



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

У.В. Монахова

Орбитальная стабилизация
динамически вытянутого
малого космического
аппарата с помощью
магнитной системы
ориентации

Статья доступна по лицензии
[Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)



Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Монахова У.В. Орбитальная стабилизация динамически вытянутого малого космического аппарата с помощью магнитной системы ориентации // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2024. № 5. 18 с.
<https://doi.org/10.20948/prepr-2024-5>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2024-5>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук**

У.В. Монахова

**Орбитальная стабилизация
динамически вытянутого малого
космического аппарата с помощью
магнитной системы ориентации**

Москва — 2024

Монахова У.В.

Орбитальная стабилизация динамически вытянутого малого космического аппарата с помощью магнитной системы ориентации

В работе предложен алгоритм управления угловым движением динамически вытянутого космического аппарата. Алгоритм основан на прямом методе Ляпунова с использованием матричных коэффициентов управления. Расчетный механический момент реализуется с помощью магнитной системы управления ориентацией. С помощью теории Флоке подбираются параметры управления, обеспечивающие сходимость траектории движения к требуемой. С помощью численного моделирования проводится параметрическое исследование управляемого движения для достижения гравитационного положения равновесия аппарата формата 3U кубсат.

Ключевые слова: управление движением, магнитное управление, малый аппарат

Uliana Vladimirovna Monakhova

Orbital Stabilization of Dynamically Elongated Small Satellite Using Active Magnetic Attitude Control

The paper proposes an algorithm for angular motion control of a dynamically elongated spacecraft. The algorithm is based on the direct Lyapunov method using matrix control coefficients. The calculated mechanical torque is implemented using a magnetic attitude control system. Control parameters are selected using Floquet theory to ensure convergence of the motion trajectory to the required one. A numerical study of controlled motion to achieve gravitational attitude equilibrium of a 3U CubeSat is carried out.

Key words: motion control, magnetic control, small satellite

Оглавление

Введение	3
1. Постановка задачи и уравнения движения	4
2. Построение управления.....	7
3. Реализация управления при помощи магнитных катушек.....	8
4. Численное исследование.....	12
Заключение.....	16
Список литературы.....	17

Введение

Магнитные системы ориентации имеют значительно меньшие требования по энергетике, занимают меньший объем и имеют меньшую стоимость по сравнению с маховичной системой, поэтому такие системы часто устанавливаются на аппараты класса CubeSat. Однако, хотя трехосная стабилизация с помощью магнитной системы ориентации характеризуется невысокой конечной точностью как в орбитальной, так и в инерциальной системе отсчета, системы магнитного управления превосходно справляются с некоторыми конкретными задачами. Например, демпфирование угловой скорости с помощью магнитных катушек эффективно осуществляется после отделения спутника от ракеты-носителя [1,2]. Также магнитная система ориентации используется для разгрузки кинетического момента маховиков. Магнитное демпфирование может использоваться для достижения полупассивной стабилизации вдоль локальной вертикали совместно с использованием гравитационного момента [3]; стабилизации по вектору скорости спутника совместно с использованием аэродинамического момента [4,5] и вдоль вектора геомагнитной индукции [6]. Также с помощью магнитной системы ориентации можно обеспечить стабилизацию одной из осей с помощью задания вращения [7–9], включая стабилизацию по направлению к Солнцу [10–12] для зарядки аккумуляторов.

С помощью трехосного магнитного управления можно достичь стабилизации в любом конечном положении, в работах [5,13,14] теоретически доказано, что эта система управляема. Однако на практике достижение произвольного — далекого от гравитационного равновесия — положения в орбитальной системе отсчета является сложной задачей, а общая точность стабилизации невысока. В литературе рассматриваются различные подходы к управлению для достижения трехосной стабилизации спутника в орбитальной системе отсчета [15–18]. Несмотря на различия, все стратегии управления по существу реализуют закон обратной связи.

Один из алгоритмов управления представляет собой закон обратной связи, основанный на прямом методе Ляпунова. Первоначально этот тип управления был разработан для стабилизации как в инерциальной [19,20], так и в орбитальной [21,22] системах отсчета. Известно, что ляпуновское управление обеспечивает асимптотическую устойчивость требуемого положения. Заметим, что в ходе его реализации при помощи магнитных катушек невозможно создать управляющий момент вдоль вектора геомагнитной индукции, а значит требуемое движение формально не обладает глобальной асимптотической устойчивостью. Однако с помощью выбора коэффициентов управления удастся обеспечить асимптотически устойчивое положение равновесия [23]. В работе [24] предлагаемые значения коэффициентов управления и результирующий управляющий момент относительно невелики. Получающаяся трёхосная стабилизация чрезвычайно чувствительна к неопределенностям в знании тензора инерции, как показано в [25]. Если ограничить неопределенности в

знании моментов инерции, то можно улучшить точность стабилизации [26]. Значительные проблемы при стабилизации возникают у спутников с вытянутыми или дискообразными эллипсоидами инерции. Среди них — кубсаты формата 3U. В настоящей работе эта проблема решается с помощью рассмотрения матрицы коэффициентов усиления управления, что отличает ее от вышеупомянутых работ, где рассматриваются скалярные коэффициенты управления с обратной связью.

1. Постановка задачи и уравнения движения

В настоящее время одной из самых часто рассматриваемых платформ для МКА является 3U Cubesat. Особенностью данной платформы является динамическая вытянутость. Динамически вытянутым будем называть МКА с тензором инерции $\mathbf{J} = \text{diag}(A, A, C)$ и $A > C$. Далее будет рассмотрена задача орбитальной стабилизации динамически вытянутого МКА с магнитной системой управления угловым движением. Режим обеспечения трехосной ориентации представляет большой практический интерес. В этом случае ориентация и угловая скорость должны меняться по заранее заданному закону, в дальнейшем называемым опорным движением. Введем системы координат, которые будут использоваться далее для описания углового движения МКА:

$O_a Y_1 Y_2 Y_3$ — инерциальная система координат (ИСК): начало O_a расположено в центре масс Земли, $O_a Y_1$ направлена в точку весеннего равноденствия эпохи J2000, $O_a Y_3$ направлена перпендикулярно плоскости экватора;

$O_c X_1 X_2 X_3$ — связанная с КА система координат (ССК): начало O_c расположено в центре масс спутника, оси являются главными центральными осями инерции аппарата.

