); omega 0.0;}	Cylinder {type rotating WallVelocity; origin (0 0 0); axis (0 0 1); omega 11.1;}	Up {type fixedValue; value uniform (0 0 0);}	Down {type fixedValue; value uniform (0 0 0);}
Температура T	$\frac{\partial T}{\partial \vec{n}} = 0$	$\frac{\partial T}{\partial \vec{n}} = 0$	$\frac{\partial T}{\partial \vec{n}} = 0$	$\frac{\partial T}{\partial \vec{n}} = 0$

Расчетная сетка в кольцевом и полукольцевом каналах строилась различными способами.

Для кольцевого зазора сетка была построена с помощью утилит blockMesh и snappyHexMesh. Цилиндр задается в разделе geometry с соответствующим радиусом и длиной. С применением утилиты topoSet определяются соответствующие грани входной, выходной и боковой поверхностей, которые с помощью createPatchDict выделяются в отдельные патчи.

Для полукольцевого зазора с зоной успокоения сетка была построена с помощью утилиты snappyHexMesh для поверхностей walls.stl, cylinder.stl, up.stl, down.stl, построенных в Salome. Далее сетка, заданная в blockMeshDict, дробится только в области с радиусом 0.055 вокруг вращающегося цилиндра с уровнем дробления 2 относительно сетки в зоне успокоения. Сетка с радиальными ячейками, исходящими из начала координат, по всей зоне успокоения, и сетка с радиальными ячейками, захватывающими только кольцевую область вокруг вращающегося цилиндра, оказались неудачными, т.к. Salome делает блочную сетку без висящих узлов, в результате чего получались очень тонкие ячейки у краев неподвижной стенки.

Вариант задачи для кольцевого канала можно скачать [18] и произвести расчеты с другими параметрами задачи: число Рейнольдса можно варьировать с помощью кинематической вязкости ν , изменяя динамическую вязкость μ в разделе `transport` словаря `/constant/thermophysicalProperties`; в папке `constant/thermophysicalProperties` в разделе QGD можно варьировать параметр регуляризации τ , который выбирается постоянным заданием модели `constTau`; здесь же для версии v2012 задаются референсные ячейка (`pRefCell` задается 0) и значение давления (`pRefValue` задается 101325).

В папке `system/controlDict` в выложенных кейсах для $Re=100$ имеется функция с записью полей скорости и давления в контрольных точках.

7. Заключительные замечания

Описан вычислительный пример для расчета течения вязкой несжимаемой жидкости в кольцевом зазоре между вращающимися цилиндрами и в области сложной формы, включающей в себя зазор и его расширение.

Программный модуль верифицирован на примере задач с малыми и большими числами Рейнольдса с формированием нестационарного течения. Несмотря на использование не очень подробных пространственных сеток, полученные результаты позволяют проанализировать особенности указанных течений.

Трудоемкость расчета иллюстрируется следующими цифрами: на сетке ~ 1 млн ячеек, на комплексе K100 расчет длился 15 часов на 36 процессорах до реального времени 10 секунд. Варьирование параметра регуляризации в 100 раз не приводило к существенным изменениям в структурах течений.

Численный алгоритм основан на квазигидродинамических (КГидД) уравнениях и реализован в рамках открытого программного комплекса OpenFOAM. Приведенное описание программного модуля допускает его обобщение для расчетов разнообразных течений между вращающимися цилиндрами. Построенные расчетные кейсы для кольцевого канала на примере $Re=100$ доступны в [18].

