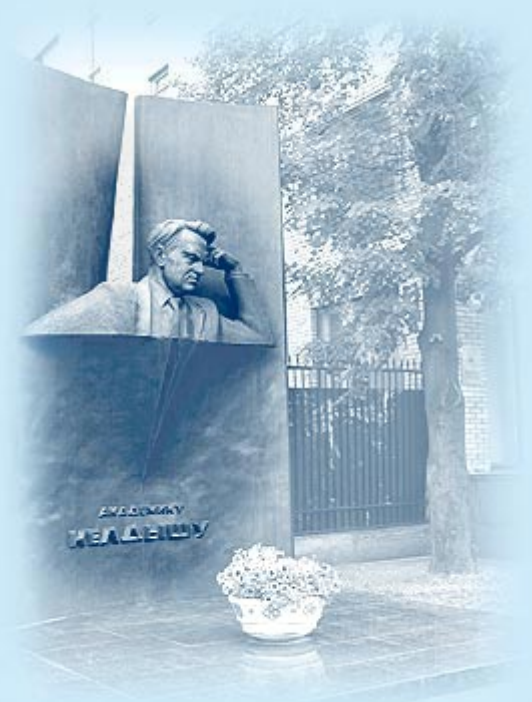




ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 10 за 2024 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

**А.Э. Бакир, Ю.А. Повещенко,
В.О. Подрыга, П.И. Рагимли**

**Пространственная
фильтрационная модель
гидратосодержащих сред с
неклассическим законом
движения**

Статья доступна по лицензии
[Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)



Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Пространственная фильтрационная модель гидратосодержащих сред с неклассическим законом движения / А.Э. Бакир [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2024. № 10. 28 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2024-10>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2024-10>

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

**А.Э. Бакир, Ю.А. Повещенко, В.О. Подрыга,
П.И. Рагимли**

**Пространственная фильтрационная
модель гидратосодержащих сред
с неклассическим законом движения**

Москва — 2024

Бакир А.Э., Повещенко Ю.А., Подрыга В.О., Рагимли П.И.

Пространственная фильтрационная модель гидратосодержащих сред с неклассическим законом движения

В работе дано описание пространственной фильтрационной задачи в трехфазной гидратно-равновесной зоне. Представлена математическая модель для исследования двумерных течений флюидов с учетом твердой гидратной фазы и нерегулярной структуры пластов. Используется неклассическая форма закона движения, применимая при пониженной проницаемости и невысоких перепадах давления. Предлагаются эффективные вычислительные алгоритмы на основе метода опорных операторов, позволяющие разделить гиперболическую и диссипативную подсистемы задачи. Алгоритмы реализованы на сетках нерегулярной структуры для моделирования двумерных многофазных процессов диссоциации газовых гидратов. Тестирование проводится на модельных пьезопроводных процессах с переносом насыщенностей, где показано, что депрессионные процессы менее выражены при использовании нелинейного закона движения.

Ключевые слова: математическое моделирование, газовые гидраты, метод опорных операторов, нерегулярные сетки, нелинейный закон фильтрации, перенос насыщенностей

Ahmed Elsaid Bakeer, Yury Andreevich Poveshchenko, Viktoriia Olegovna Podryga, Parvin Ilgar gizi Rahimly

Spatial filtration model of hydrate-containing media with a non-classical law of motion

The work provides a description of the spatial filtration problem in a three-phase hydrate equilibrium zone. A mathematical model is presented for studying two-dimensional fluid flows taking into account the solid hydrate phase and the irregular structure of formations. A non-classical form of the motion law is used, applicable at low permeability and low pressure drops. Efficient computational algorithms based on the support operator method are proposed that make it possible to separate the hyperbolic and dissipative subsystems of the problem. The algorithms are implemented on meshes of irregular structure to model the two-dimensional multiphase processes of gas hydrate dissociation. Testing is carried out on model piezoconductive processes with saturation transfer, where it is shown that depression processes are less expressed when using a nonlinear law of motion.

Key words: mathematical modeling, gas hydrates, support operator method, irregular meshes, nonlinear filtration law, saturation transfer

1. Введение

Газовые гидраты – это своеобразные соединения, образующиеся из газа и воды при определенных условиях и способные существовать в твердом состоянии. Если условия меняются, например, повышается температура или снижается давление, то гидрат может распадаться или возможен обратный процесс. Изучение газовых гидратов важно для разработки новых эффективных методов добычи углеводородов, а также для понимания физико-химических процессов, происходящих в пористой среде [1, 2].

Математическое описание процессов фильтрации жидкости и газа основывается на законах сохранения массы, импульса и энергии в пористой среде [3]. Этот же подход применяется при изучении фильтрации газов при наличии гидратов [4–8]. В этих исследованиях система разделяется на две части: блок переноса насыщенностей, отвечающий за процессы переноса, и уравнение пьезопроводности, описывающее термодинамические процессы. Такой подход позволяет использовать явные и неявные методы для решения задач и улучшает точность и скорость вычислений.

Многие залежи газовых гидратов расположены в коллекторах с низкой проницаемостью. Фильтрация в таких коллекторах происходит по нелинейным законам. В.А. Ненахов определил начальный градиент сдвига поровой воды в гидратосодержащих породах с помощью насыщения гидратами образцов песка [9]. А.Х. Мирзаджанзаде предложил теорию фильтрации с использованием начального градиента для вязкопластических жидкостей в работе [10]. Его школой были разработаны теории течения жидкостей с неньютоновскими свойствами и другие подходы, которые не соответствуют традиционному закону Дарси из-за сложности порового пространства, свойств жидкости и/или взаимодействия жидкости со стенками пористой среды [11, 12].

В данной работе рассматривается динамика двухкомпонентной (H_2O , CH_4) трехфазной флюидной системы в гидратно-равновесной зоне (ГРЗ). Эта система описывается одной термодинамической степенью свободы с температурной зависимостью вида $T=T(P)$, где P – давление [13, 14]. В качестве газа, формирующего гидраты, используется метан. Представленная математическая модель является развитием моделей, описанных в работах [7, 8], и учитывает нелинейность в законе Дарси [12]. Отличительной особенностью этой модели является ее способность работать с пространственно двумерными задачами в условиях стратиграфической нерегулярности, включая профильные и площадные вычисления с учетом сложной геометрии осадочных бассейнов.

Важным аспектом численного решения задач механики сплошной среды является возможность применения различных типов сеток с сохранением при этом основных свойств дифференциальных операторов. Метод опорных операторов [15–19] служит эффективным инструментом создания сеточных аппроксимаций математических уравнений физики с заданными характеристиками, позволяя использовать различные регулярные и

нерегулярные сетки, включая структурированные и неструктурированные тетраэдральные и гексаэдральные, а также смешанные и мортарные сетки.

В этой работе используется метод опорных операторов для решения задач теории фильтрации в осадочных бассейнах, учитывая работу с разрывными свойствами среды и нерегулярными сетками [19, 20]. Аппроксимация качественных процессов переноса насыщенности и термодинамических градиентов сохраняется на грубых сетках, а сеточная модель аппроксимирует тождества метода опорных операторов на различных временных слоях. Разработаны оригинальные подходы к интерполяции данных тождеств. С учетом специфики фильтрационных задач разработаны соответствующие алгоритмы метода опорных операторов.

В гидратно-равновесной зоне реализована связанная задача моделирования процессов термодинамической пьезопроводности и переноса водонасыщенности с гидратной растепленностью в областях с заданными свойствами. В работе используются инструментальные средства для формирования алгебраического представления скалярно-дивергентных задач на нерегулярной сетке осадочного бассейна и переменная динамическая структура количества алгебраических переменных в узлах сетки. Данные инструментальные средства осуществляют различные комбинации сеточных аппроксимаций операций векторного анализа «DIV», «GRAD» с учетом их использования в различных физических процессах и разнородных кусочно-разрывных фильтрационно-емкостных свойствах осадочного бассейна. Для тестирования проводились модельные расчеты пьезопроводных процессов при наличии переноса насыщенностей в двумерной среде на нерегулярной сетке. Получены численные решения как в случае классической (линейной) модели Дарси, так и в случае неклассической (нелинейной) модели движения.

2. Математическая модель пространственных задач фильтрации с твердофазными гидратными включениями

Математическое описание процессов диссоциации газовых гидратов основано на системе уравнений механики сплошных сред, которые описывают законы сохранения массы, импульса и энергии для пористой среды с учетом фазовых равновесий [21]. Для учета различных процессов, происходящих в пористой среде, модель должна содержать описание диффузионного теплообмена, растепления газовых гидратов (оттаивания и кристаллизации), многофазной фильтрации компонентов гидрата и скачков удельных объемов и масс при фазовых изменениях. Также необходимо принимать во внимание эффект Джоуля-Томсона. Таким образом, модель процессов диссоциации газовых гидратов представляет собой сложную систему уравнений, учитывающую все основные процессы и явления, происходящие в пористой

среде под воздействием внешних факторов. Уравнения балансов массы воды и газа представлены следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ m(S_v S_w \rho_w + (1 - S_v) \rho_v \beta_w) \right\} + \operatorname{div}[\rho_w \mathbf{V}_w] + q_w = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ m(S_v (1 - S_w) \rho_g + (1 - S_v) \rho_v (1 - \beta_w)) \right\} + \operatorname{div}[\rho_g \mathbf{V}_g] + q_g = 0. \quad (2)$$

Уравнение баланса энергии имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ m(S_v (S_w \rho_w \varepsilon_w + (1 - S_w) \rho_g \varepsilon_g) + (1 - S_v) \rho_v \varepsilon_v + (1 - m) \rho_s \varepsilon_s) \right\} + \\ + \operatorname{div} \left\{ \rho_w \varepsilon_w \mathbf{V}_w + \rho_g \varepsilon_g \mathbf{V}_g + P(\mathbf{V}_w + \mathbf{V}_g) \right\} + \operatorname{div} \mathbf{W} + q_\varepsilon = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\mathbf{W} = - \left(m(S_v (S_w \lambda_w + (1 - S_w) \lambda_g) + (1 - S_v) \lambda_v) + (1 - m) \lambda_s \right) \nabla T$ – тепловой поток. Индексы g, w, v, s относятся к газу, воде, гидрату, скелету пористой среды; P – давление, T – температура, t – время, $m = m(\mathbf{r}, P)$ – пористость, \mathbf{r} – радиус-вектор, S_w – водонасыщенность, $S_g = 1 - S_w$ – газонасыщенность, v – гидратонасыщенность, $S_v = 1 - v$ – растепленность, β_w – массовая доля воды в гидрате, $\rho_l = \rho_l(P, T)$, $\varepsilon_l = \varepsilon_l(P, T)$, $\lambda_l = \lambda_l(P, T)$ – плотности, внутренние энергии, коэффициенты теплопроводности компонент ($l = g, w, v, s$), \mathbf{V}_α – скорость фильтрации фазы $\alpha = w, g$; q_g, q_w, q_ε – плотности соответствующих источников.

Для скорости фильтрации жидкости и газа в пористой среде можно использовать классический закон Дарси, который является традиционным для задач поровой гидродинамики подземных сред [22]:

$$\mathbf{V}_\alpha = - \frac{k \cdot k_{r\alpha}}{\mu_\alpha} (\nabla P - \mathbf{g} \rho_\alpha), \quad \alpha = w, g, \quad (4)$$

где \mathbf{g} – вектор ускорения свободного падения, $k = k(\mathbf{r}, S_v, P)$ – абсолютная проницаемость, $k_{r\alpha} = k_{r\alpha}(S_w)$ – относительные фазовые проницаемости, $\mu_\alpha = \mu_\alpha(P, T)$ – вязкости воды и газа.

