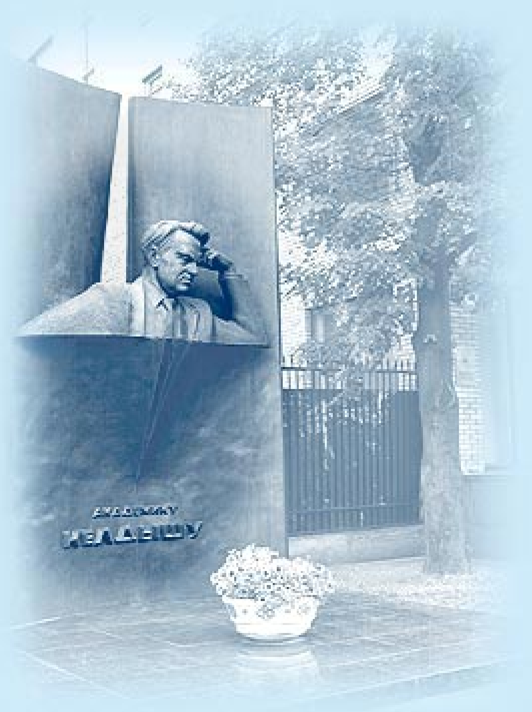
ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 1 за 2024 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

А.И. Аптекарев

Асимптотика Сеге для системы Анжелеско

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Аптекарев А.И. Асимптотика Сеге для системы Анжелеско // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2024. № 1. 20 с.
https://doi.org/10.20948/prepr-2024-1
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2024-1

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.КЕЛДЫША
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

А. И. Аптекарев

Асимптотика Сеге для системы Анжелеско

Москва — 2024

2010 Mathematics Subject Classification: 57N10; 57M25; 57M27; 11B65

Аптекарев А. И., Асимптотика Сеге для системы Анжелеско. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2024

Мы обсудим возможность расширения класса применимости сильных асимптотик (асимптотик Сеге) для последовательностей многочленов, совместно ортогональных относительно набора весов, сосредоточенных на непересекающихся отрезках (система Анжелеско). Интерес к предельным свойствам этих многочленов, при монотонном стремлении к бесконечности (вдоль ребер p -мерной решетки) их мульти-индекса, возник недавно в связи со спектральными задачами для многомерного дискретного оператора Шредингера (многомерной матрицы Якоби) на графах-деревьях.

Ключевые слова: совместно ортогональные многочлены, матрицы Якоби на графах-деревьях, система Анжелеско, асимптотики полиномиальных последовательностей, условие Сеге.

Aptekarev A. I., Szegö asymptotcs for Angelesco systems. Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS Preprint, Moscow, 2024

We discuss opportunity of extension the strong asymptotics (Szegö asymptotics) for more wide class of the sequences of multiple orthogonal polynomials with respect to the system of weights supported by the non-intersecting intervals (Angelesco system). The interest for limiting properties of these polynomials, when their multi-index tends monotonically to infinity (along of the edges of p -dimensional lattice) has appeared recently, in connection with spectral problems for the discrete Schrödinger operator (multidimensional Jacobi matrix) on the graph-trees.

Key words: Multiple orthogonal polynomials, Jacobi matrices on the graph-trees, Angelesco systems, asymptotics of polynomial sequences, Szegö condition.

1. Введение

1.1. Совместно ортогональные многочлены (СОМы - определение). Многочлен $Q_{\mathbf{n}}(x)$ с индексом $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_p) \in \mathbb{Z}_+^p$ от одной переменной x, $\deg Q_{\mathbf{n}} \leq |\mathbf{n}| = \sum_{j=1}^p n_j$ называют СОМом относительно системы мер $\{\sigma_j\}_{j=1}^p$, если $\forall j \in \overline{1,p}$ он удовлетворяет n_j соотношений ортогональности с мерой σ_j:

$$\{Q_{\mathbf{n}}(x)\}: \quad \int\limits_{\Delta_j} Q_{\mathbf{n}}(x)\, x^m \, d\sigma_j(x) = 0, \quad m = 0,1,...,n_j - 1, \quad j = 1,...,p. \quad (1.1)$$

Очевидно, система (1.1) дает достаточно линейных уравнений для определения коэффициентов многочлена $Q_{\mathbf{n}}$, таким образом, СОМ всегда существует. С единственностью сложнее (контрпример: все меры одинаковые).