Приложение 1. Нестационарное течение в кольцевом канале, $Re=50000$

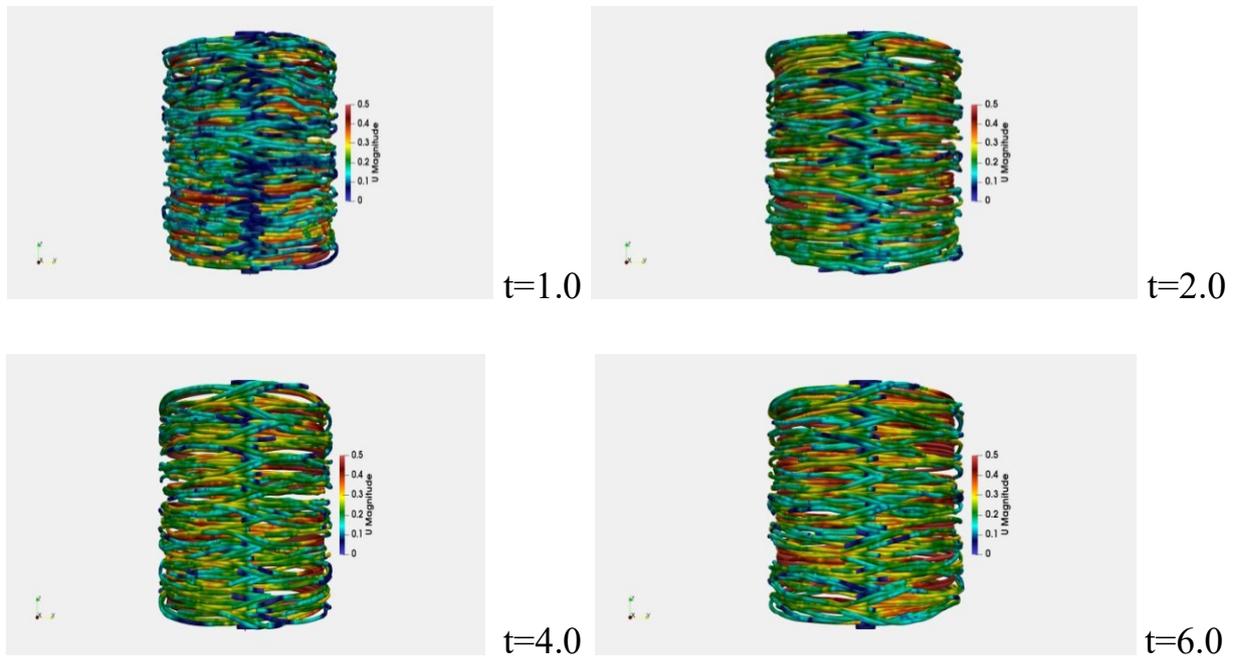


Рис. 1.1. Мгновенные траектории в кольцевом канале

Приложение 2. Развитие течения с зоной успокоения, $Re=50000$

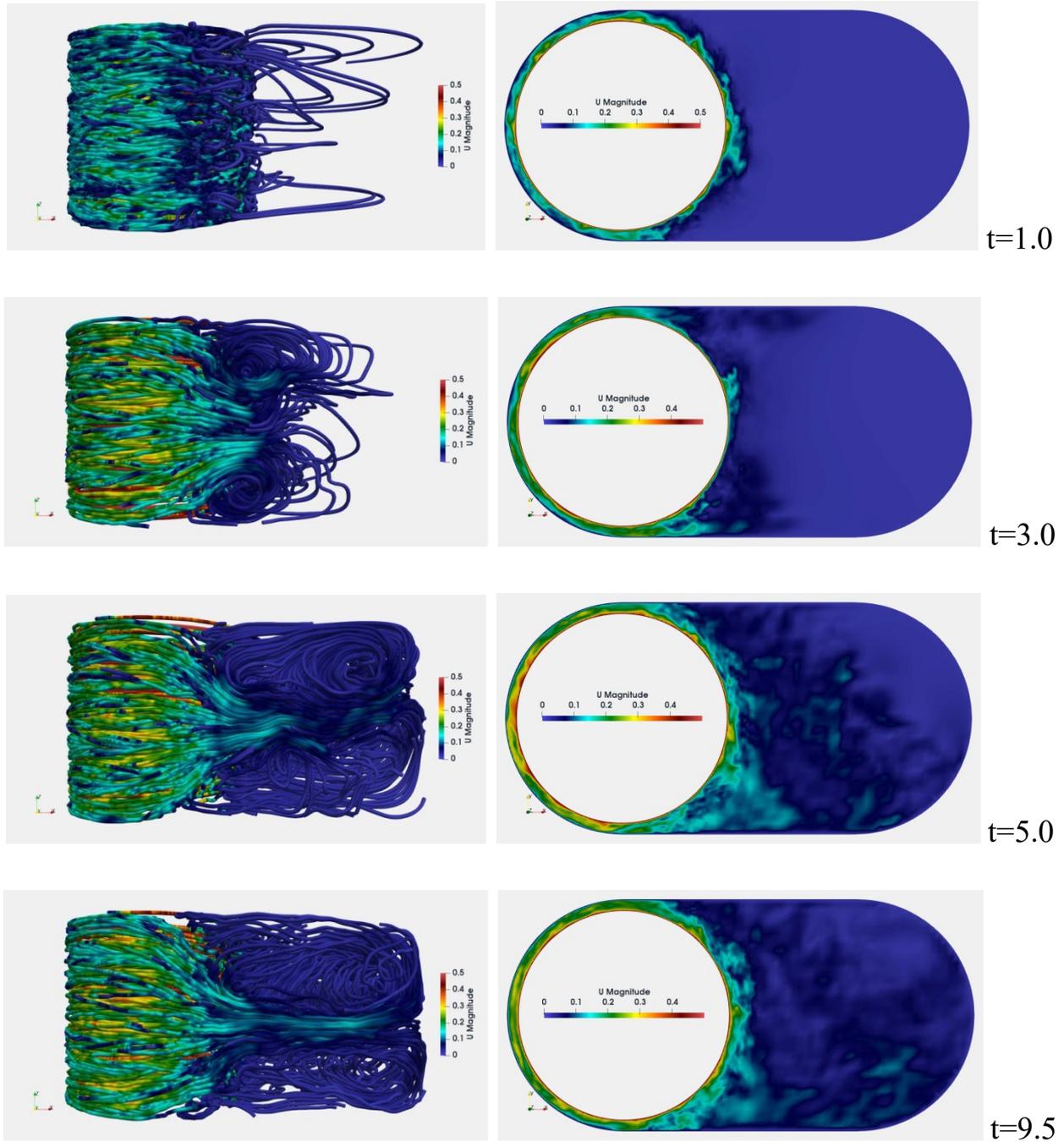


Рис. 2.1. Мгновенные картины течения. Слева 3D траектории, справа картины 2D модуля скорости в сечении $z=0.05$

Библиографический список

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., 1974.
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М., 1987.
3. Edward J. Shaughnessy, Ira M. Katz, James P. Schaffer Introduction to Fluid Mechanics, Oxford university press, New York Oxford, 2005.
4. Andereck C. D., Liu S.S., H. L. Swinney Flow regimes in a circular Couette system with independently rotating cylinders // J. Fluid Mech. (1986), vol. 164, p. 155-183.
5. Боголепов В.В. Нелинейное развитие вихрей Гертлера в пристеночной части пограничного слоя // Механика жидкости и газа, №1, 1994 г., с. 29-35.
6. Pak A.Yu., Lebiga V.A., Mironov D.S., Aleksandrov A.A. Influence of input area on the Couette flow in a semicircular channel. International Conference on the Methods of Aerophysical Research July 1–5, 2024 Novosibirsk, Russia. Abstracts Part I Edited by E.I. Kraus, Novosibirsk. Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences 2024, p. 142-143. DOI 10.53954/9785604990148_142.
7. Coles D. // Transition in circular Couette flow. J. Fluid Mech. 1965. Vol. 21. P. 385-425.
8. Бойко А.В., Демьянко К.В., Кузьмин Д.А., Миерка О., Нечепуренко Ю.М., Ривкинд Л.П. Численное моделирование генерации и развития вихрей Гертлера // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, № 48, 2016.
