



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 26 за 2024 г.



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

Н.Г. Чурбанова, М.А. Трапезникова,  
В.В. Емец

Моделирование течений с  
пористыми вставками с  
использованием КГД-системы  
уравнений

Статья доступна по лицензии  
[Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)



**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Чурбанова Н.Г., Трапезникова М.А., Емец В.В. Моделирование течений с пористыми вставками с использованием КГД-системы уравнений // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2024. № 26. 11 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2024-26>  
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2024-26>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В.Келдыша  
Российской академии наук**

**Н.Г. Чурбанова, М.А. Трапезникова, В.В. Емец**

**Моделирование течений с пористыми  
вставками с использованием  
КГД-системы уравнений**

**Москва — 2024**

**Чурбанова Н.Г, Трапезникова М.А., Емец В.В.**

**Моделирование течений с пористыми вставками с использованием КГД-системы уравнений**

В работе предлагается модель для расчета течений в системе «свободный поток–пористая среда», основанная на обобщенной квазигазодинамической системе уравнений, включающей в себя члены сопротивления Дарси–Форхгеймера. Приводятся тестовые расчеты течений в канале, содержащем пористую пробку, и в каверне с движущейся крышкой, частично заполненной пористой средой.

**Ключевые слова:** течение в пористой среде, квазигазодинамическая система уравнений

***Natalia Gennadievna Churbanova, Marina Alexandrovna Trapeznikova, Vladislav Valerievich Emets***

**Modeling flows with porous inserts using QGD-system of equations**

The paper proposes a model for calculating the “free flow–porous medium” flow, based on a generalized quasi-gasdynamic system of equations involving the Darcy–Forchheimer terms. Test calculations are presented for flows in a channel containing a porous plug and in a lid–driven cavity partially filled with a porous medium.

**Key words:** flow in a porous medium, quasi-gasdynamic system of equations

## Оглавление

Введение .....	3
Модель течения с пористыми вставками, основанная на КГД–системе уравнений.....	4
Тестовые расчеты .....	6
Течение в плоском канале с пористой пробкой .....	6
Течение в каверне с движущейся крышкой, частично заполненной пористой средой .....	7
Заключение.....	10
Библиографический список.....	10

## Введение

Во многих инженерных приложениях встречаются задачи с течениями в пористых средах, например, различных фильтрах, химических реакторах, топливных элементах и т.д. Задача еще усложняется, если в рассматриваемой области имеет место система, состоящая из свободного потока чистой жидкости и твердых включений, рассматриваемых как насыщенное пористое тело.

В литературе отмечается [1], что для решения задач такого типа можно выделить три разных подхода: подход в масштабах всей рассматриваемой области, подход в масштабах пор и подход в масштабах репрезентативного (характерного) элементарного объема (REV – representative elementary volume).

В первом случае вся область рассматривается как сплошная среда, для которой справедлива общая система уравнений, а переход свойств на интерфейсе между пористой и свободной областями описывается не граничными условиями в явном виде, а некоторым искусственным путем [2].

Второй подход основан на прямом моделировании гидродинамики в поровом пространстве твердого каркаса, т.е. расчет необходимо проводить в областях очень сложной формы, что значительно увеличивает вычислительные затраты.

В связи с этим, несмотря на возрастающие мощности современных вычислительных комплексов, не теряет актуальности третий подход, когда параметры течения в поровом пространстве осредняются по репрезентативному объему. В этом случае течения в свободной и пористой областях можно описывать при помощи разных систем уравнений, а на границе между областями вводить дополнительные граничные условия, обеспечивающие переход от одной системы уравнений к другой. Однако наиболее удобным является подход, при котором единая система уравнений записывается для всей расчетной области, включающей в себя и насыщенное пористое тело, и однородную жидкость, т.е. вычисления проводятся «сквозным счетом» [3–6].

В данной работе используется последний вариант. А именно, здесь рассматривается модель для расчета систем «пористое тело–свободный поток», справедливая во всей области, включающей в себя и пористое тело, и свободный поток. Модель основана на квазигазодинамической (КГД) системе уравнений [7, 8]. Система уравнений, описывающая свободный поток чистой жидкости, преобразуется по аналогии с расширенной системой уравнений Дарси–Форхгеймера [9], что обеспечивает возможность «сквозного счета» без выделения внутренних границ.

## Модель течения с пористыми вставками, основанная на КГД–системе уравнений

Квазигазодинамическая система уравнений [7, 8] используется для решения широкого спектра задач уже в течение сорока с лишним лет и хорошо зарекомендовала себя при моделировании течений в различных областях газовой динамики.

