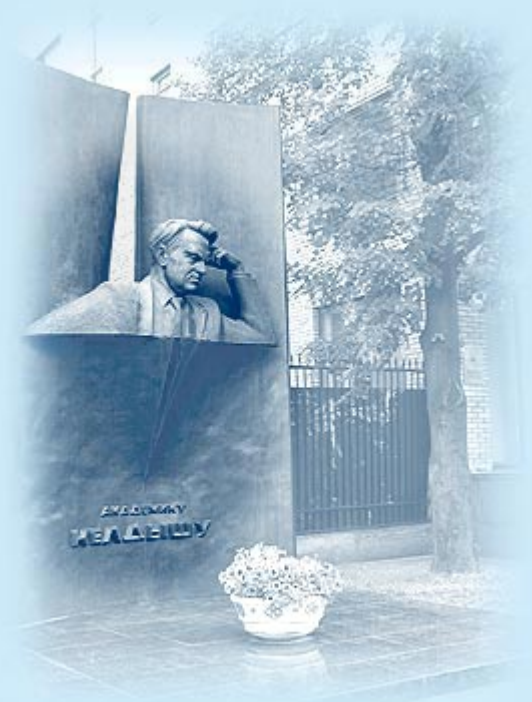




ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 61 за 2024 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

А.В. Москаленко, С.А. Махортых

Бифуркационное пятно на
параметрическом портрете
двумерной версии модели
Алиева—Панфилова

Статья доступна по лицензии
[Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)



Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Москаленко А.В., Махортых С.А. Бифуркационное пятно на параметрическом портрете двумерной версии модели Алиева—Панфилова // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2024. № 61. 44 с.
<https://doi.org/10.20948/prepr-2024-61>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2024-61>

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

А. В. Москаленко, С. А. Махортых

**Бифуркационное пятно
на параметрическом портрете
двумерной версии
модели Алиева—Панфилова**

Москва — 2024

Москаленко А. В., Махортых С. А.

Бифуркационное пятно на параметрическом портрете двумерной версии модели Алиева—Панфилова

Впервые представлен параметрический портрет двумерной версии модели Алиева—Панфилова с указанием на нём положения бифуркационной границы и бифуркационного пятна. Продемонстрировано отличие этой модели от классических моделей автоволновых процессов. Представлены некоторые особые случаи поведения автоволнового вихря, в научной литературе ранее не описанные. Публикация рассчитана в первую очередь на специалистов в областях математической биологии, математической физики биологических объектов и биофизики.

Ключевые слова: математическое моделирование, нелинейная динамика, теория бифуркаций, бифуркационная память, автоволновые процессы

***Moskalenko Andrey Vitalievich,
Makhortykh Sergey Aleksandrovich***

Bifurcation spot on the parametric portrait of the two-dimensional version of the Aliev—Panfilov model

For the first time, a parametric portrait of a two-dimensional version of the Aliev—Panfilov model is presented, indicating the position of the bifurcation boundary and the bifurcation spot on it. The difference between this model and the "classical" models of autowave processes is demonstrated. Some special cases of the behavior of an autowave vortex are presented, which have not been described in the scientific literature before. The publication is intended primarily for specialists in the fields of mathematical biology, mathematical physics of biological objects and biophysics.

Key words: mathematical modeling, nonlinear dynamics, bifurcation theory, bifurcation memory, autowave processes

Перечень сокращений:

БГ	—	бифуркационная граница
БП	—	бифуркационная память
ОДУ	—	обыкновенные дифференциальные уравнения
s.u. и t.u.	—	условные единицы пространства и времени: space units и time units соответственно

Модель [Алиева—Панфилова](#) была предложена в 1996 г. [1]; её относят к концептуальным моделям автоволновых процессов [2, 3] и используют, в частности, для моделирования особенностей волн возбуждения в миокарде при развитии аритмий сердца [3, 4]. В 2007—2009 годах [5, 6] были описаны некоторые в ней обнаруженные автоволновые явления, что прежде не наблюдались в тех моделях автоволновых процессов, которые можно считать классическими. Было высказано мнение [7, 8], что модель [Алиева—Панфилова](#) существенно отличается от классических автоволновых моделей, поскольку малый параметр, в классических моделях являющийся константой, в ней зависит от переменных состояния, что приводит к более выраженным нелинейным свойствам процессов, ею описываемых. Вместе с тем на основании известной нам литературы можно сделать вывод, что, несмотря на довольно широкое использование модели [Алиева—Панфилова](#), а также несмотря на её существенные отличия от моделей классических автоволн, бифуркационная диаграмма для неё опубликована до сих пор не была, хотя имеются отдельные статьи с описанием тех или иных выявленных особенностей автоволн, наблюдаемых в этой модели. Отметим, что бифуркационная диаграмма для двумерной версии модели [ФитцХью—Нагумо](#), другой концептуальной модели автоволн, была опубликована ещё в 1991 году [9]. В целом относительно концептуальных моделей утверждается [3], что «широкое распространение и привлекательность подобных моделей обусловлена тем, что они описывают суть, концепцию явления и, таким образом, применимы не только для описания конкретного объекта, для которого создавались, но и, как правило, для широкого класса похожих явлений». Поэтому построение бифуркационной диаграммы для двумерной версии модели [Алиева—Панфилова](#) представляется нам задачей важной, сохраняющей свою актуальность.

Напомним, что исследование динамических систем сводится в общем случае к четырём этапам: 1) нахождение стационарных состояний системы на её фазовом портрете; 2) выявление точек бифуркации, а также положения бифуркационной границы на её параметрическом портрете; 3) нахождение вариантов переходных процессов; 4) выявление особых случаев, представляющих тот или иной научно-практический интерес.

В ходе исследования, представленного здесь, было выявлено положение бифуркационной границы на параметрическом портрете двумерной версии модели [Алиева—Панфилова](#), а также были обнаружены некоторые особые случаи поведения автоволнового вихря, в научной литературе ранее не описанные. Для исследуемой модели указано также и положение [бифуркационного пятна](#) — области параметрического портрета, в которой наблюдаются феномены [бифуркационной памяти](#). Часть этих результатов была недавно представлена в [8]; здесь мы приводим уточнённый и исправленный вариант бифуркационной диаграммы.

1. О теории автоволн

1.1. Активные среды и автоволновые процессы

Название «**активные среды**» используют в биофизике для таких систем, для которых «характерно наличие распределенных внешних источников энергии, то есть с термодинамической точки зрения это открытые системы, далекие от равновесия», а **автоволнами** традиционно называют «волновые процессы, имеющие устойчивые (“самоподдерживающиеся”) параметры — скорость, амплитуду, форму импульса» [10]. Существует довольно большое количество научной литературы (например, [10—14]) по тематике активных сред и автоволн. Обсуждение значимости автоволновых процессов и в теоретическом, и в практическом аспекте можно найти там же, а также, например, в [15—17]. Поэтому здесь напомним лишь самые важные с математической точки зрения положения теории автоволн.

Начало представлениям о явлениях природы, получивших позднее обозначение «**автоволновые процессы**», было положено работами **Норберта Винера 1940-х годов** [18]. Хотя первые автоволны были продемонстрированы Винером при помощи им предложенной аксиоматической (автоматной) модели, основные теоретические исследования автоволновых процессов всё же проведены с использованием динамических систем. Отметим, что понятие «динамическая система» **А. А. Андронов** отождествлял с математическими моделями, описанными системой дифференциальных уравнений (более детальное изложение см. в [7, 19]). Хотя с тех пор несколько изменились представления о динамических системах, будем в целях этой работы придерживаться представлений, изложенных **А. А. Андроновым**; в частности, будем аккуратно различать такие схожие понятия, как «**точка бифуркации**» (как система дифференциальных уравнений с особым набором параметров) и «**бифуркационная точка**» (как точка параметрического пространства этой же системы); более детально об этом см. в [7, 19].

Известно, что многие динамические системы независимо от того, являются ли они физическими, химическими или биологическими, могут быть описаны в традиционных терминах «**реакция—диффузия**» [11, 14]. На формальном языке математики это означает, что возможным оказывается описать такие системы при помощи систем дифференциальных уравнений, в которых одна группа членов правой части уравнений описывает локальную динамику («реакцию» в общем смысле; термин был заимствован из практики составления динамических систем, описывающих химические реакции в растворах), а второй группой членов описываются процессы пассивной диффузии. Системами уравнений такого типа описываются многие активные среды, включая и системы с автоволновыми процессами (**автоволновые системы**). С позиций математики системы типа **реакция—диффузия** в общем случае являются параболическими системами [12 с. 4, 20 с. 74]. Напомним, что к системам параболического типа принято относить системы дифференциальных

уравнений с частными производными, представленными таким эллиптическим оператором, у которого матрица главных коэффициентов имеет одно собственное значение, равное нулю, и остальные собственные значения одинакового знака. То есть система параболического типа представима в виде

$$Lu + a \times \partial u / \partial t = f(x_1, \dots, x_{1n-1}, t),$$

где L — эллиптический оператор и $a \neq 0$. Оператор Лапласа представляет собой пример линейного эллиптического оператора.

В начале 1990-х годов Артуром Винфри [9] была предпринята попытка систематизировать встречающиеся в литературе варианты математического написания двухкомпонентных систем типа реакция—диффузия. В результате ему удалось выделить четыре формата (пронумерованных им от 0 до 3) написания таких систем в их наиболее обобщённом виде; им также была предложена замена переменных для перехода из одного такого формата в другой. Позже систематизация Винфри была нами дополнена [19 с. 15] пятым форматом (или форматом 4, при обозначении его в соответствии с порядком, введённым Винфри), который является более традиционным для советской научной школы:

$$\begin{aligned} \varepsilon \cdot \partial u / \partial t &= D \Delta u + f(u, v), \\ \partial v / \partial t &= \delta D \Delta v + g(u, v), \end{aligned} \tag{1}$$

где время и пространственные координаты измеряются в условных единицах пространства и времени: space units (s.u.) и time units (t.u.) соответственно; функции $f(u, v)$ и $g(u, v)$ представляют реакционную часть системы, а $D \Delta u$ и $\delta D \Delta v$ представляют диффузионную часть системы (где Δ — оператор Лапласа и D — коэффициент диффузии, выраженный в единицах s.u.²/t.u.). Переменными состояния u и v представлены обобщённые быстрые и медленные процессы соответственно. В таком виде переменная u соответствует обобщённому активатору и переменная v — обобщённому восстановителю вне зависимости от материальной природы системы. Как отмечено в [9], в обычных приложениях активатор может соответствовать электрическому потенциалу, либо же концентрации, либо температуре; и восстановитель (ингибитор) может быть использован для учёта меры открытости ионных каналов клеточных мембран либо некоторой локальной химической концентрации, диффундирующей со скоростью δD . Обычно $\delta = 0$ для задач электрофизиологических (случай «одиночной диффузии»). В случаях, когда $D = 0$, система типа реакция—диффузия превращается в ОДУ и описывает динамику отдельного элемента среды; в таком виде её называют точечной системой. При ненулевой диффузии, то есть при сохранении частных производных по пространству, система называется распределённой. Отношение скорости восстановления к скорости возбуждения задаётся при помощи

параметра ε (как правило, малого: $\varepsilon \ll 1$); этот параметр тесно связан с широко используемым в электрофизиологии показателем скорости распространения волны возбуждения, максимальной скоростью деполяризации в уединенном фронте импульса. Согласно [9, с. 306] этот параметр часто в литературе обозначают обобщённо как **возбудимость**; однако в советских источниках его принято называть **релаксационностью** среды [11, 12].

Некоторые исследователи предлагают записывать двухкомпонентные системы типа **реакция—диффузия** в ещё более общем виде. Так, например, в [10] «общая двухкомпонентная РД-система» предложена в следующем виде:

$$\begin{aligned}\varepsilon \cdot \partial u / \partial t &= D_{11} \Delta u + D_{12} \Delta v + f(u, v), \\ \partial v / \partial t &= D_{21} \Delta u + D_{22} \Delta v + g(u, v),\end{aligned}$$

где $\hat{\mathbf{D}} = \{D_{ij}\}$ — тензор диффузии; остальные математические символы имеют тот же смысл, как указано для (1). Следует отметить, что свойства таких систем типа **реакция—диффузия** в общем случае оказываются иными, чем для систем, описанных как автоволновые.

Существование активных сред, в которых волновые процессы ведут себя существенно иначе, чем это принято для классических автоволн, признаётся теоретически возможным разными авторами. Так, например, в [14] утверждается следующее: «В принципе возможно существование экзотических активных сред, в которых автоволны интерферируют — проходят сквозь друг друга, если, распространяясь, волна не растрчивает всей свободной энергии до её локальной регенерации. При этом волны могут изменить свою скорость, амплитуду и форму». В частности, уже были описаны [21, 22] волновые процессы в активной среде с кросс-диффузией, и в этом случае как раз наблюдаются описанные в процитированном фрагменте особенности. Иными словами, в системах такого более общего вида нарушаются те свойства автоволн, которые в классической литературе по теории автоволн указывались как существенные и неотъемлемые их свойства (например, аннигиляция при столкновении), и поэтому такие более общего вида системы типа **реакция—диффузия** были обозначены термином «кросс-диффузионные системы».

Итак, автоволновые системы следует считать подмножеством систем типа реакция—диффузия, однако с некоторыми специальными требованиями к их правым частям, т. е. к реакционным членам. С другой стороны, системы типа реакция—диффузия и активные среды следует считать, наверное, лишь пересекающимися множествами.

1.2. Модели автоволн Z-типа

Автоволновые процессы, которые были изучены во второй половине 20 века, имеют нуль-изоклины характерного вида, которые Винфри [9] обозначил как Z-образные (ориг.: Z-shaped nullcline), и это означает, что функция $f(u) = 0$ должна выглядеть примерно как буква Z. Было описано и

изучено некоторое количество таких систем. Для удобства дальнейшего изложения именно такие системы будем называть классическими системами автоволновых процессов, или же системами автоволновых процессов Z-типа.

Наиболее известной из систем Z-типа следует признать модель Бонхёффера—ван дер Поля (далее: БВП), которая была в 1961 г. предложена ФитцХью [23] и которую из-за некоторой исторически сложившейся неразберихи принято в научной литературе обозначать как «модель ФитцХью—Нагумо» (далее: ФХН; подробнее об этом можно найти в [19]). Как раз с использованием модели БВП были получены некоторые наиболее общие сведения об автоволновом поведении миокарда. Модель БВП из представления, предложенного в [23], запишем в формате 0, по Винфри [9] (но до совершённой Винфри замены переменных), поскольку в таком виде её удобнее сравнивать с моделью Алиева—Панфилова, обсуждаемой ниже:

$$\begin{aligned} \partial u / \partial t &= D \Delta u + f(u, v), \\ \partial v / \partial t &= \delta D \Delta v + \varepsilon \cdot g(u, v), \\ f(u, v) &= u - u^3/3 + v, \\ g(u, v) &= -u + a - bv, \\ \delta &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Модель Бонхёффера—ван дер Поля [23] можно считать концептуальной моделью классических автоволновых процессов точно так же, как модель ван дер Поля [24] считается [25] концептуальной моделью предельного цикла. Более детальное обсуждение можно найти в недавно опубликованных нами обзорах [7, 19]. Для удобства сравнения точечных систем, соответствующих этим трём моделям, приведём их запись в нормальной форме и во французском варианте записи, (см. табл. 1), обозначив переменные в традиционном для биофизики виде:

Таблица 1

форма модель	нормальная	франц. вариант записи
ван дер Поля	$\dot{u} = c(v + u - u^3/3),$ $\dot{v} = -u/c$ [24 с. 979]	$\varepsilon \ddot{u} + (u^2 - 1)\dot{u} + u = 0$ [19 с. 5]
БВП	$\dot{u} = c(v + u - u^3/3) + z,$ $\dot{v} = -(u - a + bv)/c$ [23 с. 447]	$\varepsilon \ddot{u} + (u^2 - 1)\dot{u} + u + bv - a = 0$ [19 с. 12]
ФХН	$\dot{u} = c(-v + u - u^3/3) + z,$ $\dot{v} = (u + a - bv)/c$ [9 с. 305]	$\varepsilon \ddot{u} + (u^2 - 1)\dot{u} + u - bv + a = 0$

Смысл переменных u и v в табл. 1 такой же, как описан для (1); a , b , c и ε являются параметрами соответствующей системы. При рассмотрении распределённых систем к этим уравнениям, описывающим реакционную часть модели, добавляют диффузионный член, как это отражено в (2).

Разными авторами было предложено большое количество детализированных (то есть с большим количеством переменных состояния, соответствующих измеряемым в реальных экспериментах физическим величинам) автоволновых математических моделей, которые, тем не менее, после стандартных упрощений оказывается возможным привести к модели ФХН при помощи стандартных преобразований, как это было продемонстрировано, например, в [26] ещё в 1973 г.

Известно [10, 11, 13, 15], что для точечных (0D) автоволновых систем существует три варианта стационарных решений (три автоволновых режима): 1) режим ожидания (режим возбудимости), 2) автоколебательный режим и 3) режим триггера (бистабильный режим). Для их одномерного (1D) варианта особо выделяют [11] режим «бег в кольце». Для 2D-вариантов классических автоволновых систем характерны следующие решения (пространственные структуры): плоская волна, спиральная волна, автоволновой ревербератор (2D вихрь со свободным концом) и диссипативные структуры. Для поведения автоволн в трёхмерной среде (3D) известны более сложные стационарные пространственные режимы: тор, свиток и т. д.