9. Кузнецов Е.А., Львов В.С., Предтеченский А.А., Соболев В.С., Уткин Е.Н. О проблеме перехода к турбулентности в течении Куэтта // Письма в ЖЭТФ, т. 30, вып. 4, с. 226-229.
10. Шеретов Ю.В. Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении. М.- Ижевск, 2009.
11. Шеретов Ю.В. Двухскоростная негалилеева гидродинамика. Тверь: Тверской государственный университет, 2022.
12. Елизарова Т.Г. Квазигазодинамические уравнения и методы расчета газодинамических течений. М.: Научный мир, 2007. Перевод: T.G. Elizarova, Quasi-Gas Dynamic equations (Nauchnyi Mir, Moscow, 2007, Springer, Berlin, 2009).
13. Елизарова Т.Г., Шеретов Ю.В. Теоретическое и численное исследование квазигазодинамических и квазигидродинамических уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2001, т. 41, №2, с. 239-255.
14. Елизарова Т.Г., Калачинская И.С., Ключникова А.В., Шеретов Ю.В. Использование квазигидродинамических уравнений для моделирования тепловой конвекции при малых числах Прандтля // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1998, т. 38, №10, с. 1732-1742.

15. Kraposhin M.V., Ryazanov D.A., Elizarova T.G. Numerical algorithm based on regularized equations for incompressible flow modeling and its implementation in OpenFOAM // Computer Physics Communications, 2022, 271, 108216.
16. Кирюшина М.А., Елизарова Т.Г., Епихин А.С. Верификация численного алгоритма на основе квазигидродинамических уравнений на примере моделирования задач гравитационной конвекции // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2024, т. 64, №10.
17. Елизарова Т.Г., Широков И.А. Регуляризованные уравнения и примеры их использования при моделировании газодинамических течений. М.: МАКС Пресс, 2017. 136 с.
18. Задача для кольцевого канала, выложенный кейс: <https://github.com/m-ist/Fluid-flow-modeling-in-annular-and-semi-annular-channels>.