Ниже приведен один из вариантов двумерной КГД–системы уравнений, описывающей три закона сохранения для нестационарного течения газа. Индекс  $f$ , присутствующий в качестве индекса у компонент скорости, означает, что это скорость чистой жидкости (free flow), то есть обычная газодинамическая скорость.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_f)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_f)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u_f^2 + P) + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_f^2 + P), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u_f^2 + P) + \frac{\partial \rho u_f v_f}{\partial y} = \\ = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u_f^3 + 3P u_f) + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_f^2 u_f + P u_f) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho v_f}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_f v_f}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_f^2 + P) = \\ = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u_f^2 v_f + P v_f) + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_f^3 + 3P v_f) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial(u(E+P))}{\partial x} + \frac{\partial(v(E+P))}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u^2(E+2P)) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial y} (v^2(E+2P)) + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{P(E+P)}{\rho} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial y} \frac{P(E+P)}{\rho} \end{aligned} \quad (4)$$

В уравнениях использованы следующие обозначения:  $\rho$  – плотность,  $u_f$  и  $v_f$  – горизонтальная и вертикальная компоненты скорости соответственно,  $P = \rho R T$  – давление,  $E = \rho(e + \frac{u_f^2 + v_f^2}{2})$  – полная энергия,  $e$  – внутренняя энергия.

Параметр  $\tau$  является параметром релаксации и в данной работе определяется как  $\tau = \mu/P$ , где  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости.

В работах [3, 4] приведен способ получения системы уравнений для моделирования течений в пористой среде на основе уравнений Навье–Стокса. Для этого система уравнений Навье–Стокса осредняется по малому репрезентативному объему расчетной области, содержащему достаточное количество пористого вещества. В результате получается система уравнений для описания течений в пористой среде, где в уравнениях сохранения импульса, помимо обычных членов уравнений Навье–Стокса, появляются дополнительные слагаемые в правой части уравнений, аналогичные законам Дарси и Форхгеймера. Если выписать по аналогии уравнения сохранения импульса КГД-системы для течений в пористой среде, то можно получить следующие уравнения:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\varepsilon} \rho u^2 \right) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\varepsilon} \rho u v \right) = \\ & = -\frac{\partial}{\partial x} P - \alpha \left( \frac{\mu}{K} u + \frac{C_F \rho}{\sqrt{K}} \sqrt{(u^2 + v^2)} u \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho \frac{u^3}{\varepsilon^3} + 3P \frac{u}{\varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho \frac{v^2 u}{\varepsilon^3} + P \frac{u}{\varepsilon} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\varepsilon} \rho u v \right) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\varepsilon} \rho v^2 \right) = \\ & = -\frac{\partial}{\partial y} P - \alpha \left( \frac{\mu}{K} v + \frac{C_F \rho}{\sqrt{K}} \sqrt{(u^2 + v^2)} v \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho \frac{u^2 v}{\varepsilon^3} + P \frac{v}{\varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho \frac{v^3}{\varepsilon^3} + 3P \frac{v}{\varepsilon} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь:  $u$  и  $v$  – компоненты осредненной скорости – скорости Дарси, соотношение между скоростью Дарси и газодинамической скоростью:  $\mathbf{u} = \varepsilon \mathbf{u}_f$ ,  $\varepsilon$  – пористость, равная отношению объема пор к общему репрезентативному объему,  $K$  – проницаемость, а  $C_F$  – коэффициент инерционного сопротивления (коэффициент Форхгеймера). Коэффициент  $\alpha$  равен единице в точках, принадлежащих пористой среде, и равен нулю в областях свободного течения, тогда система принимает вид КГД-системы (1)–(4).

Линейный член Дарси  $\frac{\mu}{K} u$  и нелинейный член Форхгеймера  $\frac{C_F \rho}{\sqrt{K}} \sqrt{(u^2 + v^2)} u$  в уравнении (5), а также соответствующие слагаемые в правой части уравнения (6) – это силы сопротивления, появляющиеся благодаря наличию пористой среды.

Простейшей численной реализацией полученной системы уравнений является реализация явной разностной схемой. Однако для повышения устойчивости схемы использовалась полуявная схема. Значения величин на новом слое вычисляются за несколько итераций как полусумма значений, взятых с предыдущего и промежуточного слоев.

Первые пространственные производные аппроксимировались центральными разностями, имеющими второй порядок аппроксимации.