Систему уравнений (1), (2) (в рассматриваемом случае ГРЗ при фиксированном значении давления как определяющей термодинамической переменной) будем называть сатурационным блоком, имея в виду, что эти уравнения служат для определения водонасыщенности S_w и растепленности S_v .

Зависимость переменных от давления и температуры в зоне фазового равновесия в итоге сводится к зависимости от давления, так как это обусловлено законами термодинамики и фазовым равновесием [14]:

$$T = T(P) = A \ln P + B, \quad (5)$$

где A и B — эмпирические константы.

Энтальпия гидрата определяется как сумма энтальпий газа и жидкости, которые входят в его состав:

$$\beta_w i_w + (1 - \beta_w) i_g = i_v + h_{tr}, \quad (6)$$

где h_{tr} – скрытая теплота фазового перехода единицы массы гидрата,

$$i_l = \varepsilon_l + P / \rho_l \quad (7)$$

– энтальпия, $\varepsilon_l(P, T)$ – внутренняя энергия фаз, индекс $l \equiv g | w | v | s$ указывает фазу.

Отсюда получается выражение для внутренней энергии гидрата:

$$\varepsilon_v = \beta_w \varepsilon_w + (1 - \beta_w) \varepsilon_g + P \left(\frac{\beta_w}{\rho_w} + \frac{1 - \beta_w}{\rho_g} - \frac{1}{\rho_v} \right) - h_{tr}. \quad (8)$$

Для удельных (на единицу массы) энтальпий фаз также справедливо следующее соотношение:

$$di_l = c_{pl} (-k_{dl} dP + dT) \quad (9)$$

с так называемым коэффициентом дросселирования

$$k_{dl} = \frac{1}{c_{pl}} \left[T \left(\frac{\partial V_l}{\partial T} \right)_P - V_l \right].$$

Здесь индекс « P » у скобок означает, что частная производная по температуре берется при постоянном давлении: c_{pl} и $V_l = \frac{1}{\rho_l}$ – удельные теплоемкости при постоянном давлении и объемы фаз. В частности, для газовой фазы с уравнением состояния

$$\rho_g = \frac{PM}{z_g RT} \quad (10)$$

справедливо следующее соотношение:

$$k_{dg} = \frac{RT^2}{c_{pg} P} \frac{\partial z_g}{\partial T}, \quad (11)$$

что означает наличие эффекта Джоуля-Томсона ($k_{dg} \neq 0$) для неидеального газа с коэффициентом сверхсжимаемости z_g в изучаемых процессах неизотермической фильтрации, R – универсальная газовая постоянная, M – молярная масса газа.

3. Неклассическая модель фильтрационного течения с учетом его нелинейности

В последнее время ввиду сокращения запасов углеводородных ресурсов возросло значение проблемы освоения пластов с крайне низкой проницаемостью (от 10^{-16} до 10^{-14} м²). Опыты, представленные в источниках [23, 24], демонстрируют, что в процессе движения флюидов в

условиях пониженной проницаемости при невысоких перепадах давления наблюдаются отклонения от классического закона Дарси. В работе [25], в свою очередь, были изучены три возможных вида течения: фильтрация водных масс в водонасыщенной породе, фильтрация нефтяных залежей в породе с остаточным содержанием воды и фильтрация водных масс в нефтенасыщенной породе. Анализ проведенных экспериментов показал, что отклонения от линейности наблюдаются при фильтрации не только нефти, но и воды. При этом значения критических перепадов давления, при которых появляется нелинейность, также зависят от типа флюида, которым была насыщена порода изначально.

По итогам экспериментов [26] было установлено, что обнаруженные отклонения от закона Дарси в условиях фильтрации в малопроницаемых пластах связаны с наличием начального градиента давления. Замечено, что фильтрационный поток полностью отсутствует при снижении давления ниже указанного предела. Таким образом, движение через пористый материал прекращается, когда величина давления падает ниже определенного минимального значения. Следовательно, проникновение жидкости возможно только в зонах, где давление достаточно выше этого минимального уровня.

В работе [25] в областях с начальным градиентом фильтрации закон Дарси предлагается рассмотреть в следующей форме:

$$\mathbf{V}_\alpha = -\frac{k \cdot k_{r\alpha}}{\mu_\alpha} \varphi(|\text{grad}P|) \text{grad}P, \alpha = w, g, \quad (12)$$

где $\varphi(|\text{grad}P|)$ – функция, характеризующая изменение тангенса угла наклона кривой фильтрации.

Конкретизация вида таких фильтрационных течений с начальным градиентом изучалась в работах [27–30].

В работе [27] на основе теоретического анализа течения однофазной жидкости в пластах предложена теоретическая модель, описывающая течение для флюида с использованием неклассического закона Дарси (с начальным градиентом). На рис. 1 показана типичная кривая течения флюида, отличная от Дарси в пласте. Скорость потока и градиент давления флюида больше не подчиняются традиционному закону Дарси. Когда градиент давления превышает свое максимальное значение G_{\max} , зависимость между скоростью и градиентом давления является линейной. Пересечение экстраполяции и оси градиента давления обозначается как G_{pseudo} , которое определяется как псевдоначальный (квазиначальный) градиент давления. Когда градиент давления меньше G_{\max} , соотношение между скоростью потока и градиентом давления представляет собой нелинейную кривую, а точка пересечения скорости потока и оси градиента давления обозначается как G_{\min} и определяется как минимальный начальный градиент давления.

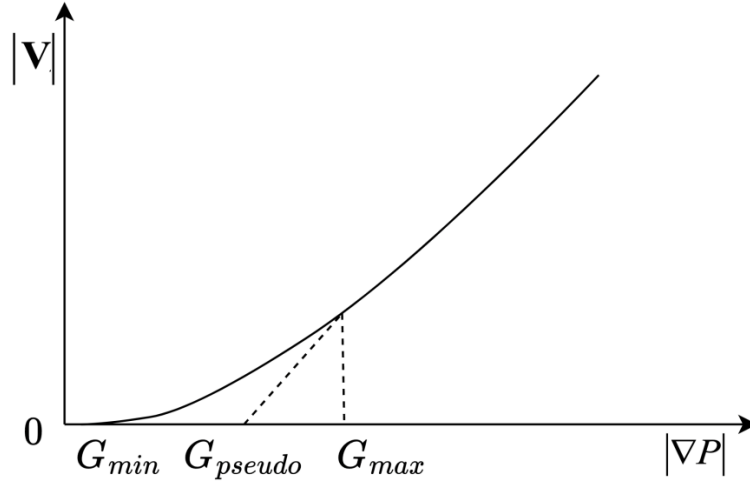


Рис. 1. Схематическая диаграмма типичной кривой не по Дарси [27]

В работе [27] предложенная однофазная модель расширяется на двухфазный случай несмешивающихся жидкостей (нефть и вода).

В настоящей работе предложенная двухфазная модель [27] применяется для исследования течения многофазного и многокомпонентного флюида при наличии газовых гидратов в пористой среде. Закон движения с начальным градиентом для исследуемого класса задач можно описать следующим образом:

$$\mathbf{V}_\alpha = -\frac{k \cdot k_{r\alpha}}{\mu_\alpha} \left(1 - \frac{b_\alpha}{c_\alpha + |\nabla P|} \right) \nabla P, \quad \alpha = w, g, \quad (13)$$

где b_α , c_α – параметры потока.

Условием течения флюида является $b_\alpha / (c_\alpha + |\nabla P|) < 1$. Его критическое значение $b_\alpha / (c_\alpha + |\nabla P|) = 1$.

Далее в настоящей работе используются выражения для b и c , которые были получены в [27]:

$$b_\alpha = c_\alpha + G_{\min, \alpha}, \quad c_\alpha = \frac{G_{\text{pseudo}, \alpha} - G_{\min, \alpha}}{G_{\max, \alpha} - G_{\text{pseudo}, \alpha}} G_{\max, \alpha}, \quad \alpha = w, g. \quad (14)$$

Таким образом, закон движения с начальным градиентом имеет вид

$$\mathbf{V}_\alpha = \begin{cases} -\frac{k \cdot k_{r\alpha}}{\mu_\alpha} \left(\frac{|\nabla P| - G_{\min, \alpha}}{|\nabla P| + c_\alpha} \right) \nabla P, & |\nabla P| > G_{\min, \alpha}, \\ 0, & |\nabla P| \leq G_{\min, \alpha} \end{cases}, \quad \alpha = w, g, \quad (15)$$

где $G_{\min, \alpha}$ – минимальный градиент давления, который необходимо флюиду преодолеть при прохождении через пористую среду; $G_{\max, \alpha}$ – максимальный стартовый градиент давления, который должен преодолеть флюид при прохождении через пористую среду; $G_{\text{pseudo}, \alpha}$ – псевдоначальный

(квазиначальный) градиент давления. Данные константы определяются из экспериментов и могут быть различными для воды и газа.

В случае, когда $c_\alpha = 0$ и $G_{\min,\alpha} = 0$, уравнение (13) представляет собой классическую модель потока Дарси.

4. Уравнение пьезопроводности с расщеплением по физическим процессам

Поставленная задача, включающая уравнения (1)–(3), (5) и закон определения скорости, является сложной системой уравнений математической физики, которая относится к квазилинейным уравнениям смешанного типа. В случае задачи двухфазной фильтрации применяется расщепление системы уравнений на два блока (для насыщенностей и для давления) [22]. В рассматриваемой в данной работе задаче также возможно подобное расщепление, которое позволяет значительно упростить процесс математического исследования.

Таким образом, получившаяся система уравнений состоит из сатурационного блока, который отвечает за процесс переноса насыщенностей при фиксированном давлении (уравнения (1) и (2)), и блока, описывающего диссипативно-пьезопроводные процессы при фиксированных насыщенностях, учитывая твердофазные включения:

$$\begin{aligned} m\delta_\varepsilon \left\{ S_v \left[S_w \frac{(\rho_w)_t}{\rho_w} + (1 - S_w) \frac{(\rho_g)_t}{\rho_g} \right] + (1 - S_v) \frac{(\rho_v)_t}{\rho_v} + \frac{(m)_t}{m} \right\} + \\ + \frac{\psi}{m\rho_v} \left\{ m \left\{ S_v \left[S_w \rho_w (\varepsilon_w)_t + (1 - S_w) \rho_g (\varepsilon_g)_t \right] + (1 - S_v) \rho_v (\varepsilon_v)_t \right\} + \right. \\ \left. + [(1 - m) \rho_s \varepsilon_s]_t \right\} + \delta_\varepsilon \text{DIG} + \frac{\psi}{m\rho_v} \text{DIG}_\varepsilon = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\text{DIG} = \frac{1}{\rho_w} \text{div}(\rho_w \mathbf{V}_w) + \frac{1}{\rho_g} \text{div}(\rho_g \mathbf{V}_g) + \left(\frac{q_w}{\rho_w} + \frac{q_g}{\rho_g} \right), \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \text{DIG}_\varepsilon = & \left[\text{div}(\rho_w \varepsilon_w \mathbf{V}_w) - \varepsilon_w \text{div}(\rho_w \mathbf{V}_w) \right] + \left[\text{div}(\rho_g \varepsilon_g \mathbf{V}_g) - \varepsilon_g \text{div}(\rho_g \mathbf{V}_g) \right] + \\ & + \text{div} \left[P(\mathbf{V}_w + \mathbf{V}_g) \right] + \text{div} \mathbf{W} + (q_\varepsilon - \varepsilon_w q_w - \varepsilon_g q_g). \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь

$$\frac{\psi}{m\rho_v} = \left(\varphi - \frac{1}{\rho_v} \right) \geq 0, \quad \varphi = \frac{\beta_w}{\rho_w} + \frac{(1 - \beta_w)}{\rho_g} \quad (19)$$

– скачок удельного объема (на единицу массы),

$$\delta_\varepsilon = \beta_w \varepsilon_w + (1 - \beta_w) \varepsilon_g - \varepsilon_v \geq 0 \quad (20)$$

– скачок удельной внутренней энергии (на единицу массы).