Для перехода между системами координат будем использовать матрицу направляющих косинусов $\mathbf{S}_{ИСК \rightarrow ССК}$, которая задает переход из ИСК в ССК. Для описания углового движения МКА будем использовать динамические уравнения Эйлера и кинематические соотношения Пуассона:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\Omega} &= \mathbf{M} + \mathbf{M}_{ctrl}, \\ \dot{\boldsymbol{\Lambda}} &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\Lambda} \circ \boldsymbol{\Omega}, \\ \dot{\mathbf{S}}_{ИСК \rightarrow ССК} &= -[\boldsymbol{\Omega}]_{\times} \mathbf{S}_{ИСК \rightarrow ССК}, \end{aligned} \quad (1)$$

где \mathbf{J} — тензор инерции аппарата, $\boldsymbol{\Omega} = [\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3]^T$ — абсолютная угловая скорость МКА в проекциях на оси ССК, \mathbf{M} , \mathbf{M}_{ctrl} — момент внешних сил и управляющий момент соответственно, $\boldsymbol{\Lambda} = (\lambda_0 \ \boldsymbol{\lambda})^T$ — кватернион,

описывающий поворот из ИСК в ССК, кватернионное произведение при этом введено следующим образом:

$$\Lambda \circ \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} q_0 \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 q_0 - (\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{q}) \\ \lambda_0 \mathbf{q} + q_0 \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{q} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Также здесь было введено обозначение для матрицы векторного произведения:

$$[\boldsymbol{\Omega}]_x = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В качестве внешнего момента рассматривается гравитационный момент, который можно записать следующим образом:

$$\mathbf{M}_{grav} = 3 \frac{\mu}{R^5} \mathbf{R} \times \mathbf{J} \mathbf{R}, \quad (3)$$

где \mathbf{R} — радиус-вектор, соединяющий центр Земли с центром масс МКА и $R = |\mathbf{R}|$, μ — гравитационный параметр Земли.

Так как в работе рассматривается система управления ориентацией на основе магнитных катушек, управление угловым движением происходит путем взаимодействия дипольного момента, создаваемого катушками, с магнитным полем Земли. Система уравнений, описывающих угловое движение МКА, оснащенного магнитными катушками, может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{J} \boldsymbol{\Omega} &= \mathbf{M} + \mathbf{m} \times \mathbf{B}, \\ \dot{\mathbf{S}}_{ИСК \rightarrow ССК} &= -[\boldsymbol{\Omega}]_x \mathbf{S}_{ИСК \rightarrow ССК}, \end{aligned} \quad (4)$$

где \mathbf{m} — дипольный момент, создаваемый катушками, \mathbf{B} — вектор магнитной индукции Земли. Сравнивая уравнения движения с (1), получаем, что управляющий момент выражается следующим образом:

$$\mathbf{M}_{ctrl} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}.$$

Из векторного произведения можно заметить, что управляющий момент не создается вдоль вектора магнитной индукции. Однако это не влияет на управляемость МКА, так как направление, вдоль которого недоступен управляющий момент, меняется в пространстве при движении аппарата по орбите. В силу того, что магнитные катушки не способны обеспечить управляющий момент вдоль вектора магнитного поля, естественным является выбор такой опорной ориентации, которая в пассивном движении была бы положением равновесия. В работе в качестве опорного движения будет

рассматриваться гравитационное положение равновесия в орбитальной системе координат (рис. 1).

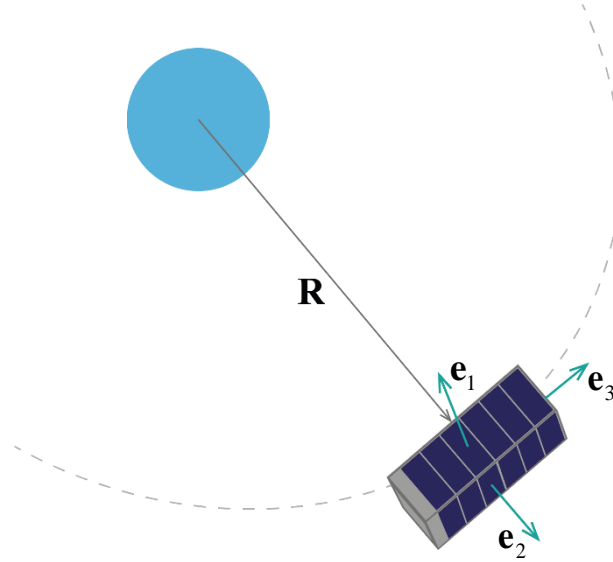


Рис. 1. Рассматриваемое в работе положение равновесия

Введем опорную систему координат (ОСК):

$O_c e_1 e_2 e_3$ — начало системы координат совпадает с центром масс МКА, положение ее осей описывается с помощью опорной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_{ref}$ и матрицы перехода из ИСК в ОСК $\mathbf{S}_{ИСК \rightarrow ОСК}$. Также будем полагать, что для опорной ориентации и угловой скорости выполнены соотношения Пуассона:

$$\dot{\mathbf{S}}_{ИСК \rightarrow ОСК} = -[\boldsymbol{\omega}_{ref}]_{\times} \mathbf{S}_{ИСК \rightarrow ОСК}, \quad (5)$$

где $\boldsymbol{\omega}_{ref}$ записана в проекциях на оси ОСК. Конкретные выражения для опорной угловой скорости и базисных векторов принимают следующий вид:

$$\boldsymbol{\omega}_{ref}^{ОСК} = \left(\sqrt{\frac{\mu}{R^3}}, 0, 0 \right), \quad \mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{R} \times \mathbf{V}}{|\mathbf{R} \times \mathbf{V}|}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|}, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2,$$

где \mathbf{R}, \mathbf{V} — радиус-вектор и скорость МКА в ИСК. Здесь рассматривается случай движения по круговой орбите радиуса R , а значит, опорная угловая скорость остается константой на всем движении.

Для того чтобы в дальнейшем получить закон управления, который будет приводить МКА в нужную ориентацию, необходимо записать уравнения углового движения относительно ОСК. Рассмотрим угловое движения МКА (1) под действием гравитационного момента (3) в проекциях на оси ССК:

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\Omega}}^{CCK} + \boldsymbol{\Omega}^{CCK} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\Omega}^{CCK} = 3\frac{\mu}{R^5}\mathbf{R}^{CCK} \times \mathbf{J}\mathbf{R}^{CCK} + \mathbf{M}_{ctrl}^{CCK}, \quad (6)$$

$$\dot{\mathbf{S}}_{ИСК \rightarrow CCK} = -[\boldsymbol{\Omega}]_{\times} \mathbf{S}_{ИСК \rightarrow CCK},$$

где $\mathbf{R}^{CCK} = \mathbf{S}_{ИСК \rightarrow CCK} \mathbf{R}^{ИСК}$. Абсолютную угловую скорость можно разложить на сумму опорной угловой скорости и угловой скорости относительно ОСК:

$$\boldsymbol{\Omega}^{CCK} = \mathbf{S}_{ОСК \rightarrow CCK} \boldsymbol{\omega}_{ref}^{ОСК} + \boldsymbol{\omega}_{rel}^{CCK}, \quad (7)$$