## Тестовые расчеты

### Течение в плоском канале с пористой пробкой

Для тестирования новой модели использовалась обезразмеренная система уравнений. В качестве теста была рассмотрена задача о стационарном течении в плоском канале. В первом варианте моделировалось течение в канале с чистой жидкостью. Начальная скорость течения равна нулю по всей расчетной области. Длина канала в восемь раз больше высоты. Для входной продольной скорости задавался параболический профиль:

$$u(0, y) = \frac{6 \cdot u_{mean} \cdot y}{H} \left(1 - \frac{y}{H}\right), \quad u_{mean} = 1. \quad (7)$$

На стенках канала заданы условия прилипания и непротекания. Число Маха  $M = 0.1$ , число Рейнольдса  $Re = 1$ . На рис. 1 показаны рассчитанное поле модуля скорости, который в данном случае совпадал со значениями  $u$ . Как видно из рисунка, во всем канале устанавливается стабилизированный параболический профиль скорости, совпадающий с заданным на входе.

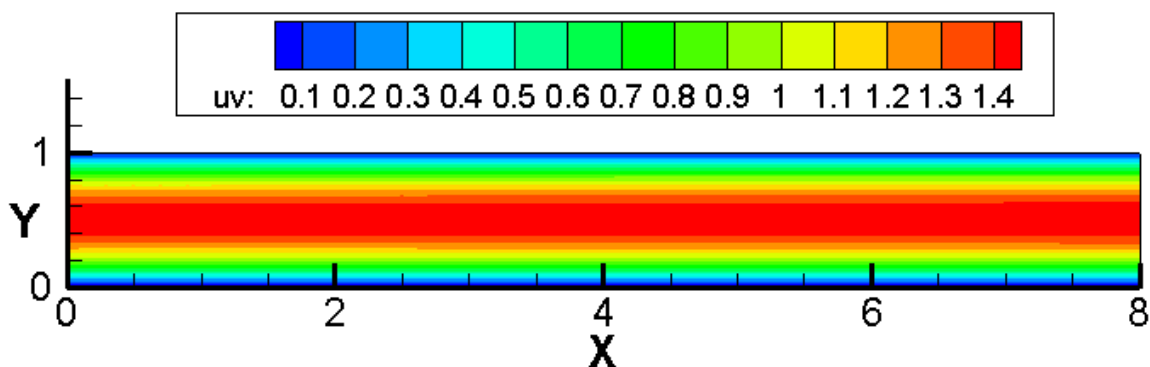


Рис. 1. Течение в канале без вставок: распределение модуля скорости

Для сравнения был посчитан второй вариант: тестовый расчет был выполнен для течения в канале, содержащем в середине пористую «пробку» [10, 11]. Начальные и граничные условия аналогичны предыдущему тесту, но в пористой области на стенках канала вместо прилипания – условия

проскальзывания. Значения пористости и проницаемости равнялись  $\varepsilon = 0.7$  и  $K = 0.01$  соответственно. Результат расчетов представлен на рис. 2.

