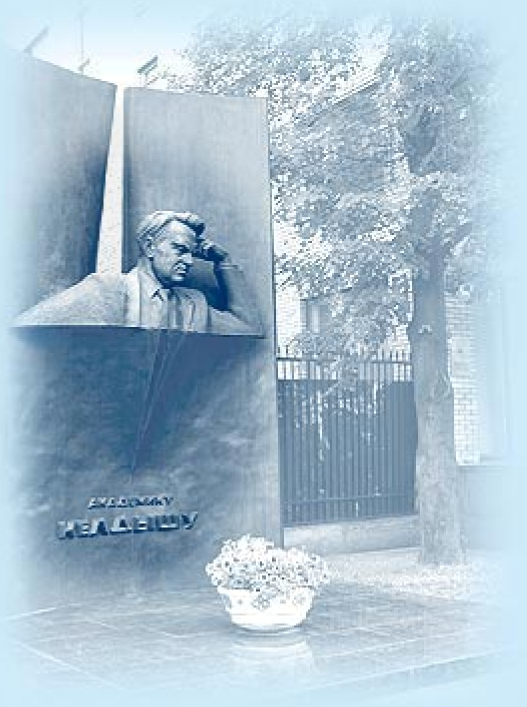
ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 3 за 2024 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

В.В. Веденяпин, В.М. Аушев, А.О. Гладков, Ю.А. Измайлова, А.А. Реброва

Математическая теория ускоренного расширения Вселенной на основе принципа наименьшего действия и модели Фридмана и Милна-Маккри

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Математическая теория ускоренного расширения Вселенной на основе принципа наименьшего действия и модели Фридмана и Милна-Маккри / В.В. Веденяпин [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2024. № 3. 28 с.
https://doi.org/10.20948/prepr-2024-3
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2024-3

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

В. В. Веденяпин, В. М. Аушев, А. О. Гладков,
Ю. А. Измайлова, А. А. Реброва

Математическая теория ускоренного расширения Вселенной на основе принципа наименьшего действия и модели Фридмана и Милна-Маккри

Москва — 2024

Веденяпин В. В., Аушев В. М., Гладков А. О., Измайлова Ю. А., Реброва А. А.

Математическая теория ускоренного расширения Вселенной на основе принципа наименьшего действия и модели Фридмана и Милна-Маккри

В классических работах уравнения для полей гравитации и электромагнетизма предлагаются без вывода правых частей. Здесь мы даем вывод правых частей и анализ тензора энергии импульса в рамках уравнений Власова-Максвелла-Эйнштейна и моделей типа Милна–МакКри и Фридмана. Предлагаются новые модели ускоренного расширения Вселенной без лямбды Эйнштейна.

Ключевые слова: уравнение Власова, уравнение Власова-Эйнштейна, уравнение Власова-Максвелла, уравнение Власова-Пуассона.

Victor Valentinovich Vedenyapin, Viktor Mikhailovich Aushev, Andrey Olegovich Gladkov, Yulia Andreevna Izmailova, Alina Alexandrovna Rebrova

Mathematical theory of the accelerated expansion of the Universe based on the principle of least action and the Friedman and Milne-McCrea model

In classical works, equations for the fields of gravity and electromagnetism are proposed without deriving the right-hand sides. Here we give the derivation of the right-hand sides and analysis of the stress–energy tensor within the framework of the Vlasov–Maxwell–Einstein equations and models of the Milne–McCrea and Friedman type. New models of the accelerated expansion of the Universe without Einstein's lambda are proposed.

Key words: Vlasov equation, Vlasov–Einstein equation, Vlasov–Maxwell equation, Vlasov–Poisson equation

Оглавление

Действие в общей теории относительности и уравнения для полей

Пусть $f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},m,e)$ – функция распределения частиц по пространству $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, по скоростям $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$, массам $m \in \mathbb{R}$ и заряду $e \in \mathbb{R}$ в момент времени $t \in \mathbb{R}$. Это означает, что число частиц в объеме $d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{v}dmde$ равно $f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},m,e)d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{v}dmde$. Рассмотрим действие:

$$\begin{aligned} S = &-c\int m f(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m,e)\sqrt{g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu}\, d^3x d^3v dm de dt - \\ &-\frac{1}{c}\int e f(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m,e) A_\mu u^\mu d^3x d^3v dm de dt + \\ &+k_1\int (R+\Lambda)\sqrt{-g}\, d^4x + k_2\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\sqrt{-g}\, d^4x, \end{aligned} \tag{1}$$

где c – скорость света, $u^0 = c$ и $u^i = v^i$ $(i = 1,2,3)$ – трехмерная скорость, $x^0 = ct$ и x^i $(i = 1,2,3)$ – координата, $g_{\mu\nu}(\boldsymbol{x},t)$ – метрика $(\mu,\nu = 0,1,2,3)$, $A_\mu(\boldsymbol{x},t)$ – 4-потенциал электромагнитного поля, $F_{\mu\nu}(\boldsymbol{x},t) = \partial A_\mu(\boldsymbol{x},t)/\partial x^\nu - \partial A_\nu(\boldsymbol{x},t)/\partial x^\mu$ – электромагнитные поля, R – полная кривизна, Λ – лямбда-член Эйнштейна, $k_1 = -\frac{c^3}{16\pi\gamma}$ и $k_2 = -\frac{1}{4\pi c}$ – константы [1-4], g – определитель метрики $g_{\mu\nu}$, γ – постоянная тяготения, по повторяющимся индексам, как обычно, идёт суммирование.

Вид действия (1) удобен для получения уравнений Эйнштейна и Максвелла при варьировании по полям $g_{\mu\nu}$ и A_μ. Такой способ вывода уравнений Власова–Максвелла и Власова–Эйнштейна использовался в работах [5-9, 19-21]. При варьировании (1) по $g_{\mu\nu}$ получим уравнение Эйнштейна:

$$\begin{aligned} &k_1\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(R+\Lambda)\right)\sqrt{-g} = \\ &= \int m\frac{f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},m,e)}{2\sqrt{g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta}}u^\mu u^\nu d^3v dm d + k_2\left(-2F^{\beta\nu}F^{\alpha\mu}g_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\right)\sqrt{-g}. \qquad 2) \end{aligned}$$

Первое слагаемое правой части этого уравнения и является по определению тензором энергии-импульса материи (оно выведено впервые в таком виде, видимо, в работах [9, 19-21]), второе (электромагнитная составляющая тензора энергии-импульса) известно [1-2]. Попытки выписать тензор энергии-импульса через функцию распределения предпринимались, насколько нам известно, только в релятивистской кинетической теории для уравнения Власова–Эйнштейна [3-21]. Уравнение электромагнитных полей получается варьированием (1) по A_μ и называется системой уравнений Максвелла:

$$k_2 \frac{\partial\sqrt{-g}F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{1}{c^2}\int e\, u^\mu f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},m,e)d^3v dm de. \tag{3}$$

Покажем, что вид действия (1) является более общим, чем в [1-4]. Для получения стандартного вида действия возьмем функцию распределения в виде дельта-функции для одной частицы:

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},m,e,t) = \delta\big(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'(t)\big)\delta\big(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}'(t)\big)\delta(m-m')\delta(e-e'). \tag{4}$$

Подставляя (4) в действие (1) и опустив штрихи, получаем стандартные [1-4] выражения для всех слагаемых:

$$\begin{gathered} S = -cm\int\sqrt{g_{\mu\nu}(\boldsymbol{x},t)u^\mu u^\nu}\,dt - \frac{e}{c}\int A_\mu(\boldsymbol{x},t)u^\mu dt + \\ +k_1\int(R+\Lambda)\sqrt{-g}d^4x + k_2\int\big(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\big)\sqrt{-g}d^4x. \end{gathered} \tag{5}$$

В роли частиц могут быть электроны и ионы в плазме, планеты в галактиках, галактики в супергалактиках, скопление галактик во Вселенной. В равенстве (4) мы можем взять сумму дельта-функций и получить обычное действие [1-4] для конечной системы частиц: этим обосновывается единственность выбора более общего действия (1).