Обратим внимание читателя на существенное отличие между спиральной волной и автоволновым ревербератором [27]: первая формируется возле невозбуждаемого участка активной среды по механизму re-entry и затем равномерно вращается вокруг этого препятствия, тогда как автоволновой ревербератор (leading circle) формируется путём спонтанной самоорганизации в активной среде, однородной и изотропной. Автоволновой ревербератор рассматривают как эволюцию плоской волны со свободным концом; причём этот вихрь после своего формирования ведёт себя как квази-твёрдое тело, и поэтому его движение принято отслеживать по траектории движения его свободного конца (кончик ревербератора). Принято выделять [9, 10, 13] следующие варианты стационарного поведения автоволнового ревербератора в однородной изотропной активной среде: круговое вращение, меандр, гипермеандр. Доказанным [28] можно считать существование двух вариантов стационарного поведения автоволнового ревербератора: 1) равномерное круговое вращение ревербератора вокруг неподвижной точки и 2) равномерный круговой дрейф ревербератора, в соответствующей литературе обозначаемый как автоволновой меандр. Различают два вида последнего: эпи-меандр и гипомеандр — в зависимости от того, похожа ли траектория кончика вихря на эпитрохоиду или же на гипотрохоиду. Следует указать, что автоволновой меандр аппроксимировать той или иной трохоидой оказывается возможным редко, поскольку трохоиды отображают движение одной окружности по поверхности другой без проскальзывания, а при автоволновом меандре это

условие оказывается вполне очевидно нарушенным. О гипермеандре были высказаны гипотезы [9], что он может оказаться проявлением либо многопериодного, либо же хаотического движения ревербератора.

Несколько позже [5, 6] был обнаружен **автоволновой серпантин**, т. е. спонтанный переход автоволнового вихря в однородной изотропной среде из режима меандра в режим кругового вращения. После обнаружения такого необычного поведения естественным образом возник вопрос: не всякий ли раз происходит такая же остановка дрейфа вихря при автоволновом меандре, если наблюдение проводить достаточно длительное время?

Типичные примеры равномерного кругового вращения ревербератора, его эпи-меандра и серпантина, полученные нами в модели Алиева—Панфилова, представлены на рис. 1 (использованы следующие параметры модели: $a = 0,18036$ для меандра; $a = 0,18035$ для серпантина и $a = 0,17700$ для кругового движения; везде $\mu_2 = 0,30000$; значения остальных параметров модели указаны в разделе 2).

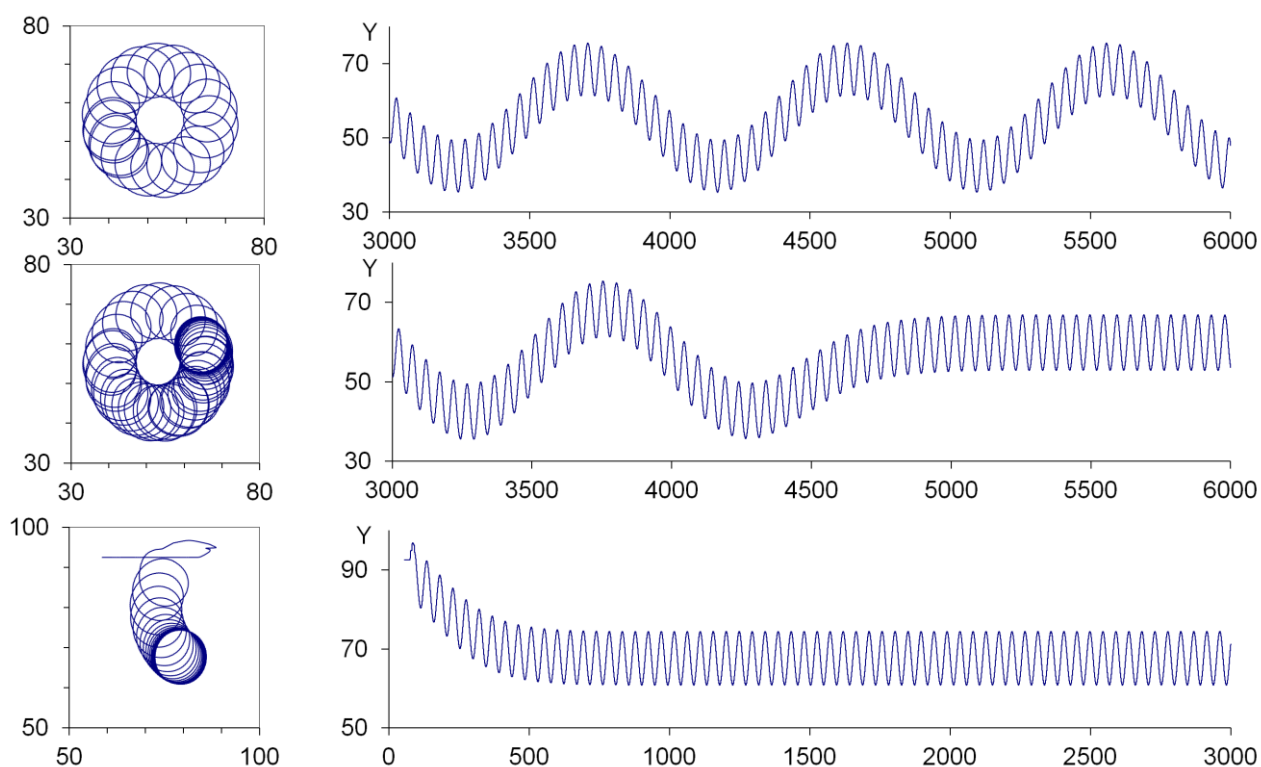


Рис. 1. Виды классического стационарного движения автоволнового ревербератора в сравнении с его серпантинном. На верхней группе из двух графиков показан меандр; на средней — серпантин; на нижней — круговой стационар. В каждой группе изображены: слева — траектория кончика ревербератора в пространственных координатах (x, y) ; справа — график пространственной координаты $y(t)$, время выражено в условных единицах модели, t.u. Траектория для меандра отображена лишь с 3000 по 4000 t.u. для удобства восприятия. Дополнительные пояснения даны в тексте.

Для меандра и серпантина можно заметить сходство траекторий кончика и сходство графика его координаты на начальных отрезках времени эволюции ревербератора: визуально различить меандр и серпантин оказывается непросто в случаях длительного переходного процесса при серпантине. Так, в представленных на рисунке 1 случаях траектории кончика и графики координаты кончика выглядят для них одинаковыми на интервале времени от 0 до 4000 т.е. (что соответствует примерно четырём полным оборотам меандра).

Ранее было показано [5, 6], что надёжным способом различения меандра и серпантина следует считать исследование динамики модуля скорости дрейфа ревербератора. Удалось доказать [5, 6] при помощи методов численного анализа, что ранее известный автоволновой меандр и вновь обнаруженный автоволновой серпантин — это два различных автоволновых режима, а именно: 1) при **меандре** в результате начального переходного процесса модуль скорости дрейфа быстро возрастает от нуля и выходит на некоторое стационарное значение; 2) при **серпантине** после аналогичного начального переходного процесса наблюдается затем двухфазовое спонтанное уменьшение модуля скорости дрейфа: медленное и едва заметное на 1-й, медленной, фазе торможения дрейфа, — и затем быстрое снижение до нуля на 2-й фазе торможения дрейфа, т. е., по сути, наблюдаются три различных переходных процесса.

Однако в данной работе исследование динамики модуля скорости дрейфа ревербератора не проводилось, поскольку ранее предложенный для случаев эпи-меандра алгоритм [5, 6] оказался непригодным для исследования гипо-меандра; разработка нового алгоритма в рамках этой работы не проводилась в связи с тем, что основные выводы удалось сделать и при визуально-ручном способе исследования движения ревербератора (поскольку на основе ранее полученных результатов уже известно об особенностях поведения ревербератора вблизи бифуркационной границы). Более аккуратное исследование динамики модуля скорости дрейфа ревербератора мы планируем провести в будущем, поскольку ожидаем обнаружить неизвестные прежде особенности такой динамики при новых автоволновых режимах, представленных ниже в этой работе.

Считается, что автоволновой серпантин следует рассматривать в качестве проявления **бифуркационной памяти** (далее: БП); более детально этот вопрос был рассмотрен в [7]. Как проявление БП, автоволновой серпантин представляет собой переходный процесс, приводящий 2D-версию автоволновой системы от некоторых начальных условий к стационарному состоянию в виде равномерного кругового движения автоволнового ревербератора.

Как уже ранее было отмечено [7 с. 34], автоволновой серпантин был обнаружен в модели **Алиева—Панфилова**; однако в модели **ФХН** обнаружить такие феномены нам не удалось. Считаем, что такие варианты автоволновых процессов, ненаблюдаемых в классических автоволновых системах, следует обозначать как автоволны неклассические.

1.3. Модели неклассических автоволн

Модель Алиева—Панфилова (далее: АП) в 1996 г. [1] была предложена с целью правдоподобного отражения реституции сердечной ткани, — свойства, которое показывает, как длительность потенциала действия зависит от длительности цикла [3]; её авторами модель записана в следующем виде:

$$\begin{aligned} \partial u / \partial t &= \Delta u - ku(u - a)(u - 1) - uv, \\ \partial v / \partial t &= \varepsilon(u, v)(-u - ku(u - a - 1)), \\ \varepsilon(u, v) &= \varepsilon_0 + \frac{\mu_1 v}{u + \mu_2}, \end{aligned} \quad (3)$$

где u — безразмерная функция, аналогичная трансмембранному потенциалу в биологической возбудимой ткани, и v — безразмерная функция, аналогичная медленному току восстановления. Как указывают авторы модели, она имеет ряд существенных отличий от модели ФитцХью—Нагумо, что позволяет с её помощью более точно описывать свойства сердечной ткани. В таком виде она соответствует формату 0 [9 с. 304, 7 с. 14]. Существенным её отличием от классических автоволновых моделей является зависимость малого параметра, ε , от самих переменных состояния.

При сравнении (3) и (2) оказывается очевидным, что малый параметр ε , в классических моделях автоволн всегда являющийся величиной постоянной, в модели АП сам стал одной из переменных состояния системы. Хотя формально зависимость ε от двух других переменных состояния системы записана в виде готового решения в алгебраической форме, нетрудно её переписать так, что она окажется третьим дифференциальным уравнением системы Алиева—Панфилова; иными словами, модель АП несводима к двум уравнениям. Вероятно, именно наличие третьей переменной состояния и придаёт этой концептуальной модели некоторые новые свойства, которых не удаётся наблюдать в моделях классических автоволн.

С другой стороны, если раскрыть скобки во втором уравнении, то получим представление модели АП, более наглядное для сравнения с (2):

$$\begin{aligned} \partial u / \partial t &= D\Delta u + f(u, v), \\ \partial v / \partial t &= \delta D\Delta u + \varepsilon \cdot g(u, v) + h(u, v), \\ f(u, v) &= -ku(u - a)(u - 1) - uv, \\ g(u, v) &= -u - ku(u - a - 1), \\ h(u, v) &= \frac{\mu_1 v}{u + \mu_2}(-u - ku(u - a - 1)), \\ \delta &= 0 \quad D = 1. \end{aligned} \quad (4)$$

В представлении (4) модель АП тоже выглядит несводимой к какому-либо из перечисленных Винфри форматов, упомянутых выше. Существенно отличаются и фазовые портреты систем (2) и (3): т. о. модель АП характеризуется нуль-изоклинами, существенно иными, чем у автоволновых систем Z-типа, и в вычислительных экспериментах демонстрирует поведение, существенно отличающее её от автоволновых систем Z-типа.

Схематическое сравнение фазовых портретов моделей ФХН и АП было приведено в [3]. Отметим, что, хотя в указанной работе схематически изображён предельный цикл как динамическое состояние модели АП, его существование следует поставить под сомнение, ибо в этой модели, похоже, при всех вариантах значений её параметров остаётся одна устойчивая точка в нуле — стационар, к которому притягиваются все решения. При таких особенностях фазового портрета автоколебательный режим в модели АП невозможен. По тем же причинам невозможно в ней и существование триггерного режима, свойственного для автоволновых систем Z-типа.

Для 2D-версии модели АП наблюдаются также следующие несоответствия фактическим сведениям о свойствах миокарда, известным из физиологических экспериментов и уже воспроизведённым в других автоволновых моделях. Известно, что для нормального состояния миокарда характерна линейная форма ядра двумерного автоволнового вихря (ядро вихря — это невозбудимая область среды вблизи кончика вихря; для ядра линейной форма ширина ядра много меньше его длины), и такая форма была успешно воспроизведена в вычислительных экспериментах с использованием модели ФХН и модели Билера—Ройтера [29, 30]; однако в модели АП воспроизвести линейную форму ядра не удалось и, вероятно, она просто невозможна в этой модели. Хотя авторы модели АП утверждают [1], что указанные ими параметры модели воспроизводят поведения миокарда в его нормальном состоянии, ядро вихря получается при таких параметрах круглой формы, а не линейной. Не удалось нам в модели АП наблюдать и поведения ревербератора, в классических работах по автоволновым процессам выделяемого как гипермеандр.

Напомним, что несводимые к двум уравнениям системы были описаны также и для процессов свёртывания крови — модель Зарницыной—Морозовой—Атауллаханова (далее: ЗМА) [7 с. 34, 31, 32], которая после стандартного упрощения детальной модели тех же авторов сводится к трём дифференциальным уравнениям.

Любопытно также отметить и то обстоятельство, что именно для таких неклассических автоволновых систем в их распределённом варианте и были описаны явления бифуркационной памяти [5, 6, 32], в то время как для распределённых в пространстве версий классических автоволновых систем такие бифуркационные феномены не обнаружены (однако для их точечных версий можно найти достаточно большое количество публикаций с демонстрацией феноменов задержки потери устойчивости и бифуркационной памяти, см. подробнее в [7, 33]).

1.4. К дискуссии о дрейфе автоволны

В отношении автоволнового ревербератора считается общепринятым утверждение, что одним из его фундаментальных стационарных решений является равномерное его вращение вокруг некоторой неподвижной точки плоскости (двумерной активной среды). Траектория кончика ревербератора в этом случае укладывается на окружность (радиус которой в общем случае зависит как от выбранных параметров модели, так и от выбранного способа обнаружения кончика ревербератора).

Из сказанного представляется естественным принимать, что при таком варианте движения ревербератора какой-либо его дрейф отсутствует; тогда как любое достаточно медленное движение указанной «неподвижной» точки плоскости следует признавать дрейфом ревербератора. С целью построения процедуры декомпозиции движения ревербератора находим полезным также и представление, что базовое равномерное круговое движение вокруг такого «неподвижного центра вращения» (т. е. вокруг некоторой неподвижной точки плоскости) сохраняется при любом движении ревербератора, однако в этом случае его «неподвижный» центр вращения является неподвижным лишь мгновенно — поэтому он был обозначен ранее [5] как **мгновенный центр** вращения ревербератора в момент времени, соответствующий локальному максимуму кривизны траектории кончика ревербератора.

При автоволновом меандре этот мгновенный центр в свою очередь медленно движется (дрейфует) по окружности вокруг некоторой иной неподвижной точки той же плоскости, и эта точка была обозначена ранее [5] как **неподвижный центр** дрейфа по окружности.

Для краткости эти два хорошо известных варианта движения ревербератора в однородной изотропной среде обозначим как **круговой стационар** и **стационарный круговой дрейф**; причём круговой дрейф совпадает с общепринятым понятием «автоволновой меандр» лишь в случае постоянной величины модуля скорости дрейфа (поэтому он стационарный).

В случае дрейфа (в том числе и в случае меандра) сегмент траектории движения кончика ревербератора за один полный оборот принято обозначать как «**петля**» (или «лепесток», что является обычным в англоязычной литературе: petal), и такую петлю траектории кончика ревербератора следует рассматривать как результат деформации той правильной формы окружности, какая наблюдалась бы при полном отсутствии дрейфа ревербератора. Как уже упоминалось, форма и размер такой петли зависят, в некоторых пределах, от выбранного исследователем способа обнаружения кончика ревербератора.

Следуя традиции, установленной ранее [5], все виды движения ревербератора в однородной изотропной среде мы обозначаем как **спонтанный дрейф**. Таким образом, ранее известные автоволновой меандр и автоволновой серпантин, а также новые, представленные ниже, варианты движения ревербератора, наблюдаемые до достижения им стационарного состояния, считаем его спонтанным дрейфом.

Отметим, что не все исследователи готовы согласиться с использованием понятия «**спонтанный дрейф**». Например, согласно научной позиции известного специалиста по исследованию дрейфа автоволновых вихрей В. Н. Бикташева (см. [34] и список литературы там), дрейф происходит лишь под воздействием внешних сил, тогда как любое иное смещение **мгновенного центра** вращения ревербератора следует рассматривать не как его дрейф, а как «спонтанное изменение вращения спиральной волны вследствие её внутренних неустойчивостей» (перевод с англ. наш — Авторы).