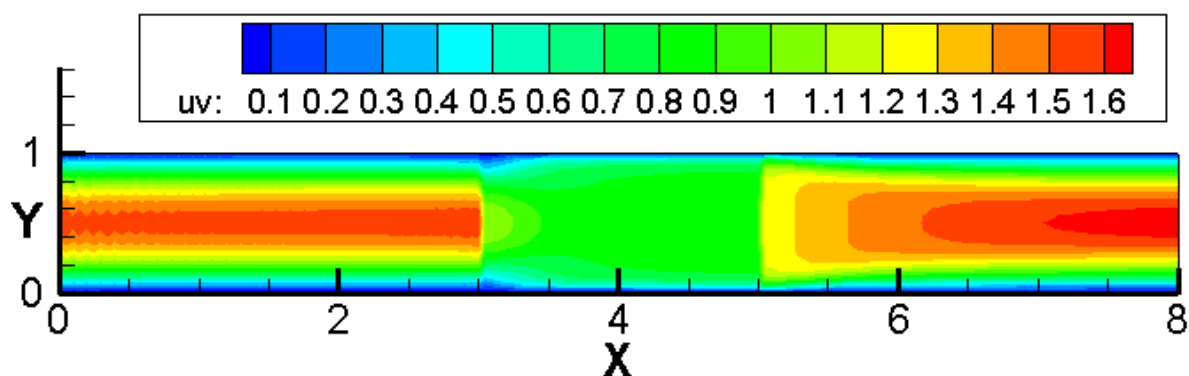


Рис. 2. Течение в канале с пористой пробкой: распределение модуля скорости

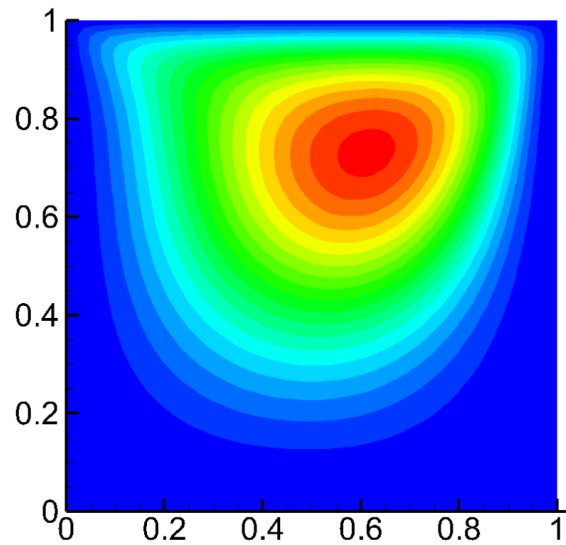
Видно, что течение слева от пробки (в области чистой жидкости) соответствует течению Пуазейля (скорость в поперечном сечении имеет параболический профиль). При протекании сквозь пористую пробку скорость в поперечном сечении канала выравнивается и становится почти везде равномерной. А после пробки течение вновь стабилизируется и опять принимает параболический профиль скорости.

### **Течение в камере с движущейся крышкой, частично заполненной пористой средой**

Второй тестовой задачей была классическая тестовая задача о течении в камере с движущейся верхней крышкой. Как и в предыдущем случае, в первом варианте рассматривалось течение чистой жидкости. В начальный момент времени компоненты скорости везде равны нулю, за исключением горизонтальной составляющей скорости на верхней границе, которая в безразмерных уравнениях равна единице и постоянна во времени. На трех границах для компонент скорости заданы условия прилипания. Для всех остальных величин заданы условия второго рода: равенство нулю производной по нормали. В качестве расчетной области использовался единичный квадрат с равномерной сеткой  $64 \times 64$ .

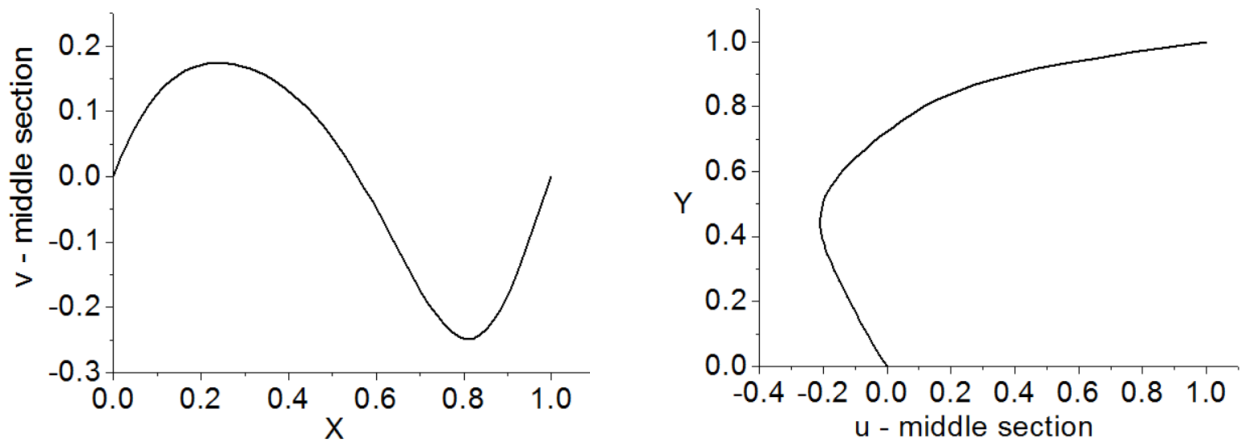
Расчеты проводились на квадратных сетках при числе Маха  $M = 0.1$  и числе Рейнольдса  $Re = 1$ .