где $\mathbf{S}_{ОСК \rightarrow CCK}$ — матрица перехода из ОСК в ССК, $\boldsymbol{\omega}_{rel}^{CCK}$ — относительная угловая скорость, записанная в проекциях на оси ССК. Продифференцируем полученное выражение по времени:

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}}^{CCK} = \dot{\mathbf{S}}_{ОСК \rightarrow CCK} \boldsymbol{\omega}_{ref}^{ОСК} + \mathbf{S}_{ОСК \rightarrow CCK} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ref}^{ОСК} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel}^{CCK}.$$

Зная, что опорная угловая скорость совпадает с орбитальной угловой скоростью на круговой орбите, получим $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ref}^{ОСК} = 0$. Также, зная, что для $\mathbf{S}_{ОСК \rightarrow CCK}$ выполняются соотношения Пуассона $\dot{\mathbf{S}}_{ОСК \rightarrow CCK} = -[\boldsymbol{\omega}_{rel}]_{\times} \mathbf{S}_{ОСК \rightarrow CCK}$, получим итоговое выражение для производной абсолютной угловой скорости:

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}}^{CCK} = -[\boldsymbol{\omega}_{rel}]_{\times} \mathbf{S}_{ОСК \rightarrow CCK} \boldsymbol{\omega}_{ref}^{ОСК} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel}^{CCK}. \quad (8)$$

Подставляя выражения для абсолютной угловой скорости (8) и (7) в уравнения, описывающие угловое движение (6), получим уравнения относительного углового движения:

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel}^{CCK} = -(\mathbf{S}_{ОСК \rightarrow CCK} \boldsymbol{\omega}_{ref}^{ОСК} + \boldsymbol{\omega}_{rel}^{CCK}) \times \mathbf{J}(\mathbf{S}_{ОСК \rightarrow CCK} \boldsymbol{\omega}_{ref}^{ОСК} + \boldsymbol{\omega}_{rel}^{CCK}) +$$

$$+ \mathbf{J}[\boldsymbol{\omega}_{rel}]_{\times} \mathbf{S}_{ОСК \rightarrow CCK} \boldsymbol{\omega}_{ref}^{ОСК} + 3\frac{\mu}{R^5}\mathbf{R}^{CCK} \times \mathbf{J}\mathbf{R}^{CCK} + \mathbf{M}_{ctrl}^{CCK}. \quad (9)$$

2. Построение управления

Для синтеза закона управления будем использовать прямой метод Ляпунова. Будем искать кандидат-функцию Ляпунова в виде:

$$V = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}_{rel}, \mathbf{P}\boldsymbol{\omega}_{rel}) + 2(1 - q_0),$$

где \mathbf{P} — положительно определенная диагональная матрица, q_0 — это скалярная часть кватерниона $\mathbf{Q} = (q_0 \quad \mathbf{q})^T$, описывающего поворот из ОСК в ССК. Для \mathbf{Q} будем считать, что справедливы соотношения Пуассона:

$$\dot{\mathbf{Q}} = \frac{1}{2} \mathbf{Q} \circ \boldsymbol{\omega}_{rel} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -(\mathbf{q}, \boldsymbol{\omega}_{rel}) \\ q_0 \boldsymbol{\omega}_{rel} + \mathbf{q} \times \boldsymbol{\omega}_{rel} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Производная кандидат-функции Ляпунова в силу уравнений движения (9) и с учетом (10):

$$\dot{V} = (\boldsymbol{\omega}_{rel}, \mathbf{P} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel}) - 2\dot{q}_0 = (\boldsymbol{\omega}_{rel}, \mathbf{P} \mathbf{J}^{-1} (\hat{\mathbf{M}} + \mathbf{M}_{ctrl}) + \mathbf{q}),$$

где для удобства введено $\hat{\mathbf{M}} = -\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{J} \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{J} [\boldsymbol{\omega}_{rel}]_{\times} \boldsymbol{\omega}_{ref} + 3 \frac{\mu}{R^5} \mathbf{R} \times \mathbf{J} \mathbf{R}$.

Так как матрицы \mathbf{P} и \mathbf{J} являются диагональными и вследствие этого перестановочными,

$$\dot{V} = (\mathbf{P} \mathbf{J}^{-1} \boldsymbol{\omega}_{rel}, \hat{\mathbf{M}} + \mathbf{M}_{ctrl} + \mathbf{J} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{q}).$$

Пусть управляющий момент удовлетворяет соотношению

$$\mathbf{M}_{ctrl} = -\hat{\mathbf{M}} - \mathbf{K}_q \mathbf{q} - \mathbf{K}_\omega \boldsymbol{\omega}_{rel}, \quad (11)$$

где \mathbf{K}_ω — положительно определенная диагональная матрица и введена матрица $\mathbf{K}_q = \mathbf{J} \mathbf{P}^{-1}$, которая также является положительно определенной и диагональной. Подставляя выражение для управляющего момента, получим

$$\dot{V} = -(\mathbf{K}_q^{-1} \boldsymbol{\omega}_{rel}, \mathbf{K}_\omega \boldsymbol{\omega}_{rel}) \leq 0.$$

Так как матрица $\mathbf{K}_q^{-1} \mathbf{K}_\omega$ является положительно определенной, то производная функции Ляпунова будет являться неположительной. Получаем, что для предложенного управляющего момента будут выполняться условия теоремы Барбашина-Красовского. Это означает, что предложенный управляющий момент (11) будет обеспечивать асимптотическую сходимость к опорному движению.

3. Реализация управления при помощи магнитных катушек

В работе мы будем реализовывать управляющий момент, полученный в предыдущем разделе, с помощью магнитной системы управления ориентацией. Как было отмечено ранее, управляющий момент нельзя реализовать вдоль вектора магнитной индукции Земли, т.е. от желаемого управления (11) останется часть перпендикулярная \mathbf{B} :

$$\mathbf{M}_{ctrl}^\perp = \mathbf{M}_{ctrl} - \mathbf{e}_B (\mathbf{e}_B, \mathbf{M}_{ctrl}) = -[\mathbf{e}_B]_{\times} [\mathbf{e}_B]_{\times} \mathbf{M}_{ctrl}, \quad (12)$$

где $\mathbf{e}_B = \mathbf{B} / |\mathbf{B}|$ — единичный вектор, направленный вдоль вектора магнитной индукции. Так как мы не можем реализовать полную величину управления, которое обеспечивает асимптотическую сходимость к опорному движению, рассмотрим уравнения углового движения в линейном приближении. В дальнейшем выберем матричные коэффициенты управления \mathbf{K}_ω и \mathbf{K}_q таким образом, чтобы управление обеспечивало сходимость к опорному движению в линейном приближении.