Соглашаясь с утверждением, что во многих случаях спонтанный дрейф является отражением нестационарного (переходного) процесса (т. е. «внутренних неустойчивостей» [34]), мы всё же склоняемся дрейфом называть любую самую низкочастотную компоненту выбранной декомпозиции движения. Соответственно, следует отметить, что траектории дрейфа при выборе разных способов декомпозиции движения могут заметно различаться; в самом общем случае дрейфом вообще можно признавать любое отклонение от ожидаемой наблюдателем траектории движения наблюдаемого объекта. К тому же приходится отметить, что то, какие силы в исследовании поведения автоволнового ревербератора считать «внешними» и какие «внутренними», является скорее отражением лингвистических предпочтений того или иного исследователя автоволн. Потому как при некотором рассмотрении допустимо считать, что движущийся «спонтанно» в однородной изотропной активной среде ревербератор сам своим движением порождает некие «внешние» по отношению к нему силы, вынуждающие **мгновенный центр** вращения ревербератора смещаться.

Итак, в целях этого исследования дрейф будем считать спонтанным, если он наблюдается в стандартных условиях однородной изотропной активной среды, то есть когда действие «внешних сил» неочевидно.

В более общем случае, включая и некоторые из новых наблюдений, описанных ниже, приходится сталкиваться с тем, что центр дрейфа ревербератора ведёт себя иначе, чем в случаях автоволнового меандра или автоволнового серпантина, — иными словами, он перестаёт быть неподвижным. Это обстоятельство побудило нас рассматривать более общее понятие: **центр дрейфа** — это точка плоскости (активной среды), относительно которой осуществляется операция поворота петли траектории кончика ревербератора в смежных петлях. Отсюда **радиус дрейфа** — это расстояние между **центром дрейфа** и **мгновенным центром** петли. Поскольку в случае автоволнового меандра расстояние между мгновенным центром и неподвижным центром дрейфа следует считать постоянным, то его удобно обозначать как **радиус меандра**. Перечисленные здесь признаки и измеряемые величины были использованы нами для поиска зависимостей поведения ревербератора от параметров автоволновой модели. Конкретные способы оценки положения мгновенного центра петли, её ориентации на плоскости и положения центра дрейфа описаны в разделе 2.

2. Материалы и методы

Дизайн эксперимента был использован классический, в том виде, в каком он предложен Артуром Винфри в [9]: придерживаясь одних и тех же фиксированных экспериментальных процедур во многих почти повторяющихся вычислениях, варьировать два независимых параметра модели, связанных с возбудимостью активной среды, с целью изучить разнообразие поведения двумерных автоволновых вихрей и выяснить, могут ли наблюдаемые в вычислительном эксперименте явления быть охвачены единой дескриптивной схемой, которая могла бы считаться качественно сходной для различных активных сред.

Для проведения вычислительных экспериментов была использована стандартная утилита, разработанная в Институте математических проблем биологии РАН Ю. Е. Елькиным [35], в которой для расчётов используется явная схема Эйлера. Протокол экспериментов был использован такой же, как ранее в [5, 6]. Вычислительные эксперименты проводились с использованием системы (3) в двумерных средах размерами от 64×64 до 320×320 с.у., с граничными условиями Неймана. Размер среды подбирается в экспериментах таким образом, чтобы ядро ревербератора оставалось достаточно удалённым от граничных условий для исключения их влияния на поведение ревербератора; достаточным удалением принято считать расстояние, приблизительно равное диаметру самого этого ядра. Шаги интегрирования в основном использовались следующие: по временной переменной $\Delta t = 0,01$ и по пространственной переменной $\Delta x = 0,50$. Выборочно осуществлялась проверка результатов эксперимента путём проведения повторных расчётов с шагами, вдвое меньшими.

Плоская волна со свободным концом («плоская полуволна») выбиралась в качестве начальных условий. Для её размещения в желательном месте модельной среды использовалась обычная процедура инициации возбуждения вдоль участка невозбудимой стенки модельной среды (мы всегда брали стенку слева, т. е. с пространственной координатой $x = 0$) от верхней границы среды ($y = 0$) и до временной невозбудимой перегородки. Размер невозбудимой перегородки по координате x , т. е. «по длине», совпадал с размером среды; по координате y , т. е. «по ширине» равен 1 с.у. Время существования перегородки и её положение в модельной среде подбирались эвристически таким образом, чтобы ядро ревербератора оставалось всегда на достаточно удалённом расстоянии от границ среды во избежание хорошо известных эффектов взаимодействия ядра ревербератора с невозбудимыми препятствиями и прочими неоднородностями активной среды. Положение кончика ревербератора определялось как точка пересечения изолиний $u = 0,89$ $v = 0,50$; при некоторых «экстремальных» значениях параметров модели приходилось для обнаружения кончика подбирать несколько иные значения указанных переменных.

На рисунке 2 показан пример работы программы (утилиты) Ю. Е. Елькина при формировании плоской волны со свободным концом с целью использования её в качестве начальных условий формирования двумерного автоволнового вихря (ревербератора).

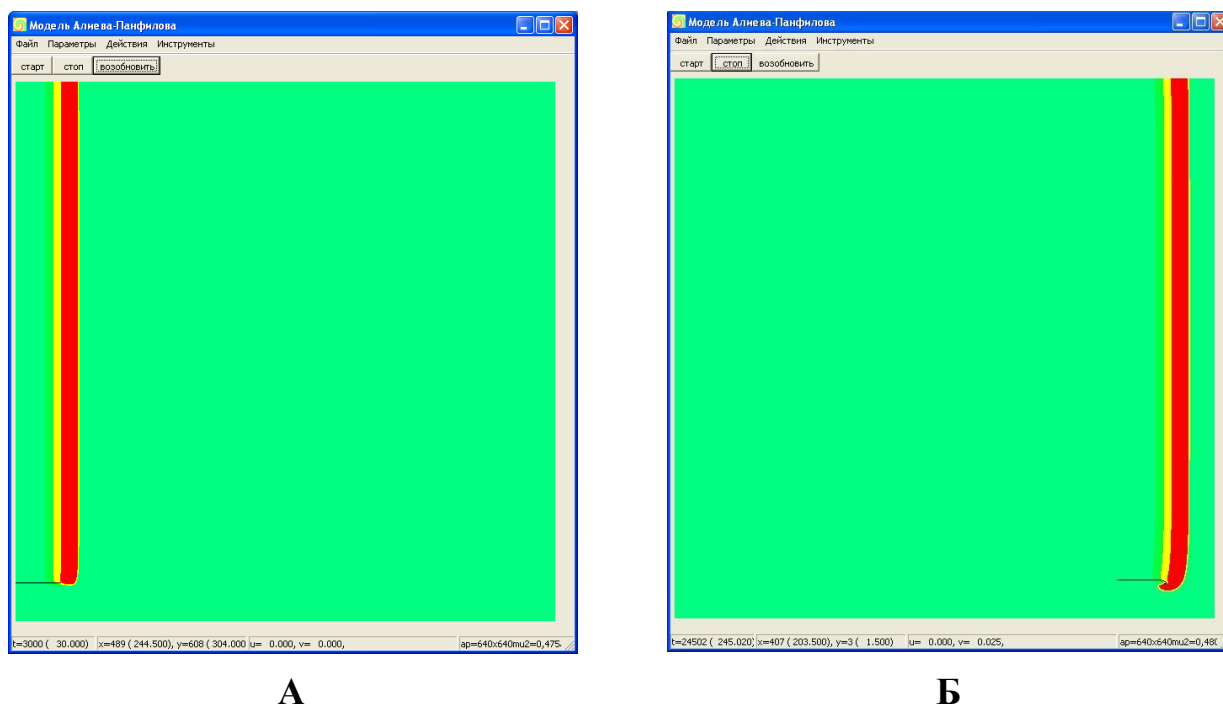


Рис. 2. Формирование плоской волны со свободным концом в программе Ю. Е. Елькина. Здесь и ниже: зелёным цветом отмечены участки невозбуждённой среды; красным — передний фронт автоволны; жёлтым — задний её фронт; чёрным цветом обозначена часть траектории движения кончика ревербератора. **А.** Кадр экрана программы в момент вычислительного времени $t = 30$ t.u.: плоская автоволна со свободным концом, инициализированная у левой границы модельной среды, равномерно движется (в сторону правой границы модельной среды) вдоль временной невозбудимой перегородки, установленной в нижней части среды (линия траектории кончика ревербератора соответствует положению этой перегородки). **Б.** Кадр экрана программы в момент вычислительного времени $t = 245$ t.u.: начало формирования двумерного автоволнового вихря после прекращения существования временной невозбудимой перегородки.

Отметим, что использованная нами утилита Ю. Е. Елькина позволяет проводить вычислительные эксперименты с использованием нескольких автоволновых моделей: в настоящее время в ней кроме моделей **ФХН** и **АП** реализованы модель Ходжкина-Хаксли [36], модель Зимана [37], модифицированная модель Бикташева [38], а также предложенная в 1994 г. [39] модель окисления угарного газа, CO, на платине, Pt (выступающей в качестве катализатора).

После двух оборотов вблизи места исчезнувшей временной перегородки автоволновой вихрь развивается в соответствии с присущей ему динамикой; пример показан на рисунке 3, который демонстрирует начальные этапы эволюции автоволнового ревербератора из плоской волны со свободным концом. На панели **Б** этого рисунка можно наблюдать прямой дрейф в начальной фазе эволюции ревербератора; затем наблюдаются признаки спонтанного торможения с одновременным искажением характера дрейфа по типу гипомеандра: такой вариант эволюции ревербератора будет более подробно представлен ниже как возможное проявление двойного эффекта БП.

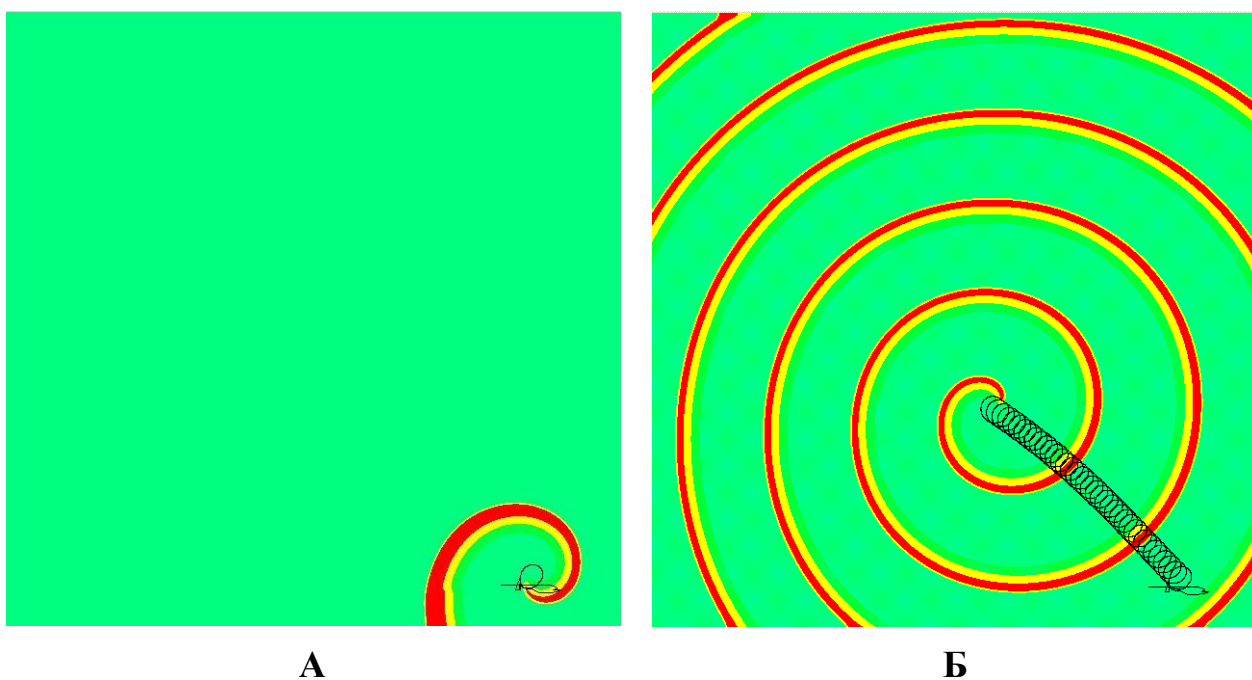


Рис. 3. Пример эволюции автоволнового ревербератора при следующих значениях варьируемых в данном исследовании параметров модели [Алиева—Панфилова](#): $a = 0,1754$, $\mu_2 = 0,4800$. Размер модельной среды 320×320 с.у.

А. Сформировавшийся ревербератор после его двух первых оборотов.

Б. Последующая эволюция ревербератора.

В ходе выполнения этой работы нами были проведены исследования только при значениях параметра $0,1500 \leq a \leq 0,1900$, то есть при более высоком значении, чем авторы модели указали для нормального состояния модельного миокарда. В некоторых случаях параметр a изменялся до значений $0,0500$ снизу и до $0,2700$ сверху. Напомним, что параметр a следует считать аналогичным физиологической величине, называемой «порог возбуждения»: чем выше порог возбуждения (и, соответственно, чем ниже возбудимость) активной среды, тем большее возбуждающее воздействие необходимо приложить к среде для того, чтобы перевести её из состояния покоя в состояние возбуждения (с последующим формированием и проведением автоволны, если источник возбуждения был локальным).

Параметр μ_2 изменялся в пределах от 0,050 до 1,000; в некоторых случаях поиск ответов на возникающие в ходе проведения исследования новые вопросы заставлял нас изменять значение μ_2 дополнительно от 1,000 до 2,100, и даже до 10,000. Значения остальных параметров системы (3) были установлены такими же, как в [1]: $D = 1$; $k = 8,0$; $\mu_1 = 0,2$; — за исключением ε_0 , значение которого было установлено равным 0,010, т. е. таким же, как и в [5, 6], вместо 0,002, как в [1], — что сделано с целью сокращения времени вычислений.

Относительно вычислительных методов обнаружения эффектов БП трудно не согласиться с авторами [40], утверждающими, что за почти полувековую историю изучения этой динамической особенности предложено весьма мало методов, позволяющих однозначно и с достаточной точностью выявить эффект бифуркационной памяти. С целью однозначного выявления области фазового пятна в [40] предложен метод годографа фазовой скорости, однако отметим, что его применимость для исследования распределённых динамических систем ещё предстоит проверять.

В представленном здесь исследовании задача локализации фазового пятна не ставилась, поскольку для распределённых динамических систем предстоит ещё осмысливать саму постановку такой задачи. Обработка полученных в этой работе экспериментальных кривых велась с целью выявления области бифуркационного пятна и производилась следующим образом.

Поскольку в случае автоволнового меандра центр дрейфа остаётся неподвижным и модуль скорости дрейфа остаётся постоянным, то автоволновым меандром не являются случаи, когда наблюдаются смещения центра дрейфа или же наблюдается дополнительно осуществление операции сжатия-растяжения петель (т. е. нарушается условие равномерности дрейфа ревербератора), хотя они и могут визуально казаться весьма схожими с меандром. Эти признаки, основанные на слежении за перемещениями **мгновенного центра**, положены нами в основу процедуры различения меандра и иных вариантов движения ревербератора на ранних фазах наблюдения.

Однако следует помнить, что техническое воплощение методов обнаружения мгновенного центра может дать не вполне однозначные результаты. Естественным представляется предположение, что мгновенный центр в любом случае должен находиться внутри петли, причём где-то вблизи центров вписанной в петлю и описанной вокруг петли окружностей, в ином же случае оценку положения мгновенного центра следует признавать ошибочной; но и в обозначенных пределах точности оценка положения мгновенного центра оказывается довольно произвольной. Ещё одной известной технической проблемой является неоднозначность измерения положения самого кончика вихря. Вместе с тем единообразными остаются не только общие качественные суждения о характере движения автоволнового вихря, но и количественные оценки этого движения, если только погрешность измерений ограничивается лишь указанными источниками погрешности измерения.

Использованная в 2007 году [5, 6] декомпозиция движения автоволнового ревербератора была основана на предположении, что его движение возможно с достаточной точностью представить в виде комбинации двух движений: 1) вращение его вокруг мгновенного центра (который условно считаем совпадающим с «центром» петли) и 2) вращение самого этого мгновенного центра петли строго по окружности. На основании этого предположения и был разработан алгоритм декомпозиции. Техническое воплощение методов обнаружения мгновенного центра в этом случае было основано на наблюдении, что в качестве границы между соседними петлями траектории кончика вихря удобно использовать точки траектории кончика вихря, максимально удалённые от неподвижного центра дрейфа.