Уравнения движения частиц в заданных полях, уравнение Лиувилля и уравнение Власова-Максвелла-Эйнштейна

Воспользуемся инвариантностью первых двух слагаемых уравнения (5), относительно замены $t=\phi(\lambda)$. Здесь λ – произвольный параметр. Такая инвариантность хорошо известна [1-4]. Перепишем первые два слагаемых из уравнения (5):

$$S = -cm\int\sqrt{g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu}\,d\lambda - \frac{e}{c}\int A_\mu u^\mu\, d\lambda, \tag{6}$$

и варьируя по $\mathbf{x}(\lambda)$, получаем уравнение Эйлера-Лагранжа:

$$cm\frac{d}{d\lambda}\left[\frac{g_{\mu\nu}u^\nu}{\sqrt{g_{\eta\xi}u^\eta u^\xi_\nu}} + \frac{e}{c}A_\mu\right] = cm\frac{1}{\sqrt{g_{\eta\xi}u^\eta u^\xi_\nu}}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\mu}u^\mu u^\nu + \frac{e}{c}\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}u^\nu. \tag{7}$$

Уравнение (7) перепишем, обозначив через $I = g_{\eta\xi}\frac{\partial x^{\eta}}{\partial\lambda}\frac{\partial x^{\xi}}{\partial\lambda}$ интеграл движения:

$$\frac{d^2x^{\mu}}{d\lambda^2}+\Gamma^{\mu}_{\nu\eta}\frac{dx^{\eta}}{d\lambda}\frac{dx^{\nu}}{d\lambda}=\frac{e}{mc^2}\sqrt{I}\,F^{\mu}_{\nu}\frac{dx^{\nu}}{d\lambda}. \tag{8}$$

Здесь $\Gamma^{\mu}_{\nu\eta}$ – символ Кристоффеля:

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\eta}=\frac{1}{2}g^{\mu\varsigma}\left(\frac{\partial g_{\varsigma\eta}}{\partial x^{\nu}}+\frac{\partial g_{\varsigma\nu}}{\partial x^{\eta}}-\frac{\partial g_{\eta\nu}}{\partial x^{\varsigma}}\right).$$

Уравнение (8) отличается от приведенных в руководствах [1-4] наличием $\sqrt{I}$ в правой части: в этих руководствах дифференцирование идет по собственному времени $ds = d\lambda\sqrt{I}$. Это неудобно, так как для каждой частицы это собственное время индивидуально. Далее будет использована формула (8), которая обладает симметрией при замене $\mathbf{x}\to\alpha\mathbf{x}$, $\lambda\to\alpha\lambda$, что и позволяет понизить её порядок. Для этого перепишем уравнение (8) в виде:

$$\begin{cases}\dfrac{dx^{\mu}}{d\lambda}=v^{\mu},\\[2mm] \dfrac{dv^{\mu}}{d\lambda}=-\Gamma^{\mu}_{\nu\eta}\,v^{\nu}\,v^{\eta}+\dfrac{e\sqrt{I}}{mc^2}F^{\mu}_{\nu}\,v^{\nu}.\end{cases} \tag{9}$$

Избавляемся от λ, поделив остальные уравнения на первое из уравнений системы (9). Так как $x^0 = ct$ пропорционально времени, обозначим $v^{\mu}/v^0 = dx^{\mu}/dx^0 = w^{\mu}$ безразмерную скорость, где $w^0 = 1$. При этом из-за симметрии, описанной выше, можно избавиться от уравнения dv^0/dx^0 и написать уравнения по x^i, w^i $(i = 1,2,3)$. Такое понижение порядка описано для гравитации в книгах Фока [1] и Вейнберга [3]. Там этот переход в уравнениях приведен для гравитации, где уравнения не отличаются для параметра λ и собственного времени s. Однако если добавляется электромагнетизм, то отличие заключается как раз в появлении корня в правой части, который обеспечивает необходимую симметрию. Нам это понижение переходом к собственному времени необходимо, так как наша цель – получить уравнение на функцию распределения $f(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m,e)$. Тогда

$$\begin{cases}\dfrac{dx^{i}}{dx^0}=v^{i},\\[2mm] \dfrac{dv^{i}}{dx^0}=G^{i},\end{cases} \tag{10}$$

где G^i обозначено следующее выражение:

$$G^i = -\Gamma^i_{\nu\eta} v^\nu v^\eta + \frac{v^i}{c}\Gamma^0_{\eta\nu} v^\eta v^\nu + \frac{e\sqrt{J}}{mc^2}\left[F^{\ i}_{\nu} v^\eta - \frac{v^i}{c}\Gamma^0_{\eta} v^\eta \right],$$

а $J = g_{\nu\xi} v^\nu v^\xi$, v^i – трехмерная скорость.

Мы получили уравнения движения заряженных частиц в электромагнитных и гравитационных полях в релятивистской форме из принципа наименьшего действия.

В заключение выпишем уравнение Лиувилля для функции распределения $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e)$ и системы (10):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v^i \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{\partial\left(G^i f\right)}{\partial v^i} = 0. \qquad (11)$$

Уравнения (10), (2) и (3) образуют систему уравнений Власова–Максвелла–Эйнштейна. Это замкнутая система уравнений релятивистской электродинамики и гравитации. Общий смысл уравнений типа Власова именно таков: они позволяют 1) замкнуть систему электродинамики (уравнение Власова-Максвелла) и гравитации (уравнение Власова-Эйнштейна) и 2) вывести их из принципа наименьшего действия.

Общий переход к гидродинамике

Рассмотрим произвольную систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений: $\frac{dx}{dt} = v(x)$, $x \in R^n$, $v(x) \in C^1(R^n)$. Перепишем её произвольным образом, поделив координаты x: $x = (\mathrm{q}, \mathrm{p})$, $q \in R^m$, $p \in R^{n-m}$;

$$\frac{dq}{dt} = w(q, p), \quad \frac{dp}{dt} = g(q, p).$$

Выпишем уравнение Лиувилля для функции распределения $f(t, q, p)$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial (w_i f)}{\partial q_i} + \frac{\partial (\mathrm{g}_j f)}{\partial p_j} = 0.$$

Выполним гидродинамическую подстановку $f(t, q, p) = \rho(q, t)\delta(p - Q(q, t))$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial \rho(q, t)}{\partial t}\delta\left(p - Q(q, t)\right) - \rho(q, t)\frac{\partial \delta(p - Q(q, t))}{\partial p_i}\frac{\partial Q_i(q, t)}{\partial t},$$

$$\frac{\partial(\mathrm{w}_i(q,p)f)}{\partial q_i}=\frac{\partial(\mathrm{w}_i(q,Q)\rho(q,\mathrm{t}))}{\partial q_i}\delta(p-Q(q,t)-\rho(q,t)w_i(q,Q(q,t))\frac{\partial(p-Q(q,t))}{\partial p_k}\frac{\partial Q_k(q,t)}{\partial q_i},$$

$$\frac{\partial(\mathrm{g}_j(q,p)f)}{\partial p_j}=\rho(q,t)g_j(q,Q(q,t))\frac{\partial\delta(p-Q(q,t))}{\partial p_j}.$$

При дифференцировании мы воспользовались правилами дифференцирования обобщённых функций. Собирая множители при дельта-функции и её производных, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\dfrac{\partial(\rho w_i(q,Q))}{\partial q_i}=0,\\ \rho(q,t)\left(\dfrac{\partial Q_j(q,t)}{\partial t}+w_i(q,Q(q,t))\dfrac{\partial Q_j(q,t)}{\partial q_i}-g_j(q,Q(q,t))\right)=0.\end{cases}$$

Эта система является точным следствием уравнения Лиувилля: можно называть это гидродинамическим следствием уравнения Лиувилля порядка $(m,n-m)$. Гидродинамическая подстановка была изобретена в рамках уравнений Власова [4], а для произвольных систем обыкновенных дифференциальных уравнений введена в [6]. Это система уравнений имеет яркий геометрический смысл: она описывает движение m-мерных поверхностей в n-мерном пространстве в силу исходной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Получающаяся система квазилинейных уравнений не общая, а в терминологии Куранта и Гильберта называется системой уравнений с одинаковой главной частью. Эта система имеет много замечательных свойств.