Для дальнейшего исследования линеаризуем уравнения движения (9) вблизи опорного движения. Зададим матрицу $\mathbf{S}_{OCK \rightarrow CCK}$ следующей последовательностью поворотов: вокруг второй оси на α_2 , вокруг первой на α_1 и вокруг третьей на α_3 . В таком случае столбцы матрицы $\mathbf{S}_{OCK \rightarrow CCK}$ имеют вид

$$\mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} \cos \alpha_3 \cos \alpha_2 + \sin \alpha_3 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \\ -\sin \alpha_3 \cos \alpha_2 + \cos \alpha_3 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \\ \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} \sin \alpha_3 \cos \alpha_1 \\ \cos \alpha_3 \cos \alpha_1 \\ -\sin \alpha_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{S}_3 = \begin{pmatrix} -\cos \alpha_3 \sin \alpha_2 + \sin \alpha_3 \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \\ \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 + \cos \alpha_3 \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \\ \cos \alpha_2 \cos \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Линеаризуя матрицу $\mathbf{S}_{OCK \rightarrow CCK}$ в окрестности опорного движения $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, получим

$$\mathbf{S}_{OCK \rightarrow CCK} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_3 & -\alpha_2 \\ -\alpha_3 & 1 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & -\alpha_1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для удобства перепишем следующим образом $\mathbf{S}_{OCK \rightarrow CCK} = \mathbf{E} - [\mathbf{a}]_x$, где \mathbf{E} — единичная матрица 3×3 , $\mathbf{a} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]^T$. Подставим полученное выражение в (9), оставляя только члены первого порядка и учитывая, что $\boldsymbol{\omega}_{rel}$ в окрестности опорного движения — это малая величина:

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel}^{CCK} = & -\boldsymbol{\omega}_{ref}^{OCK} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{ref}^{OCK} - \boldsymbol{\omega}_{rel}^{CCK} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{ref}^{OCK} - \boldsymbol{\omega}_{ref}^{OCK} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{rel}^{CCK} + \\
& + [\boldsymbol{\alpha}]_{\times} \boldsymbol{\omega}_{ref}^{OCK} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{ref}^{OCK} + \boldsymbol{\omega}_{ref}^{OCK} \times \mathbf{J}[\boldsymbol{\alpha}]_{\times} \boldsymbol{\omega}_{ref}^{OCK} + \mathbf{J}[\boldsymbol{\omega}_{rel}]_{\times} \boldsymbol{\omega}_{ref}^{OCK} + \\
& + 3\frac{\mu}{R^5} \mathbf{S}_{ИСК \rightarrow ОСК} \mathbf{R}^{ИСК} \times \mathbf{J}\mathbf{S}_{ИСК \rightarrow ОСК} \mathbf{R}^{ИСК} - \\
& - 3\frac{\mu}{R^5} [\boldsymbol{\alpha}]_{\times} \mathbf{S}_{ИСК \rightarrow ОСК} \mathbf{R}^{ИСК} \times \mathbf{J}\mathbf{S}_{ИСК \rightarrow ОСК} \mathbf{R}^{ИСК} - \\
& - 3\frac{\mu}{R^5} \mathbf{S}_{ИСК \rightarrow ОСК} \mathbf{R}^{ИСК} \times \mathbf{J}[\boldsymbol{\alpha}]_{\times} \mathbf{S}_{ИСК \rightarrow ОСК} \mathbf{R}^{ИСК} + \mathbf{M}_{ctrl}^{CCK}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Когда ССК совпадает с ОСК, $\boldsymbol{\omega}_{rel} = 0$ и $\mathbf{S}_{ОСК \rightarrow ССК} = \mathbf{E}$, тогда

$$\boldsymbol{\omega}_{ref}^{OCK} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{ref}^{OCK} = 3\frac{\mu}{R^5} \mathbf{S}_{ИСК \rightarrow ОСК} \mathbf{R}^{ИСК} \times \mathbf{J}\mathbf{S}_{ИСК \rightarrow ОСК} \mathbf{R}^{ИСК}.$$

В таком случае (13) упрощается

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel}^{CCK} = & -\boldsymbol{\omega}_{rel}^{CCK} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{ref}^{OCK} - \boldsymbol{\omega}_{ref}^{OCK} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{rel}^{CCK} + \\
& + [\boldsymbol{\alpha}]_{\times} \boldsymbol{\omega}_{ref}^{OCK} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{ref}^{OCK} + \boldsymbol{\omega}_{ref}^{OCK} \times \mathbf{J}[\boldsymbol{\alpha}]_{\times} \boldsymbol{\omega}_{ref}^{OCK} + \mathbf{J}[\boldsymbol{\omega}_{rel}]_{\times} \boldsymbol{\omega}_{ref}^{OCK} - \\
& - 3\frac{\mu}{R^5} [\boldsymbol{\alpha}]_{\times} \mathbf{S}_{ИСК \rightarrow ОСК} \mathbf{R}^{ИСК} \times \mathbf{J}\mathbf{S}_{ИСК \rightarrow ОСК} \mathbf{R}^{ИСК} - \\
& - 3\frac{\mu}{R^5} \mathbf{S}_{ИСК \rightarrow ОСК} \mathbf{R}^{ИСК} \times \mathbf{J}[\boldsymbol{\alpha}]_{\times} \mathbf{S}_{ИСК \rightarrow ОСК} \mathbf{R}^{ИСК} + \mathbf{M}_{ctrl}^{CCK}.
\end{aligned}$$

Зная, что опорная угловая скорость совпадает с орбитальной угловой скоростью на круговой орбите, введем $|\boldsymbol{\omega}_{ref}| = \omega = \sqrt{\mu / R^3}$, тогда

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel}^{CCK} = & -\boldsymbol{\omega}_{rel}^{CCK} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{ref}^{OCK} - \boldsymbol{\omega}_{ref}^{OCK} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{rel}^{CCK} + \\
& + [\boldsymbol{\alpha}]_{\times} \boldsymbol{\omega}_{ref}^{OCK} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{ref}^{OCK} + \boldsymbol{\omega}_{ref}^{OCK} \times \mathbf{J}[\boldsymbol{\alpha}]_{\times} \boldsymbol{\omega}_{ref}^{OCK} + \mathbf{J}[\boldsymbol{\omega}_{rel}]_{\times} \boldsymbol{\omega}_{ref}^{OCK} - \\
& - 3\omega^2 \left([\boldsymbol{\alpha}]_{\times} \frac{\mathbf{R}^{OCK}}{R} \times \mathbf{J} \frac{\mathbf{R}^{OCK}}{R} + \frac{\mathbf{R}^{OCK}}{R} \times \mathbf{J}[\boldsymbol{\alpha}]_{\times} \frac{\mathbf{R}^{OCK}}{R} \right) + \mathbf{M}_{ctrl}.
\end{aligned} \tag{14}$$