Однако в новом исследовании модели АП мы обнаружили такие варианты динамики ревербератора, когда гипотеза 2007 года явно оказывалась неприемлемой. Так, нам удалось обнаружить новый вариант спонтанного дрейфа ревербератора с торможением дрейфа — автоволновой схлоп (представленный ниже в этой публикации). При ранее описанном автоволновом серпантине радиус дрейфа остаётся постоянным, что и может при известных обстоятельствах вводить наблюдателя в заблуждение относительно того, считать ли движение ревербератора меандром или серпантинном. Но при автоволновом схлопе наблюдается противоположное явление: радиус дрейфа монотонно уменьшается; причём при выборе системы в некоторых подобластях пространства параметров можно наблюдать, что центр дрейфа остаётся практически неподвижным, — что может производить на наблюдателя эстетическое воздействие. К тому же автоволновой схлоп наблюдается в области движений, подобных гипо-меандру, в отличие от серпантина, который нам удалось наблюдать только в области движений, подобных эпи-меандру. При гипо-меандре те участки траектории, которые ранее выбраны в качестве содержащих границу между соседними петлями, оказываются минимально удалёнными от неподвижного центра дрейфа. Это несоответствие можно было бы легко устранить простой перенастройкой прежнего алгоритма. Но в ходе вычислительных экспериментов были обнаружены также траектории промежуточных вариантов — например, с перемещением центра дрейфа. Негодным прежний алгоритм оказался и для вариантов дрейфа по прямой, т. е. для случаев, когда центр дрейфа оказывается расположенным на бесконечном расстоянии от любого из мгновенных центров петли. Однако осуществление декомпозиции таких траекторий необходимо для различения двух решений: кругового стационара и стационарного кругового дрейфа.

По причине описанных выше сложностей мы отказались в этом исследовании от процедуры оценки динамики модуля скорости дрейфа автоволнового вихря и ограничились оценкой длительности переходного процесса, T_s , наблюдаемого при стандартных начальных условиях для каждой динамической системы, соответствующей выбранным точкам пространства параметров. Выбор таких точек был обусловлен сменой рабочих гипотез,

возникавших в процессе проведения исследования. Дополнительно в ходе обработки экспериментальных кривых проводилась оценка таких характеристик, как **радиус меандра**, R_m , (а также **радиус дрейфа** в случаях серпантина, когда радиус дрейфа допустимо считать постоянным) и период одного оборота ревербератора, T_r .

Построение всех этих оценок неизбежно основывается на процедуре оценки положения **мгновенного центра**, выбор которой, хотя и влияет на количественные значения оценок, остаётся, согласно нашим рабочим наблюдениям, в пределах погрешности измерений, допустимой в рамках принятой постановкой задачи. Рисунок 4 иллюстрирует неоднозначность оценок положения мгновенного центра петли при использовании трёх разных техник получения такой оценки.

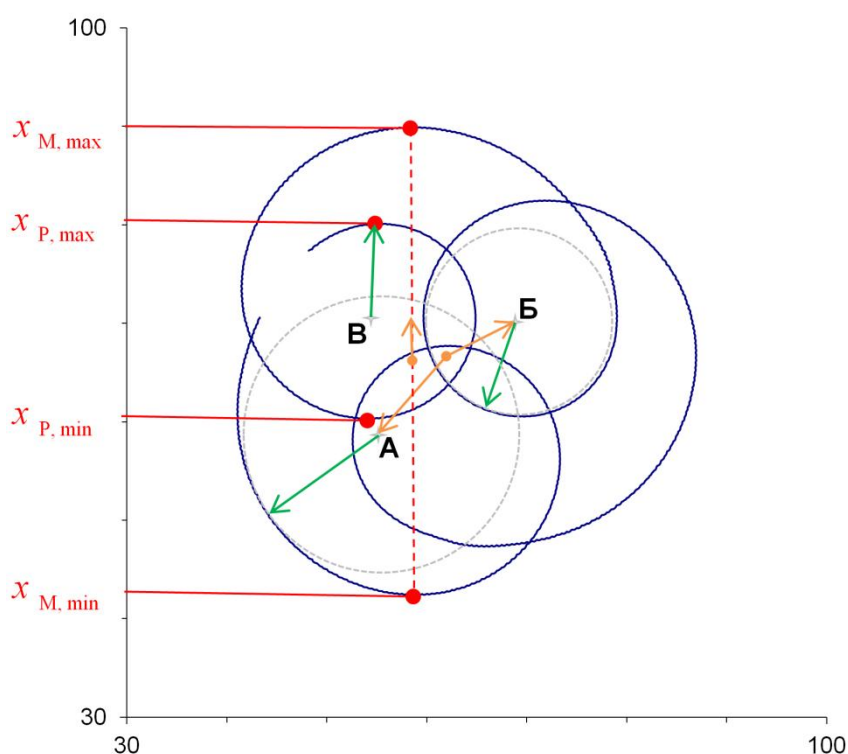


Рис. 4. Траектория эпи-меандра малого радиуса (синяя линия) с примерами разных техник оценки положения мгновенного центра и зависящих от него величин радиуса петли (зелёные стрелки) R_c и радиуса меандра (оранжевые стрелки) R_m , основанных на численных методах анализа траектории кончика автоволнового вихря: **А.** По участку траектории около точки минимальной кривизны. **Б.** По участку траектории около точки максимальной кривизны. **В.** По одной пространственной координате (красные вспомогательные линии).

Серые пунктирные линии изображают окружности, соприкасающиеся с траекторией в точках максимальной и минимальной кривизны траектории соответственно. Серые четырёхконечные звёздочки указывают положения центра петли, оцененные при помощи каждого из указанных трёх методов.

Размещённая на рисунке 4 траектория кончика ревербератора записана при следующих значениях изменяемых в этом исследовании параметров модели АП: $a = 0,2140$ при $\mu_2 = 0,2000$ — и соответствует ситуации, когда на каждом обороте меандра пѐтли траектории практически пространственно совпадают с петлями, относящимися к другим оборотам меандра, т.е. обороты меандра можно, с допустимой погрешностью, признавать пространственно идентичными и по форме и по положению.

Аккуратное сравнение техник оценки положения мгновенного центра петли и зависящих от него величин: радиуса петли, радиуса меандра, модуля скорости смещения мгновенного центра и др. — оставлено за кругом задач, решаемых в данном исследовании. Простая визуально-ручная техника оценки положения мгновенного центра по одной пространственной координате (рис. 4.В) показала себя приемлемой для целей построения бифуркационной диаграммы двумерной версии модели АП, проводимой в условиях неопределѐнности выбора методов, позволяющих однозначно и с достаточной точностью выявить эффект бифуркационной памяти. На рисунке 5 использованная в этом исследовании визуально-ручная техника проиллюстрирована более детально: по графику одной из координат измеряем значение координаты четырёх точек: максимума $x_{M,max}$ и минимума $x_{M,min}$, принимаемых за точки, принадлежащие окружности, которая описана вокруг траектории и центр которой совпадает с центром дрейфа; а также максимума $x_{P,max}$ и минимума $x_{P,min}$ той петли, которая по времени следует непосредственно за $x_{M,max}$.

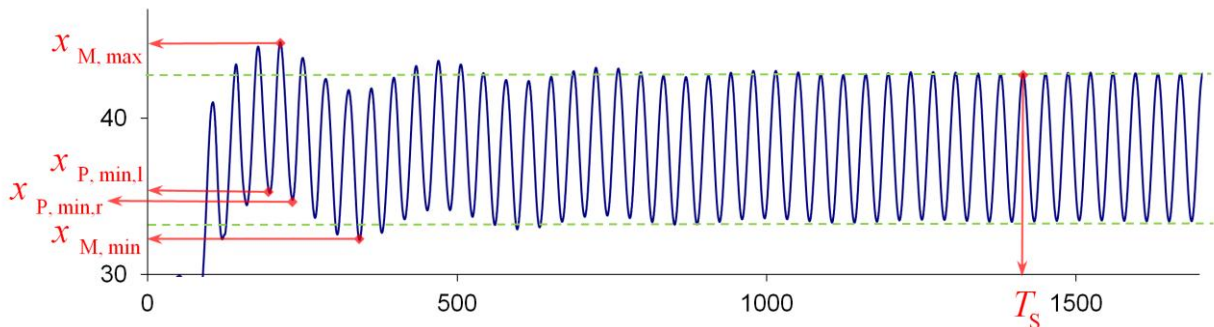


Рис. 5. Визуально-ручная техника оценки по одной пространственной координате положения мгновенного центра, а также радиуса петли R_c , радиуса меандра R_m и времени окончания переходного процесса T_s .

Синяя линия — график пространственной координаты $x(t)$ для случая торможения дрейфа ревербератора, наблюдаемого при следующих значениях изменяемых в этом исследовании параметров модели АП: $a = 0,1500$ и $\mu_2 = 1,3000$; время выражено в условных единицах модели $t.u.$

Зелѐные пунктирные линии указывают размах колебаний координаты при выходе ревербератора на круговой стационар. Красные вспомогательные линии со стрелками указывают положение соответствующих измеряемых величин (дополнительные пояснения даны в тексте).

Тогда для оценки **радиуса петли**, R_c , (т. е. радиуса ядра ревербератора) можно воспользоваться следующей формулой:

$$R_c = (x_{P,\max} - x_{P,\min})/2.$$

Для случаев кругового стационара величина R_c рассчитывалась по измерениям, произведённым на участке траектории, соответствующей стационарному вращению вихря, поскольку их следует считать более точными.

Радиус дрейфа (при меандре или при близком к меандру начальном участке переходного процесса), по определению, приведённому ранее, вычисляется как модуль разности координаты центра меандра x_M и координаты центра петли x_P :

$$R_m = |x_P - x_M|.$$

Учитывая, что $x_M = (x_{M,\max} + x_{M,\min})/2$, $x_P = (x_{P,\max} + x_{P,\min})/2$ и принимая, что $x_{P,\max}$ и $x_{M,\max}$ можно (в большинстве случаев) считать совпадающими, после несложных арифметических преобразований получаем:

$$R_m = (x_{P,\min} - x_{M,\min})/2.$$

Дальнейшее упрощение и стандартизация процедуры состояли в том, что в качестве минимума петли $x_{P,\min}$ бралось среднее значение двух минимумов, непосредственно соседних с положением максимума $x_{M,\max}$ (рис. 5): «левого», $x_{P,\min,l}$, и «правого», $x_{P,\min,r}$. Результирующие формулы, использованные в этой работе для оценки величин R_c и R_m , выглядят так:

$$R_c = (x_{M,\max} - (x_{P,\min,l} + x_{P,\min,r})/2)/2;$$

$$R_m = ((x_{P,\min,l} + x_{P,\min,r})/2 - x_{M,\min})/2.$$

В таком виде процедура измерения величин R_c и R_m давала результаты, наиболее близкие к тем, какие получаются при варианте изменения, показанном на рис. 4.Б. Именно она была использована для представления результатов этой работы. Хотя результаты были бы схожими и качественно и количественно при выборе любого из описанных здесь вариантов процедуры измерения.

Поскольку в научной литературе сколь-нибудь точной классификации размеров автоволнового меандра нам не встречалось, мы выработали следующую шкалу такой классификации. По размеру ядер ревербератора мы различали следующие четыре варианта радиусов:

- огромный — $R_c \geq 100 \text{ s.u.};$
- большой — $100 > R_c \geq 20 \text{ s.u.};$
- обычный — $20 > R_c \geq 10 \text{ s.u.};$
- малый — $R_c < 10 \text{ s.u.}$

В основу классификации меандров по размеру (по радиусу меандра) было положено соотношение R_m / R_c :

- | | | |
|-----------------|---|------------------------------|
| • огромный | — | $R_m / R_c \geq 100$; |
| • очень большой | — | $100 > R_m / R_c \geq 10$; |
| • большой | — | $10 > R_m / R_c \geq 3,0$; |
| • нормальный | — | $3,0 > R_m / R_c \geq 1,5$; |
| • малый | — | $1,5 > R_m / R_c \geq 1,0$; |
| • очень малый | — | $1,0 > R_m / R_c \geq 0,2$; |
| • крохотный | — | $0,2 > R_m / R_c$. |

Поскольку величина измеряемого радиуса петли заметно зависит от выбранных критериев кончика ревербератора, то, соответственно, разным будет и соотношение R_m / R_c , — что следует учитывать при интерпретации получаемых результатов. Для определённости предлагаем представленную выше классификацию размеров радиуса меандра принимать в качестве рабочего варианта и считать верной для используемого в этой работе способа измерения.

Вычисление **периода ревербератора**, T_r , проводилось тоже по измерениям, произведённым на графике одной из координат (рис. 5) на участке, соответствующем стационару (и для случаев **кругового стационара** и для случаев **кругового стационарного дрейфа**). С этой целью разность крайних значений положения (т. е. времени) локальных минимумов делилась на количество промежутков между всеми локальными минимумами, расположенными между этими крайними. Следует иметь в виду, что количество «петель», то есть пар максимумов и минимумов, наблюдаемых на графике одной из координат, не соответствует количеству петель на соответствующем участке траектории: на графике их чуть больше — и потому предложенная процедура вычисления **периода ревербератора**, T_r , привносит системную погрешность, однако вполне пригодна и удобна в качестве рабочего инструмента экспериментатора.

Измерение **длительности переходного процесса**, T_s , для систем, соответствующих точкам параметрического портрета, расположенным ниже бифуркационной границы, т. е. случаям **кругового стационара**, производилось в данной работе тоже вручную. В качестве времени окончания переходного процесса выбирался тот момент времени на графике одной из координат (рис. 5), после которого последующие колебания координаты оказывались визуально неразличимыми при 400% увеличении масштаба графика. В ряде неясных случаев было дополнительно проведено исследование соответствующей траектории кончика ревербератора, и в качестве времени окончания переходного процесса выбирался тот момент времени движения по траектории, после которого все витки круговой траектории точно совпадали, т. е. оказывались визуально неразличимыми при 400% увеличении масштаба. Согласно нашему опыту, погрешность результатов измерений, полученных при использовании таких процедур, составляет не более ± 50 т.у. Следует принять во внимание то обстоятельство, что измеряемая в описанной здесь процедуре величина T_s не равнозначна ранее [5, 6] измеренному характерному времени

переходного процесса, τ : во-первых, вычисляемое в результате построения аппроксимации τ измерялось с учётом всей последовательности значений графика динамики модуля скорости дрейфа, тогда как величина T_s измеряется на основе данных достаточно короткого фрагмента траектории дрейфа, расположенного в её окрестности; во-вторых, τ указанным способом измерялось до перегиба графика динамики модуля скорости дрейфа, что соответствует окончанию второй фазы торможения вихря при автоволновом серпантине, а T_s соответствует окончанию торможения дрейфа вихря, причём в исследовании автоволнового серпантина эта величина соответствует окончанию третьей фазы торможения дрейфа ревербератора. В остальных обнаруженных в ходе этой работы вариантах переходных процессов с явлениями БП стадийность фаз переходного процесса ещё не исследована.

Несколько иную процедуру измерения **длительности переходного процесса**, T_s , пришлось использовать для случаев гипо-меандра, т. е. для случаев **кругового стационарного дрейфа**. Поскольку при исследовании эпи-меандра визуально распознаваемых переходных процессов не обнаружено, то наблюдение явных переходных процессов при гипо-меандре, проявившихся в нестабильности радиуса дрейфа в начальном сегменте траектории кончика ревербератора, оказалось неожиданным. В этих случаях длительность переходного процесса измеряли путём обрезания начального участка траектории кончика вихря до тех пор, пока не обнаруживалось, что радиус дрейфа стабилизировался: отметка времени на траектории, соответствующая наступлению стабилизации радиуса дрейфа, принимался за момент окончания переходного процесса.

Обратим внимание, что все здесь представленные методы слежения за поведением автоволновой системы выбраны на основе общего принципа, а именно: выбирается некоторая наблюдаемая физическая величина, которая гипотетически монотонно зависима от неизвестных или ненаблюдаемых переменных состояния динамической системы, по изменению фазовых траекторий которых можно было бы отследить точку бифуркации системы, если эти переменные состояния оказались бы наблюдаемыми.

3. Результаты

Было проведено более 400 вычислительных экспериментов. В результате их предварительного анализа удалось выявить несколько новых автоволновых феноменов, а также построить параметрический портрет двумерной версии модели **Алиева—Панфилова** в пределах исследуемого диапазона параметров этой системы. Экспериментально был найден также ответ на ряд важных теоретических вопросов о типе сходимости решений этой системы в окрестностях критических точек её параметрического портрета, а именно в окрестностях её бифуркационных точек, в совокупности формирующих бифуркационную границу (далее: БГ).

3.1. Автоволновой схлоп

В ходе проведения вычислительных экспериментов с использованием двумерной версии модели АП в 2022—2023 гг. нам удалось обнаружить новый вариант динамики ревербератора, ранее не описанный в научной литературе; условно мы его обозначили как **автоволновой схлоп** (в англоязычной литературе был предложен вариант: *autowave shrinkage* [8]).

Как уже отмечено выше, при **автоволновом серпантине** (рис. 1) **радиус дрейфа** остаётся постоянным, что может при известных обстоятельствах вводить наблюдателя в заблуждение относительно того, считать ли движение ревербератора меандром или серпантином. Однако при автоволновом схлопе наблюдается противоположное явление: в этом варианте спонтанного дрейфа ревербератора с торможением дрейфа **круговой стационар** достигается за счёт монотонного уменьшения радиуса дрейфа до нуля. На рисунке 6 приведены примеры автоволнового схлопа с разным начальным радиусом дрейфа.