Диссипативное гидратное уравнение (16), полученное в результате исследования, содержит блоки с термодинамическим содержанием, которые включают интегрирующие множители, скачки объемов и энергии при фазовых переходах, а также аддитивные составляющие этих множителей. Эти компоненты могут быть использованы в физическом анализе и численном моделировании задачи для выделения эволюционно-устойчивых блоков модели методом численных методов.

5. Опорно-операторные методы для дискретных моделей пространственных задач фильтрации с твердофазными включениями

5.1. Метрический оператор нерегулярной сетки

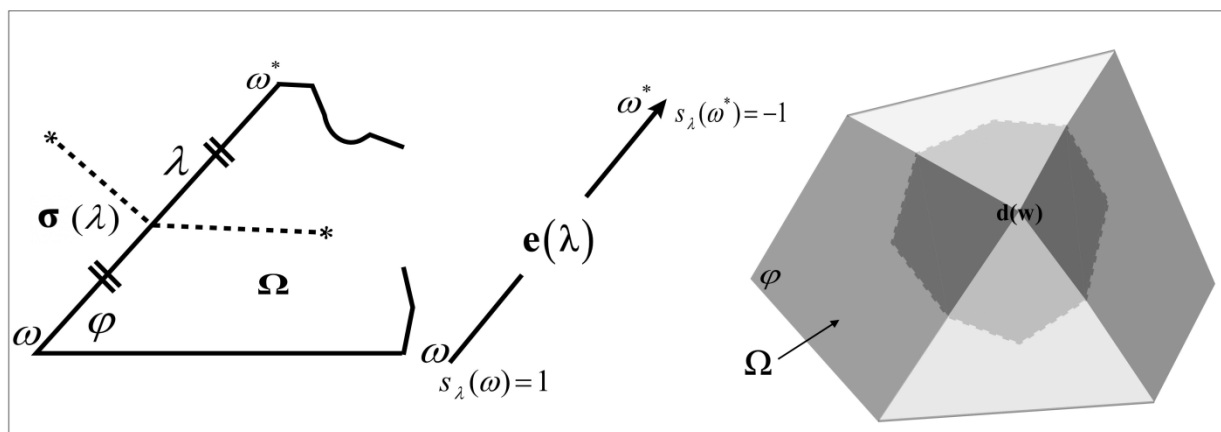


Рис. 2. Метрические сетки

Рассматривается разностная сетка, аппроксимирующая исходную область набором четырехугольных и треугольных ячеек (Ω) (см. рис. 2). Эти ячейки образованы узлами (ω) и ребрами (λ) с соответствующими этим ребрам ориентированными векторами $e(\lambda)$. Для треугольных и четырехугольных ячеек (Ω) определим их центроидные точки как средние арифметические радиус-векторов узлов, образующих эти ячейки (для треугольных ячеек они совпадают с центрами тяжести). Для каждого узла ω построим балансный домен $d(\omega)$, ограничив его ломаной, соединяющей центроидные точки ячеек с общим узлом ω и проходящей через середины ребер λ , общих для этих смежных ячеек. Объем внутри такого балансного домена является барицентрическим контрольным объемом. Ячейки двумерной сетки фактически являются упрощением трехмерных призматических ячеек с единичными высотами и основаниями.

В теории метода опорных операторов вводится сеточная аппроксимация ко- и контравариантного представлений векторного поля на ребрах сетки λ в виде сопряженного циркуляционного $x'(\lambda)$ и центроидного потокового $\bar{x}(\lambda)$ представлений на ребре (рис. 3). Они связаны между собой с помощью метрического оператора G , который действует из ребер в ребра: $G: (\lambda) \rightarrow (\lambda)$, то есть на всей сетке $\bar{x} = Gx'$.

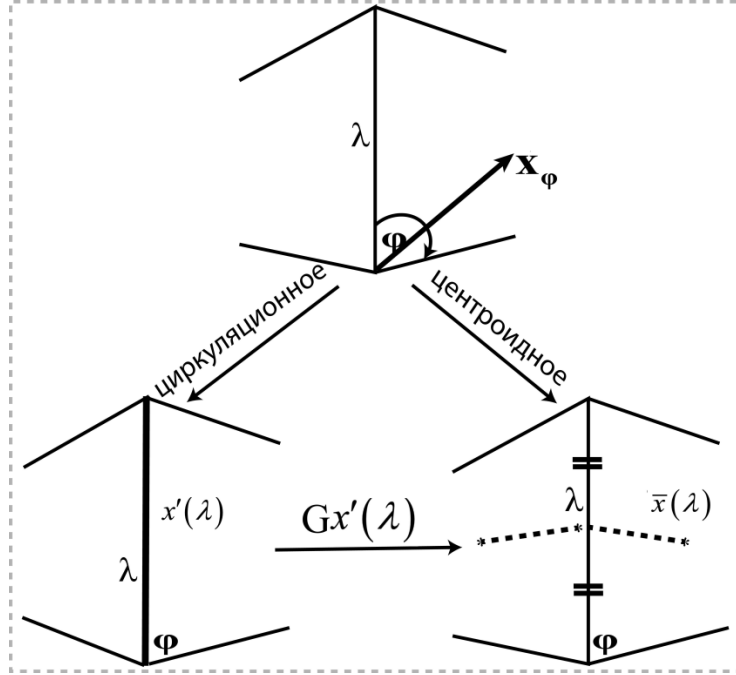


Рис. 3. Циркуляционное и центроидное представления векторных полей

Для понимания устройства метрического оператора G введем следующие локальные сеточные понятия. Рассмотрим сетку $(\lambda).(\varphi)$, состоящую из ребер λ с соответствующими ориентированными векторами $\mathbf{e}(\lambda)$, упорядоченными в систему локальных базисов (φ) (рис. 2). В исходном базисе φ стандартным образом вводятся матрица Грама $Gr_{\varphi}(\lambda, \tilde{\lambda}) = (\mathbf{e}(\lambda), \mathbf{e}(\tilde{\lambda}))$, а также взаимный базис $\mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda)$ (см. рис. 4) с соответствующей матрицей Грама $Gr'_{\varphi}(\lambda, \lambda) = (\mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda), \mathbf{e}'_{\varphi}(\tilde{\lambda}))$, такой, что $Gr'_{\varphi} = Gr_{\varphi}^{-1}$. Далее на сетке выбираются базисные объемы $V_{\varphi} > 0$ с естественным условием нормировки в ячейках $\sum_{\varphi(\Omega)} V_{\varphi} = V_{\Omega}$ и приреберные объемы $V_{\lambda} = \sum_{\varphi(\lambda)} V_{\varphi} > 0$. Базисный объем дается формулой $V_{\varphi} = \frac{1}{6} |\mathbf{e}(\lambda_1) \times \mathbf{e}(\lambda_2)|$ для треугольной ячейки Ω , содержащей базис φ , и $V_{\varphi} = \frac{1}{4} |\mathbf{e}(\lambda_1) \times \mathbf{e}(\lambda_2)|$ для четырехугольной ячейки, если $\lambda_1(\varphi)$ и $\lambda_2(\varphi)$ – ребра, образующие базис φ .

Кривая, соединяющая центроидные точки ячеек (двух смежных через ребро или ячейку с граничным ребром (рис. 2)), представляет собой на каждом ребре λ элемент поверхности $\sigma(\lambda) = \sum_{\varphi(\lambda)} V_{\varphi} \mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda)$.

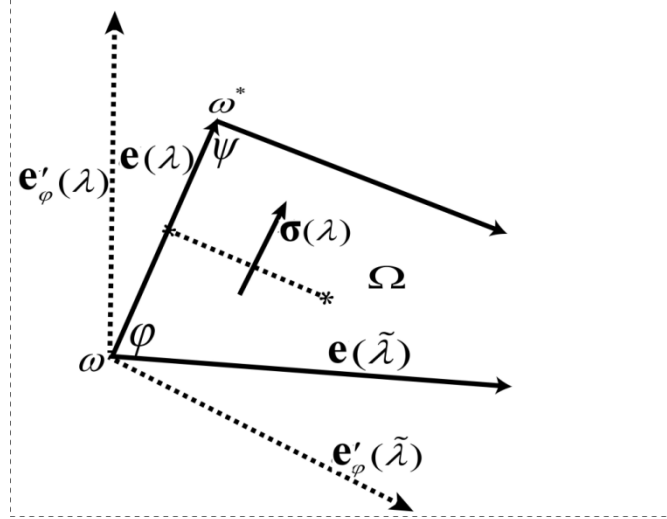


Рис. 4. Базисы $\mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda)$ в ячейке Ω

Соотношение $\bar{x} = Gx'$ на ребрах сетки можно представить как

$$\bar{x}(\lambda) = 1/V_{\lambda} \sum_{\varphi(\lambda)} V_{\varphi} \sum_{\lambda(\varphi)} Gr'_{\varphi}(\lambda, \lambda) x'(\tilde{\lambda}).$$

Построенный таким образом метрический оператор G на сетке $(\lambda).(\varphi)$ обладает свойствами самосопряженности и положительной определенности $G = G^* > 0$ в смысле следующего скалярного произведения:

$$(e_1, e_2)_{\lambda} = \sum_{\lambda} V_{\lambda} e_1(\lambda) e_2(\lambda).$$

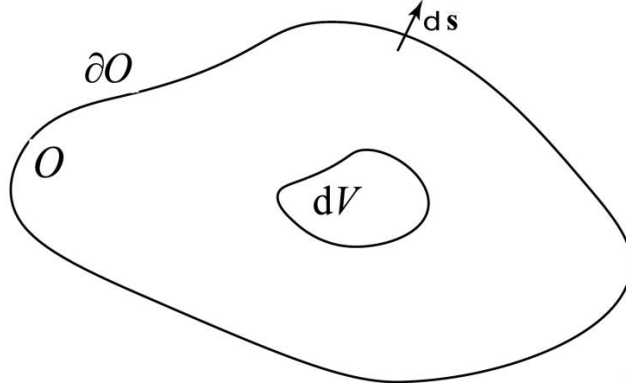
Наличие пространственного дискретного масштаба нерегулярной сетки дает еще одну смысловую нагрузку на двойственность представлений x' , \bar{x} — это циркуляционность (в представлении x' на ребрах λ) и потоковость (в представлении $V_{\lambda} \bar{x}$ на поверхностях $\sigma(\lambda)$).

Важнейшим свойством метода опорных операторов является выполнение сеточных (дискретных) аналогов интегральных соотношений, связывающих дифференциальные операторы непрерывного аргумента.

Для согласованной аппроксимации операций векторного анализа grad, div используется следующее интегральное тождество:

$$\int_O (\mathbf{x}, \text{grad} u) dV + \int_O u \text{div} \mathbf{x} dV = \int_{\partial O} u(\mathbf{x}, d\mathbf{s}),$$

где \mathbf{x} и u — произвольные векторное и скалярное поля в пространстве, dV — элемент объема в области O , ∂O обозначает границу области O , $d\mathbf{s}$ — элемент площади на поверхности ∂O (рис. 5).