Для выбранного положения равновесия (Рис. 1), используя (14), можем получить линейные уравнения относительного движения в ССК:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel} = \mathbf{Y}_{\omega} \boldsymbol{\omega}_{rel} + \mathbf{Y}_{\alpha} \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{J}^{-1} \mathbf{M}_{ctrl}, \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\omega}_{rel}, \end{cases}$$

где

$$\mathbf{Y}_\omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{B+C-A}{B}\omega \\ 0 & \frac{A-C-B}{B}\omega & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{Y}_\alpha = \begin{pmatrix} 3\omega^2 \frac{B-C}{A} & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 \frac{C-A}{B} & 0 \\ 0 & 0 & 4\omega^2 \frac{B-A}{C} \end{pmatrix}.$$

Подставляя полученный в предыдущем разделе закон управления (11) и учитывая (12), итоговые уравнения можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel} = \mathbf{Y}_\omega \boldsymbol{\omega}_{rel} + \mathbf{Y}_\alpha \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{J}^{-1} [\mathbf{e}_B]_\times [\mathbf{e}_B]_\times (\mathbf{J} \mathbf{Y}_\omega \boldsymbol{\omega}_{rel} + \mathbf{J} \mathbf{Y}_\alpha \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{K}_q \mathbf{q} + \mathbf{K}_\omega \boldsymbol{\omega}_{rel}), \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\omega}_{rel}. \end{cases} \quad (15)$$

Если в качестве модели магнитного поля Земли взять модель прямого диполя [27], то вследствие движения МКА по круговой орбите уравнения (15) будут являться периодическими с периодом $T = 2\pi / \omega$. В таком случае для изучения движения можно применить теорию Флоке [28]. Рассмотрим фундаментальную матрицу Φ для системы (15), полученную для начальных условий $\Phi(0) = \mathbf{E}$, где \mathbf{E} — единичная матрица 6×6 . Пусть ρ_k являются корнями характеристического уравнения

$$\det(\Phi(T) - \rho \mathbf{E}) = 0,$$

тогда если для любого k выполняется $\text{Re}(\ln \rho_k) < 0$, то положение равновесия $\boldsymbol{\alpha} = 0$, $\boldsymbol{\omega}_{rel} = 0$ линейной системы (15) будет асимптотически устойчивым. Более того, чем меньше $\max \text{Re}(\ln \rho_k)$, тем быстрее сходится система к положению равновесия. Таким образом, оптимальные матричные коэффициенты управления \mathbf{K}_ω и \mathbf{K}_q получаются из решения задачи минимизации

$$\max_k \text{Re}(\ln \rho_k) \rightarrow \min.$$

Следует иметь в виду, что полученные \mathbf{K}_ω и \mathbf{K}_q будут оптимальными только для линейной системы уравнений. С другой стороны, поскольку основное возмущение, вызванное гравитационным моментом, учитывается в уравнениях, а различие между упрощенной моделью магнитного поля и реальной довольно мало, можно рассчитывать, что закон управления обеспечит приход МКА в нужное положение с некоторой точностью.

4. Численное исследование

Для демонстрации работы предложенного алгоритма управления ориентацией при помощи магнитных катушек проводилось численное моделирование, учитывающее различные факторы. В моделировании будет рассматриваться низкая околоземная орбита высотой 400 км и наклоном 97°, в силу чего на МКА будет действовать не только гравитационный момент, но и аэродинамический. Чтобы записать аэродинамический момент, будем считать, что МКА имеет форму параллелепипеда, как в случае с платформой 3U Cubesat. Момент аэродинамических сил будет состоять из моментов, действующих на стороны МКА. Пусть \mathbf{n}_j — это вектор из центра масс МКА в геометрический центр j -й стороны, а \mathbf{F}_{aero}^j — это аэродинамическая сила, действующая на j -ю сторону, тогда аэродинамический момент:

$$\mathbf{M}_{aero} = \sum_{j=1}^6 \mathbf{n}_j \times \mathbf{F}_{aero}^j. \quad (16)$$

Модель силы атмосферного сопротивления выглядит следующим образом:

$$\mathbf{F}_{aero} = -\frac{C_D}{2} S \rho_{atm} \mathbf{V} |\mathbf{V}|, \quad (17)$$

где C_D — коэффициент сопротивления, S — площадь поперечного сечения относительно набегающего потока, ρ_{atm} — плотность атмосферы, \mathbf{V} — скорость МКА относительно атмосферы. В моделировании считаем плотность ρ_{atm} постоянной и равной $4.2 \cdot 10^{-12}$ кг/м³. Скорость аппарата относительно атмосферы будет определяться исходя из того, что атмосфера вращается вместе с Землей, т.е. ее скорость в точке нахождения аппарата \mathbf{R} определяется как $\mathbf{V}_{atmo} = \boldsymbol{\Omega}_E \times \mathbf{R}$, где $\boldsymbol{\Omega}_E$ — угловая скорость вращения Земли. Для моделирования магнитного поля Земли будет использована модель IGRF [29]. Также будем считать, что МКА для определения величины магнитного поля использует магнитометр. Вследствие этого при подсчете управляющего момента (12) будет учитываться нормально распределенная ошибка со среднеквадратическим отклонением 300 нТл, что соответствует неточности определения магнитного поля магнитометром. Для расчета управляющего момента были использованы следующие коэффициенты:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_q &= \text{diag}(1.05 \cdot 10^{-5}, -1.40 \cdot 10^{-7}, 5.22 \cdot 10^{-7}) \text{ Н} \cdot \text{м}, \\ \mathbf{K}_\omega &= \text{diag}(5.36 \cdot 10^{-3}, 0.1 \cdot 10^{-3}, 0.59 \cdot 10^{-3}) \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}. \end{aligned}$$

В первую очередь рассмотрим, как неточность начального положения влияет на сходимость закона управления. Будем считать, что в начальный момент времени МКА находится в окрестности опорного движения:

$$\mathbf{Q}_0 = \mathbf{Q}_{ref} \circ \Delta\mathbf{Q}, \quad \boldsymbol{\omega}_0 = \boldsymbol{\omega}_{ref} + \Delta\boldsymbol{\omega},$$