1.2. Система Анжелеско (определение). Пусть $\boldsymbol{\Delta} := \{\Delta_j\}_{j=1}^p$ – отрезки $\mathbb{R}$, с попарно непересекающимися внутренними точками (интервалами $\mathring{\Delta}_j$):

$$\Delta_j \subset \mathbb{R}: \quad \mathring{\Delta}_j \cap \mathring{\Delta}_k = \emptyset, \qquad j \neq k, \qquad j,k = 1, \ldots, p. \qquad (1.2)$$

Систему положительных мер $\{\sigma_j\}$, с бесконечным числом точек роста на $\boldsymbol{\Delta}$:

$$\sigma_j > 0, \qquad \operatorname{supp} \sigma_j \subseteq \Delta_j, \qquad j = 1, \ldots, p, \qquad (1.3)$$

называют *системой Анжелеско* (см. [1, 2, 3]). Очевидно, см. (1.1), что порождаемый ею СОМ $Q_{\mathbf{n}}$ имеет ровно n_j перемен знака на каждом Δ_j, поэтому

$$Q_{\mathbf{n}}(x) = \text{const} \prod_{j=1}^p Q_{\mathbf{n},j}(x), \quad \text{где} \quad Q_{\mathbf{n},j}(x) := \prod_{l=1}^{n_j} \left(x - x_l^{(\mathbf{n},j)}\right). \qquad (1.4)$$

Следовательно, (1.1) определяет однозначно $Q_{\mathbf{n}}$, с точностью до мультипликативной константы, которую в (1.4) положим const := 1.

1.3. Мотивация, постановка. Ортогональные многочлены (**ОМ**ы, $p=1$) являются координатами собственных векторов $\overrightarrow{\{Q_n(x)\}}$ бесконечных (трехдиагональных) матриц Якоби, элементы которых есть коэффициенты трехчленных рекуррентных соотношений, связывающих соседние ОМы. Аналогично, СОМы ($p > 1$) удовлетворяют набору $(p+2)$-членных соотношений, связывающих соседей $Q_{\mathbf{n}}$ по решетке $\mathbb{Z}_+^p$, см. [4]. Недавно, в [5, 6, 7] были рассмотрены спектральные задачи для многомерного обобщения оператора матрицы Якоби, определенного на графах-деревьях.

Нас будет интересовать асимптотика Сеге многочленов $Q_{\mathbf{n}}(x)$ в режиме

$$n_j = c_j|\mathbf{n}| + o(|\mathbf{n}|), \qquad |\mathbf{n}| \to \infty, \qquad (j = 1, \ldots, p), \qquad (1.5)$$

где $c_j > 0$, $\sum c_j = 1$, и $c = (c_1, \ldots, c_p)$– фиксировано.

1.4. Главный член асимптотики. Слабая асимптотика в режиме (1.5) совместно ортогональных относительно системы мер (1.3), (1.2) многочленов (1.1) была получена в работе А.А. Гончара и Е.А. Рахманова [14].

Обозначим через $\chi_{P_m}(x)$ вероятностную меру, считающую нули многочлена $P_m(z)$:

$$P_m(z) := \prod_{l=1}^{m}\left(z - x_l^{(m)}\right), \qquad \chi_{P_m}(x) := \frac{1}{m}\sum_{l=1}^{m}\delta\left(x - x_l^{(m)}\right).$$

Пусть меры ортогональности (1.3) удовлетворяют условию

$$\sigma_j' > 0 \quad \text{п.в. на} \;\; \Delta_j\,, \quad j = 1. \tag{1.6}$$

Тогда (см. [14]) при $|\mathbf{n}| \to \infty$ в режиме (1.5) справедливо

$$\chi_{Q_{\mathbf{n},j}} \xrightarrow{\;*\;} \mu_j, \qquad j = 1, \ldots, p, \tag{1.7}$$