Рис. 5. Область O

Вместо данного интегрального тождества в теории метода опорных операторов появляется следующее аппроксимационное соотношение:

$$(x', \overline{\text{GRAD}u})_\lambda + (u, \text{DIN}x)_\omega = 0,$$

где интегралы \int_O заменяются некоторыми скалярными произведениями на всей сетке $(\cdot)_\lambda$ и $(\cdot)_\omega$ с суммированием по ребрам (λ) и узлам (ω) соответственно. Сеточные дивергенция и градиент вычисляются по следующим тождествам. Внутренняя дивергенция векторного поля x определяется как

$$\text{DIN } x = \sum_{\lambda(\omega)} s_\lambda(\omega) \tau_x(\lambda), \quad \tau_x(\lambda) = \sum_{\varphi(\lambda)} V_\varphi(\mathbf{e}'_\varphi(\lambda), \mathbf{x}_\varphi),$$

$$\mathbf{x}_\varphi(\lambda) = \sum_{\lambda(\varphi)} x'(\lambda) \mathbf{e}'_\varphi(\lambda).$$

Интегрально согласованные сопряженно-циркуляционные компоненты градиента векторного поля на ребрах λ при этом получаются (см. рис. 2, 4):

$$(\text{GRAD } u)' = \Delta_\lambda u = u_{\omega^*} - u_\omega.$$

В сеточных базисах φ градиент векторного поля для скалярного аргумента u определяется как

$$(\text{GRAD } u)_\varphi = \sum_{\lambda(\varphi)} \Delta_\lambda u \mathbf{e}'_\varphi(\lambda).$$

5.2. Свободно-объемная аппроксимация для дивергентно-пьезопроводной разностной схемы фильтрационной задачи с газогидратными включениями

Для начала определим функции сетки на основе метода опорных операторов (см. рис. 2). Величины $\overline{m}, S_v, S_w, \rho_v, \rho_w, \rho_g, \rho_s, P, T, \varepsilon_v, \varepsilon_w, \varepsilon_g, \varepsilon_s, \mu_w, \mu_g, k_{rw}, k_{rg}, q_w, q_g, q_\varepsilon$, представленные в континуальной модели, будем относить к узлам этой сетки. В качестве базисных векторных функций сетки, в соответствии с разделом 4, возьмем следующие функции:

$$\mathbf{V}_w, \mathbf{V}_g, \nabla P, \nabla T, \mathbf{W}.$$

Сеточные функции, описывающие разрывные материальные свойства веществ, $m, k, \lambda_v, \lambda_w, \lambda_g, \lambda_s$ отнесем к ячейкам сетки Ω .

Очевидны следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \overline{m}_\omega &= \sum_{\varphi(\omega)} V_{d\varphi} m_{\Omega(\varphi)}, \\ \overline{(1-m)}_\omega &= \sum_{\varphi(\omega)} V_{d\varphi} (1 - m_{\Omega(\varphi)}) = V_\omega - \overline{m}_\omega, \\ V_\omega &= \sum_{\varphi(\omega)} V_{d\varphi}, \end{aligned} \quad (21)$$

т.е. \overline{m}_ω и $\overline{(1-m)}_\omega$ представляют собой объем порового домена $d(\omega)$ (см. рис. 2) и объем твердого каркаса соответственно. Здесь $V_{d\varphi}$ – часть объема узлового домена $d(\omega)$ в ячейке $\Omega(\omega)$, содержащей базис φ (см. рис. 2).

На временных слоях t и $\hat{t} = t + \tau$ ($\tau > 0$ – временной шаг) используются разностные производные по времени и пространственно-точечные (т.е. в узлах сетки ω) временные интерполяции $a_t = (a - a) / \tau$, $a^{(\delta)} = \delta a + (1 - \delta)a$. Здесь интерполяционный вес δ может быть функцией от ω узла сетки. Например, для величины

$$\delta_v = \sqrt{(\overline{m}S_v)^\wedge} / \left(\sqrt{(\overline{m}S_v)^\wedge} + \sqrt{(\overline{m}S_v)} \right), \quad 0 < S_v < 1. \quad (22)$$

Здесь под свободно-объемной временной аппроксимацией заданных в узлах ω функций сетки понимается интерполяционный вес δ_v , который определяется долей порового объема, предназначенного для свободного перемещения жидкости и газа. Использование такой аппроксимации позволяет в дальнейшем производить дискретизацию уравнений, связанную с их разделением по физическим процессам, близкую к непрерывным. Другие возможные временные интерполяции будем обозначать через $[\]^\sim$. Они могут относиться не только к узлам сетки ω , но и к другим ее элементам (базисам φ и т.д.).

Уравнения сохранения массы для водной и газовой компонент представляют собой уравнения неразрывности:

$$\left\{ \overline{m} [S_v S_w \rho_w + (1 - S_v) \rho_v \beta_w] \right\}_t + \text{DIN}(\rho_w \mathbf{V}_w)^\sim + q_w = 0, \quad (23)$$

$$\left\{ \overline{m} [S_v (1 - S_w) \rho_g + (1 - S_v) \rho_v (1 - \beta_w)] \right\}_t + \text{DIN}(\rho_g \mathbf{V}_g)^\sim + q_g = 0. \quad (24)$$

Потоки воды $(\rho_w \mathbf{V}_w)^\sim$ и газа $(\rho_g \mathbf{V}_g)^\sim$, используя оператор GRAD, аппроксимируются в базисах сетки φ с учетом дискретизации классического закона движения Дарси (4) и неклассического закона движения (15) на неявном слое по времени [20] следующим образом:

$$(\rho_\alpha \mathbf{V}_\alpha)_{\varphi}^{p\sim} = - \left(\rho_\alpha \frac{kk_{r\alpha}}{\mu_\alpha} \right)_{\Delta\varphi} \text{GRAD}P^\sim, \quad \alpha = w, g, \quad (25)$$

$$(\rho_\alpha \mathbf{V}_\alpha)_{\varphi}^{p\sim} = - \left(\rho_\alpha \frac{kk_{r\alpha}}{\mu_\alpha} \right)_{\Delta\varphi} \left(\frac{|\text{GRAD}^\sim|_{\Delta\varphi} - G_{\min,\alpha}}{|\text{GRAD}P^\sim|_{\Delta\varphi} + c_\alpha} \right) \text{GRAD}P^\sim, \quad \alpha = w, g. \quad (26)$$

Здесь разностное представление (25) соответствует континуальному представлению (4), аналогично разностное представление (26) соответствует континуальному представлению (15). Под символами $(\)_{\Delta\varphi}$ понимаются аппроксимации соответствующих выражений на сетке с применением некоторой временной интерполяции.

Уравнение сохранения баланса внутренней энергии, используемое для аппроксимации исходного уравнения (3), записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} & \left\{ \overline{m} \left[S_v (S_w \rho_w \varepsilon_w + (1 - S_w) \rho_g \varepsilon_g) + (1 - S_v) \rho_v \varepsilon_v \right] + \overline{(1 - m)} \rho_s \varepsilon_s \right\}_t + \\ & + \text{DIN} \left[\left(\varepsilon_w^{(\delta_v)} \right)_{\text{up}} (\rho_w \mathbf{V}_w)^\sim \right] + \text{DIN} \left[\left(\varepsilon_g^{(\delta_v)} \right)_{\text{up}} (\rho_g \mathbf{V}_g)^\sim \right] + \\ & + \text{DIN} \left\{ \left[P(\mathbf{V}_w + \mathbf{V}_g) \right]^\sim \right\} + \text{DIN} \mathbf{W}^\sim + q_\varepsilon^\sim = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Индекс «up» в выражении для водной энергии $(\varepsilon_w^{(\delta_v)})_{\text{up}}$ означает, что относящиеся к нему величины берутся «вверх по потоку» (upwind) относительно потока воды $(\rho_w \mathbf{V}_w)^\sim$, в определенной ранее дивергенции $\text{DIN}(\rho_w \mathbf{V}_w)^\sim$. Аналогичным образом понимается индекс «up» в выражении газовой энергии $(\varepsilon_g^{(\delta_v)})_{\text{up}}$.

Работа сил давления $[P(\mathbf{V}_w + \mathbf{V}_g)]^\sim$ и суммарный тепловой поток \mathbf{W}^\sim в окружающей среде аппроксимируются стандартным образом в базисах сетки [20], например, на неявном временном слое:

$$[P(\mathbf{V}_w + \mathbf{V}_g)]_{\varphi}^\sim = \left(\frac{P}{\rho_w} \right)_{\varphi}^\sim (\rho_w \mathbf{V}_w)_{\varphi}^{p\sim} + \left(\frac{P}{\rho_g} \right)_{\varphi}^\sim (\rho_g \mathbf{V}_g)_{\varphi}^{p\sim}. \quad (28)$$

Далее дискретный аналог пьезопроводно-диссипативного уравнения (16)–(18), разделенный по физическим процессам с блоком насыщенности (23)–(24), эквивалентен исходной системе уравнений модели (23), (24), (27) и записывается в виде

$$\begin{aligned}
& \delta_{\varepsilon}^{(\delta_v)} \{ [(\bar{m}S_v)S_w]^{(1-\delta_v)} \frac{(\rho_w)_t}{(\rho_w)^{(\delta_v)}} + [(\bar{m}S_v)(1-S_w)]^{(1-\delta_v)} \frac{(\rho_g)_t}{(\rho_g)^{(\delta_v)}} + \\
& + [\bar{m}(1-S_v)]^{(1-\delta_v)} \frac{(\rho_v)_t}{(\rho_v)^{(\delta_v)}} + (\bar{m})_t \} + \left[\frac{\psi}{m\rho_v} \right] \sim \{ [(\bar{m}S_v)S_w\rho_w]^{(1-\delta_v)} (\varepsilon_w)_t + \\
& + [(\bar{m}S_v)(1-S_w)\rho_g]^{(1-\delta_v)} (\varepsilon_g)_t + [\bar{m}(1-S_v)\rho_v]^{(1-\delta_v)} (\varepsilon_v)_t + \\
& + \left[(1-\bar{m})\rho_s\varepsilon_s \right]_t \} + \delta_{\varepsilon}^{(\delta_v)} \text{DIG} \sim + \left[\frac{\psi}{m\rho_v} \right] \sim \text{DIG} \widetilde{\varepsilon} = 0,
\end{aligned} \tag{29}$$

$$\delta_{\varepsilon} = [\beta_w \varepsilon_w + (1-\beta_w) \varepsilon_g] - \varepsilon_v, \tag{30}$$

$$[\psi / (m\rho_v)] \sim = \left[\beta_w / (\rho_w)^{(\delta_v)} + (1-\beta_w) / (\rho_g)^{(\delta_v)} \right] - 1 / (\rho_v)^{(\delta_v)}, \tag{31}$$

$$\text{DIG} \sim = \frac{\text{DIN}(\rho_w \mathbf{V}_w) \sim}{(\rho_w)^{(\delta_v)}} + \frac{\text{DIN}(\rho_g \mathbf{V}_g) \sim}{(\rho_g)^{(\delta_v)}} + \frac{q_w}{(\rho_w)^{(\delta_v)}} + \frac{q_g}{(\rho_g)^{(\delta_v)}}, \tag{32}$$

$$\begin{aligned}
\text{DIG}_{\varepsilon} = & \left[\text{DIN} \{ (\varepsilon_w^{(\delta_v)})_{\text{up}} (\rho_w \mathbf{V}_w) \sim \} - (\varepsilon_w)^{(\delta_v)} \text{DIN}(\rho_w \mathbf{V}_w) \sim \right] + \\
& + \left[\text{DIN} \{ (\varepsilon_g^{(\delta_v)})_{\text{up}} (\rho_g \mathbf{V}_g) \sim \} - (\varepsilon_g)^{(\delta_v)} \text{DIN}(\rho_g \mathbf{V}_g) \sim \right] + \\
& + \text{DIN} \left\{ \left[P(\mathbf{V}_w + \mathbf{V}_g) \right] \sim \right\} + \text{DIN} \mathbf{W} \sim + (q_{\varepsilon} - \varepsilon_w^{(\delta_v)} q_w - \varepsilon_g^{(\delta_v)} q_g).
\end{aligned} \tag{33}$$

В выражении DIG_{ε} , которое входит в (33), используется монотонное (вверх по потоку) энергетическое приближение для $\varepsilon_w^{(\delta_v)}$ и $\varepsilon_g^{(\delta_v)}$ в соответствующих комбинациях дивергентных выражений с этими величинами.