где $\Delta\mathbf{Q}$, $\Delta\boldsymbol{\omega}$ соответствуют начальным ошибкам стабилизации относительно опорного движения, \mathbf{Q}_{ref} , $\boldsymbol{\omega}_{ref}$ — кватернион и угловая скорость, соответствующие опорному движению. При этом $\Delta\mathbf{Q} = \left(\cos \frac{\varphi}{2}, \mathbf{e} \sin \frac{\varphi}{2} \right)$, $\varphi \in N(0, \sigma_q^2)$, где \mathbf{e} — равномерно распределенный по сфере единичный вектор, $\Delta\boldsymbol{\omega} \in N(\mathbf{0}, \mathbf{E}\sigma_\omega^2)$. В моделировании учитывались следующие величины отклонений: $\sigma_q = 5^\circ$, $\sigma_\omega = 0.0029$ град/с. Рассматриваемая платформа МКА представляет собой параллелепипед с размерами $10 \times 10 \times 30$ см и массой 5 кг. Также учитывалась неточность знания тензора инерции аппарата, которая заключалась в ошибке знания главных моментов инерции 5% и неточности знания направления главных осей инерции 1° . При расчете аэродинамики считаем, что центр масс находится в геометрическом центре параллелепипеда. Результаты 200 испытаний представлены на рис. 2-5. Для каждого испытания на рис. 2-4 представлены разница главных моментов инерции по осям Ox и Oy ССК, разница начальной угловой скорости с опорной $\Delta\boldsymbol{\omega}$ и отклонение начальной ориентации МКА от опорной соответственно. На рис. 5 представлены результаты средней ошибки ориентации за последний виток и за последние полвитка. Как видно из результатов моделирования, предложенный алгоритм управления справляется с задачей орбитальной стабилизации, при этом точность ориентации составляет порядка $4-6^\circ$.

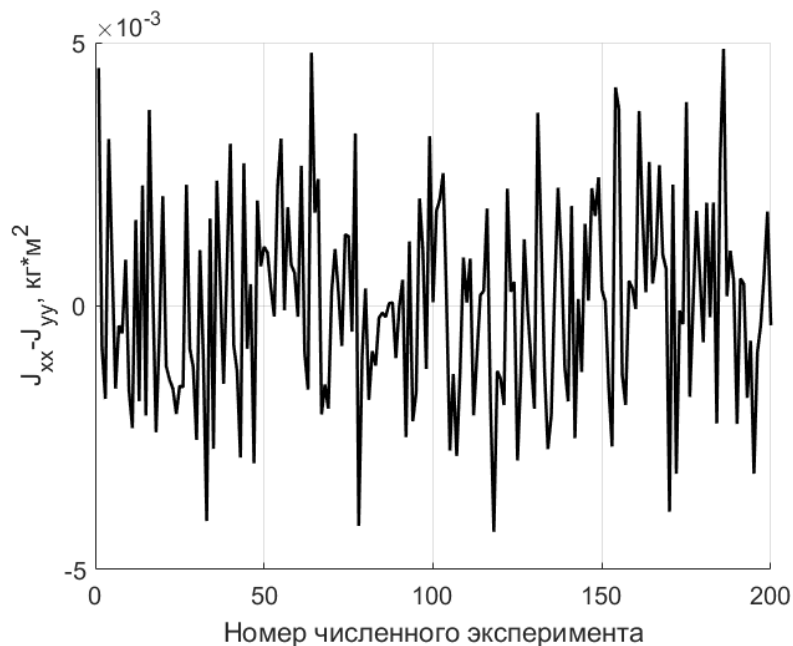


Рис. 2. Ошибка по моментам инерции аппарата

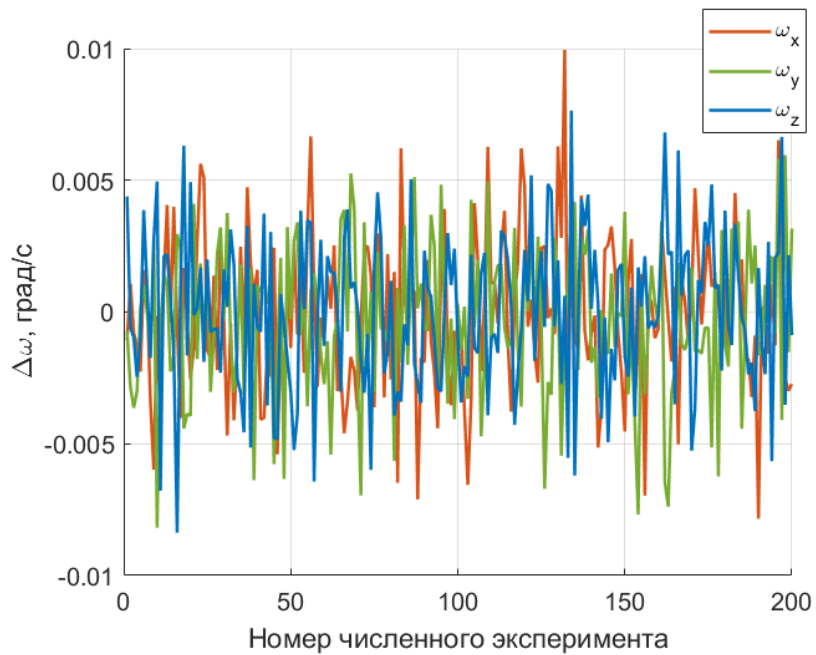


Рис. 3. Ошибка по начальной угловой скорости

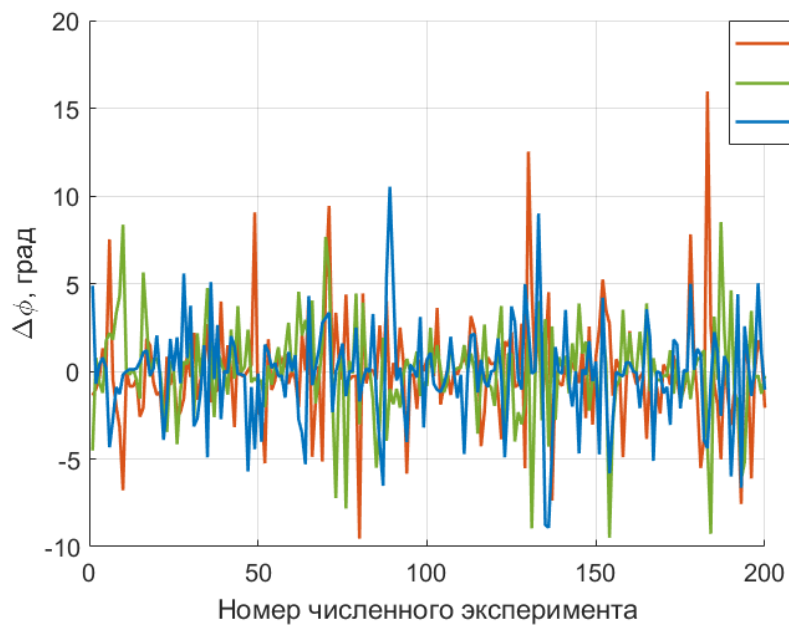


Рис. 4. Ошибка ориентации МКА относительно опорного движения

Интерес также представляет влияние аэродинамики на сходимость закона управления. Будем считать, что в начальный момент ориентация аппарата совпадает с положением равновесия, а центр масс сдвинут вдоль одной из осей ССК. Результаты моделирования представлены на рис. 6.