где $\exists!\,\mu := (\mu_1, \ldots, \mu_p)$ однозначно определяется следующей системой равновесий логарифмического потенциала $V_\nu(z) := \int \log\frac{1}{|z-t|}\,d\nu(t)$:

$$\Big(2c_jV_{\mu_j} + \sum_{i\neq j} c_iV_{\mu_i}\Big)(x)\;\begin{cases} \equiv w_j, & x \in \Delta_j^* := \operatorname{supp}\mu_j, \quad j = 1, \ldots, p,\\ > w_j, & x \in \Delta_j \setminus \Delta_j^*, \end{cases} \tag{1.8}$$

где константы равновесия также однозначно определяются системой (1.8), а носители равновесных мер μ_j – обязательно отрезки $\Delta_j^* \subseteq \Delta_j$.

Отметим, что слабая сходимость (1.7) на отрезках Δ_j^* влечет равномерную сходимость потенциалов вне Δ_j^*:

$$-\frac{1}{n_j}\log|Q_{\mathbf{n},j}(z)| = V_{\chi_{Q_{\mathbf{n},j}}}(z) \rightrightarrows V_{\mu_j}(z), \qquad z \in K \Subset \Omega_j^* := \overline{\mathbb{C}}\setminus\Delta_j^*, \qquad j = 1, \ldots, p,$$

откуда

$$|Q_{\mathbf{n},j}(z)|^{1/n_j} \rightrightarrows \exp\{-V_{\mu_j}(z)\},$$

и главный член асимптотики многочленов $\{Q_{\mathbf{n},j}(z)\}$ имеет вид

$$Q_{\mathbf{n},j}(z) = O\left(\exp\{-n_j\mathcal{V}_{\mu_j}(z)\}\right), \qquad j = 1, \ldots, p, \tag{1.9}$$

где комплексный потенциал $\mathcal{V} = V + i\overline{V}$, а $\overline{V}$ – функция, гармонически сопряженная к V.

Пусть риманова поверхность $\mathcal{R}(\Delta^*)$ – разветвленное накрытие $\overline{\mathbb{C}}$ листами $\mathcal{R}^{(k)}$, $k = 0{,}1, \ldots, p$:

$$\mathcal{R}(\Delta^*) := \overline{\bigcup_{k=0}^{p}\mathcal{R}^{(k)}}, \quad \mathcal{R}^{(0)} := \overline{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{j=1}^{p}\Delta_j^*, \quad \mathcal{R}^{(j)} := \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta_j^*\,, \tag{1.10}$$

где $\mathbf{\Delta}^* = \left\{\Delta_j^*\right\}$ – система носителей равновесных мер задачи (1.8). Определим мероморфную (рациональную) на $\mathcal{R}$ функцию $\Phi_\mathbf{n}$, задав ее дивизор:

$$\Phi_\mathbf{n}(z)|_{z\to\infty^{(0)}} = \frac{1}{\alpha_{\mathbf{n},0} z^{|\mathbf{n}|}} + \cdots, \quad \Phi_\mathbf{n}(z)|_{z\to\infty^{(j)}} = \frac{z^{n_j}}{\alpha_{\mathbf{n},j}} + \cdots, \quad j \in \overline{1,p}. \quad (1.11)$$

Нормировкой $\prod_{k=0}^{p} \alpha_{\mathbf{n},k} = 1$, $\alpha_{\mathbf{n},1} > 0$, алгебраическая функция $\Phi_\mathbf{n} := \{\Phi_{\mathbf{n},k}\}_{k=0}^{p}$ определяется в (1.11) однозначно, причем для ее ветвей теперь имеем:

$$\prod_{k=0}^{p} \Phi_{\mathbf{n},k}(z) \equiv 1, \qquad z \in \overline{\mathbb{C}},$$