6. Результаты расчетов. Решение полной модельной задачи

В качестве модельной задачи для пьезопроводных процессов при наличии переноса насыщенностей в трехфазной среде с гидратизированными включениями рассмотрена следующая двумерная постановка. Исходное поровое пространство горизонтального пласта частично заполнено газовым гидратом, остальная часть – газом и водой. Начальное давление в пласте P_0 составляет 3 МПа. Начальные насыщенности $S_v = 0.5$ и $S_w = 0.6$ соответственно. Температура описывается через давление с помощью выражения (6), поскольку в системе имеется одна термодинамическая степень свободы.

Решается уравнение (29) при фиксированных сатурациях, в отсутствие гравитации, с классической (4) и неклассической (15) ($c_{\alpha} = 0$, для воды $G_{\min,w} = 0.3$ МПа/м, для газа $G_{\min,g} = 0.15$ МПа/м) формами закона движения. Для расчета были выбраны значения параметров, характерные для Мессояхского газогидратного месторождения [31].

Для решения сформулированной полной задачи в пространственной области вводится семейство нерегулярных сеток с соответствующими метрическими свойствами. Используется вычислительная схема ImPeS (неявная по давлению и явная по сатурациям). Для дискретной формы уравнения пьезопроводности (29) и сатурационного блока (23), (24) производится линейаризация соответствующей нелинейной алгебраической системы уравнений одной из модификаций метода Ньютона. Элементы разреженной матрицы линейаризованной системы уравнений представляются в Йельском формате (сжатое хранение строкой, CSR – Compressed Sparse Row). Обращение алгебраической матрицы производится методом сопряженных градиентов с предобуславливанием для несимметричных задач ORTOMIN [32].

На рис. 6 представлена расчетная область из 8 секторов, характеризующихся длиной внешних сторон в 2 м и внутренних – 2/5 м, образующих внешнюю и внутреннюю границы области. Каждая из внешних сторон этой границы была разделена на 7 равных сегментов, а каждая из внутренних сторон – на 5 равных сегментов. Область, ограниченная этими сегментами, впоследствии была разбита неструктурированной сеткой, суммарно содержащей 608 ячеек.

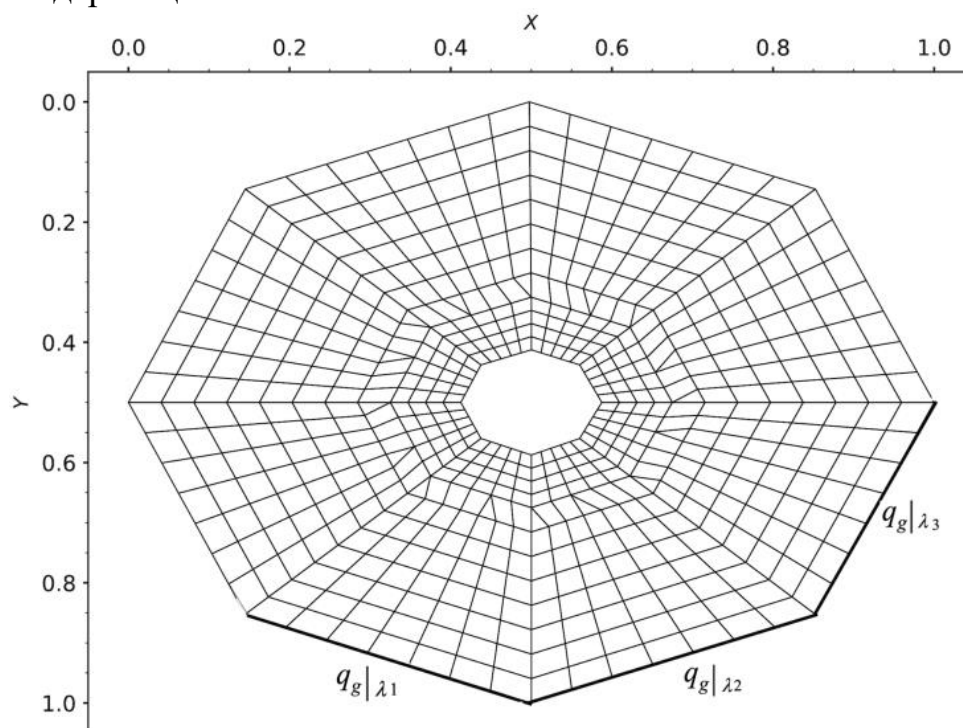


Рис. 6. Расчетная область. На выделенных трех нижних граничных ребрах задается депрессия давления q_g , на остальных граничных ребрах – условия непротекания

Для трех нижних граничных ребер участка (см. рис. 6) задавался депрессионный отбор массы газа в следующей форме:

$$q_g = \alpha \rho_g (1 - S_w)(P - P_1), \quad q_w = 0, \quad q_\varepsilon = \varepsilon_w q_w + \varepsilon_g q_g,$$

где $\alpha = 10^{-10}$ м·с/кг, $P_1 = 0.1$ МПа (см. рис. 6). На остальных границах область считается непротекаемой. Расчеты проводились с переменным шагом по времени. Начальный шаг составлял $\tau = 100$ с и изменялся в соответствии с количеством итераций в методе Ньютона.

На рис. 7–10 показано распределение давления с классическим и неклассическим законами движения в моменты времени $t = 0.0625, 0.6875$ ч. Из рисунков по линиям уровня давления (P1–P6) видно, что депрессия давления внутри области с нелинейным законом фильтрации (неклассический закон движения) меньше, чем в случае классического закона Дарси. На рис. 8 давления в верхней части пространственной области постоянны и равны их начальным значениям 3 МПа. При этом исходя из пространственного расположения маркеров градиента давления возможно провести оценку извлекаемости углеводородных ресурсов при различных конфигурациях пространственной области.

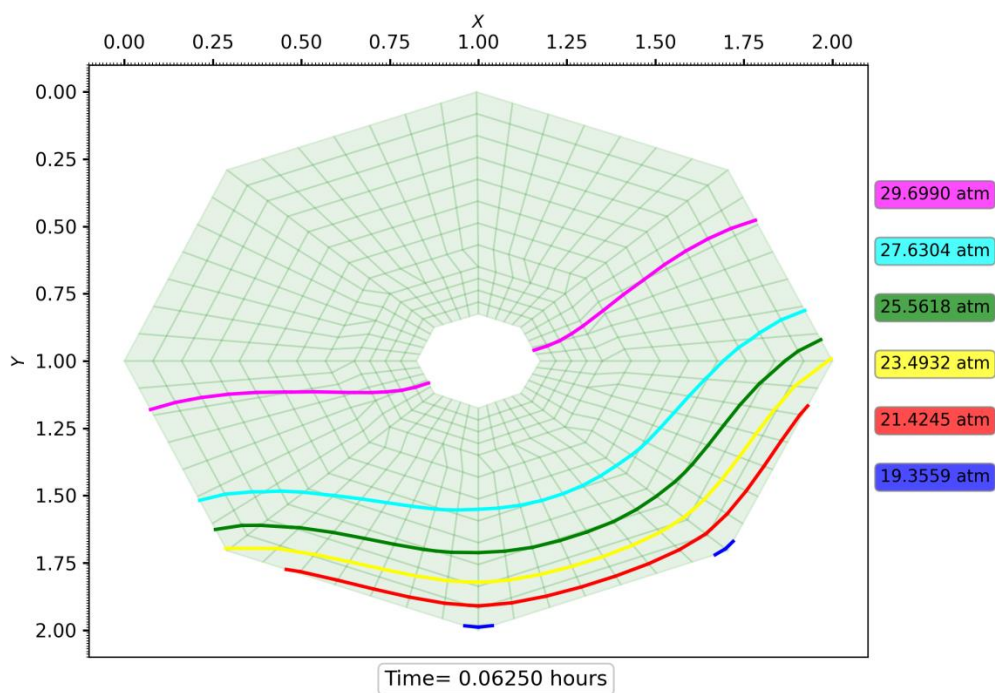


Рис. 7. Распределение давления с классическим законом движения в момент времени $t=0.0625$ ч

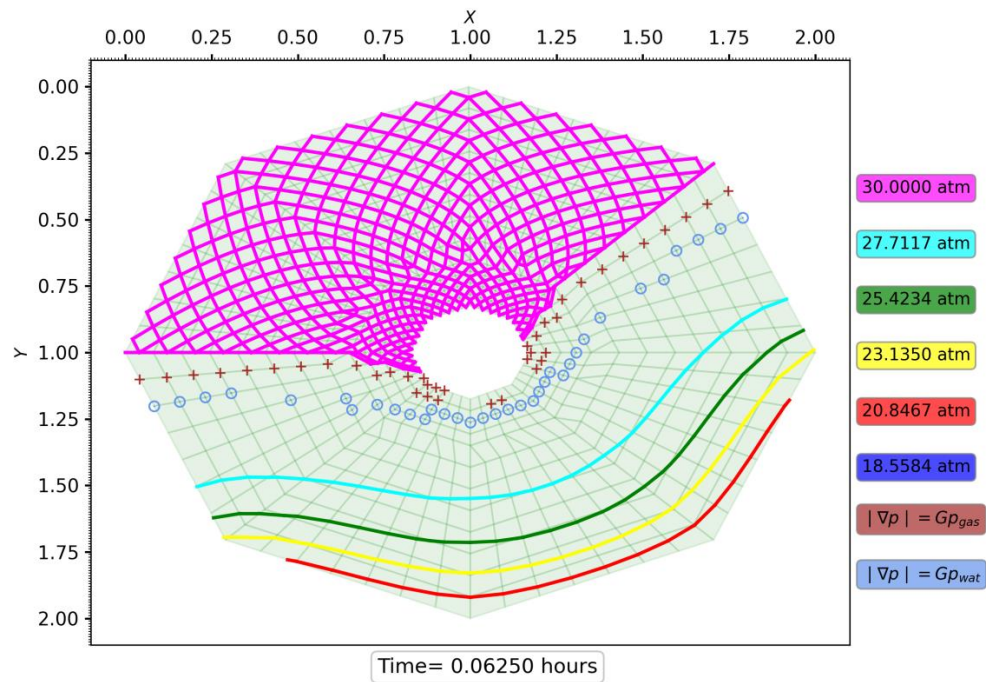


Рис. 8. Распределение давления с неклассическим законом движения в момент времени $t=0.0625$ ч. Маркеры в виде «+» соответствуют модулю градиента для газа ($G_{\min,g} = 0.15$ МПа/м), маркеры в виде «o» — для воды ($G_{\min,w} = 0.3$ МПа/м)