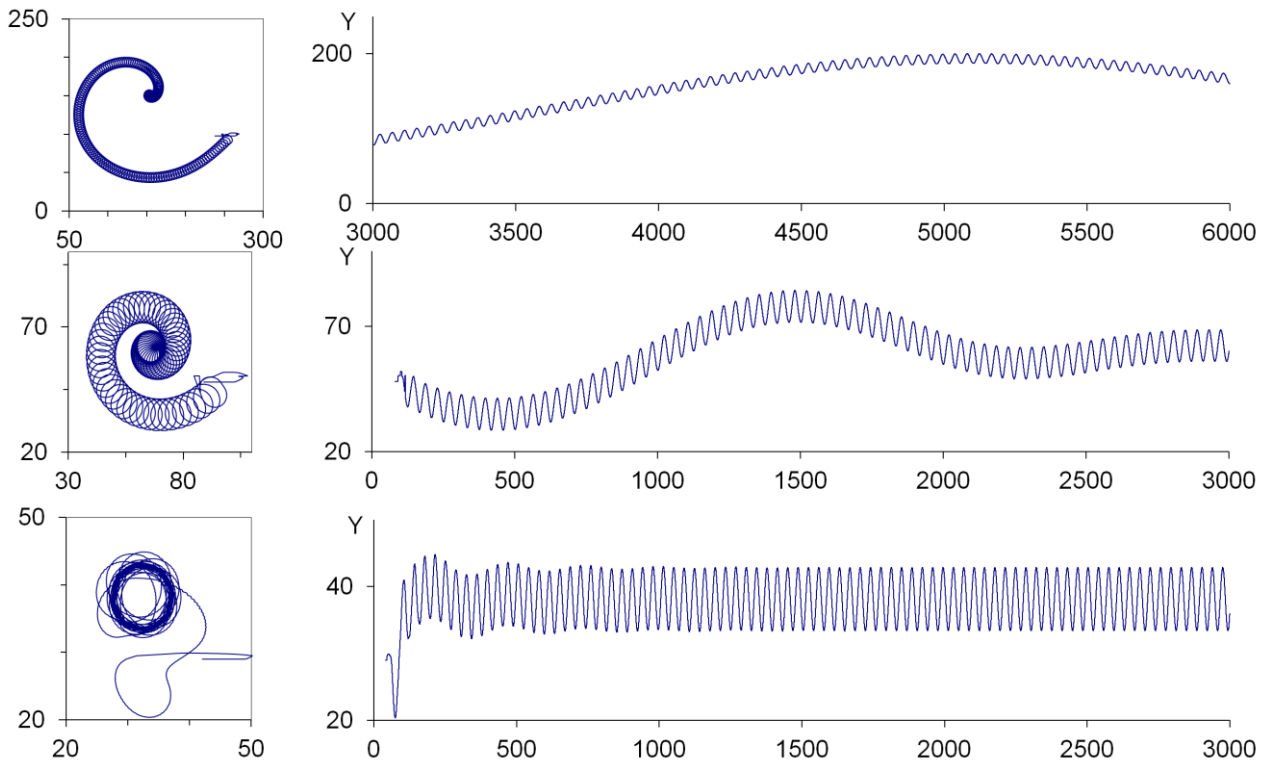


Рис. 6. Варианты автоволнового схлопа. Вычислялось при следующих значениях варьируемых в данном исследовании параметров модели АП:

А) $a = 0,1750$ и $\mu_2 = 0,4850$ ($T_s = 7800$ t.u., $R_m/R_c = 17,0$);

Б) $a = 0,1730$ и $\mu_2 = 0,5400$ ($T_s = 4300$ t.u., $R_m/R_c = 4,2$);

В) $a = 0,1500$ и $\mu_2 = 1,3000$ ($T_s = 1400$ t.u., $R_m/R_c = 0,3$).

В каждой группе изображены: слева — траектория кончика ревербератора в пространственных координатах (x, y); справа — график пространственной координаты $y(t)$, время и координаты пространства выражены в условных единицах модели, t.u. и s.u. соответственно.

Рисунок 7 демонстрирует в крупном масштабе типичный пример эволюции ревербератора по сценарию автоволнового схлопа. Хорошо видно уменьшение **радиуса дрейфа** до нуля, приводящее к стационарному решению по типу равномерного кругового вращения ревербератора. Ранее в [8] похожий пример опубликован для $a = 0,1730$ и $\mu_2 = 0,5500$.

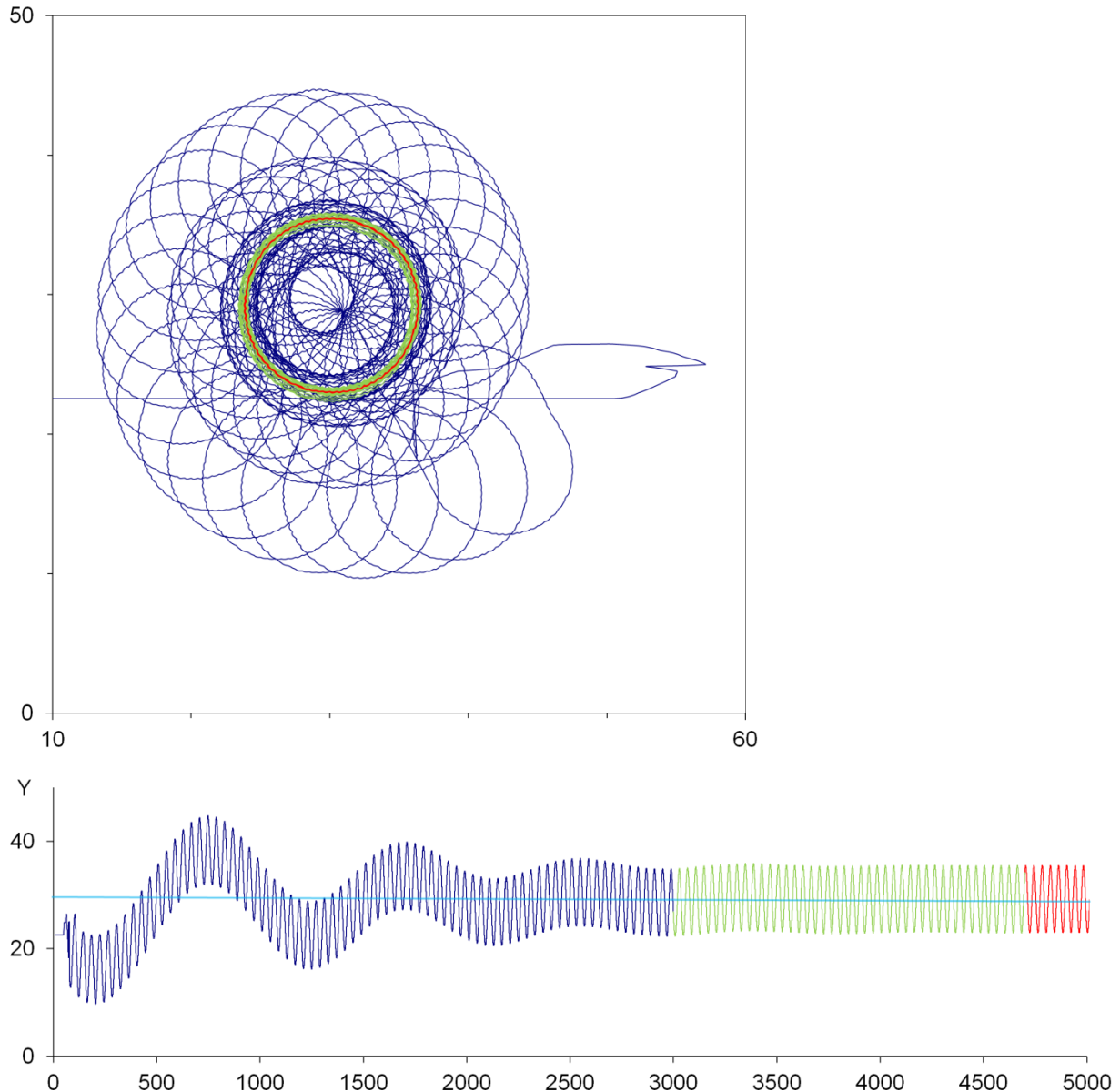


Рис. 7. Автоволновой схлоп при параметрах модели **АП**: $a = 0,1700$ и $\mu_2 = 0,6300$ (остальные параметры модели имеют их стандартные значения). Верхняя панель — траектория кончика ревербератора в пространственных координатах (x, y) . Нижняя панель — график пространственной координаты $y(t)$, голубая прямая линия обозначает положение центра дрейфа. Время и координаты пространства выражены в условных единицах модели, т.е. и s.е. соответственно. На обеих панелях одинаковым цветом указаны одинаковые участки траектории. $T_s = 4700$ т.е., $R_m/R_c = 1,8$.

3.2. Промежуточные варианты переходных процессов

В некоторых достаточно протяжённых подобластях пространства параметров исследуемой модели центр дрейфа остаётся практически неподвижным, — это характерно для меандра, серпантина и схлопа. Однако наблюдаются и такие варианты эволюции ревербератора, которые можно считать промежуточными между автоволновым серпантином и автоволновым схлопом. На рисунке 8 представлены примеры таких промежуточных вариантов, когда переходный процесс выглядит похожим на **автоволновой схлоп**, но центр дрейфа заметно смещается; этот же рисунок демонстрирует варианты, когда процесс выглядит похожим на **автоволновой серпантин**, но радиус дрейфа увеличивается на завершающей фазе переходного процесса.

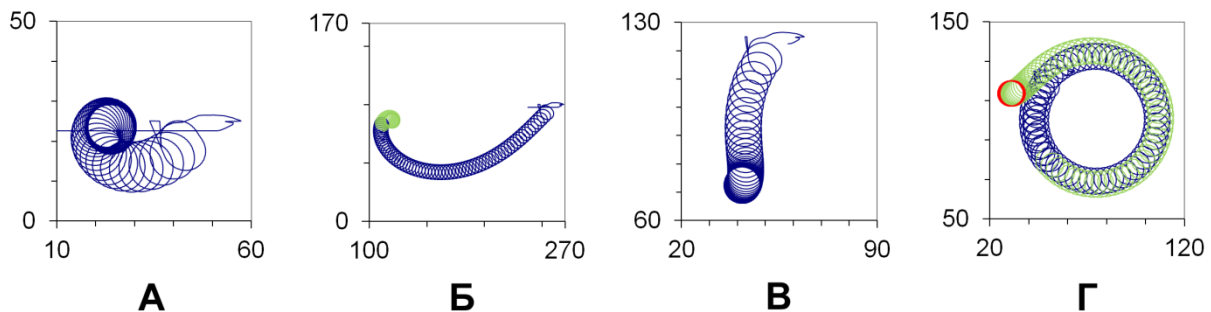


Рис. 8. Промежуточные формы дрейфа автоволнового ревербератора с торможением по варианту гипо-меандра. Вычислялось при следующих значениях варьируемых в данном исследовании параметров модели АП:

А) $a = 0,17000$ и $\mu_2 = 0,55000$ ($T_s = 2000$ t.u.);

Б) $a = 0,17500$ и $\mu_2 = 0,48000$ ($T_s = 4900$ t.u.);

В) $a = 0,17600$ и $\mu_2 = 0,40000$ ($T_s = 1950$ t.u.);

Г) $a = 0,17755$ и $\mu_2 = 0,40000$ ($T_s = 6900$ t.u., $R_m/R_c = 4,9$).

Панели А и Б демонстрируют случаи, когда переходный процесс выглядит похожим на автоволновой схлоп, но центр дрейфа заметно смещается.

Панели В и Г — случаи, когда переходный процесс вначале выглядит похожим на эпи-меандр, но на завершающей фазе переходного процесса наблюдается увеличение радиуса дрейфа и изменение характера дрейфа на гипо-меандр.

Синим цветом указан участок траектории до 3000 t.u.; зелёным — от 3001 до 6000 t.u.; красным — от 6001 до 9000 t.u.

Отметим, что представленные на рисунке 8 варианты переходного процесса наблюдать удалось лишь в небольшой области пространства параметров модели АП; указанная область расположена слева и справа от непрерывной линии пространства параметров, точки которой соответствуют дрейфу ревербератора по прямой линии, как с торможением, так и без торможения этого дрейфа по прямой. Указанная линия разделяет две большие области — существования дрейфа по варианту либо эпи-, либо гипо-меандра.

На рисунке 9, демонстрирующем примеры дрейфа по прямой, можно заметить, что на завершающем этапе торможение дрейфа переходит в вариант гипо-меандра, и этой особенностью такой вариант торможения дрейфа оказывается отчасти сходным с автоволновым схлопом.

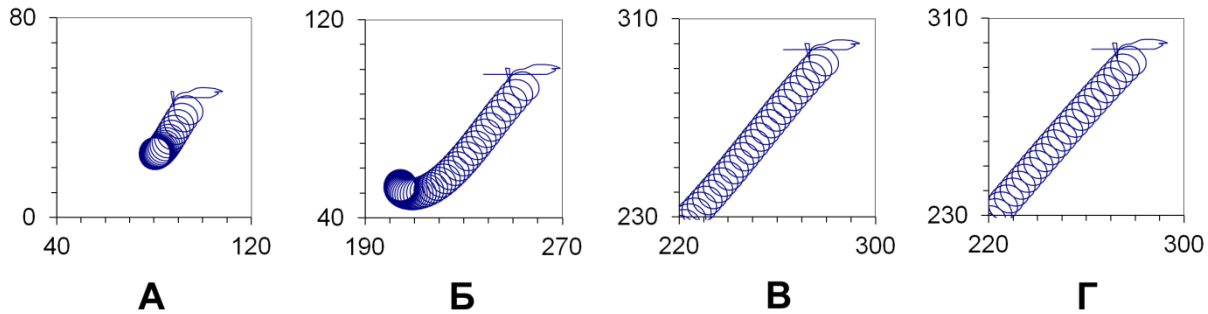


Рис. 9. Варианты прямого дрейфа ревербератора. Вычислено при следующих значениях варьируемых в данном исследовании параметров модели АП:

А) $a = 0,1730$ и $\mu_2 = 0,4000$ ($T_s = 1400$ t.u.);

Б) $a = 0,1750$ и $\mu_2 = 0,4550$ ($T_s = 2700$ t.u.);

В) $a = 0,1754$ и $\mu_2 = 0,4700$ ($T_s = 4700$ t.u.);

Г) $a = 0,1756$ и $\mu_2 = 0,4815$ ($T_s = ???$ t.u.).

На всех панелях соблюден единый масштаб для удобства сравнения; поэтому панели В и Г показывают лишь часть траекторий кончика ревербератора.

Ранее [41] похожий переходный процесс был описан как **двукратное проявление эффекта бифуркационной памяти**, — когда фазовая траектория сначала устремляется к месту одного исчезнувшего прежнего стационара, затем к месту другого исчезнувшего прежнего стационара и лишь затем идёт к истинному стационару. Следует ли нами обнаруженные промежуточные варианты движения ревербератора с торможением дрейфа (рис. 8 и рис. 9) считать тоже двукратным проявлением эффекта БП, утверждать не можем, поскольку нам не встречалось в литературе каких-либо указаний, что прямой дрейф ревербератора можно рассматривать как бифуркацию между эпи-меандром и гипо-меандром.

Отметим, что в тех случаях, когда траектория выходит на пределы модельной среды, без количественного анализа дрейфа часто оказывается невозможным ответить на вопрос, к какому варианту стационара идёт наблюдаемый переходный процесс. Так, в случае, показанном на рисунке 9 Г, признаков торможения дрейфа обнаружить при визуальном исследовании траектории кончика ревербератора не удаётся: даже при большом увеличении расстояние между соседними петлями кажется постоянным. Однако следует помнить, что при приближении к БГ длительность переходного процесса стремится к бесконечности, а заметное уменьшение расстояния между соседними петлями возникает ближе к окончанию переходного процесса — и потому начальный участок переходного процесса может выглядеть обманчиво.

3.3. Бифуркационная диаграмма исследуемой модели

Детальное исследование двумерной версии модели АП в области параметров, лежащих диапазоне $a \in [0,1500 \dots 0,2700]$ (повышенный порог возбуждения миокарда) и $\mu_2 \in [0,010 \dots 0,900]$ (при стандартных значениях остальных параметров), позволило нам построить бифуркационную диаграмму с выделением в ней не только бифуркационной границы, но и положения бифуркационного пятна — области параметрического портрета, в которой наблюдаются феномены бифуркационной памяти. Первый вариант такой диаграммы был недавно представлен в [8]; здесь мы приводим уточнённый и исправленный её вариант (рис. 10), полученный с учётом дополнительных результатов вычислительных экспериментов. В частности, построена верхняя ветвь бифуркационной границы, прилегающая в области крупных (т. е. больших и огромных) круглых ядер, известной ещё из [9].