откуда

$$|\Phi_{\mathbf{n},j}(x)|^2 \left|\prod_{i=1, i\neq j}^{p} \Phi_{\mathbf{n},i}(x)\right| = 1, \quad x \in \Delta_j^*, \qquad j = 1, \ldots, p,$$

и, с учетом нормировки,

$$\left[|\alpha_{\mathbf{n},j}\, \Phi_{\mathbf{n},j}(x)|^2 \left|\prod_{i=1, i\neq j}^{p} \alpha_{\mathbf{n},i}\, \Phi_{\mathbf{n},i}(x)\right|\right]^{1/|\mathbf{n}|} = \left|\frac{\alpha_{\mathbf{n},j}}{\alpha_{\mathbf{n},0}}\right|^{1/|\mathbf{n}|}, \quad j = 1, \ldots, p. \quad (1.12)$$

Заметим, что

$$|\alpha_{\mathbf{n},j}\, \Phi_{\mathbf{n},j}(z)|^{1/n_j} = e^{-V_{\widetilde{\mu}_{\mathbf{n},j}}}, \quad (1.13)$$

где $\widetilde{\mu}_{\mathbf{n},j}$ удовлетворяет задаче равновесия (1.8), в которой надо положить $c_j := \frac{n_j}{|\mathbf{n}|}$, тогда в качестве констант равновесия будут выступать логарифмы правых частей системы (1.12). Учитывая единственность решения задачи (1.8), получаем, что главный член асимптотики многочленов $\{Q_{\mathbf{n},j}\}$ в (1.9) может быть представлен в виде

$$Q_{\mathbf{n},j}(z) = O\left(\alpha_{\mathbf{n},j}\, \Phi_{\mathbf{n},j}(z)\right). \quad (1.14)$$

1.5. Сильная асимптотика. Уточнение множителя у главного члена в правой части (1.14) приводит к формулам *сильной асимптотики* вида:

$$Q_{\mathbf{n},j}(z) = \alpha_{\mathbf{n},j}\, \Phi_{\mathbf{n},j}(z)\, F_j(z)\, \left(1 + o(1)\right). \quad (1.15)$$

Для СОМов относительно системы Анжелеско, первые сильные асимптотики были изучены в [3] для $p = 2$, $\mathbf{n} = (n, n)$, на отрезках $\Delta_\pm := (\pm 1, 0)$, для весов $\sigma'_\pm(x) := |-1-x|^a\, |x|^b\, |1-x|^c$ при $x \in \Delta_\pm$, $a, b, c > -1$. Для $\forall p > 1$, $\mathbf{n} = (n, ..., n)$ и общих систем аналитических весов (т.н. обобщенных систем Никишина-Анжелеско на графах с циклами) см. [8]. Для систем Анжелеско с аналитическими весами, $\forall p > 1$, в режиме (1.5) сильные асимптотики см. [10].

2. Вектор–функция Сеге и формулировка результата

Мы предполагаем меры ортогональности в (1.2) абсолютно непрерывными $d\sigma_j(x) = \rho_j(x)\,dx,\ \ j \in \overline{1,p}$, а их веса удовлетворяют условию Сеге [1]:

$$\rho(x)\ :\qquad \int_\Delta \ln\rho(x)\,d\overset{\circ}{\mu}_\Delta(x) > -\infty, \tag{2.1}$$

где $\overset{\circ}{\mu}_\Delta$ – равновесная мера отрезка $\Delta = [a,b]$: $d\overset{\circ}{\mu}_{[a,b]} = \frac{1}{\pi}\frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}$.

Сильные асимптотики, полученные при условии (2.1), будем называть *асимптотиками Сеге*.