1. В случае линейной исходной системы ОДУ решение системы с одинаковой главной частью можно искать в виде $Q_k(t,\mathrm{q})=\lambda_k^a(t)q_a$, линейном по координатам q. Получается система обыкновенных дифференциальных уравнений в матричном виде на матрицу $\lambda_k^a(t)$.

2. Для гамильтоновых систем

$$\frac{dq}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p}(q,p),\quad \frac{dp}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x}(q,p),$$

из неё получается уравнение Гамильтона-Якоби двумя шагами. Первый шаг от уравнения Лиувилля к гидродинамическому следствию порядка $(\frac{n}{2},\frac{n}{2})$. Второй шаг: в случае гамильтоновых систем проходит дальнейшая подстановка для скоростей $Q_k(t,\mathrm{q})$ в виде градиента функции: $Q_k(t,\mathrm{q}) = \dfrac{\partial W}{\partial q_k}$. В результате получаем

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho(q,t)\nabla_i \mathrm{W}(q,Q))}{\partial q_i} = 0, \\ \rho(q,t)\dfrac{\partial}{\partial q_i}\left(\dfrac{\partial W(q,t)}{\partial t} + H(q,\nabla W)\right) = 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем, что или плотность $\rho(\mathrm{q},\mathrm{p}) = 0$, или, в тех местах, где плотность не равна нулю,

$$\frac{\partial W(q,t)}{\partial t} + H(q,\nabla W) = f(t)$$

есть функция только времени. Замена $W(q,t) = Z(q,t) + g(\mathrm{t})$, где $\dfrac{dg}{dt} = f(\mathrm{t})$, приводит к уравнению Гамильтона-Якоби:

$$\frac{\partial Z(q,t)}{\partial t} + H(q,\nabla Z) = 0.$$

Этот переход от уравнения Лиувилля к уравнению Гамильтона-Якоби имеет длинную историю. Второй шаг – переход от гидродинамических уравнений к уравнениям типа Гамильтона-Якоби в частном случае гамильтониана $H(q,\mathrm{p}) = \dfrac{p^2}{2m} + U(q)$ возник в работах Маделунга по квантовой механике [16], но можно думать, что идея восходит к интегралу Бернулли. А в общем случае гамильтоновых систем такой переход изучался в работах И.С. Аржаных, К.С. Долматова, В.В. Козлова [17-20]. Здесь мы следовали наиболее ясному и простому подходу В.В. Козлова. Первый шаг, связавший гидродинамические системы с уравнением Лиувилля, был проведен в работах [21-26]. Отметим также работу В.П. Маслова [28], где есть намек на этот переход сразу одной подстановкой $f(t,q,p) = \rho(q,t)\delta(p - \nabla W)$. Все это мы применим в дальнейшем в релятивистском и нерелятивистском случаях.

Переход к гидродинамике и уравнению Гамильтона-Якоби в релятивистском случае уравнения Власова-Максвелла-Эйнштейна

Для вывода уравнений Власова-Эйнштейна в форме Гамильтона-Якоби нужно вывести его в импульсах. Для этого вернёмся к исходному действию и перепишем его, но нужно воспользоваться трехмерными импульсами. Для этого действие (6) перепишем через время:

$$S=-cm\int\sqrt{g_{\mu\nu}v^{\mu}v^{\nu}}\,dt-\frac{e}{c}\int A_{\mu}v^{\mu}\,dt$$

и получим уравнение движения:

$$cm\frac{d}{dt}\left[\frac{g_{\mu\nu}v^{\nu}}{\sqrt{g_{\eta\xi}v^{\eta}v^{\xi}}}+\frac{e}{c}A_{\mu}\right]=cm\frac{1}{\sqrt{g_{\eta\xi}v^{\eta}v^{\xi}}}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\mu}}v^{\mu}v^{\nu}+\frac{e}{c}\frac{\partial A_{\nu}}{x^{\mu}}v^{\nu}.$$

Мы получаем выражение для импульсов:

$$p_{\mu}=\frac{\partial L}{\partial v^{\mu}}=-mc\frac{g_{\mu\alpha}v^{\alpha}}{\sqrt{g_{\eta\xi}v^{\eta}v^{\xi}}}+\frac{e}{c}A_{\mu}.$$

Теперь требуется обратить эту формулу, выразив скорости через импульсы, чтобы написать действие через импульсы. Для этого в последней формуле перенесём электромагнитные потенциалы в левую часть и поделим μ-ю компоненту на нулевую:

$$\frac{p_{\mu}-\dfrac{e}{c}A_{\mu}}{p_{0}-\dfrac{e}{c}A_{0}}=\frac{g_{\mu\alpha}v^{\alpha}}{g_{0\alpha}v^{\alpha}}.$$

В последней формуле необходимо исключить импульс с нулевой компонентой через массовое соотношение, которое получается из формулы для импульсов:

$$\left(p_{\alpha}-\frac{e}{c}A_{\alpha}\right)\left(p_{\beta}-\frac{e}{c}A_{\beta}\right)g^{\alpha\beta}=\left(mc\right)^{2}$$

Выразив таким образом скорости через импульсы, получаем формулу для действия (1) с импульсами:

$$\begin{aligned}S=&-c\int m\,f\left(t,\mathbf{x},\mathbf{p},m,e\right)\sqrt{g_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu}}\,d^{3}xd^{3}pdmdedt-\\&-\frac{1}{c}\int e\,f\left(t,\mathbf{x},\mathbf{p},m,e\right)A_{\mu}u^{\mu}\,d^{3}xd^{3}pdmdedt+\\&+k_{1}\int\left(R+\Lambda\right)\sqrt{-g}\,d^{4}x+k_{2}\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,d^{4}x.\end{aligned}$$

Здесь скорости нужно рассматривать как выраженные через трехмерные импульсы. После этого получаем уравнения для полей:

$$k_1\left(R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\left(R+\Lambda\right)\right)\sqrt{-g}=$$

$$=\int m\frac{f\left(t,\mathbf{x},\mathrm{p},m,e\right)}{2\sqrt{g_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu}}}u^{\mu}u^{\nu}d^3pdmde-\frac{1}{2}k_2F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}g^{\mu\nu}\sqrt{-g},$$

$$k_2\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}}\sqrt{-g}=\frac{1}{c^2}\int eu^{\mu}f\left(t,\mathbf{x},\mathrm{p},m,e\right)d^3pdmde.$$

Уравнение движения для частиц получаем уже в Гамильтоновой форме, где функция Гамильтона — это нулевая компонента импульса, выраженная через остальные через массовые соотношения. Это получается из-за того, что Лагранжиан есть функция первой степени по четырем компонентам скоростей и формулы Эйлера:

$$v^{\mu}\frac{\partial L}{\partial v^{\mu}}-L=0,$$

где

$$H=v^{i}\frac{\partial L}{\partial v^{i}}-L.$$

Здесь имеется в виду, что суммирование по i трехмерное, а по μ четырехмерное. Отсюда получаем простую формулу для гамильтониана, где нулевая компонента импульса должна быть выражена как решение квадратного уравнения массового соотношения через трехмерные импульсы:

$$H=-v^{0}\frac{\partial L}{\partial v^{0}}=-cp_0(x,p,t).$$

Выписывая через этот гамильтониан по общей схеме пункта 3 гидродинамические уравнения из уравнения Лиувилля, получаем затем уравнения Гамильтона-Якоби:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x^{\alpha}}-\frac{e}{c}A_{\alpha}\right)\left(\frac{\partial W}{\partial x^{\beta}}-\frac{e}{c}A_{\beta}\right)g^{\alpha\beta}=\left(mc\right)^2.$$

Чтобы получить замкнутую форму уравнений Гамильтона-Якоби-Власова-Максвелла-Эйнштейна, необходимо и в уравнениях для полей выполнить гидродинамическую подстановку $f(t,\mathrm{x},p,m,\mathrm{e})=\rho(\mathrm{x},t,m,e)\delta(p-Q(q,t,m,e))$:

$$k_1\left(R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\left(R+\Lambda\right)\right)\sqrt{-g}=$$
$$=\int m\frac{\rho\left(t,\mathbf{x},m,e\right)}{2\sqrt{g_{\mu\nu}V^{\mu}V^{\nu}}}V^{\mu}V^{\nu}\,dmde-\frac{1}{2}k_2F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}g^{\mu\nu}\sqrt{-g},$$
$$k_2\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}}\sqrt{-g}=\frac{1}{c^2}\int eV^{\mu}\rho\left(t,\mathbf{x},m,e\right)dmde.$$

Здесь макроскопические скорости V и импульсы Q связаны соотношением

$$Q_{\mu}=\frac{g_{\mu\nu}V^{\nu}}{\sqrt{g_{\eta\xi}V^{\eta}V^{\xi}}}+\frac{e}{c}A_{\mu}.$$

При этом в форме Гамильтона-Якоби нужно учитывать, что $Q_{\alpha}=\frac{\partial W}{\partial x^{\alpha}}$. Мы получили уравнение Власова-Максвелла-Эйнштейна в редукции к уравнениям Гамильтона-Якоби. В следующем пункте мы применим эту технологию в нерелятивистском случае.