*Рис. 3.* Линии тока при установившемся течении в каверне с подвижной верхней крышкой,  $Re = 1$ ,  $M = 0.1$

На рис. 3 показаны линии тока. На рис. 4 – одномерные графики горизонтальной компоненты скорости в центральном вертикальном сечении и вертикальной компоненты скорости в центральном горизонтальном сечении



*Рис. 4.* Значения вертикальной и горизонтальной составляющих скорости в горизонтальном и вертикальном средних сечениях каверны соответственно

Следующими были расчеты течения в каверне, частично (на 3/4) заполненной пористой средой с заданными пористостью и проницаемостью. Начальные и граничные условия аналогичны задаче о течении в пустой каверне с движущейся крышкой. Расчеты проводились при разных значениях пористости и проницаемости.

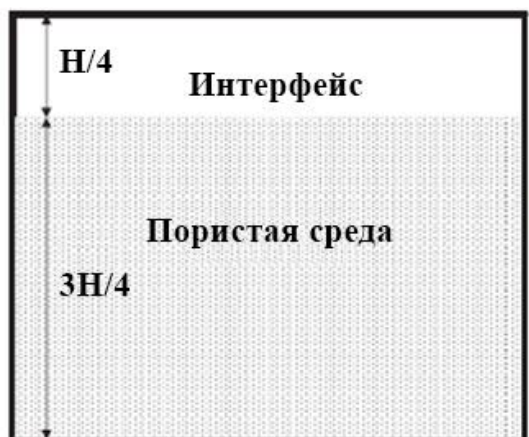


Рис. 5. Постановка задачи о течении в каверне, частично заполненной пористой средой

На рис. 6 и 7 показаны результаты расчетов. Рисунок 6 демонстрирует профили скоростей, аналогичных рис. 4, при пористости  $\varepsilon=0.7$  и трех разных значениях числа Дарси ( $Da=K/H^2$ ): 0.05, 0.01 и 0.001. Видно, что с увеличением проницаемости поток через пористую зону увеличивается (отрицательная компонента скорости в горизонтальном направлении становится больше). Вертикальная компонента скорости возрастает с увеличением проницаемости. Рисунки показывают, что число Дарси оказывает существенное влияние на профили скоростей.

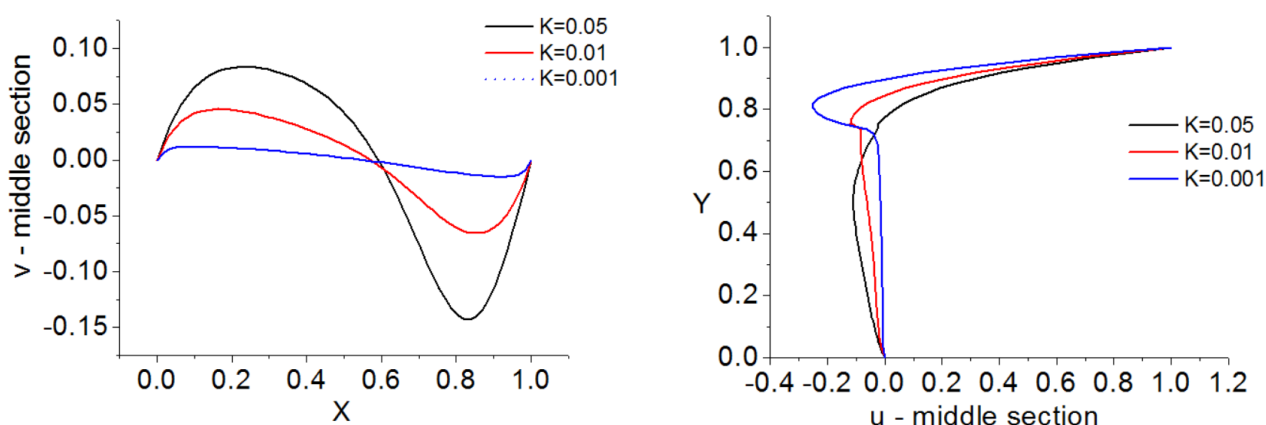
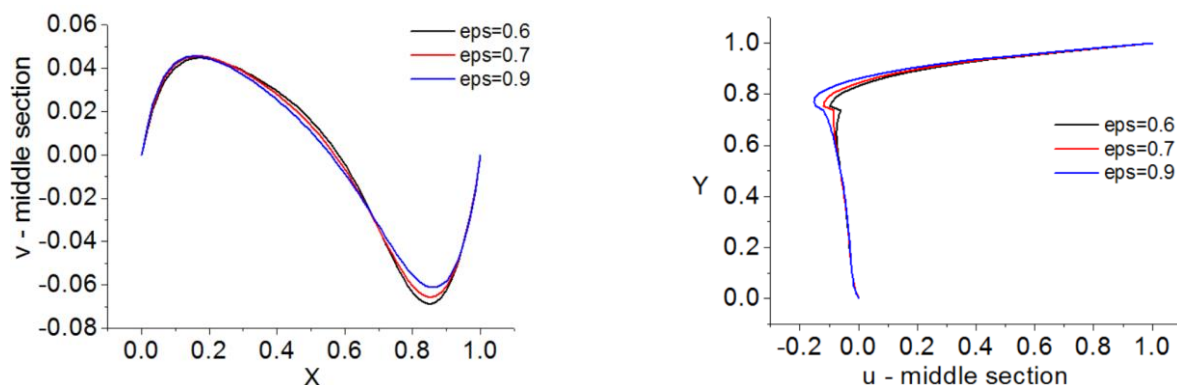