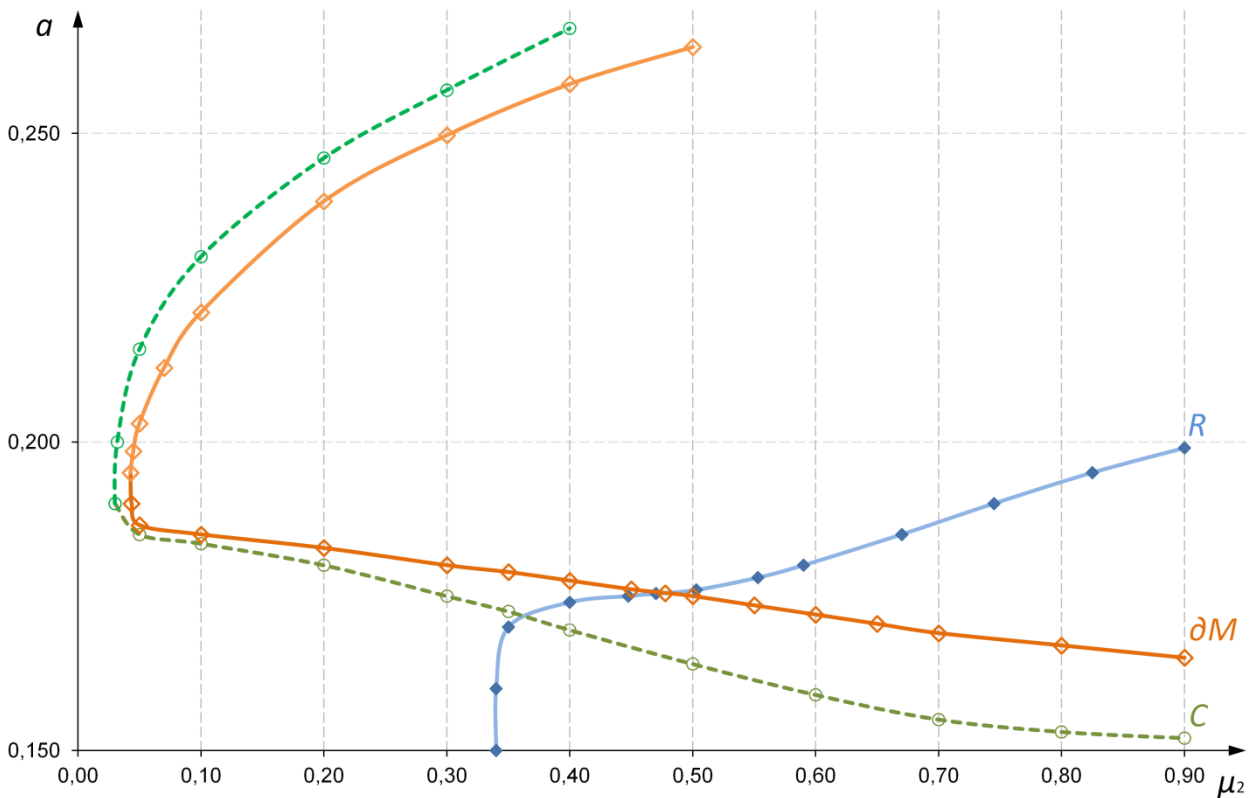


Рис. 10. Бифуркационная диаграмма модели Алиева—Панфилова в плоскости параметров (a, μ_2) . Оранжевая линия — бифуркационная граница ∂M , разделяющая области кругового стационара и стационарного кругового дрейфа. Зелёная пунктирная линия, C , отграничивает область бифуркационного пятна, прилегающую к бифуркационной границе. Голубая линия, R , обозначает сочетание параметров, при которых наблюдается прямолинейный дрейф автоволнового ревербератора (либо стационарный, либо с торможением).

Дополнительные пояснения даны в тексте.

Следует сразу же отметить, что в таком виде линия **бифуркационной границы**, ∂M (рис. 10), в целом оказывается похожей на ту, что для двумерной версии модели **ФХН** Винфри представил ранее [9], однако в зеркально отражённом варианте и притом деформированном — растянутом вдоль параметра μ_2 модели **АП**, соответствующего в допустимом смысле параметру ε модели **ФХН**. На наш взгляд, это можно объяснить тем, что Винфри проводил исследование модели **ФХН**, записанной в формате 1, в то время модель как модель **АП** записана в формате 0 и к формату 1 не приводится: описанная деформация параметрического портрета происходит, вероятно, при переходе от формата 1 к формату 0. Если опубликованный Винфри портрет параметров перестроить, отложив по оси абсцисс $1/\varepsilon$ вместо ε , то сходство бифуркационных диаграмм этих двух моделей станет ещё более разительным.

Смену типа стационара обнаружить удавалось при изменении параметров в пятом значащем знаке (после запятой), например: при фиксированном $\mu_2 = 0,300$ **бифуркационная точка** лежит на отрезке $a \in [0,18035 \dots 0,18036]$ (рис. 1); при $\mu_2 = 0,100$ — $a \in [0,18496 \dots 0,18497]$ и т. д. Перекрестие двух критических линий 2D-версии модели **АП** расположено вблизи следующих значений параметров: $\mu_2 = 0,4750$ при $a = 0,1754$. Более детальное исследование окрестности этой точки «сингулярного перекрестия» мы планируем провести в будущем. Однако уже теперь возможно отметить несколько неожиданных особенностей поведения этой системы вблизи этой особой точки.

Условно линии ∂M и R разделяют пространство параметров на четыре крупных сектора. Между верхней и нижней ветвями линии ∂M расположена область меандров, причём левее линии R расположен домен **эпи-меандров**, а правее неё — **гипо-меандров**. Область пространства параметров, заключённая между линиями ∂M и C , соответствует **бифуркационному пятну**.

В секторе, находящемся левее линии R (примерно при $\mu_2 < 0,35$) и между линиями ∂M и C , т. е. в бифуркационном пятне, расположена подобласть автоволновых серпантин, в полном соответствии с результатами, представленными ранее в [5, 6].

В секторе, находящемся правее линии R между линиями ∂M и C , следовало бы ожидать нечто похожее на автоволновой серпантин, но как бы по гипо-типу. Однако в эксперименте было обнаружено, что основную часть этого сектора занимают **автоволновые схлопы**; они занимают всю подобласть, расположенную правее $\mu_2 = 0,50$. По мере увеличения параметра μ_2 начальный радиус дрейфа в этом секторе уменьшается, однако динамика переходного процесса остаётся характерной для описанного выше автоволнового схлопа.

Таким образом, **автоволновой схлоп** наблюдается в области движений, подобных **гипо-меандру**, в отличие от **серпантина**, который нам удалось наблюдать только в области движений, подобных **эпи-меандру**.

Примерно в диапазоне $\mu_2 \in [0,35 \dots 0,55]$ в бифуркационном пятне можно наблюдать варианты переходного процесса, промежуточные между серпантинном и схлопом (рис. 8 и рис. 9).

На бифуркационной диаграмме (рис. 10) хорошо видно, что линия R резко уклоняется вниз после выхода из бифуркационного пятна. При этом ниже линии ∂M дрейф при визуальном-ручном исследовании неотличим от прямолинейного в некоторой окрестности линии R , хотя выше линии ∂M системы, демонстрирующие прямолинейный дрейф, строго соответствуют линии R .

Рассмотрим теперь различные области параметрического портрета несколько более детально.

Интересной задачей нам представилось выяснение, как изменяется характер меандров при дальнейшем увеличении параметра μ_2 . Рисунок 11 демонстрирует, что при $\mu_2 \rightarrow \infty$ в пределе $R_m \rightarrow 0$. Т. е. при весьма больших значениях параметра μ_2 траектория кончика ревербератора по форме приближается к окружности, т. е. достигнутый **стационарный круговой дрейф** внешне оказывается мало отличимым от **кругового стационара**, хотя соответствующая динамическая система и расположена по иную сторону бифуркационной границы. Таким образом, следует различать эти превдо-круговые стационары, расположенные справа от БГ, т. е. в области меандров, от тех истинных круговых стационаров, которые расположены слева от БГ.

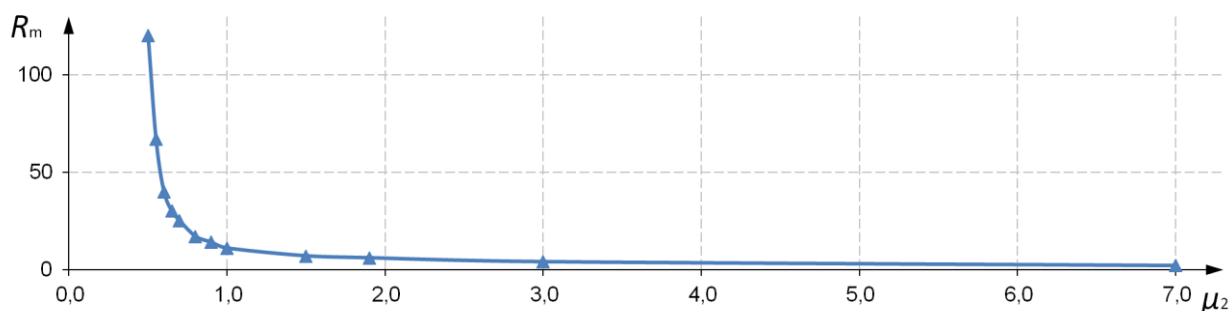


Рис. 11. Зависимость радиуса меандра, R_m , от параметра μ_2 2D-версии модели **Алиева—Панфилова** при фиксированном параметре $a = 0,1750$. Измерено вручную по результатам вычислительных экспериментов.

Не менее неожиданными оказались и результаты исследования двумерной версии модели **АП** в окрестности БГ: аккуратная проверка показала, что область с феноменами БП (т. е. бифуркационное пятно) существует вблизи бифуркационной границы также и со стороны стационара типа меандр (со стороны области **стационарного кругового дрейфа**); причём в окрестности БГ длительность переходного процесса устремляется в пределе к бесконечности при приближении к БГ как слева, так и справа. Прежние исследование [5, 6] приводили к интуитивному убеждению, что при устремлении со стороны области меандров к БГ в пределе время переходного процесса останется константой, близкой к нулю. Однако в этом исследовании мы обнаружили примеры меандра, в котором длительный переходный процесс весьма заметен даже при визуальном изучении траекторий кончика ревербератора.

Рисунок 12 демонстрирует зависимость длительности переходного процесса от параметра μ_2 при фиксированном значении параметра $a = 0,1750$.

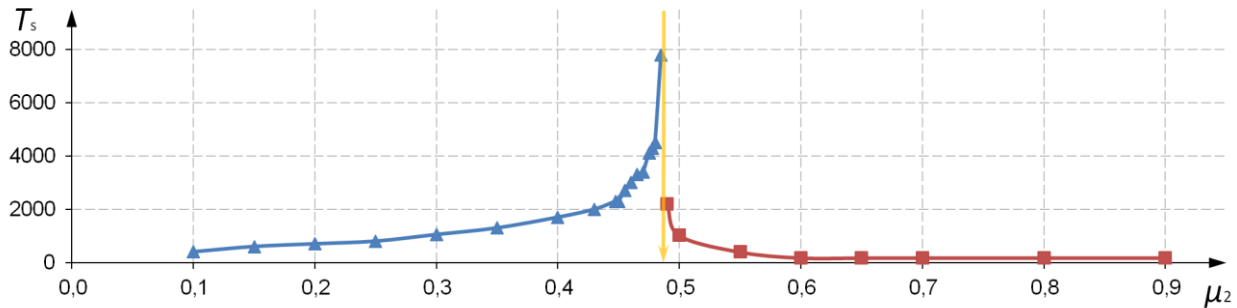


Рис. 12. Зависимость длительности переходного процесса, T_s , от параметра μ_2 при фиксированном значении параметра $a = 0,1750$ в двумерной версии модели Алиева—Панфилова. Измерено вручную по результатам вычислительных экспериментов. Оранжевая стрелка указывает положение бифуркационной точки.

На рисунках 13 и 14 показаны зависимости ряда измеряемых в этом исследовании характеристик поведения ревербератора от параметра a при фиксированном значении параметра $\mu_2 = 1,500$.

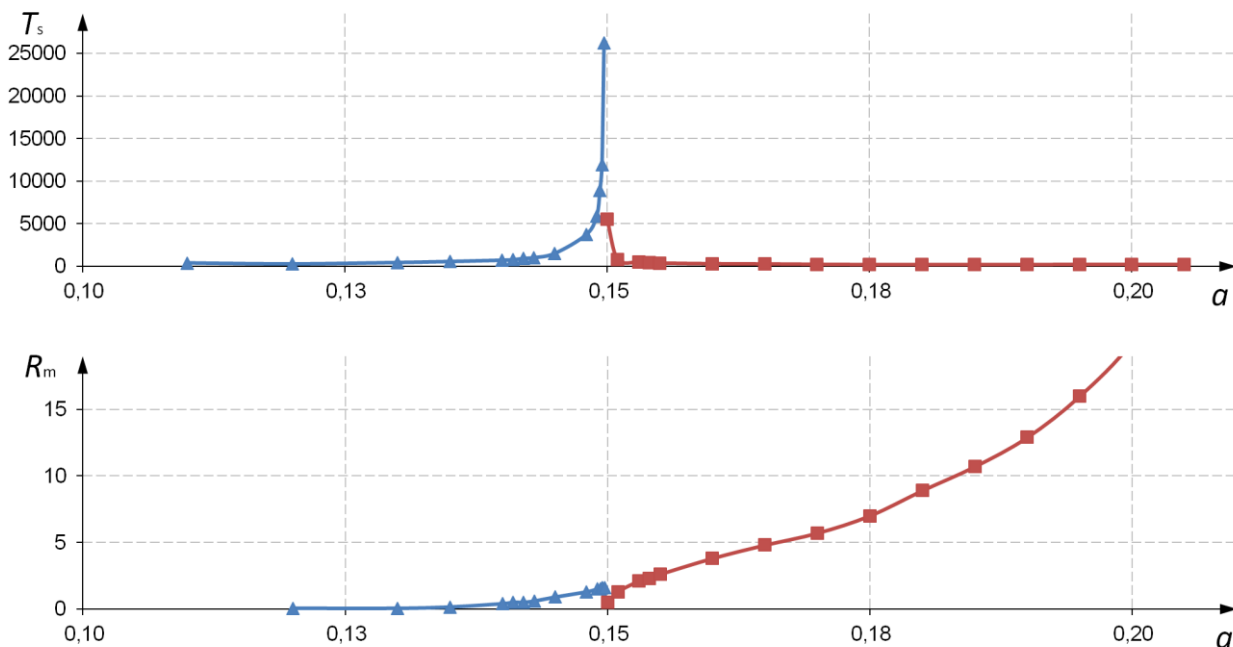


Рис. 13. Зависимости характеристик эволюции ревербератора в 2D-версии модели Алиева—Панфилова: длительности переходного процесса, T_s , (верхняя панель) и радиуса меандра, R_m , (нижняя панель) — от параметра a при фиксированном значении параметра $\mu_2 = 1,500$. Измерено вручную по результатам вычислительных экспериментов.

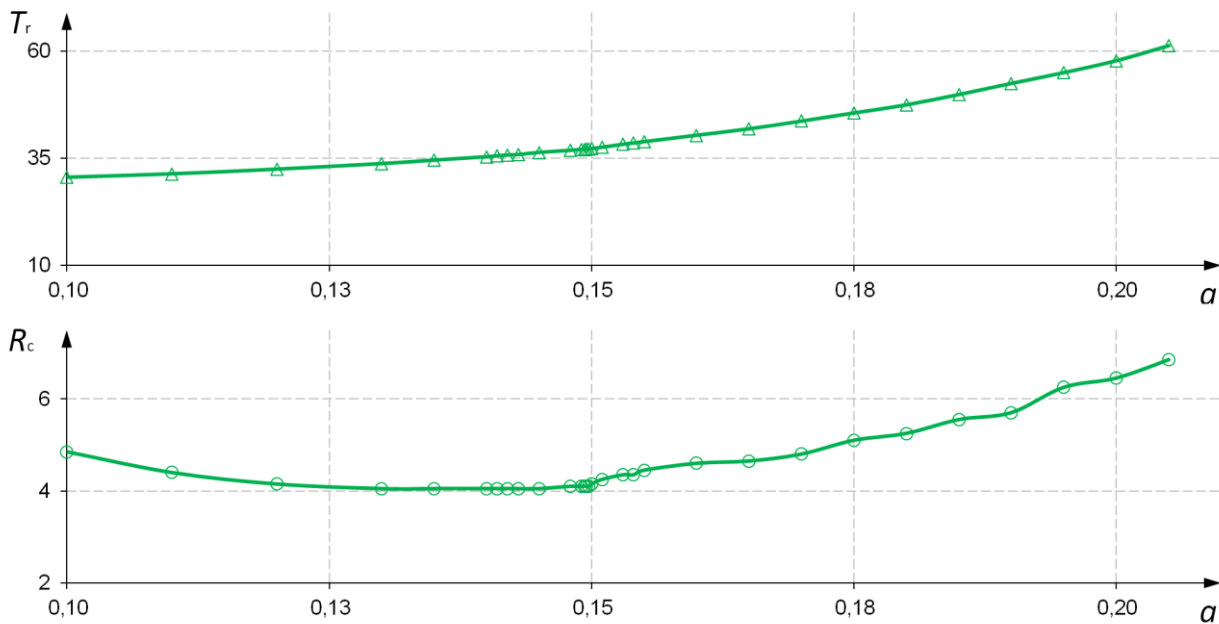


Рис. 14. Зависимости характеристик эволюции ревербератора в 2D-версии модели Алиева—Панфилова: периода ревербератора, T_r , (верхняя панель) и радиуса ядра, R_c , (нижняя панель) — от параметра a при фиксированном значении параметра $\mu_2 = 1,500$. Измерено вручную по результатам вычислительных экспериментов.