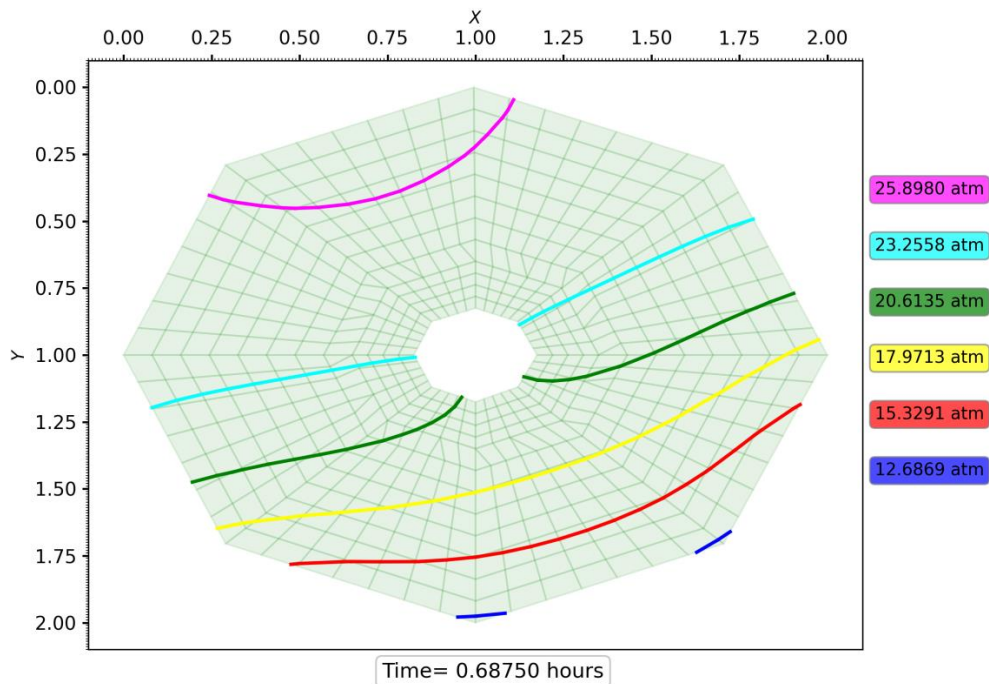


Рис. 9. Распределение давления с классическим законом движения в момент времени $t=0.6875$ ч

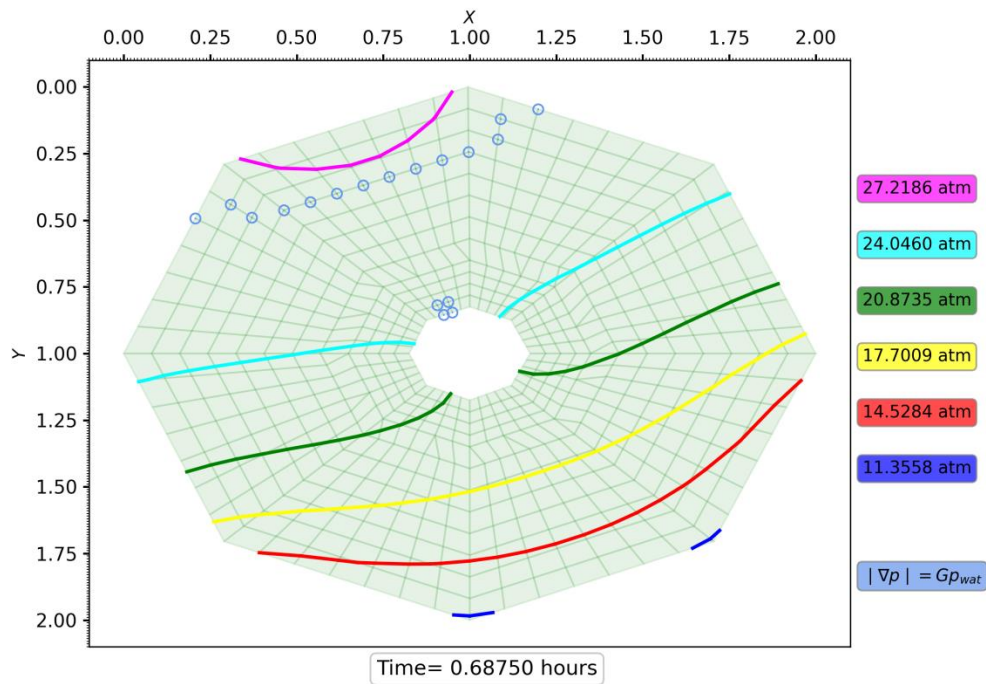


Рис. 10. Распределение давления с неклассическим законом движения в момент времени $t = 0.6875$ ч. Маркеры в виде «+» соответствуют модулю градиента для газа ($G_{\min,g} = 0.15$ МПа/м), маркеры в виде «o» – для воды ($G_{\min,w} = 0.3$ МПа/м)

На рис. 11–14 представлены температурные пространственные распределения в области на те же моменты времени. На рис. 12 температуры в верхней части пространственной области постоянны и равны их начальным значениям 278.2748 K. Аналогично депрессии давления в нижней части пространственной области происходит понижение температуры в соответствии с выражением (6).

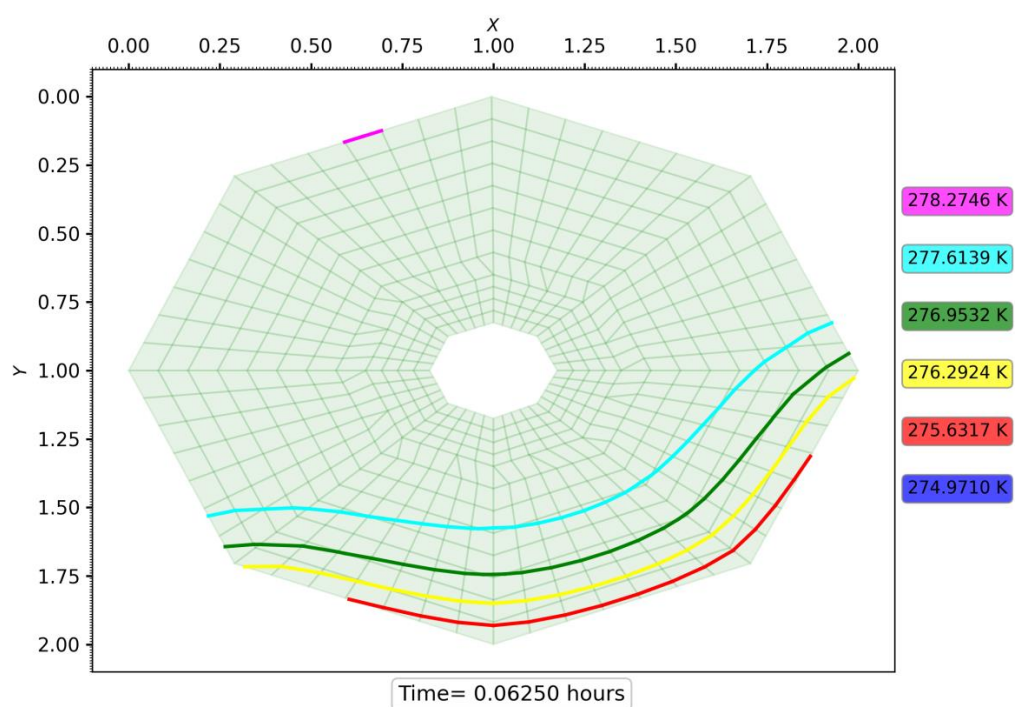


Рис. 11. Распределение температуры с классическим законом движения
в момент времени $t = 0.0625$ ч

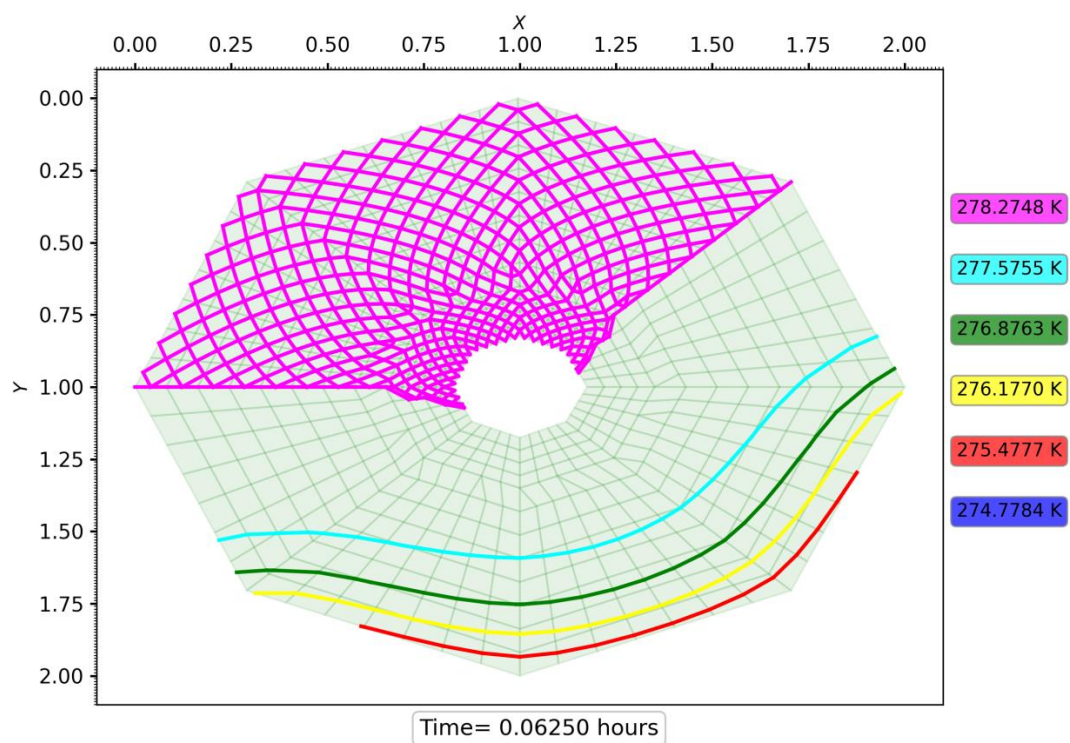


Рис. 12. Распределение температуры с неклассическим законом движения
в момент времени $t = 0.0625$ ч