Нерелятивистская гидродинамика с лямбда-членом

Коротко воспроизведем простейшее нерелятивистское космологическое решение Милна-Маккри с добавкой лямбда-члена в форме уравнения Власова-Пуассона. Нерелятивистский случай соответствует действию [1-2, 5-9]:

$$S=\int\left[\frac{mv^2}{2}-mU\right]f\left(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m\right)d\mathbf{x}d\mathbf{v}dmdedt-\frac{1}{8\pi\gamma}\int\left(\left(\nabla U\right)^2-2\lambda U\right)d\mathbf{x}dt. \tag{12}$$

Варьируем по U, получая уравнения Пуассона с лямбда-членом:

$$\Delta U=4\pi\gamma\int m\,f\left(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m,e\right)d\mathbf{v}dmde-\lambda. \tag{13}$$

Действие для одной частицы получается из первого слагаемого в (12) при выборе $f\left(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m,e\right)=\delta\left(m-M\right)\delta\left(\mathbf{x}-\mathbf{y}\left(t\right)\right)\delta\left(\mathbf{v}-\mathbf{y}'\left(t\right)\right)$. Получаем стандартное действие:

$$S_1=\int\left[\frac{My'^2}{2}-MU\left(\mathbf{y}\right)\right]dt.$$

Варьируем как обычно в механике и получаем уравнение Ньютона:

$$\mathbf{y}''-\frac{\partial U}{\partial\mathbf{y}}=0.$$

Переходим к уравнению Лиувилля для соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} = -\dfrac{\partial U}{\partial \mathbf{x}}, \end{cases}$$

тогда

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \left(\mathbf{v}, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right) - \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \right) = 0. \tag{14}$$

Система (13-14) и есть система уравнений Власова-Пуассона для гравитации с лямбда-членом, который и призван описать ускоренное расширение.

Система (13-14) имеет точное гидродинамическое следствие, т.к. допускается (согласно общей теории п. 3) гидродинамический вид функции распределения [5-9, 17-22]: $f\left(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m\right) = \rho\left(t,\mathbf{x},m\right)\delta\left(\mathbf{v} - \mathbf{w}\left(t,\mathbf{x},m\right)\right)$. Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + div\left(\rho \mathbf{w}\right) = 0, \\ \dfrac{\partial w_k}{\partial t} + w_i \dfrac{\partial w_k}{\partial x_i} + \dfrac{\partial U}{\partial x_k} = 0, \\ \Delta U = 4\pi\gamma \int m\,\rho dm. \end{cases}$$

Пусть $w_k\left(t,\mathbf{x},m\right) = \dfrac{\partial S}{\partial x^k}$. Такая подстановка проходит, согласно общей теории п. 2 [5-9,17-22], и получается точное гамильтон-якобиево следствие системы Власова-Пуассона с лямбда-членом:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + div\left(\rho \nabla S\right) = 0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial t} + \dfrac{(\nabla S)^2}{2} + U = 0, \\ \Delta U = 4\pi\gamma \int m\,\rho dm - \lambda. \end{cases}$$

Отметим, что если S есть функция только радиуса, то скорость дает как раз обобщенный разлет Хаббла: $w = \nabla S = S^{'}(r)\dfrac{x}{r}$. В космологических решениях плотность не зависит от пространственной координаты. Тогда из первого уравнения получаем $\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = -3H(m,t)$, а также $\Delta S = 3H(m,t)$. $H(m,t)$ - «постоянная»

Хаббла. Из третьего уравнения имеем уравнение: $\Delta U = 4\pi\gamma \int m\rho(m,t)dm - \lambda$. Решая два последних уравнения, имеем

$$S(r,m,t) = \frac{H(m,t)}{2} r^2 + \frac{A(m,t)}{r} + B(m,t)$$

и

$$U(r,t) = \frac{4\pi\gamma \int m\rho(m,t)dm - \lambda}{6} r^2 + \frac{C(t)}{r} + D(t). \quad (15)$$

Здесь $A(m,t), B(m,t), C(t), D(t)$ – произвольные функции. Постоянные A и C можно положить равными нулю, так как они соответствуют источнику в нуле, а B и D – несущественные постоянные, которые также можно положить равными нулю. Получаем, подставляя эти выражения во второе уравнение и приравнивая коэффициенты при степенях r, систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho(m,t)}{\partial t} - 3H(m,t)\rho(m,t) = 0, \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial H(m,t)}{\partial t} + H^2 + \dfrac{2\pi\gamma}{3} \int m\rho(t,m)dm - \dfrac{\lambda}{6} = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Так как скорость разбегания $\vec{w} = \nabla S = H\vec{r}$, имеем

1) Условие расширения Вселенной $H \ge 0$.

2) Условие ускоренного расширения $\dfrac{\partial H(m,t)}{\partial t} \ge 0$: $H^2 + \dfrac{2\pi\gamma}{3} \int m\rho(t,m)dm - \dfrac{\lambda}{6} \le 0$.

Из второго условия видим определяющую роль лямбды для ускоренного расширения. Так как $\rho(m,t)$ обязано зависеть от массы, то и «постоянная» Хаббла $H(m,t)$, вообще говоря, зависит от массы: уравнения (16) — это точное уравнение для константы Хаббла с лямбда-членом в нерелятивизме. Если, однако, $H(m,t)$ не зависит от массы (что второе из уравнений (16) допускает, как это и предполагали Милн и Маккри в [22]), мы можем свести систему (16) к системе двух обыкновенных уравнений. Обозначим $K(t) = \dfrac{2\pi\gamma}{3} \int m\rho(t,m)\, dm$ и получим:

$$\begin{cases} \dfrac{dK(t)}{dt} - 3HK = 0, \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{dH}{dt} + H^2 + K - \dfrac{\lambda}{6} = 0. \end{cases}$$

Это есть аналог решения Милна-Маккри с лямбда-членом, полученный без всяких предположений из принципа наименьшего действия как его точное следствие. Уравнение решается точно, но нам достаточно и фазового портрета, который исследовался в [19,26]. Условия ускоренного расширения – это узкая область под параболой $H \geq 0, K \geq 0, H^2 + K - \frac{\lambda}{6} \leq 0.$ Система (16) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений и в более общем случае, когда $H(m,t)$ кусочно-постоянна на конечном числе интервалов I_i. Пусть значение $H(m,t)$ на этом интервале равно $H(i,t)$. Обозначая $K(i,t) = \frac{2\pi\gamma}{3} \int\limits_{I_i} m\rho(t,m)dm$

, получаем систему

$$\begin{cases} \dfrac{dK(i,t)}{dt} - 3H(i,t)K(i,t) = 0, \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{dH(i,t)}{dt} + H(i,t)^2 + K(i,t) - \dfrac{\lambda}{6} = 0. \end{cases}$$

В литературе существует понятие натяжения константы Хаббла (Constant Hubble Tension [25]), оно выражает несоответствие постоянной Хаббла наблюдениям. Получение точного уравнения (1) для постоянной Хаббла в принципе должно убрать это несоответствие.