Вектор–функция $f := \{f_j(z)\}_{j=1}^p$, описывающая следующий член асимптотики $Q_{\mathbf{n}}(x)$ – аналог классической ($p=1$) *функции Сеге*, может быть определена, как решение следующей системы краевых задач, вне носителей Δ^* равновесной меры $\overset{\circ}{\mu}$ задачи (1.8):

$$\{f_j(z)\}_{j=1}^p :\quad \begin{cases} f_j, \quad 1/f_j \in H^2_{\rho_j}\left(\overline{\mathbb{C}}\setminus\Delta_j^*\right), \quad f_j(\infty) > 0, \quad j = 1,\ldots,p, \\ |f_j(x)|^2 \prod\limits_{i\neq j} |f_i(x)|\,\overset{\circ}{\rho}_j(x) = 1, \quad x \in \Delta_j^*\,, \end{cases} \tag{2.2}$$

где $\overset{\circ}{\rho}_j(x) := \rho_j(x)\,/\,\frac{d}{d\,x}\overset{\circ}{\mu}_{\Delta_j^*}(x) -$ "тригонометрический" вес на Δ_j^* .

Наша цель – доказать следующую теорему:

Теорема 2.1. *Для многочленов* $\{Q_{\mathbf{n},j}\}_{j=1}^p-$ *совместно ортогональных* (1.4), (1.1) *относительно мер* $\{\sigma_j\}_{j=1}^p$ *системы Анжелеско* (1.3), (1.2), *при выполнении для весов* $\rho_j(x) = \sigma_j'(x)$ *равномерного условия Сеге* (2.1) *(сноска* (.)[1]*), справедливы следующие формулы сильной асимптотики в режиме* (1.5)*:*

$$\textit{1.}\quad \left\| \frac{Q_{\mathbf{n},j}(x)}{|\alpha_{\mathbf{n},j}\,\Phi_{\mathbf{n},j}(x)|} - \left\{ \frac{\Phi_{\mathbf{n},j}(x)}{|\Phi_{\mathbf{n},j}(x)|}F_j(x) + \overline{\frac{\Phi_{\mathbf{n},j}(x)}{|\Phi_{\mathbf{n},j}(x)|}F_j(x)} \right\} \right\|_{L^2_{\rho_j}(\Delta_j^*)} = o(1), \tag{2.3}$$

где главный член асимптотики (1.14) *определен в* (1.10), (1.11), *а*

$$F_j(z) = \frac{f_j(z)}{f(\infty)}\,, \qquad j = 1,\ldots,p. \tag{2.4}$$

– нормированные решения системы граничных задач (2.2).

$$\textit{2.}\quad \frac{Q_{\mathbf{n},j}(z)}{\alpha_{\mathbf{n},j}\,\Phi_{\mathbf{n},j}(x)} \rightrightarrows F_j(z), \qquad z \in K \Subset \overline{\mathbb{C}}\setminus\Delta_j^* =: \Omega_j^*. \tag{2.5}$$

Доказательство в частном случае: $p{=}2$ и $\mathbf{n} = (n,n)$ см. в [11].

[1]На самом деле, как заметили С.А. Денисов и М.Л. Ятцелев, нужно требовать более сильное *равномерное условие Сеге*, которое заключается в непрерывности по c функций $F_a(c)$ и $F_b(c)$, равных интегралам, стоящим в левой части неравенства (2.1), взятым вдоль отрезков $[a,c]$ и $[c,b]$, соответственно.

3. Схема доказательства

Мы развиваем подход Видома (см. [15]) применительно к сильной асимптотике СОМов. Напомним, что в [15] экстремальное свойство ортогональных на контурах Γ относительно веса ρ многочленов – минимизировать $L^2_\rho(\Gamma)$ норму monic многочленов, превращалось в экстремальную задачу на конечномерной гиперплоскости пространства Харди $H^2_\rho(\Omega)$, $\infty \in \Omega$, $\partial\Omega = \Gamma$, состоящей из monic многочленов, деленных на главный член асимптотики ОМов.

Переход к пределу по размерности гиперплоскости приводил к аналогичной экстремальной задаче, но рассматриваемой уже на всех функциях $\mathcal{F} \in H^2_\rho(\Omega)$, $\mathcal{F}(\infty) = 1$, которая, в свою очередь, оказывалась эквивалентной некоторой граничной задачи для голоморфных функций. Решением предельной граничной задачи является функция Сеге F с нормировкой $F(\infty)=1$, которая и определяет следующий (мультипликативный) член L^2_ρ сильной асимптотики ОМов.