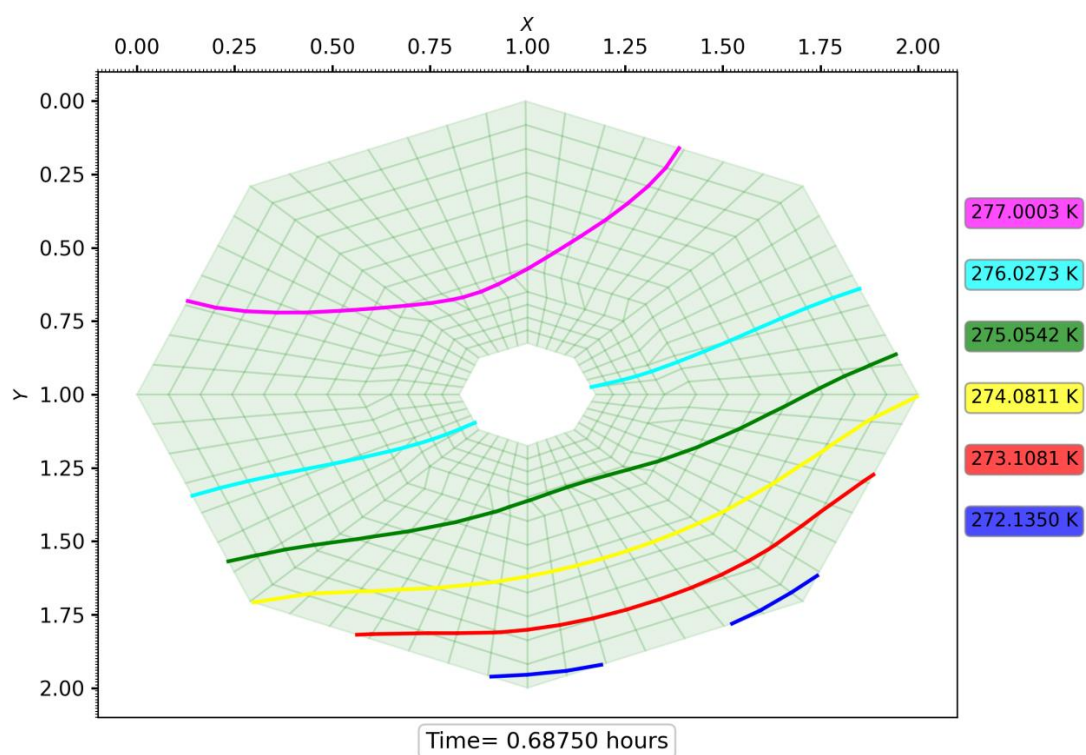


Рис. 13. Распределение температуры с классическим законом движения в момент времени $t = 0.6875$ ч

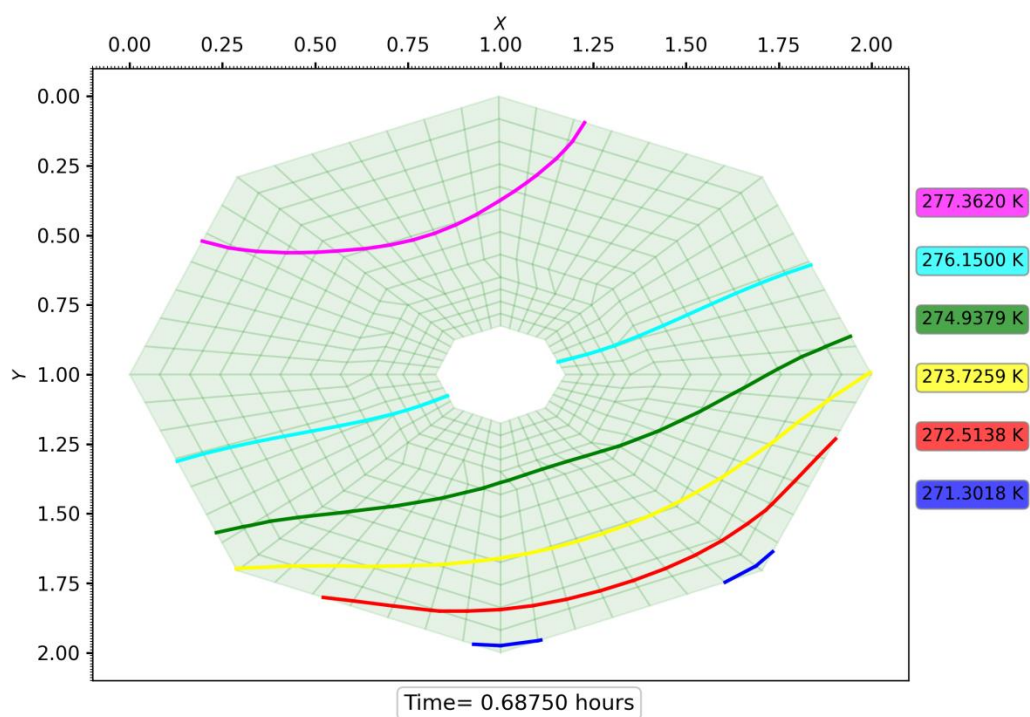


Рис. 14. Распределение температуры с неклассическим законом движения в момент времени $t = 0.6875$ ч

На рис. 15–18 показаны распределения водонасыщенности (S_w) и растепленности (S_v) с классическим и неклассическим законами движения в момент времени $t = 0.0625$ ч. В связи с отбором газа на нижней границе области водонасыщенность S_w внутри области больше, чем на этой границе. Наблюдаемый на рисунках 17 и 18 процесс гидратного растепления S_v сопутствует задаваемому в граничной части области депрессионному газовому отбору. Поэтому значения растепленности вблизи нижней границы области больше, чем на ее внутренней части.

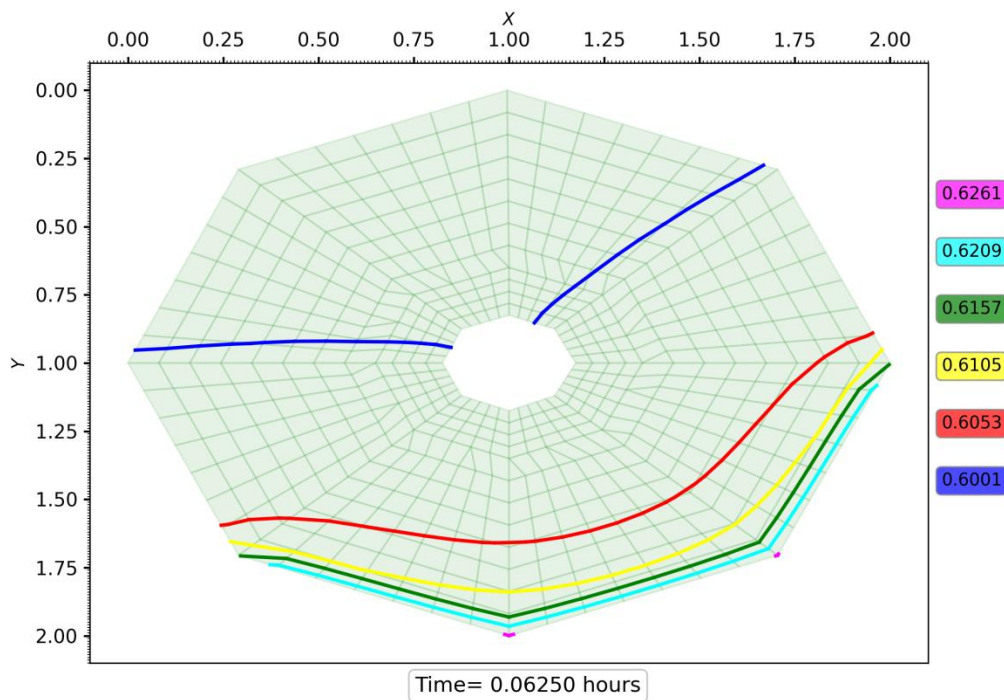


Рис. 15. Распределение водонасыщенности с классическим законом движения в момент времени $t = 0.0625$ ч

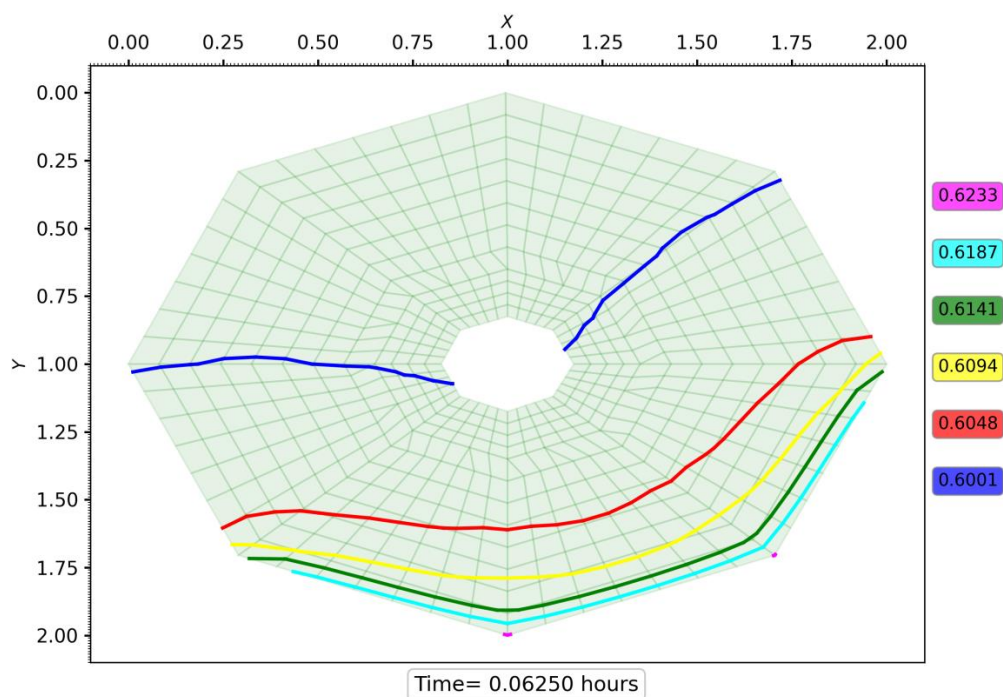


Рис. 16. Распределение водонасыщенности с неклассическим законом движения в момент времени $t = 0.0625$ ч

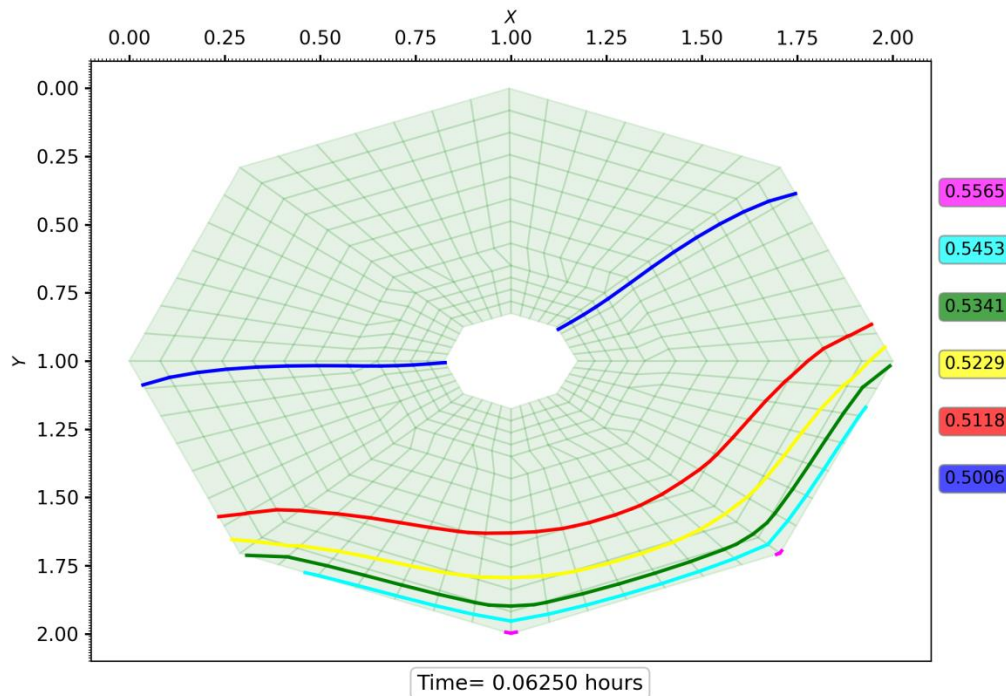


Рис. 17. Распределение растепленности с классическим законом движения в момент времени $t = 0.0625$ ч