На представленных графиках (рис. 12 и рис. 13) хорошо видно, что в точках БГ длительность переходных процессов, T_s , в пределе и слева и справа устремляется к бесконечности. Уместным выглядит предположение, что аналогичную ситуацию можно обнаружить вдоль всей БГ. В то же время период ревербератора, T_r , изменяется монотонно (рис. 14), пересекая БГ без каких-либо заметных изменений. Эти предварительные наблюдения, конечно, ещё требуют более аккуратной проверки при иных сочетаниях значений параметров; однако предварительно выполненная такая проверка подтверждает представленные здесь наблюдения. Решение о проведении двух специальных серий вычислительных экспериментов при фиксированных значениях параметров $a = 0,1750$ и $\mu_2 = 1,500$ было принято в рамках проверки двух рабочих гипотез: при $a = 0,1750$ ожидалось нахождение точки «сингулярного перекрестия», а вблизи $\mu_2 = 1,500$ ожидалось пересечение БГ с линией «нормального» значения порога возбуждения, $a = 0,1500$.

Отметим, что обнаружение длительных переходных процессов при меандре удалось сделать благодаря удачному экспериментальному случаю. При значениях параметров $a = 0,1500$ и $\mu_2 = 1,500$ было обнаружено, что после типичной для автоволнового схлопа начальной части переходного процесса, довольно длительной (5500 t.u.), динамика как бы стабилизировалась на меандре с малым радиусом при визуальной оценке. Поскольку прежде нам не удавалось наблюдать случаев столь длительного переходного процесса при

стационаре типа меандр, то возник соблазн считать этот случай тоже типичным схлопом, но с очень длительным переходным процессом — длительностью много большей, чем полученные при визуальной оценке 5 500 t.u. Для проверки этой гипотезы нами были посчитаны точки рядом. При $a = 0,1497$ был получен типичный схлоп малого радиуса с длительностью переходного процесса, равной 26 200 t.u., и это, казалось бы, может служить косвенным подтверждением гипотезы, что в точке $a = 0,1500$ также наблюдается схлоп с длительностью переходного процесса ещё большей. Тем не менее было принято решение проверить более аккуратно длительности переходных процессов с той стороны бифуркационной границы, где стационаром является меандр. В таких случаях были проведены измерения времени переходного процесса с использованием процедуры, описанной в разделе 2. В результате такой проверки возникло уверенное убеждение в существовании явлений бифуркационной памяти по обе стороны БГ в двумерной версии модели Алиева—Панфилова.

Рисунок 15 иллюстрирует случай гипо-меандра при значениях параметров $a = 0,1500$ и $\mu_2 = 1,500$, который послужил стимулом для более аккуратного исследования начальной динамики **стационарного кругового дрейфа**.

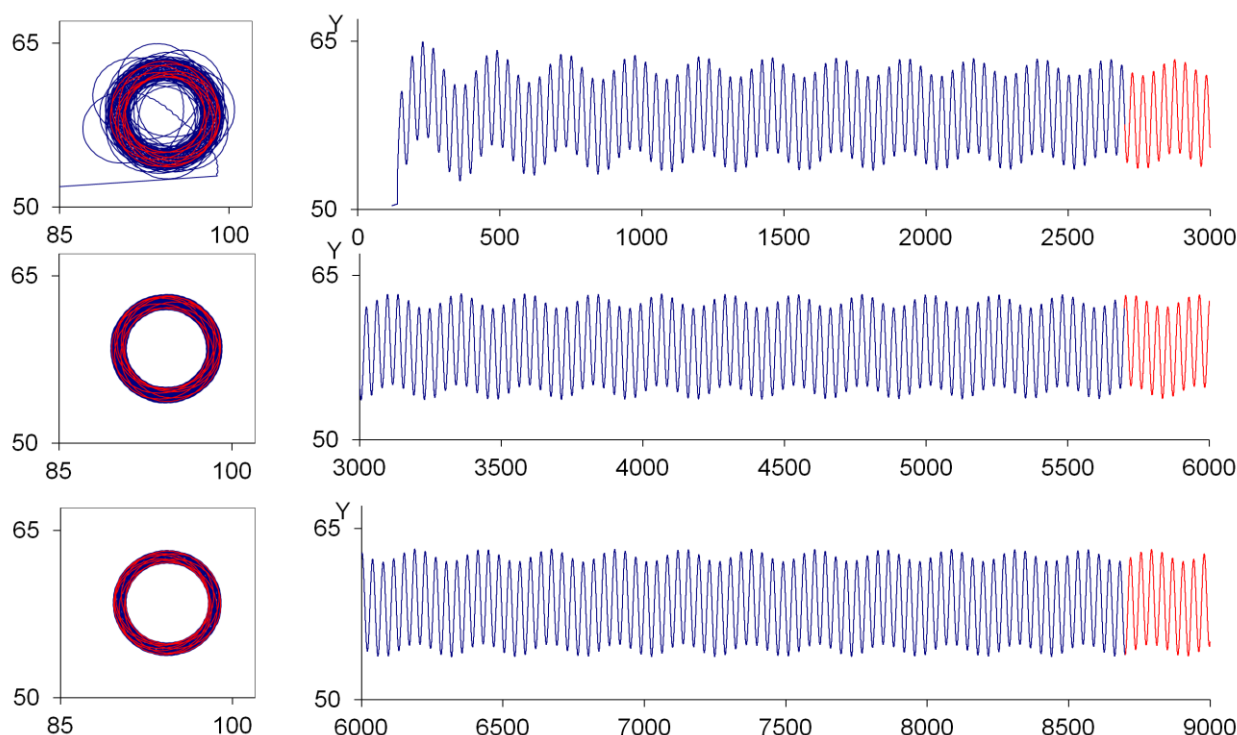
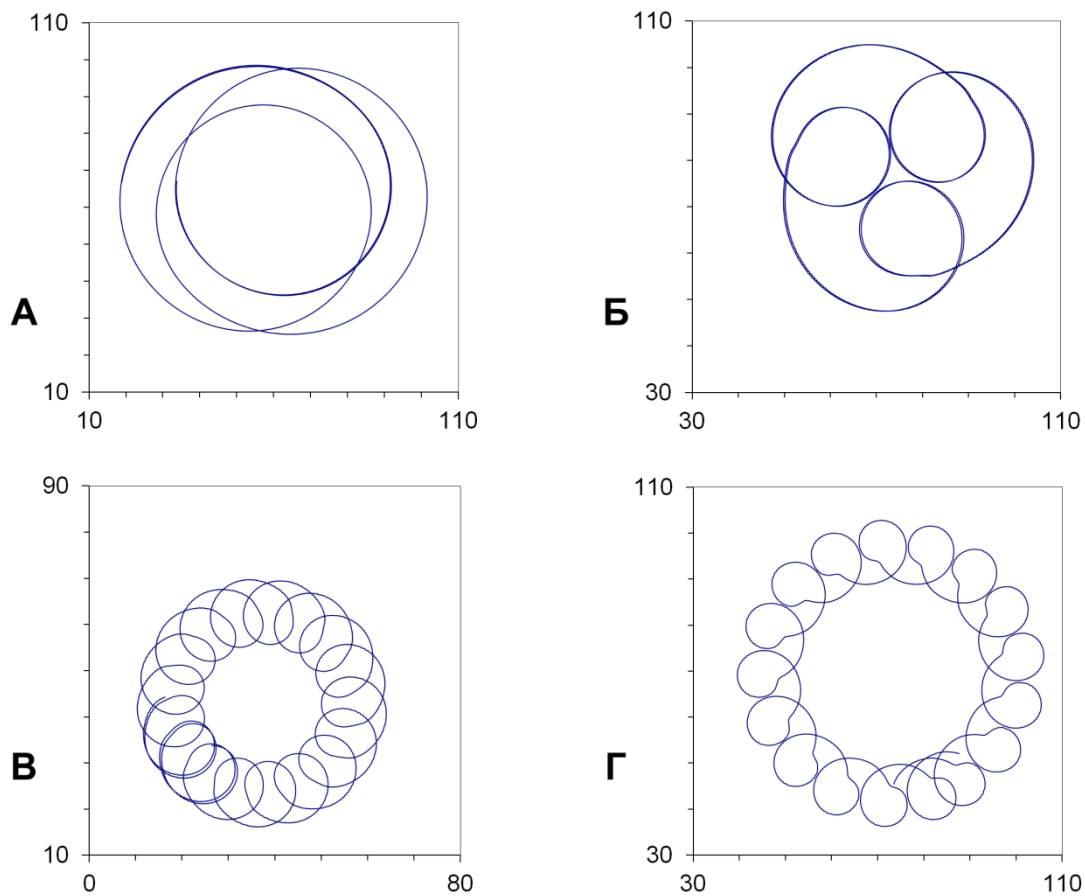


Рис. 15. Пример меандра с заметным переходным процессом. Вычислялось при параметрах модели АП: $a = 0,1500$ и $\mu_2 = 1,5000$ (остальные параметры модели имеют их стандартные значения). Слева — траектория кончика ревербератора (x, y) ; справа — ей соответствующий график пространственной координаты $y(t)$, время и координаты пространства выражены в условных единицах модели, t.u. и s.u. соответственно. $T_s = 5500$ t.u., $R_m / R_c = 0,12$.

Таким образом, тип стационара при значениях параметров $a = 0,1500$ и $\mu_2 = 1,500$ был отнесён к меандру; сравните динамику переходного процесса при выходе к **стационарному круговому дрейфу** (рис. 15) с динамикой схлопа (рис. 6.В), когда явно наблюдается **круговой стационар**. Дополнительным аргументом явилось то, что в ином случае монотонность графика зависимости $T_s(a)$ оказалась бы нарушенной (см. рис. 13).

В заключение продемонстрируем варианты стационарного кругового дрейфа с разным радиусом меандра (рис. 16); отметим, что в примерах **А** и **Б** обороты меандра можно признавать пространственно идентичными и по форме и по положению, как и в случае, ранее показанном на рисунке 4.



*Рис. 16. Примеры стационарного кругового дрейфа в 2D-версии модели **АП**:*
А) эпи-меандр крохотного радиуса ($R_m/R_c = 0,18$): $a = 0,2370$ и $\mu_2 = 0,200$;
Б) эпи-меандр очень малого радиуса ($R_m/R_c = 0,7$): $a = 0,2353$ и $\mu_2 = 0,400$;
В) эпи-меандр нормального радиуса ($R_m/R_c = 2,7$): $a = 0,1850$ и $\mu_2 = 0,400$;
Г) гипо-меандр большого радиуса ($R_m/R_c = 3,9$): $a = 0,2050$ и $\mu_2 = 1,500$.

Везде отображён участок траектории кончика ревербератора длительностью от 2001 до 3000 т.и. для уверенного исключения переходного процесса.

Можно заметить (рис. 16), что размер меандра зависит как от размера петель меандра, так и от удалённости динамической системы на портрете параметров от линии прямого дрейфа, R (рис. 10).

Обсуждение

Представлена бифуркационная диаграмма 2D-версии модели [Алиева—Панфилова](#) для области параметров: $a \in [0,150 \dots 0,270]$; $\mu_2 \in [0,01 \dots 0,90]$, — при фиксированных значениях остальных параметров: $\mu_1 = 0,2$; $\varepsilon_0 = 0,010$; $k = 8,0$; $D = 1$. На этой диаграмме выявлена область «бифуркационного пятна», причём с тремя подобластями: 1) при $\mu_2 \leq 0,35$ переходный процесс можно считать вариантами ранее описанного под названием «автоволновой серпантин»; 2) при $\mu_2 \geq 0,55$ наблюдается новый тип автоволнового переходного процесса, также несущий признаки бифуркационной памяти и притом очевидно отличающийся от автоволнового серпантина, и он получил название «автоволновой схлоп»; 3) в диапазоне $0,35 < \mu_2 < 0,55$ можно наблюдать большое разнообразие форм переходных процессов, как бы промежуточных между автоволновым серпантинном и автоволновым схлопом.

Показано, что на БГ предел слева сходится с пределом справа. То есть со стороны стационара типа меандр вблизи БГ также существует узкая область с феноменами БП, хотя они и выражены менее наглядно.

Продемонстрировано, что измерять время торможения с достаточной точностью оказалось возможно и ручным способом. Однако следует учитывать, что при этом способе измеряется время выхода на стационар, — тогда как при автоматизированном методе, предложенном в 2007 году, время торможения соответствует перегибу кривой динамики скорости дрейфа при переходе со второй в третью фазу торможения, и этот способ представляется более объективным, поскольку в нём учтены все точки кривой динамики модуля скорости дрейфа, а не только те, которые близки к стационару.

В дальнейшем планируется провести количественный анализ поведения автоволнового ревербератора для более точного нахождения положения бифуркационной границы с целью построения более точного параметрического портрета 2D-версии модели [АП](#), а также с целью более точного изучения особенностей здесь описанных новых типов переходных процессов.

Количественный анализ поведения автоволнового вихря необходим также и для выяснения вопроса о стационаре в сложных случаях. Так, представленная на рисунке 15 траектория, предположительно, указывает, что этот вариант эволюции вихря следует считать меандром; однако точный ответ можно узнать лишь по результатам исследования динамики модуля скорости дрейфа ревербератора. Похожие проблемы различения возникли и в некоторых иных случаях; например, при $a = 0,1950$ и $\mu_2 = 0,0428$ наблюдался серпантин с остановкой дрейфа после 6400 t.u.; однако при $a = 0,1950$ и $\mu_2 = 0,0429$ дожидаться остановки дрейфа не удалось и после 18000 t.u., — но достаточно ли этого наблюдения, чтобы делать вывод о меандре при этом сочетании параметров? Неясны и случаи дрейфа по прямой (рис. 9) когда окончания эволюции меандра наблюдать не удаётся из-за ограничений на размер среды.

Конечно, автоматизировать возможно и в целом всю процедуру получения количественных характеристик эволюции ревербератора и построение портрета параметров и бифуркационной диаграммы. Однако следует отметить, что при автоматизации разработчик исходит из уже ранее решённых задач, и потому созданная им процедура автоматизации сканирования пространства параметров весьма часто давала бы сбой при столкновении с новыми разновидностями поведения динамической системы. Именно так произошло бы и в представленном здесь исследовании модели [АП](#), ибо применяемый прежде алгоритм оказался непригодным для нового типа переходных процессов, для автоволнового схлопа. Поэтому нам пришлось сканирование пространства параметров провести аккуратно вручную, изменяя в ходе исследования свои представления о необходимых измерительных процедурах, — которые возможно теперь автоматизировать для будущих исследований.

Отметим, что при выборе более мелкого шага численного интегрирования может наблюдаться исчезновение явления БП в малой окрестности выявленной БГ (линии ∂M); однако это не сказывается на общей качественной картине представленного параметрического портрета, а лишь приводит к небольшому смещению критических линий. Поэтому представленные результаты следует понимать как полученные при конкретных выбранных схеме и шагах численного интегрирования, однако ожидается, что полученные результаты в целом должны воспроизводиться и при других вариантах интегрирования, — то есть они отражают существенные свойства самой модели [АП](#).

Сравнение различных вариантов переходного процесса у автоволновых систем, свойства которых определяются параметрами из бифуркационного пятна, приводит к выводам, что автоволновой серпантин и автоволновой схлоп представляют собой крайние формы на непрерывной шкале разнообразных иных форм переходного процесса, связанного с проявлением бифуркационной памяти. Именно тем они и выделяются, хотя в общем по своим характеристикам они, вероятно, ничем не примечательны в сравнении с иными формами переходного процесса в зоне бифуркационного пятна.

Размышления об особенностях портрета параметров модели 2D-версии [АП](#) привело нас к следующей гипотезе. Поскольку при устремлении параметра μ_2 к бесконечности стационарное движение ревербератора превращается в круг, возникает идея отобразить портрет параметров на сферу. Тогда на «полюсе» окажется одна точка «абсолютной» сингулярности (абсолютный круговой стационар), и от неё идёт БГ, разделяющая сферу на два «полушария», в одном из которых расположены варианты меандра (и псевдо-круговое вращение в некоторой подобласти, близкой к этой точке «абсолютной» сингулярности), другом же — «истинный» круговой стационар (и прилегающее к БГ бифуркационное пятно).

Представленные здесь результаты, очевидно, не исчерпывают вопросов даже о качественном исследовании параметрического портрета 2D-версии модели [АП](#). Остаются вопросы об эволюции систем, расположенных за

пределами представленного здесь диапазона параметров. Например, для 2D-версий классических автоволновых моделей были выявлены [9, 10] и иные характерные линии на параметрическом портрете: линия ∂P отграничивает область параметров, при которых волна возбуждения уже неспособна распространяться и затухает в месте её инициации; линия ∂R разграничивает область, в которой возможно образование ревербератора, и область, где существование ревербератора невозможно; и линия ∂C , отграничивающая область гипермеандра для классических автоволн (она для модели АП, похоже, отсутствует). Ранее было показано [42, 43, 44], что существование линии ∂P неотъемлемо связано с понятием «критическая кривизна» фронта автоволны, что понимается как «граничное значение кривизны фронта стационарного распространения волны» [42]. В представленных здесь результатах эти линии не попали в исследуемую область параметров модели, и в дальнейшем мы планируем достроить более полный вариант параметрического портрета 2D-версии модели АП, с указанием и этих характерных линий. Отметим, что линии ∂P , ∂R , ∂C считаются также линиями соответствующих бифуркаций [45].