Анализ тензора энергии-импульса

Постановка задачи о выводе уравнений типа Власова из принципа наименьшего действия рассматривалась, насколько нам известно, только в США. Обзор 1992 года [10] по выводу уравнения Власова содержит 5 принципов наименьшего действия. Что касается европейских исследователей, то такая задача не ставилась [3, 4, 11], и уравнения постоянно теряли корень в первом слагаемом правой части уравнения (2). Таким образом, уравнения Власова-Эйнштейна оказались прекрасным тестом для схемы вывода уравнений типа Власова из принципа наименьшего действия. Отметим постоянные усилия Филиппа Моррисона [12-15], который, видимо, единственный такую задачу поставил и осознал ее важность. Наш подход, по сути, дает самый простой и прямой вывод уравнений электродинамики и общей теории относительности (ОТО), упрощая всю ОТО и электродинамику использованием именно принципа наименьшего действия и уравнений Власова-Максвелла-Эйнштейна.

Мы получили кинетическую форму тензора энергии-импульса, но обычно используют его гидродинамическую форму, записывая ее в абстрактной форме [1-2]

$$T^{\mu\nu} = (p+E)U^{\mu}U^{\nu} + pg^{\mu\nu}.$$

Здесь p – давление, E – энергия, U – макроскопическая (гидродинамическая) скорость. Такое выражение появляется в кинетической теории из нерелятивистской формы первого слагаемого (2)

$$\int mf(t,x,v,m,e)u^{\mu}u^{\nu}d^3vdm.$$

Сравнение явной формулы (2) с этим выражением показывает, что такое выражение получается после гидродинамической подстановки в правую часть формулы (2)

$$f(t,x,v,m,e) = \rho(x,t,m,e)\delta(v - V(t,x,m,e)),$$

где $U(t,x,m,e) = (c, V(t,x,m,e))$, а δ – дельта-функция Дирака. Кроме того, появился хороший кандидат вместо лямбды Эйнштейна $\frac{k_2}{k_1}(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta})$. Введение лямбды Эйнштейн считал главной ошибкой своей жизни. Но сейчас эта лямбда стала основным способом объяснять ускоренное расширение Вселенной. Избавиться от лямбды или получить ее естественно есть основная задача тех, кто объясняет ускоренное расширение Вселенной (вводя для этого «темную энергию» или лямбду Эйнштейна). Наш анализ тензора энергии-импульса покажет, что введение лямбды хорошо работает в нерелятивистском случае, но уже в слабом релятивизме не дает ускоренного расширения вселенной.

Итак, рассмотрим электромагнитную часть тензора энергии–импульса. Проверим знак второго слагаемого в уравнении Эйнштейна (2) для компоненты 00. Покажем, что это неотрицательная величина, что полностью согласуется с выражениями в классических учебниках [1-4] для случая метрики Минковского-Лоренца. Действительно, выражение

$$-2F^{\beta 0}F^{\alpha 0}g_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}g^{00}$$

из правой части (2) достаточно проверить на знак для диагональной метрики, приводя в точке метрику к диагональному виду. Имеем для этого выражения в случае диагональной метрики $g_{\alpha\beta} = diag\ (g_0, g_1, g_2, g_3)$

$$-g_0^{-1}\sum(F_{ij}^2 g_i^{-1}g_j^{-1}) + g_0^{-2}\sum(F_{0i}^2 g_i^{-1}).$$

Это выражение меньше нуля, т.к. $g_0 > 0, g_i < 0\,(i = 1,2,3)$ для лоренцевой сигнатуры (+1, -1, -1, -1), что и задает знаки этих диагональных элементов. Значит, это выражение вносит тот же вклад, что и материя, и не годится для кандидата вместо лямбды Эйнштейна, а также, вообще говоря, для описания ускоренного расширения. Мы проверим частные случаи этого выражения в слаборелятивистских случаях и в случае электростатики найдем подтверждение этого неравенства, а потом рассмотрим, какие типы лагранжианов дадут противоположный результат: это и будет возможными моделями знаменитого ускоренного расширения Вселенной (Нобелевская премия 2012 года).

Теперь обратимся к слаборелятивистским примерам.

Примеры

Пример 1. Рассмотрим простейшее релятивистское действие с метрикой Лоренца:

$$S = -cm\int (\sqrt{c^2 - (\frac{dx}{dt})^2} + \frac{U}{c})dt - \frac{1}{8\pi\gamma}\int (\nabla U)^2 dxdt - \frac{c^2\Lambda}{8\pi\gamma}\int Udxdt\,.$$

Варьируя по координатам $x(t)$, получаем обычные релятивистские уравнения в метрике Лоренца с гамильтонианом [1-4]

$$H(x,q) = c\sqrt{(mc)^2 + q^2} + U$$

Переходим к действию, пригодному к варьированию по полям по нашей обычной схеме вывода уравнений типа Власова:

$$S = -c\int m(\sqrt{c^2 - (\frac{dx}{dt})^2} + U)\, f(x,p,t,m)dpdmdxdt - \frac{1}{8\pi\gamma}\int (\nabla U)^2 dxdt - \frac{c^2\Lambda}{8\pi\gamma}\int Udxdt$$

Варьируя его по потенциалу U, получаем уравнения для полей:

$$\Delta U = 4\pi\gamma\int mf(t,x,q,m,e)dqdmde - \frac{1}{2}c^2\Lambda.$$

Сразу переходим к уравнению Гамильтона-Якоби по схеме работ [16-21], как это сделано в предыдущем пункте 5, и получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i}(v^i(\nabla W)\rho) = 0, \\ \frac{\partial W}{\partial t} + c\sqrt{(mc)^2 + (\nabla W)^2} + U = 0, \\ \Delta U = 4\pi\gamma\int m\rho dmde - \frac{c^2\Lambda}{2}, \end{cases}$$

где $v^i(q)=\frac{\partial H}{\partial q^i}=\frac{cq^i}{\sqrt{(mc)^2+q^2}}$.

Мы получили выражение для скорости, из которого видно Хаббловское расширение, замкнутую систему уравнений и возможность переходить к космологическим решениям в изотропном случае и когда плотность не зависит от пространства. Эта система уже исследовалась в работах [27,29], что показало значительные отличия от обсуждавшейся выше модели Милна-Маккри.

Пример 2. Еще одно релятивистское действие, но с метрикой не Лоренца, а слаборелятивистской

$$g_{\alpha\beta}=diag(1+\frac{2U}{c^2},-1,-1,-1).$$

При этом потенциал вносится в действии под корень:

$$S=-cm\int(\sqrt{c^2-(\frac{dx}{dt})^2+2U})dt-\frac{1}{8\pi\gamma}\int(\nabla U)^2dxdt-\frac{c^2\Lambda}{8\pi\gamma}\int Udxdt.$$

Действуя так же, получаем импульсы, а затем гамильтониан

$$H=-cp_0(x,p,t)=c\sqrt{((mc)^2+p^2)(1+\frac{2U}{c^2})}$$

и систему уравнений

$$\begin{cases}\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x^i}(v^i(\nabla W)\rho)=0,\\ \frac{\partial W}{\partial t}+c\sqrt{((mc)^2+(\nabla W)^2)(1+\frac{2U}{c^2})}=0,\\ \Delta U=4\pi\gamma\int M(m,U,\nabla W)\rho(m,t)dm-\frac{c^2\Lambda}{2},\end{cases}\tag{11}$$

где $v(p)=\frac{\partial H}{\partial p}=\frac{p}{M}$, где $M(m,U,p)=\frac{\sqrt{(mc)^2+p^2}}{\sqrt{c^2+2U}}$. Это красивое выражение для слаборелятивистской массы, которое мы по дороге получили, должно допускать обобщение на общий релятивистский случай.

Мы получили снова замкнутую систему уравнений, из которой видно происхождение корня в правой части уравнения Эйнштейна, а также выражение для скорости, из которого видно хаббловское расширение. И возможность переходить к космологическим решениям в изотропном случае и когда плотность не зависит от пространства. Этот пример также интересен тем, что он показывает: в релятивизме введение лямбды может и не объяснять расширенное расширение вселенной. Это связано с положительным корнем во втором уравнении, который делает скорость расширения отрицательной. Дело в том, что $M(m,U,p)$ это приблизительно m – масса покоя, а из решения в нерелятивистском случае системы (7-8) однозначно следует, что константа Хаббла H пропорциональна действию W с положительным коэффициентом – квадратом расстояния, как это показывают выражения (9). Это и делает наличие корня во втором уравнении определяющим для убывания H, а потому делает невозможным ускоренное расширение уже из первых двух уравнений системы (11). Поэтому нужно пытаться найти другое объяснение ускоренному расширению, которое мы предложим в следующем примере.