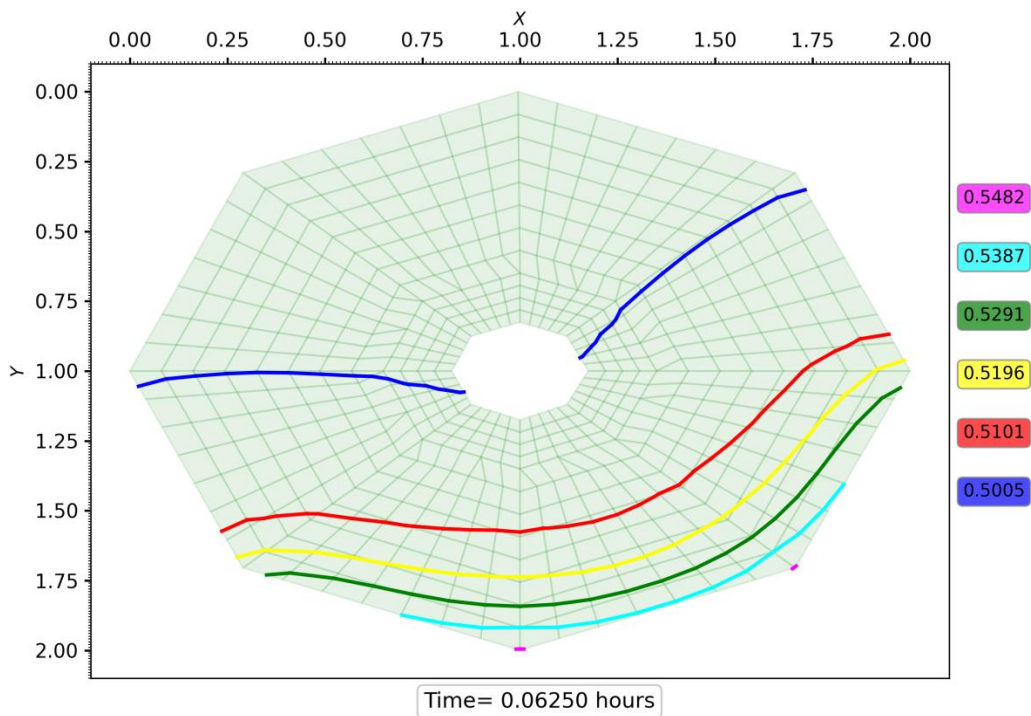


Рис. 18. Распределение растепленности с неклассическим законом движения в момент времени $t = 0.0625$ ч

7. Заключение

В работе представлена двумерная пространственная модель трехкомпонентной фильтрации в пористой среде с твердофазными включениями. Эта модель состоит из двух блоков, выделение которых основано на методе расщепления по физическим процессам. Первый блок включает решение пьезопроводного уравнения при фиксированных сатурационных процессах. Второй блок описывает процессы переноса водо- и гидратонасыщенностей пористой среды, при этом газонасыщенность определяется водонасыщенностью. Для определения скоростей флюидов используется неклассическая форма уравнения движения (с учетом его нелинейности), которая применима в том числе в условиях низкой проницаемости при небольших перепадах давления. Используя метод опорных операторов, были разработаны эффективные вычислительные алгоритмы для выделения гиперболической и диссипативной подсистем задачи, тождественно следующие из основных законов сохранения, и осуществлена их программная реализация. В рамках исследования была проведена серия вычислений. Алгоритмы, представленные в работе, позволяют моделировать флюидодинамические течения гидратосодержащих сред в двумерных пространственных задачах в областях с нерегулярной структурой пластового залегания и учитывать сложную геометрию осадочных бассейнов.

Библиографический список

1. Englezos A.P. Clathrate hydrates // *Ind. Eng. Chem. Res.* 1993. V. 32. P. 1251–1274.
2. Бык С.Ш., Макогон Ю.Ф., Фомина В.И. Газовые гидраты. М.: Химия, 1980, 290 с.
3. Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М. Подземная гидромеханика. М.: Недра, 1993, 416 с.
4. Повещенко О.Ю., Гасилова И.В., Галигузова И.И., Дорофеева Е.Ю., Ольховская О.Г., Казакевич Г.И. Об одной модели флюидодинамики в пористой среде, содержащей газогидраты // *Математическое моделирование*. 2013. Т. 25, № 10. С. 32–42.
5. Казакевич Г.И., Ключкова Л.В., Повещенко Ю.А., Тишкин В.Ф. Математическое исследование системы уравнений газогидратных процессов в пористой среде // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2011. Т. 13, № 1. С. 7–11.
6. Гасилов В.А., Гасилова И.В., Ключкова Л.В., Повещенко Ю.А., Тишкин В.Ф. Разностные схемы на основе метода опорных операторов для задач динамики флюидов в коллекторе, содержащих газогидраты // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2015. Т. 55, № 8. С. 1341–1355.
7. Poveshchenko Yu.A., Podryga V.O., Rahimly P.I., Sharova Yu.S. About one discrete model of splitting by the physical processes of a piezoconductive medium with gas hydrate inclusions // *Journal of Physics: Conf. Series*. 2018. V. 946. Paper 012077 (16 p.). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/946/1/012077>
8. Рагимли П.И., Повещенко Ю.А., Рагимли О.Р., Подрыга В.О., Казакевич Г.И., Гасилова И.В. Использование расщепления по физическим процессам для численного моделирования диссоциации газовых гидратов // *Математическое моделирование*. 2017. Т. 29, № 7. С. 133–144.
9. Ненахов В.А. Особенности фильтрации воды через гидратонасыщенные пористые среды // *Экспресс-информ. ВНИИЭ Газпрома. Сер. Геология, бурение и разраб. газ. месторождений*. 1982. № 10. С. 9–10.
10. Мирзаджанзаде А.Х. Вопросы гидродинамики вязкопластичных и вязких жидкостей в применении к нефтедобыче. Баку: Азернефтнешпр, 1959, 409 с.
11. Алишаев М.Г., Розенберг М.Д., Теслюк Е.В. Неизотермическая фильтрация при разработке нефтяных месторождений. М.: Недра, 1985, 271 с.
12. Мирзаджанзаде А.Х., Аметов И.М., Хасаев А.М., Гусев В.И. Технология и техника добычи нефти. М.: Недра, 1986, 382 с.
13. Дегтярев Б.В., Бухгалтер Э.Б. Борьба с гидратами при эксплуатации газовых скважин в северных районах. М.: Недра, 1976, 197 с.

- 14.Бондарев Э.А., Бабе Г.Д., Гройсман А.Г., Каниболотский М.А. Механика образования гидратов в газовых потоках. М.: Наука, 1976, 158 с.
- 15.Самарский А.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Шашков М.Ю. Использование метода опорных операторов для построения разностных аналогов операций тензорного анализа // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, №7. С. 1251–1256.
- 16.Хруленко А.Б., Фаворский А.П., Карпов В.Я. Векторные и тензорные модели. Учебн. пособие в 2 ч. М.: МАКС Пресс, 2009, 113 с.
- 17.Shashkov M. Conservative finite-difference methods on general grids. Boca Raton, FL: CRC Press, 1996, 359p.
- 18.Lipnikov K., Manzini G., Shashkov M. Mimetic finite difference method // Journal of Computational Physics. 2013. V. 257(B). P. 1163–1227.
- 19.Самарский А.А., Колдоба А.В., Повещенко Ю.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П. Разностные схемы на нерегулярных сетках. Минск: ЗАО «Критерий», 1996, 275 с.
- 20.Колдоба А.В., Повещенко Ю.А., Гасилова И.В., Дорофеева Е.Ю. Разностные схемы метода опорных операторов для уравнений теории упругости // Математическое моделирование. 2012. Т. 24, № 12. С. 86–96.
- 21.Басниев К.С., Нифантов А.В. Трехмерная математическая модель разложения гидратов метанов в пористой среде под действием тепла // Наука и техника в газовой промышленности. 2004. № 1–2. С. 61–67.
- 22.Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004, 416 с.
- 23.Lei Q., Xiong W., Yuan J., Gao Sh., Wu Y. Behavior of flow through low-permeability reservoirs // SPE. 2008. Paper 113144 (7 p.).
- 24.Байков В.А., Макатров А.К., Политов М.Е., Телин А.Г. Отклонения от закона Дарси при фильтрации в низкопроницаемых пористых средах // Материалы VI Всероссийской научно-практической конференции «Нефтепромысловая химия», 23-24 июня 2011 года, посвященной 20-летию ЗАО «Химеко-ГАНГ». М.: Изд-во РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина, 2011. С. 37–40.
- 25.Байков В.А., Галеев Р.Р., Колонских А.В., Макатров А.К., Политов М.Е., Телин А.Г., Якасов А.В. Нелинейная фильтрация в низкопроницаемых коллекторах. Анализ и интерпретация результатов лабораторных исследований керна Приобского месторождения // Вестник ОАО НК «Роснефть». 2013. Т. 31, № 2. С. 8–12.
- 26.Байков В.А., Галеев Р.Р., Колонских А.В., Макатров А.К., Политов М.Е., Телин А.Г. Нелинейная фильтрация в низкопроницаемых коллекторах. Лабораторные фильтрационные исследования керна Приобского месторождения // Вестник ОАО НК «Роснефть». 2013. Т. 31, № 2. С. 4–7.
- 27.Su H., Wang D., Zhang P., An Y., Fu Y., Lu J., Huang F., Zhang H., Ren Z., Li Z. A new method to calculate the relative permeability of oil and water in

- tight oil reservoirs by considering the nonlinear flow // *Geofluids*. 2022. V. 2022. Paper 9450967 (14p.). <https://doi.org/10.1155/2022/9450967>
28. Song F., Bo L., Zhang S., Sun Y. Nonlinear flow in low permeability reservoirs: Modelling and experimental verification // *Advances in Geo-Energy Research*. 2019. V. 3(1). P. 76–81. <https://doi.org/10.26804/ager.2019.01.06>
29. Luo E., Wang X., Hu Y., Wang J., Liu L. Analytical solutions for non-darcy transient flow with the threshold pressure gradient in multiple-porosity media // *Mathematical Problems in Engineering*. 2019. V. 2019. Paper 2618254 (13p.). <https://doi.org/10.1155/2019/2618254>
30. Xu J., Jiang R., Fu J., Jiang Y. A new numerical simulation method for horizontal well in tight sandstone reservoirs // *Journal of Petroleum Science Research*. 2015. V. 4. P. 39–46. <https://doi.org/10.12783/jpsr.2015.0402.01>
31. Казакевич Г.И., Повещенко Ю.А., Подрыга В.О., Рагимли П.И., Рагимли О.Р. Численное моделирование характерных задач диссоциации газовых гидратов в пористой среде. Одномерная постановка // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*. 2019. №22. 15 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2019-22>
32. Хейгеман Л., Янг Д. Прикладные итерационные методы. М.: Мир, 1986, 446 с.

Оглавление

1. Введение	3
2. Математическая модель пространственных задач фильтрации с твердофазными гидратными включениями	4
3. Неклассическая модель фильтрационного течения с учетом его нелинейности	6
4. Уравнение пьезопроводности с расщеплением по физическим процессам	9
5. Опорно-операторные методы для дискретных моделей пространственных задач фильтрации с твердофазными включениями	10
6. Результаты расчетов. Решение полной модельной задачи	16
7. Заключение.....	25
Библиографический список.....	26