Рис. 6. Значения вертикальной и горизонтальной составляющих скорости в горизонтальном и вертикальном средних сечениях каверны соответственно при разных значениях числа Дарси

На рис. 7 приведены результаты расчетов, которые проводились с постоянным числом Дарси, равным 0.01, но с разными значениями пористости: 0.6, 0.7 и 0.9. Видно, что пористость, наоборот, мало влияет на величину компонент скорости.



*Рис. 7.* Значения вертикальной и горизонтальной составляющих скорости в горизонтальном и вертикальном средних сечениях каверны соответственно при разных значениях пористости

Результаты расчетов последней задачи сравнивались с решением аналогичной задачи в работе [1]. Несмотря на то что в [1] исследовалось движение несжимаемой жидкости, при характеристиках газодинамического течения, приведенных в данной работе, было получено очень хорошее качественное совпадение.

## Заключение

В работе предлагается система уравнений для моделирования сложных течений в системе «свободный поток–пористое тело», в основе которой лежит КГД–система уравнений. Преобразование КГД–системы проводится по аналогии с известными работами в этой области, где уравнения получаются путем осреднения микроскопического течения в порах по репрезентативному объему. Полученная модель позволяет проводить расчеты во всей области «сквозным счетом» без выделения границ с пористым телом. Тестовые расчеты продемонстрировали хорошее качественное совпадение результатов с аналогичными расчетами других авторов.

## Библиографический список

1. H. Bai, P. Yu, S.H. Winito, H.T. Low. Lattice Boltzmann method for flows in porous and homogenous fluid domains coupled at the interface by stress jump // *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 2009, v.60, No.6, p.691–708.
2. B. Goyeau, D. Lhuillier, D. Gobin, M.G. Velarde. Momentum transport at a fluid-porous interface // *Int. J. Heat Mass Transfer*, 2003, v.46, No.21, p. 4071–4081.
3. S. Whitaker. *Advances in theory of fluid motion in porous media* // *Ind. Eng. Chem.*, 1969, v.61, No.12, p.14–28.
4. S. Whitaker. *The Method of Volume Averaging*. – Dordrecht, Netherlands. Springer Science + Business Media, 1999, 219 p.

5. W.G. Gray, P.C.Y. Lee. On the theorems for local volume averaging of multiphase systems // *Int. J. Multiphase Flow*, 1977, v.3, No.4, p.333–340.
6. A.G. Hendrick, R.G. Erdmann, M.R. Goodman. Practical considerations for selection of representative elementary volumes for fluid permeability in fibrous porous media // *Transp. Porous Media*, 2012, v.95, p.389–405.
7. Б.Н. Четверушкин. Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. – М.: МАКС Пресс, 2004, 332 с.
8. Т.Г. Елизарова. Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. Лекции по математическим моделям и численным методам в динамике газа и жидкости. – М.: Научный Мир, 2007, 350 с.
9. P. Yu, T.S. Lee, Y. Zeng, H.T. Low. A numerical method for flows in porous and homogenous fluid domains coupled at the interface by stress jump // *Int. J. Numer. Methods in Fluids*, 2007, v.53, No.11, p.1755–1775.
10. L. Betchen, A.G. Straatman, B.E. Thompson. A nonequilibrium finite-volume model for conjugate fluid/porous/solid domains // *Numer. Heat Transfer, Part A*, 2006, v.49, No.6, p.543–565.
11. С.В. Поляков, М.А. Трапезникова, А.Г. Чурбанов, Н.Г. Чурбанова. Расчет несжимаемых течений в системе пористое тело-свободный поток // *Препринты ИПМ им.М.В.Келдыша*. 2021. № 71. 20 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2021-71>