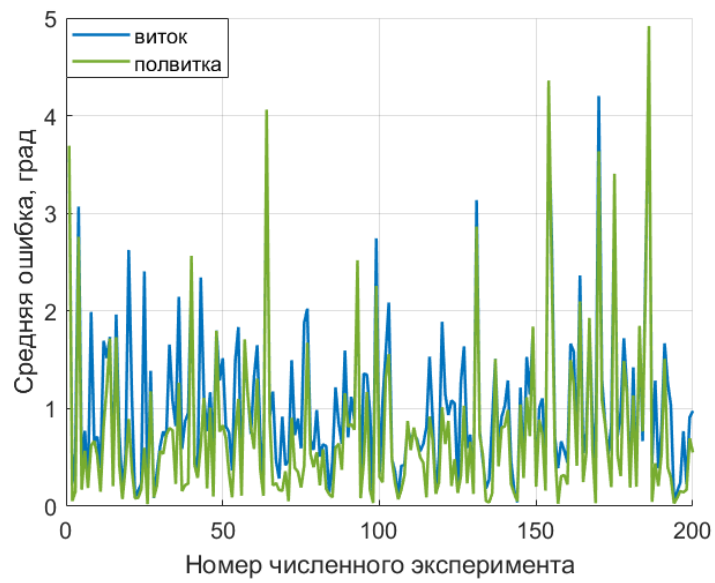


Рис. 5. Ошибка ориентации МКА относительно опорного движения

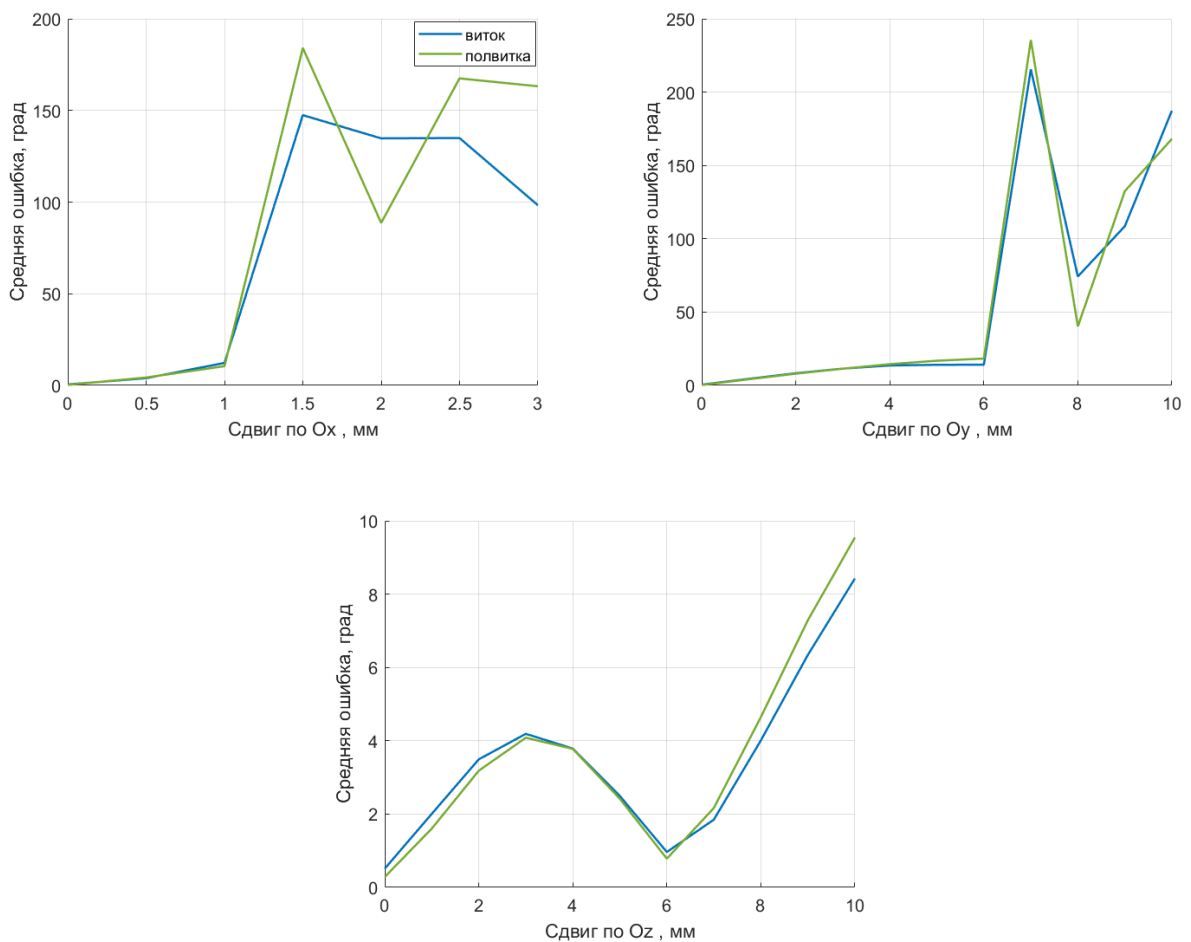


Рис. 6. Точность ориентации МКА относительно опорного движения в зависимости от сдвига центра масс

Как видно из результатов моделирования, наиболее чувствительным закон управления оказывается к сдвигу центра масс вдоль оси Ox ССК. Это может быть объяснено тем, что аэродинамический момент, возникающий в такой ситуации, будет стараться повернуть МКА из плоскости орбиты. В то же время сдвиги вдоль других осей приводят к появлению возмущающего момента по нормали к плоскости орбиты, вдоль которой в нашем случае (приполярная орбита) практически всегда можно создать управляющее воздействие. Отметим также улучшение точности при увеличении сдвига вдоль оси Oz до некоторых пределов: это связано с тем, что в рассматриваемом положении равновесия при таком сдвиге возникает восстанавливающий аэродинамический момент, который способствует стабилизации оси симметрии МКА по потоку.

Заключение

Предложен алгоритм стабилизации гравитационного положения равновесия вытянутого МКА с помощью магнитной системы управления. Проведено исследование управляемого движения, которое показало работоспособность алгоритма с учетом ошибок начальных условий и неточности знания тензора инерции: точность ориентации в среднем получается не хуже 5 градусов. Если центр масс аппарата не совпадает с геометрическим центром, то из-за наличия атмосферы на низких околоземных орбитах существенным оказывается влияние аэродинамического момента. В некоторых случаях он оказывается превалирующим над управляющим моментом, и аппарат не удастся стабилизировать. Также следует отметить, что, хоть и была рассмотрена стабилизация только одного из гравитационных положений равновесия, предложенный подход к управлению применим и к другим положениям равновесия.