Основным моментом в схеме Видома было доказательство существования последовательности многочленов (необязательно ортогональных), имеющих ту же сильную асимптотику, что и ОМы. В [15] для этого использовались обобщенные многочлены Фабера.

Затем, наличие таких многочленов и неравенства геометрии гильбертовых пространств позволяли установить стремление к нулю L^2_ρ нормы отклонения решений конечномерных задач от своего бесконечномерного аналога.

В работах [11] и [14] подход Видома был применен к СОМам, определяемым соотношениями (1.1). В [11] были рассмотрены совместные ортогональности относительно системы Анжелеско (1.2), (1.3) при $p = 2$ и $\mathbf{n} = (n, n)$ – *диагональный* случай. В [14] была рассмотрена другая общая система весов: т.н. система Никишина, диагональный случай при произвольном p.

В случае СОМов схема доказательства состояла из следующих шагов:

1. Сначала (как и для ОМов), получалась граничная задача для функций Сеге: система (2.2), и доказывалось $\exists$ и ! решения этой задачи.

2. Так же, как и для обычных ОМов, нужно доказать существование последовательности monic-многочленов $\{P_n\}$, имеющих ту же асимптотику, которую мы хотим доказать для СОМ-ов $\{Q_n\}$.

3. Следующий шаг связан со свойством СОМов $\{Q_\mathbf{n}\}$ быть представленными в виде комбинации обычных ОМов, но по отношению к *переменному* (varying) весу ρ_n, зависящему от номера Q_n:

$$\int Q_n(x)x^m\rho_n(x)\,dx = 0, \quad m = 0,1,\ldots,n-1, \quad \deg Q_n = n. \tag{3.1}$$

Например, для СОМов по отношению к системе Анжелеско (1.2), (1.3) соотношения ортогональности (1.1), с помощью факторизации (1.4), переписываются так:

$$\int\limits_{\Delta_j} Q_{\mathbf{n},j}(x)x^m\rho_{\mathbf{n},j}(x)\,dx=0,\quad \rho_{\mathbf{n},j}(x):=\prod_{i\neq j}Q_{\mathbf{n},i}(x)\rho_j(x),\quad j=1,\dots,p,\quad (3.2)$$

где $\rho_{\mathbf{n},j}$ – знакопостоянный на Δ_j вес, а $m=0,1,\dots,n_j-1$, и $\deg Q_{\mathbf{n},j}=n_j$.

Целью третьего шага было найти асимптотику $\{Q_{\mathbf{n}}\}$ – (3.1) в предположении, что асимптотика переменного веса $\rho_{\mathbf{n}}$ известна. При этом существенно использовался результат второго шага – наличие последовательности многочленов $\{P_{\mathbf{n}}\}$, имеющих требуемую асимптотику и экстремальное свойство ОМов минимизировать $L^2_\rho(\Delta)$-отклонение (среди всех *monic*-многочленов) от своей асимптотики на Δ.

4. Особенностью переменных весов $\rho_{\mathbf{n}}$ для СОМов $Q_{\mathbf{n}}$ является то, что они, по сути, неизвестны и, в свою очередь, формируются многочленами $Q_{\mathbf{n}}$. В связи с этим, возвращаясь к многочленам Анжелеско, видим, что соотношения ортогональности (3.2) определяют на векторах многочленов:

$$P_{\mathbf{n}}:=\{P_{\mathbf{n},j}\}_{j=1}^p:\quad \deg P_{\mathbf{n},j}=n_j,\quad \underline{(P_{\mathbf{n},j})^{-1}\in H(\Omega_j)},\quad \Omega_j=\overline{\mathbb{C}}\setminus\Delta_j\,,\quad (3.3)$$

отображение $\widetilde{\mathbf{T}}_{\mathbf{n}}$:

$$\widetilde{\mathbf{T}}_{\mathbf{n}}P^{(1)}_{\mathbf{n}}=P^{(2)}_{\mathbf{n}}:\quad \rho_{\mathbf{n},j}:=\prod_{i\neq j}P^{(1)}_{\mathbf{n},j}\,\rho_j\;\longrightarrow\;\int\limits_{\Delta_j}P^{(2)}_{\mathbf{n},j}(x)\,x^m\rho_{\mathbf{n},j}(x)\,dx=0,\quad (3.4)$$

для $m=0,\dots,n_j-1$ и $i=1,\dots,p$. Отображение $\widetilde{\mathbf{T}}_{\mathbf{n}}$ определено на векторах (3.3), у которых <u>j-компонента может занулятся только на</u> Δ_j, $j=1,\dots,p$.