Пример 3. Метрика диагональная Фридмана: уравнения движения частиц в космологической задаче

$$g_{\alpha\beta} = diag(1, -a^2(t), -a^2(t), -a^2(t)).$$

Имеем действие

$$S = -cm\int\sqrt{c^2 - a^2(t)(\frac{dx}{dt})^2}dt - k_1\int(R+\Lambda)\sqrt{-g}d^4x = \int Ldt - k_1\int(R+\Lambda)\sqrt{-g}d^4x = S_p + S_f,$$

где лагранжиан частиц $L = -cm\sqrt{c^2 - a^2(t)(\frac{dx}{dt})^2} = cmL_1$; S_p означает действие частиц; S_f означает действие полей. Варьирование действия S_p с учетом условия $\delta S_p = 0$ дает уравнения движения частиц:

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) = -\frac{d}{dt}\left(cm\frac{a^2\dot{x}_i}{L_1}\right) = 0, \qquad i = 1,2,3.$$

Далее перейдем к функции распределения, для этого будем рассматривать обобщенный импульс $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = cm\frac{a^2\dot{x}_i}{L_1}$. При этом необходимо выразить скорости частиц $\dot{x}_i$ через импульсы p_i:

$$-\frac{(p_iL_1)^2}{(mca)^2} = -a^2\dot{x}_i^2,$$

$$c^2 - \frac{L_1^2}{(mca)^2}\sum p_i^2 = L_1^2,$$

$$L_1^2 = \frac{c^2}{1 + \frac{1}{(mca)^2}\sum p_i^2},$$

$$\dot{x}_i = \frac{p_i L_1}{mca^2} = \frac{p_i}{mca^2}\sqrt{\frac{c^2}{1 + \frac{1}{(mca)^2}\sum p_i^2}} = \frac{c}{a}\frac{p_i}{\sqrt{(mca)^2 + p^2}}.$$

Получив выражения для скоростей частиц через импульсы, можно получить выражение для гамильтониана:

$$H = \sum p_i \dot{x}_i - L = \frac{L_1}{mca^2}\sum p_i^2 + mcL_1 = L_1(mc + \frac{1}{mca^2}\sum p_i^2) =$$

$$= \sqrt{\frac{c^2}{1 + \frac{1}{(mca)^2 \sum p_i^2}}}\left(mc + \frac{1}{mca^2}\sum p_i^2\right) = mc^2\sqrt{1 + \frac{p^2}{(mca)^2}} = \frac{c}{a}\sqrt{(mca)^2 + p^2}.$$

Этот же результат получаем из массового соотношения, из общей формулы.

Гамильтоновы канонические уравнения $\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p}$, $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}$:

$$\dot{x}_i = \frac{c}{a}\frac{p}{\sqrt{(mca)^2 + p^2}}, \qquad \dot{p} = 0,$$

приводят к уравнению Лиувилля на функцию распределения $f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ пространственным переменным $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ и по импульсам $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{c}{a}\frac{p}{\sqrt{(mca)^2 + p^2}} = 0.$$

Используя гидродинамическую подстановку $f(t, x, v, m, e) = \rho(x, t, m)\delta(v - P(t, x, m))$, получаем уравнение неразрывности и уравнение движения:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho V) = 0, \qquad \frac{\partial P}{\partial t} + V\frac{\partial P}{\partial x} = 0,$$

где

$$V = \left.\frac{\partial H}{\partial p}\right|_{p=P} = \frac{c}{a}\frac{P}{\sqrt{(mca)^2 + P^2}}.$$

Отсюда получаем после градиентной подстановки $P = \nabla W$ уравнение неразрывности и уравнение Гамильтона–Якоби в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + div\left(\dfrac{c}{a}\dfrac{\nabla W}{\sqrt{(mca)^2 + (\nabla W)^2}}\rho\right) = 0, \\ \dfrac{\partial W}{\partial t} + \dfrac{c}{a}\sqrt{(mca)^2 + (\nabla W)^2} = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим изотропный случай $W = W(r,t)$, который вместе с условием $\rho = \rho(t,m)$ дает космологические решения. Получаем выражения для импульсов и скоростей частиц

$$\nabla W = \frac{\mathbf{r}}{r}\frac{\partial W}{\partial r}, \qquad v = \frac{c}{a}\frac{\nabla W}{\sqrt{(mca)^2 + (\nabla W)^2}} = \frac{c}{a}\frac{\mathbf{r}}{r}\frac{\dfrac{\partial W}{\partial r}}{\sqrt{(mca)^2 + \left(\dfrac{\partial W}{\partial r}\right)^2}} = \hat{\mathbf{r}}\phi(r).$$

Также считая, что $\rho = \rho(t,m)$, разделяем переменные в уравнении неразрывности:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t} = -div(\hat{\mathbf{r}}\phi(r)) = -3H(m,t),$$

Здесь $\hat{\mathbf{r}}$ – это единичный вектор $\hat{\mathbf{r}}^i = \dfrac{x^i}{r}$

$$div(\hat{\mathbf{r}}\phi(r)) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\phi(r)) = \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{2}{r}\phi,$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{2}{r}\phi = 3H,$$

$$\phi = H(m,t)r + \frac{A(m,t)}{r^2}.$$

Получаем систему

$$\begin{cases} \dfrac{c}{a}\dfrac{\dfrac{\partial W}{\partial r}}{\sqrt{(mca)^2 + \left(\dfrac{\partial W}{\partial r}\right)^2}}\rho = \phi, \\ \dfrac{\partial W}{\partial t} + \dfrac{c}{a}\sqrt{(mca)^2 + \left(\dfrac{\partial W}{\partial r}\right)^2} = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения выражаем $\dfrac{\partial W}{\partial r}$, берем положительный корень:

$$\frac{\partial W}{\partial r} = \frac{a^2cm\phi}{\sqrt{c^2 - a^2\phi^2}},$$

Выражаем корень:

$$\sqrt{(mca)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2}=\frac{ac^2m}{\sqrt{c^2-a^2\phi^2}}.$$

Подставляем во второе уравнение:

$$\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{mc^3}{\sqrt{c^2-a^2\phi^2}}=0.$$

Получаем систему уравнений для определения $W(r,t)$:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial W}{\partial r}=\dfrac{a^2cm\phi}{\sqrt{c^2-a^2\phi^2}},\\[2mm] \dfrac{\partial W}{\partial t}=-\dfrac{mc^3}{\sqrt{c^2-a^2\phi^2}}.\end{cases}$$

Кроме этого, из условия $\dfrac{\partial^2 W}{\partial r\partial t}=\dfrac{\partial^2 W}{\partial t\partial r}$ имеем связь между функциями $a(t)$ и $\phi(r,t,m)$:

$$-a^2c^3m\phi\phi'=cma(\phi(2c^2-a^2\phi^2)\dot{a}+c^2a\dot{\phi}).$$

После подстановки ϕ получаем:

$$-c^3ma^2\left(\frac{A}{r^2}+rH\right)\left(-2\frac{A}{r^3}+H\right)=cma\left(\left(\frac{A}{r^2}+rH\right)\left(2c^2-a^2\left(\frac{A}{r^2}+rH\right)^2\right)\dot{a}+c^2a\left(\frac{A}{r^2}+rH\right)^{\!\cdot}\right).$$

Приравниваем коэффициенты при степенях r. Из выражений при отрицательных степенях r следует, что $A=0$, и остается

$$-c^3ma^2rH^2=cma(2c^2rH\dot{a}-r^3a^2H^3\dot{a}+c^2ra\dot{H}).$$

Из коэффициента при r^3 имеем $\dot{a}=0$, то есть $a=const$. Приравниваем коэффициенты при r:

$$-c^3ma^2rH^2=c^3ma^2r\dot{H},$$

откуда получаем

$$H^2+\dot{H}=0.$$

Вывод. Точное следствие уравнений движения частиц в метрике модели Фридмана в космологическом случае имеет независимо от уравнений для полей вид: $\begin{cases}\dot{\rho}+3\rho H=0,\\ H^2+\dot{H}=0,\\ a=const.\end{cases}$

Пример 4. Оценка стандартной модели Фридмана с точки зрения предыдущих вычислений. Модель Фридмана сыграла выдающуюся роль, но необходимо оценить теперь ее с точки зрения точных выражений примера 3.