Мы планируем провести и более аккуратное исследование особенностей динамики модуля скорости дрейфа ревербератора при тех новых автоволновых режимах, которые представлены в этой работе. Отметим, что представленные результаты демонстрируют принципиальное существование сложностей при работе, например, капитанов кораблей или диспетчеров авиации, в задачи которых входит умение различать стационарные режимы движения водных или воздушных судов, расположенные вблизи БГ по разные стороны от неё; для своевременного различения таких режимов требуется использование автоматизированных количественных методов, подобных предложенному здесь отслеживанию динамики модуля скорости дрейфа автоволнового ревербератора.

Из иных не решённых в этом исследовании задач укажем несколько наиболее, с нашей точки зрения, значимых.

Представляет интерес задача исследования особенностей формы электрокардиограммы, получаемой во время движения ревербератора по сценарию автоволнового схлопа. Ранее существование специального типа нарушений ритма сердца, обусловленных механизмом автоволнового серпантина, было теоретически исследовано в ряде работ [16, 17, 46], что привело к появлению представлений о «серпантинных» тахикардиях (англ.: tachycardia of the lacetic type или the lacetic tachycardia). Возможно, для схлопа тоже удастся выявить характерные ЭКГ-паттерны. Хотя такие результаты носят теоретический характер, они могут стать полезной подсказкой для кардиологов.

Как уже было отмечено выше, вычислительные эксперименты не привели к успеху в поисках явлений бифуркационной памяти (например, автоволнового серпантина) в двумерной версии модели ФитцХью—Нагумо. Причины такого неуспеха выяснить едва ли возможно при помощи методов прикладной математики, и потому требуется проведение аккуратного аналитического исследования.

Сохраняется задача проверки, окажется ли качественно таким же параметрический портрет при ε_0 , равном 0,002 (величина из оригинальной статьи [1]), а также, возможно, при иных значениях этого параметра.

Совершенно неисследованной остаётся 2D-версия модели ЗМА, описывающей систему свёртывания крови, столь важную для выживания организма человека и млекопитающих. Представляется несомненным существование и других «неклассических» автоволновых систем, необычные свойства которых могут представлять как теоретический, так и практический научный интерес.

Важность изучения автоволн едва ли можно переоценить. Например, практический интерес к развитию событий по сценариям эволюции автоволнового ревербератора обусловлен тем, что многие природные и социальные явления могут развиваться по схожим сценариям. Например, в области эпидемиологии можно ожидать наблюдений необъяснимой устойчивости к той или иной болезни людей, проживающих на некоторой территории и не отличающихся иммунитетом от лиц, проживающих на соседних территориях, охваченных эпидемией. Для научного объяснения таких наблюдений полезными окажутся представления о ядре автоволнового ревербератора — об области пространства, ничем не отличающейся от окружающих областей, но остающейся невовлечённой в автоволновой процесс лишь в силу свойств самого автоволнового ревербератора. И в этом смысле наиболее интересными могут быть как раз варианты переходных процессов, связанные с бифуркационным пятном, т. е. такие, когда можно наблюдать, что после длительной эпидемии, циклически охватывающей все связанные между собой территории, неожиданно формируется некоторая область, в которой эпидемии более не возникает, поскольку эта область совпала с ядром ревербератора после достижения эпидемическим процессом стационарного режима.

Альберту Заикину, одному из лауреатов Ленинской премии СССР за изучение автоволновых процессов, принадлежит высказывание [47, с. 232]: *«Жизнь — это способ существования активных сред»* (с аллюзией на широко известную максиму, сформулированную Фридрихом Энгельсом). Нобелевский лауреат Илья Пригожин указывал [48], что жизнь — это автокаталитический процесс, подобный тем, что наблюдаются в автоволновых системах (под автокатализом в этом контексте имеется в виду самовоспроизведение молекулы ДНК, лежащее в основе земной жизни). Изучение феноменов бифуркационной памяти в математических моделях активных сред привело нас к следующему развитию идей Заикина и Пригожина: *«Жизнь — это способ существования активных сред в области бифуркационного пятна, демонстрирующий характерные для этой области явления задержки потери устойчивости»*. Или более кратко: *«Жизнь — это задержка потери устойчивости, иногда наблюдаемая в самовоспроизводящихся сложных системах»*.

Авторы выражают надежду, что новое поколение исследователей вскоре присоединится к изучению неклассических автоволновых процессов и более полно раскроет особенности таких систем.

Список литературы

1. Aliev R., Panfilov A. A simple two-variable model of cardiac excitation // Chaos, Solitons & Fractals. **1996**. V. 7. № 3. P. 293–301.
[DOI: 10.1016/0960-0779\(95\)00089-5](https://doi.org/10.1016/0960-0779(95)00089-5)
2. Алиев Р. Р. Концептуальные и детальные математические модели электрической активности миокарда: дис. ... док. физ.-мат. наук: 03.00.02. — Пущино, **2007**. — 215 с.
3. Алиев Р. Р. Компьютерное моделирование электрической активности сердца // Успехи физиологических наук, **2010**. Т. 41. № 3. С. 44–63.
4. Коновалов П. В., Правдин С. Ф., Соловьева О. Э., Панфилов А. В. Динамика трехмерных вихрей в неоднородной модели сердца // Письма в ЖЭТФ. **2016**. Т. 104. № 2. С. 122–127. [DOI: 10.7868/S0370274X16140113](https://doi.org/10.7868/S0370274X16140113)
5. Елькин Ю. Е., Москаленко А. В., Стармер Ч. Ф. Спонтанная остановка дрейфа спиральной волны в однородной возбудимой среде // Математическая биология и биоинформатика. **2007**. Т. 2. № 1. С. 73–81.
[DOI: 10.17537/2006.1.27](https://doi.org/10.17537/2006.1.27)
6. Moskalenko A.V., Elkin Yu. E. The lacet: a new type of the spiral wave behavior // Chaos, Solitons and Fractals. **2009**. V. 40. № 1. P. 426–431.
[DOI: 10.1016/j.chaos.2007.07.081](https://doi.org/10.1016/j.chaos.2007.07.081)
7. Москаленко А. В., Тетуев Р. К., Махортых С. А. О состоянии исследований бифуркационных феноменов памяти и запаздывания // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. **2019**. № 109. 44 с. [DOI: 10.20948/prepr-2019-109](https://doi.org/10.20948/prepr-2019-109)
8. Makhortykh S.A., Moskalenko A.V. The Possibilities of Diagnosis and Prediction of Cardiac Disorders Based on the Results of Mathematical Modeling of the Myocardium and Regulation of Action of the Heart // Pattern Recognition and Image Analysis. **2023**. V. 33. № 4. P. 1293–1308.
[DOI: 10.1134/S1054661823040272](https://doi.org/10.1134/S1054661823040272)
9. Winfree A. Varieties of spiral wave behavior: An experimentalist's approach to the theory of excitable media // Chaos. **1991**. V. 1. № 3. P. 303–334.
[DOI: 10.1063/1.165844](https://doi.org/10.1063/1.165844)
10. Елькин Ю. Е. Автоволновые процессы // Математическая биология и биоинформатика. **2006**. Т. 1. № 1. С. 27–40.
[http://www.matbio.org/downloads/Elkin2006\(1_27\).pdf](http://www.matbio.org/downloads/Elkin2006(1_27).pdf)
11. Автоволновые процессы в системах с диффузией. Сборник научных трудов. Горький: Институт прикладной физики АН СССР **1981**.

12. Кринский В. И., Медвинский А. Б., Панфилов А. В. Эволюция автоволновых вихрей (волны в сердце) / гл. ред. Л. А. Ерлыкин. М.: Знание, **1986**.
13. Лоскутов А. Ю., Михайлов А. С. Основы теории сложных систем. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, **2007**. 620 с.
14. Твердислов В. А., Яковенко Л. В., Активные среды, автоволны и самоорганизация. От физико-химических систем к биологическим и социальным системам // Российский химический журнал (Журнал российского химического общества им. Д. И. Менделеева). **2000**, Т. 44. № 3. С. 21–32.
15. Елькин Ю. Е., Москаленко А. В. Базовые механизмы аритмий сердца // Клиническая аритмология / под ред. проф. А. В. Ардашева. М.: ИД Медпрактика-М, **2009**. 1200 с. ISBN 978-5-98803-198-7. С. 45–74.
16. Moskalenko A. Basic Mechanisms of Cardiac Arrhythmias // Cardiac Arrhythmias — Mechanisms, Pathophysiology, and Treatment / Ed. Wilbert S. Aronow. Croatia: InTech, **2014**. P. 1–44. [DOI: 10.5772/57557](https://doi.org/10.5772/57557)
17. Москаленко А. В. Глава «Базовые механизмы аритмий сердца» // Клиническая аритмология / под ред. проф. А. В. Ардашева М.: ИД Медпрактика-М, **2021**. ISBN 978-5-98803-444-5. С. 75–146.
18. Wiener N., Rosenblueth A. The Mathematical Formulation of the Problem of Conduction of Impulses in a Network of Connected Excitable Elements, Specifically in Cardiac Muscle // Arch. Inst. Cardiologia de Mexico. **1946**. V. 16. № 3–4. P. 205–65.
19. Москаленко А. В., Тетуев Р. К., Махортых С. А. К вопросу о современном состоянии теории колебаний // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. **2019**. № 44. 32 с. [DOI: 10.20948/prepr-2019-44](https://doi.org/10.20948/prepr-2019-44)
20. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, **1995**. 304 с.
21. Волны в кросс-диффузионных системах — особый класс нелинейных волн / М. А. Цыганов [и др.] // УФН. **2007**. Т. 177, № 3. С. 275–300. [DOI: 10.3367/UFNr.0177.200703b.0275](https://doi.org/10.3367/UFNr.0177.200703b.0275)
22. Zemtsov E.P., Tsyganov M.A., Ivanitsky G.R., and Horsthemke W. Solitary pulses and periodic wave trains in a bistable FitzHugh-Nagumo model with cross diffusion and cross advektion // Physical Review E. **2022**. V. 105. № 1. 105.014207. [DOI: 10.1103/PhysRevE.105.014207](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.105.014207)
23. FitzHugh R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane // Biophys. J. **1961**. V. 1. P. 445-466. [DOI: 10.1016/S0006-3495\(61\)86902-6](https://doi.org/10.1016/S0006-3495(61)86902-6)

24. Van der Pol. On „relaxation-oscillations“ // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical magazine and Journal of Science. **1926**. V. 2. № 11. P. 978–992. [DOI: 10.1080/14786442608564127](https://doi.org/10.1080/14786442608564127)
25. Ginoux J.-M. and Letellier Ch. Van der Pol and the history of relaxation oscillations: Toward the emergence of a concept // Chaos. **2012**. V. 22, P. 023120 [DOI: 10.1063/1.3670008](https://doi.org/10.1063/1.3670008)
26. Кринский В. И., Кокос Ю. М. Анализ уравнений возбудимых мембран III. Мембрана волокна Пуркинье. Сведение уравнений Нобла к системе второго порядка. Анализ автоматии по графикам нуль-изоклин // Биофизика. **1973**. Т. 18. № 6. С. 1067–1073.
27. Гренадер А. К., Панфилов А. В. Спиральные волны в сердце (теоретический анализ) // Биофизика. **1981**. Т. 26. № 6. С. 1107.
28. Biktashev V.N., Holden A.V., Nikolaev E.V. Spiral wave meander and symmetry of the plane // Int. J. Bifurc. Chaos. **1996**. V. 6. № 12A. P. 2433–40. [DOI: 10.1142/S0218127496001582](https://doi.org/10.1142/S0218127496001582)
29. Efimov I.R., Krinsky V.I., Jalife J. Dynamics of rotating vortices in the Beeler-Reuter model of cardiac tissue // Chaos, Solitons and Fractals. **1995** V. 5. № 3–4. P. 513–526.
30. Krinsky V.I., Efimov I.R. Vortices with linear cores in mathematical models of excitable media // Physica A. **1992**. V. 188. № 1–3. P. 55–60.
31. Особый класс автоволн — автоволны с остановкой — определяет пространственную динамику свертывания крови / Ф. И. Атауллаханов [и др.] // УФН. **2002**. Т. 172. № 6. С. 671–690. [DOI: 10.3367/UFNr.0172.200206c.0671](https://doi.org/10.3367/UFNr.0172.200206c.0671)
32. Сложные режимы распространения возбуждения и самоорганизации в модели свертывания крови. / Ф. И. Атауллаханов [и др.] // УФН. **2007**. Т. 177. № 1. С. 87–104. [DOI: 10.3367/UFNr.0177.200701d.0087](https://doi.org/10.3367/UFNr.0177.200701d.0087)
33. Wechselberger M. Canards // Scholarpedia. **2007**. V. 2. № 4. P. 1356. [DOI: 10.4249/scholarpedia.1356](https://doi.org/10.4249/scholarpedia.1356)
34. Biktashev V. N. Drift of spiral waves // Scholarpedia. **2007**. V. 2. № 4. P. 1836. [DOI: 10.4249/scholarpedia.1836](https://doi.org/10.4249/scholarpedia.1836)
35. “AutoWave Models” (AWM) — разработанное в Институте математических проблем биологии РАН Ю. Е. Елькиным программное обеспечение для проведения вычислительных экспериментов с использованием математических моделей автоволновых процессов, описываемых уравнениями типа реакция-диффузия. URL: <https://www.impb.ru/files.php>

36. Hodgkin A.L., Huxley A.F. A quantitative description of membrane current and its application conduction and excitation in nerve // J. Physiol. **1952**. V. 117. P. 500–544. [DOI: 10.1113/jphysiol.1952.sp004764](https://doi.org/10.1113/jphysiol.1952.sp004764)
37. Zeeman E.C. Differential equations for the heartbeat and nerve impulses // Dynamical Systems / Ed. M.M. Peixoto. Academic Press. **1973**. P. 683–741. .
[DOI: 10.1016/B978-0-12-550350-1.50055-2](https://doi.org/10.1016/B978-0-12-550350-1.50055-2)
38. Biktashev V.N. Dissipation of excitation of wavefronts // Phys. Rev. Lett. **2002**. V. 89. №16. [DOI: 10.1103/PhysRevLett.89.168102](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.89.168102)
39. Bar M., Gottschalk N., Eiswirth M., Ertl G. Spiral waves in a surface reaction: Model calculations // J. Chem. Phys. **1994**. V. 100. P. 1202–1214.
[DOI: 10.1063/1.466650](https://doi.org/10.1063/1.466650)
40. Chernyshov, A.V., Chernyshova, S.A. Improving the Phase Plane Method to Study the Influence of the “Bifurcation Memory” Effect on Ship Dynamics // Mech. Solids. **2024**. V. 59. P. 85–92. [DOI: 10.1134/S0025654423600691](https://doi.org/10.1134/S0025654423600691)
41. Фейгин М. И. О двукратных проявлениях эффекта бифуркационной памяти в динамических системах // Вестник научно-технического развития. **2008**. Т.7. №3. С.21–25. [URL: https://www.vntr.ru/nomera/-2008-3-7](https://www.vntr.ru/nomera/-2008-3-7)
42. Зыков В. С. Кинематика стационарной циркуляции в возбудимой среде // Биофизика. **1980**. Т. 25. № 2. С. 319–322.
43. Зыков В. С. Аналитическая оценка зависимости скорости волны возбуждения в двумерной возбудимой среде от кривизны её фронта // Биофизика. **1980**. Т. 25. № 5. С. 888–892.
44. Зыков В. С. Морозова О. Л. Частота циркуляции спиральной волны и форма импульса возбуждения // Биофизика. **1980**. Т. 25. № 6. С. 1071–1076.
45. Nikolaev E. V., Biktashev V. N. and Holden A. V. On bifurcations of spiral waves in the plane // International Journal of Bifurcation and Chaos. **1999**. V. 9. № 8. P. 1501–1516. [DOI: 10.1142/S021812749900105X](https://doi.org/10.1142/S021812749900105X)
46. Moskalenko A. Tachycardia as “Shadow Play” // Tachycardia / Ed. Takumi Yamada. Croatia: InTech, **2012**. P. 97–122. [DOI: 10.5772/25411](https://doi.org/10.5772/25411)
47. Твердислов В. А., Сидорова А. Э., Яковенко Л. В. Биофизическая экология. М.: КРАСАНД. 2012. 544 с.
48. Пригожин И. От существующего к возникающему: Время и сложность в физических науках / Пер. с англ. / под ред. Ю. Л. Климентовича. Изд. 2-е, доп. М.: Едиториал УРСС, **2002**. 288 с.

Оглавление

1. О теории автоволн	4
1.1. Активные среды и автоволновые процессы	4
1.2. Модели автоволн Z-типа	6
1.3. Модели неклассических автоволн	11
1.4. К дискуссии о дрейфе автоволны	13
2. Материалы и методы	15
3. Результаты	24
3.1. Автоволновой схлоп	25
3.2. Промежуточные варианты переходных процессов	27
3.3. Бифуркационная диаграмма исследуемой модели	29
Обсуждение	36
Список литературы	40