$\widetilde{\mathbf{T}}_{\mathbf{n}}$ естественно преобразовать в отображение $\mathbf{T}_{\mathbf{n}}$, действующее на $H^{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\Omega}^*)$– конечномерном подпространстве пространства аналитических функций $H^2_\rho(\boldsymbol{\Omega})$:

$$\left(\frac{P_{\mathbf{n},1}(z)}{\alpha_{\mathbf{n},1}\,\Phi_{\mathbf{n},1}(z)},\dots,\frac{P_{\mathbf{n},p}(z)}{\alpha_{\mathbf{n},p}\,\Phi_{\mathbf{n},p}(z)}\right)\in H^{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\Omega}^*),\qquad \boldsymbol{\Omega}^*:=(\Omega^*_1,...,\Omega^*_p),\qquad (3.5)$$

где многочлены $P_{\mathbf{n},j}$: $\deg P_{\mathbf{n},j}\le n_j$, а $\Phi_{\mathbf{n},j}$– ветви алгебраической функции $\Phi_{\mathbf{n}}(z)$, $\alpha_{\mathbf{n},j}$– нормировочные константы, см. (1.11), а обозначение Ω^*_j см. (2.5). Точнее $\mathbf{T}_{\mathbf{n}}$ действует на конусе $\widehat{H}^{\mathbf{n}+}\subset H^{\mathbf{n}}$ векторов, j– координаты симметричны относительно $\mathbb{R}$ и не обращаются в нуль (действительны) на $\mathbb{R}\setminus\Delta^*_j$:

$$\mathbf{T}_{\mathbf{n}}:\widehat{H}^{\mathbf{n}+}\longrightarrow\widehat{H}^{\mathbf{n}+}:\quad \mathbf{T}_{\mathbf{n}}\left\{\frac{P_{\mathbf{n},j}}{\Phi_{\mathbf{n},j}}\right\}_{j=1}^p:=\left\{\frac{\left(\widetilde{\mathbf{T}}_{\mathbf{n}}\,\{P_{\mathbf{n},k}\}_{k=1}^p\right)_j}{\Phi_{\mathbf{n},j}}\right\}.\qquad (3.6)$$

Отметим, что неподвижной точкой отображения $\widetilde{\mathbf{T}}_{\mathbf{n}}$ являются многочлены Анжелеско, тем самым $\mathbf{T}_{\mathbf{n}}$ имеет единственную неподвижную точку:

$$\exists!\ \mathbf{f}_{\mathbf{n}} := \left\{\frac{Q_{\mathbf{n},j}}{\Phi_{\mathbf{n},j}}\right\}_{j=1}^{p} : \quad \mathbf{T}_{\mathbf{n}}\{\mathbf{f}_{\mathbf{n}}\} = \{\mathbf{f}_{\mathbf{n}}\}. \tag{3.7}$$

Аналогично, система граничных задач (2.2) определяет на векторах

$$\mathbf{f} := \{f_j\}_{j=1}^{p} : \quad f_j,\, 1/f_j \in H^2_{\rho_j}(\Omega_j^*), \quad \Omega_j^* = \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta_j^*\,, \tag{3.8}$$

отображение $\mathbf{T}$:

$$\mathbf{T}\mathbf{f}^{(1)} = \mathbf{f}^{(2)} : \quad \left|f_j^{(2)}(x)\right|^2 = \frac{1}{\prod\limits_{i\neq j} |f_i^{(1)}(x)|\, \overset{\circ}{\rho}_j(x)}, \quad x \in \Delta_j^*, \quad j = 1, \ldots, p. \tag{3.9}$$