Уравнения Эйнштейна

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}.$$

После подстановки полученных ранее выражений для компонент тензора кривизны имеем стандартные выражения для модели Фридмана

$$\Lambda + \frac{3\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{00},$$

$$\Lambda a^2 + \dot{a}^2 + 2a\ddot{a} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{i,i}, \qquad i = 1,2,3.$$

Выражение для тензора энергии-импульса имеет вид в стандартной модели Фридмана

$$T = \begin{pmatrix} c^2\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что на самом деле тензор энергии–импульса имеет точное выражение в уравнении (2), и хорошо видно, что там нет нулевых компонент. Это показывает, что метрика Фридмана не проходит как точное решение уравнений Эйнштейна. Тем не менее она и сейчас является способом получать простые модели, что мы и сделали в примере 3.

В итоге имеем

$$\Lambda + \frac{3\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{c^2} \rho,$$

$$\Lambda a^2 + \dot{a}^2 + 2a\ddot{a} = 0.$$

Если учесть, что $a = const$, то получим

$$\Lambda = \frac{8\pi G}{c^2} \rho,$$

$$\Lambda a^2 = 0.$$

Из второго уравнения получаем, что $a = 0$.

Выводы. Простота получения решений движения частиц в метрике Фридмана в космологическом случае наталкивает на мысль сделать то же самое в более общих изотропных случаях: это бы было первым точным космологическим решением уравнения Эйнштейна. В следующем пункте мы начнем вычисления в общем случае изотропной метрики.

Пример 5. Общая изотропная метрика: уравнения движения частиц и космологические решения.

Изотропная метрика:

$$g^{\alpha\beta}=\begin{pmatrix} e(r,t) & a(r,t)x & a(r,t)y & a(r,t)z \\ a(r,t)x & b(r,t)+d(r,t)x^2 & d(r,t)xy & d(r,t)xz \\ a(r,t)y & d(r,t)xy & b(r,t)+d(r,t)y^2 & d(r,t)yz \\ a(r,t)z & d(r,t)xz & d(r,t)yz & b(r,t)+d(r,t)z^2 \end{pmatrix}$$

Отметим выражение для обратной метрики (для краткости аргументы опущены):

$$g_{\alpha\beta}=K\cdot\begin{pmatrix} b+dx^2+dy^2+dz^2 & -ax & -ay & -az \\ -ax & g_{11} & \dfrac{a^2xy-edxy}{b} & \dfrac{a^2xz-edxz}{b} \\ -ay & \dfrac{a^2xy-edxy}{b} & g_{22} & \dfrac{a^2yz-edyz}{b} \\ -az & \dfrac{a^2xz-edxz}{b} & \dfrac{a^2yz-edyz}{b} & g_{33} \end{pmatrix}$$

$$K=\frac{1}{be-(a^2-ed)(x^2+y^2+z^2)}$$

$$g_{11}=\frac{1}{b}(-a^2y^2-a^2z^2+eb+edy^2+edz^2)$$

$$g_{22}=\frac{1}{b}(-a^2x^2-a^2z^2+eb+edx^2+edz^2)$$

$$g_{33}=\frac{1}{b}(-a^2x^2-a^2y^2+eb+edx^2+edy^2)$$

По массовому соотношению $g^{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta=(mc)^2$ составим и решим квадратное уравнение относительно p_0:

$$g^{00}p_0^2+g^{i0}p_ip_0+g^{ij}p_ip_j=(mc)^2$$

Физический смысл имеет корень, взятый с минусом:

$$p_0=\frac{1}{e}\left(-a(p_1x+p_2y+p_3z)-\sqrt{(a^2-ed)(p_1x+p_2y+p_3z)^2+e(mc^2-bp^2)}\right)$$

Здесь использовано обозначение $p^2=p_1^2+p_2^2+p_3^2$.

Для гамильтониана справедливо

$$H=-cp_0=\frac{c}{e}\left(a(p_1x+p_2y+p_3z)+\sqrt{(a^2-ed)(p_1x+p_2y+p_3z)^2+e(mc^2-bp^2)}\right).$$

Если все функции зависят только от радиус-вектора r, а не от координат по отдельности, выражение упрощается:

$$H=\frac{c}{e}\left(apr+\sqrt{p^2r^2(a^2-ed)+e(mc^2-bp^2)}\right).$$

Далее будем делать выкладки для этого случая.

Сделаем подстановку $p = \nabla W = W_r;\ W_t = \frac{\partial W}{\partial t}$ и выпишем уравнение Гамильтона-Якоби:

$$eW_t^2 + 2aW_tW_r r + bW_r^2 + dr^2W_r^2 = (mc)^2.$$

Отрицательный корень этого квадратного уравнения (относительно W_t) дает

$$W_t = \frac{1}{e}\left(-arW_r - \sqrt{W_r^2(a^2r^2 - eb - dr^2e) + e(mc)^2)}\right).$$

Запишем систему из уравнения Гамильтона-Якоби и уравнения неразрывности:

$$\begin{cases} eW_t^2 + 2aW_tW_r r + bW_r^2 + dr^2W_r^2 = (mc)^2 \\ \dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial r}\left(\rho\dfrac{\partial H}{\partial W_r}\right) = 0 \end{cases}$$

В космологическом решении плотность не зависит от пространственных координат (т.е. $\rho = \rho(t, m)$), и переменные в уравнении неразрывности разделяются:

$\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial r}(r\varphi(r,t)) = -3H(m,t),\ H(m,t)$ – «постоянная» Хаббла.

Отсюда получаем выражение

$$\varphi(m,r,t) = H(m,t) + \frac{A(m,t)}{r^3}.$$

Преобразуем это уравнение к виду:

$\frac{W_r\mu}{\sqrt{W_r^2\mu + e(mc)^2}} = T$, где $\mu(r,t) = r^2(a^2 - de) - be,\ T(m,r,t) = \frac{e}{c}r\varphi(r,t) - ar.$

Решаем это уравнение относительно W_r, получаем

$$W_r = Temc \cdot \sqrt{\frac{1}{\mathrm{e}(\mu^2 - T^2\mu)}}.$$

Подставляя это выражение в решение уравнения Гамильтона-Якоби, получаем

$$W_t = -mc\sqrt{\frac{1}{\mathrm{e}(\mu^2 - T^2\mu)}} \cdot (arT + \mu).$$

Получаем, как и в случае примера 3 для метрики Фридмана, уравнение на коэффициенты метрики, приравнивая вторые частные производные. $\frac{\partial^2 W}{\partial r\partial t} = \frac{\partial^2 W}{\partial t\partial r}$

Перепишем выражения в виде

$W_t = Q\sqrt{\frac{1}{Z}}\ ,\ W_r = R\sqrt{\frac{1}{Z}}$, где $Z = \mathrm{e}(\mu^2 - T^2\mu),\ R = Temc,\ Q = -mc(arT + \mu).$

Получаем уравнение

$$2ZR_t - R\,Z_t = 2ZQ_r - QZ_r.$$

Это и есть общее соотношение на коэффициенты метрики в изотропном случае, которые дают космологические решения. Они обобщают соотношения примера 3. Пример 3 значительно обобщает и упрощает результаты работ [27,29], а также показывает, что первое [31,32] из предположений Эйнштейна в отношении работы Фридмана [30] о тривиальности этой модели оказалось оправданным. Итак, мы построили общую теорию космологических решений в изотропной метрике. Рассмотрение частных случаев представляет значительный интерес.