Список литературы

1. Stickler A.C., Alfriend K.T. Elementary Magnetic Attitude Control System // *J. Spacecr. Rockets*. 1976. Vol. 13, № 5. P. 282–287.
2. Desouky M.A.A., Abdelkhalik O. A new variant of the B-dot control for spacecraft magnetic detumbling // *Acta Astronaut. Pergamon*, 2020. Vol. 171. P. 14–22.
3. Ignatov A.I., Sazonov V.V. Stabilization of the Gravitational Orientation Mode of an Artificial Earth Satellite (AES) by the Electromagnetic Control System // *Cosm. Res.* 2020 581. Springer, 2020. Vol. 58, № 1. P. 33–41.
4. Belokonov I. V., Timbai I.A., Nikolaev P.N. Analysis and Synthesis of Motion of Aerodynamically Stabilized Nanosatellites of the CubeSat Design // *Gyroscopy Navig. Pleiades Publishing*, 2018. Vol. 9, № 4. P. 287–300.
5. Kalenova V.I., Morozov V.M. Stabilization of Satellite Relative Equilibrium Using Magnetic and Lorentzian Moments // *Cosm. Res. Pleiades journals*, 2021. Vol. 59, № 5. P. 343–356.
6. Ignatov A.I., Sazonov V. V. Investigation of Steady-State Motion of an Artificial Earth Satellite in the Uniaxial Magnetic Orientation Mode // *Cosm. Res. Pleiades journals*, 2021. Vol. 59, № 2. P. 112–125.
7. Avanzini G., de Angelis E.L., Giulietti F. Spin-axis pointing of a magnetically actuated spacecraft // *Acta Astronaut.* 2014. Vol. 94, № 1. P. 493–501.
8. Slavinskis A. et al. High spin rate magnetic controller for nanosatellites // *Acta Astronaut. Pergamon*, 2014. Vol. 95, № 1. P. 218–226.
9. De Ruiter A., Lee J., Ng A. A Fault-Tolerant Magnetic Spin Stabilizing Controller For The JC2Sat-FF Mission // *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit*, Honolulu, Hawaii, 18–21 August 2008. AIAA-2008-7486.
10. Roldugin D.S. Stability of a Magnetically Actuated Satellite towards the Sun on a Sun-Synchronous Orbit // *Cosm. Res. Pleiades Publishing*, 2023. Vol. 61, № 2. P. 146–153.
11. Colagrossi A., Lavagna M. A Spacecraft Attitude Determination and Control Algorithm for Solar Arrays Pointing Leveraging Sun Angle and Angular Rates Measurements // *Algorithms 2022*, Vol. 15, Page 29. Multidisciplinary Digital Publishing Institute, 2022. Vol. 15, № 2. P. 29.
12. Roldugin D., Tkachev S., Ovchinnikov M. Asymptotic Motion of a Satellite under the Action of Sdot Magnetic Attitude Control // *Aerosp.* 2022, Vol. 9, Page 639. Multidisciplinary Digital Publishing Institute, 2022. Vol. 9, № 11. P. 639.
13. Bhat S.P. Controllability of nonlinear time-varying systems: applications to spacecraft attitude control using magnetic actuation // *IEEE Trans. Automat. Contr.* 2005. Vol. 50, № 11. P. 1725–1735.
14. Liu S. et al. Controllability and observability of discretized satellite magnetic attitude control system // *AIMS Math.* 2023 47899. American Institute of Mathematical Sciences, 2023. Vol. 8, № 4. P. 7899–7916.

15. Wiśniewski R. Sliding Mode Attitude Control for Magnetic Actuated Satellite // IFAC Proc. Vol. Elsevier, 1998. Vol. 31, № 21. P. 179–184.
16. Sofyalı A., Jafarov E.M., Wisniewski R. Robust and global attitude stabilization of magnetically actuated spacecraft through sliding mode // *Aerosp. Sci. Technol.* Elsevier Masson, 2018. Vol. 76. P. 91–104.
17. Ovchinnikov M.Y. et al. Fully magnetic sliding mode control for acquiring three-axis attitude // *Acta Astronaut.* Pergamon, 2016. Vol. 121. P. 59–62.
18. Okhitina A., Roldugin D., Tkachev S. Application of the PSO for the construction of a 3-axis stable magnetically actuated satellite angular motion // *Acta Astronaut.* Pergamon, 2022. Vol. 195. P. 86–97.
19. Lovera M., Astolfi A. Spacecraft attitude control using magnetic actuators // *Automatica.* 2004. Vol. 40, № 8. P. 1405–1414.
20. Lovera M., Astolfi A. Global Magnetic Attitude Control of Inertially Pointing Spacecraft // *J. Guid. Control. Dyn.* 2005. Vol. 28, № 5. P. 1065–1072.
21. Wiśniewski R., Blanke M. Fully magnetic attitude control for spacecraft subject to gravity gradient // *Automatica.* Pergamon, 1999. Vol. 35, № 7. P. 1201–1214.
22. Damaren C.J. Comments on “Fully magnetic attitude control for spacecraft subject to gravity gradient” // *Automatica.* Pergamon, 2002. Vol. 38, № 12. P. 2189.
23. Celani F. Gain selection for attitude stabilization of earth-pointing spacecraft using magnetorquers // *Adv. Astronaut. Sci. Univelt Inc.*, 2018. Vol. 163, № 1. P. 307–318.
24. Rossa F.D., Bergamasco M., Lovera M. Bifurcation analysis of the attitude dynamics for a magnetically controlled spacecraft // *51st IEEE Conference on Decision and Control.* Maui, HI, USA: IEEE, 2012. P. 1154–1159.
25. Ivanov D.S. et al. Advanced numerical study of the three-axis magnetic attitude control and determination with uncertainties // *Acta Astronaut.* Elsevier, 2017. Vol. 132. P. 103–110.
26. Celani F. Robust three-axis attitude stabilization for inertial pointing spacecraft using magnetorquers // *Acta Astronaut.* 2015. Vol. 107. P. 87–96.
27. Белецкий В.В., Хентов А.А. Вращательное движение намагниченного спутника. – Москва: Наука, 1985. – 288 p.
28. Teschl G. Ordinary differential equations and dynamical systems. Graduate Studies in Mathematics, 2000.
29. Thébault E. et al. International Geomagnetic Reference Field: the 12th generation // *Earth, Planets Sp.* Springer Berlin Heidelberg, 2015. Vol. 67, № 1. P. 79.