Заключение

Мы получили возможность выводить уравнения электродинамики и гравитации в замкнутой форме из принципа наименьшего действия в форме уравнения Власова (ср. [3-15]). Проясняется смысл уравнений типа Власова: это единственный пока способ получить уравнения гравитации и уравнения электродинамики из принципа наименьшего действия. Также это единственный пока способ замкнуть систему уравнений гравитации и электродинамики с помощью принципа наименьшего действия, используя функцию распределения объектов (электронов, ионов, звёзд в галактиках, галактик в супергалактиках или Вселенной) по скоростям и пространству. Соответствующие уравнения гидродинамического уровня (например, уравнения магнитной гидродинамики или гравитирующей газодинамики) также естественно получать из уравнений типа Власова гидродинамической подстановкой (пока единственный способ связи с классическим действием и для этих уравнений). Ранее система уравнений Власова-Максвелла-Эйнштейна была получена для скоростей [9] и для импульсов [19-21], что дает возможность исследовать космологические решения переходом к уравнению Гамильтона-Якоби. Здесь мы исследовали важные слаборелятивистские примеры [20-23] – обобщения моделей типа Милна-Маккри. В работах [19-21] были получены космологические решения в нерелятивистском случае, где была выведена и обобщена модель Милна-Маккри [20-21]. На основе этого был обоснован потенциал Гурзадяна $U(r) = -\frac{\gamma}{r} + ar^2$ [24-25], где второе слагаемое связано с лямбда-членом Эйнштейна. Мы построили математическую теорию темной энергии двумя способами: 1) с лямбдой в нерелятивизме (п.3), обобщая модель Милна-

Маккри, и 2) без обращения к лямбде Эйнштейна из принципа наименьшего действия, отождествив темную энергию с энергией взаимодействия гравитационного и гипотетического поля (п.4). Эти модели также дают возможность описывать космические аномалии или напряжения постоянной Хаббла (the Hubble constant tension). Представляет значительный интерес продолжить исследование предложенных здесь моделей для оценки лямбды Эйнштейна и различных релятивистских и слаборелятивистских приближений как аналитически и численно, так и в сравнении с экспериментами. Мы показали также, что модель Фридмана, дополненная уравнениями движения материи, накладывает жесткие ограничения на метрику.

Библиографический список

1. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. М.: ЛКИ, 2007.
2. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Методы и приложения. М.: Наука. 1986.
3. Choquet-Bruhat Y. Introduction to general relativity, black holes and cosmology. New York: Oxford, University Press. 2015.
4. Cercigniani C., Kremer G.M. The relativistic Boltzmann equation: theory and applications. Berlin: Birkhauser, 2002.
5. Веденяпин В.В., Негматов М.А. О выводе и классификации уравнений типа Власова и МГД. Тождество Лагранжа и форма Годунова // Теоретическая и математическая физика. - 2012. Т. 170. № 3. С. 468–480.
6. Веденяпин В.В., Негматов М.-Б. А., Фимин Н.Н. Уравнения типа Власова и Лиувилля, их микроскопические, энергетические и гидродинамические следствия. Изв. РАН. Сер. матем. 2017. Т. 81. № 3. С. 45–82.
7. Веденяпин В.В., Негматов М.А. О выводе и классификации уравнений типа Власова и магнитной гидродинамики. Тождество Лагранжа, форма Годунова и критическая масса. СМФН, 2013, том 47, С. 5–17.
8. Веденяпин В.В., Негматов М.А. О топологии стационарных решений гидродинамических и вихревых следствий уравнения Власова и метод Гамильтона–Якоби. Докл. РАН, 449:5 (2013), 521–526;
9. Веденяпин В.В., Воронина М.Ю., Руссков А.А. О выводе уравнений электродинамики и гравитации из принципа наименьшего действия. Доклады РАН, 2020, том 495, с. 9–139.
10. Huanchun Ye and Morrison P. J. Action principles for the Vlasov equations // Phys Fluids B. 1992. V. 4. № 4. P. 771–777.

11. Rein G., Rendall A.D. Smooth static solutions of the spherically symmetric Vlasov–Einstein system // Ann. del'Inst. H. Poincarre, Physique Theorique. 1993. V. 59. P. 383–397.
12. Kandrup H.E., Morrison P.J. Hamiltonian structure of the Vlasov–Einstein system and the problem of stability for spherical relativistic star clusters // Ann. Phys. 1993. V. 225. P. 114–166
13. Pegoraro F., Califano F., Manfredi G., Morrison P.J. Theory and Applications of the Vlasov Equation. European Journal of Physics D 69, 68 (3pp) (2015). March.
14. Okabe T., Morrison P.J., Friedrichsen III J.E., Shepley L.C. Hamiltonian Dynamics of Spatially-Homogeneous Vlasov-Einstein Systems. Physical Review D 84, 024011 (11pp) (2011).
15. Brizard A. J., Morrison P. J., Burby J. W., de Guillebon L. and Vittot M. Lifting of the Vlasov-Maxwell bracket by Lie-transform method. J. Plasma Phys. (2016), vol. 82, 905820608 c Cambridge University Press 2016. doi:10.1017/S0022377816001161
16. Madelung E., Quantentheorie in hydrodynamischer form (Quantum theory in hydrodynamic form), Z Phys, 40 (1926), 322–326.
17. Козлов В. В. Гидродинамика гамильтоновых систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Матем. Мех, 1983, № 6, 10–22
18. Козлов В. В., Общая теория вихрей, Изд-во Удмуртского ун-та, Ижевск, 1998, 239с.
19. Vedenyapin V.V., Fimin N.N., Chechetkin V.M. The generalized Friedmann model as a self-similar solution of Vlasov–Poisson equation system // The European Physical Journal Plus. – 2021. – Т. 136. – №. 6. – С. 1-11.
20. Веденяпин В.В., Парёнкина В.И., Свирщевский С.Р. О выводе уравнений электродинамики и гравитации из принципа наименьшего действия // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 62:6 (2022), 1016–1029.
21. Веденяпин В.В. О выводе уравнений электродинамики и гравитации из принципа наименьшего действия, методе Гамильтона–Якоби и космологических решениях // Докл. РАН. Матем., информ., проц. Упр., 504 (2022), 51–55.
22. McCrea W.H., Milne E.A. Quart. J. Math. 5, 73 (1934).
23. Orlov Yu.N., Pavlotsky I.P. BBGKY hierarchies and Vlasov's equations in postgalilean aproximation // Physica A. 1988. V. 151. P. 318.
24. Чернин А.Д. Темная энергия и всемирное антитяготение // Успехи физических наук. 2008. Т. 178. № 3. С. 267–300.
25. Capozziello S., Gurzadyan V. G. Focus point on tensions in cosmology from early to late universe: the value of the Hubble constant and the question of dark energy //The European Physical Journal Plus. – 2023. – Т. 138. – №. 2. – С. 184.

26.Vedenyapin V.V., Fimin N.N., Chechetkin V.M. Hydrodynamic consequences of Vlasov-Maxwell-Einstein equations and their cosmological applications. Gravit. Cosmol. 29, No. 1, 1-9 (2023).
27.Веденяпин В.В., Парёнкина В.И., Петров А.Г., Чжан Хаочэнь. Уравнение Власова-Эйнштейна и точки Лагранжа // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2022, 023, 23 стр.
28.Маслов В.П. Комплексные марковские цепи и континуальный интеграл Фейнмана. М.: Наука, 1976. - 189 с.
29.Веденяпин В.В., Бай А.А., Петров А.Г. О выводе уравнений гравитации из принципа наименьшего действия, релятивистских решениях Милна-Маккри и о точках Лагранжа // Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр., **514**:1 (2023), 69–73.
30. Фридман А.А. О кривизне пространства // УФН, 1963, том 80, номер 3, 439–446. Журн. Русск. физ.-хим. о-ва, часть физ. 56 (1), 59 (1924). Работа впервые опубликована на нем. языке в Zs. Phys. 11, 377 (1922).
31. Эйнштейн А. Замечание к работе А. Фридмана “О кривизне пространства”, УФН, 1963, том 80, номер 3, 453. A. E i n s t e i n , Bemerkung zu der Arbeit von A.Friedman “Uber die Krummung des Raumes», Zs. Phys. 11, 326 (1922).
32. Эйнштейн А. К работе А. Фридмана “О кривизне пространства” // УФН, 1963, том 80, номер 3, 453. A. E i n s t e i n , Notiz zu der Arbeit von A.Friedman “Uber die Krummung des Raumes», Zs. Phys. 21, 228 (1923).