При этом решение граничной системы (2.2) будет неподвижной точкой этого отображения:

$$\mathbf{T}\,\mathbf{f}^{(\infty)} = \mathbf{f}^{(\infty)}. \tag{3.10}$$

Отметим, что для произвольного $p \geq 2$ существование единственного решения системы (2.2) (и даже более общей краевой задачи, соответствующей обобщенной системе Никишина на графе с циклами) было доказано в [8]. Там же эти краевые системы сводились к одной граничной задаче на римановой поверхности, которая решалась стандартными методами (см., например, [9]).

Наконец, заключительный шаг **4** в доказательстве Теоремы 2.1 состоял в установлении близости (2.5), (1.5) неподвижных точек (3.7) и (3.10).

В настоящем препринте, с целью снятия ограничения на размерность: $p = 2$ решетки $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}_+^p$ и включения режима (1.5), мы обсуждаем реализацию этой же схемы. Если распространение диагональных $\mathbf{n}$ на (1.5) проблем не вызывает, то увеличение $p > 2$, требует привлечения <u>новых моментов.</u>

В упомянутых выше работах [11] и [14] многочлены $\{P_{\mathbf{n}}\}$ (с требуемой асимптотикой – необходимые для реализации первого шага), строились с помощью симметрических функций от ветвей алгебраических функций $\Phi(z)$, определяющих главный член асимптотики СОМ-ов. В случае Анжелеско при $p > 2$ подобная конструкция тяжело обобщается ввиду сложной геометрии множества точек, в которых разные ветви Φ имеют одинаковый модуль. Поэтому в настоящей работе мы используем известную общую конструкцию сильных асимптотик многочленов, ортогональных относительно переменного веса, предложенную В. Тотиком, см. [16, 17]. Реализации шагов **2** и **3** доказательства Теоремы 2.1 на основе теорем Тотика будет посвящен следующий параграф работы.

Затем, в заключительной части, мы рассмотрим **4**-й шаг, завершающий доказательство теоремы. Здесь нет (в отличие от $p = 2$) простого доказательства свойства "сжатия" отображения $\mathbf{T}$, что изменит рассуждения.

4. "Переменные" веса Тотика и асимптотики Сеге

Вилмош Тотик в [16] рассмотрел многочлены, ортогональные относительно следующего общего класса "переменных" весов (3.1) на отрезке Δ:

$$\rho_n(x) = w_n^{2n}(x)\, u^2(x), \qquad x \in \Delta := [a,b], \tag{4.1}$$

где функции w_n положительны и непрерывны на Δ, а u удовлетворяет условию Сеге (2.1):

$$w_n > 0, \qquad w_{\mathbf{n}} \in C(\Delta), \qquad u \in S(\Delta). \tag{4.2}$$

Чтобы сформулировать дополнительные условия Тотика на функцию w_n надо рассмотреть задачу равновесия логарифмического потенциала во *внешнем поле* $\mathcal{Q}(x) = -\ln w_n$:

$$\mu_{w_n} : \quad V_{\mu_{w_n}}(x) - \ln w_n \begin{cases} = \widetilde{w}_n, & x \in \Delta^* \subseteq \Delta, \quad \Delta^* := \operatorname{supp} \mu_{w_n}, \\ \geq \widetilde{w}_n, & x \in \Delta \setminus \Delta^*. \end{cases} \tag{4.3}$$

Дополнительные условия Тотика на переменный вес w_n выражаются в терминах равновесной меры μ_{w_n}:

1) μ_{w_n} – абсолютно непрерывна $d\mu_{w_n}(x) = v_n(x)\,dx$, $x \in \Delta^* = [a^*, b^*]$:

$$\frac{1}{A}(x-a^*)^{\beta_0}(b^*-x)^{\beta_0} \leq v_n(x) \leq A(x-a^*)^{\beta}(b^*-x)^{\beta}, \quad x \in [a^*, b^*], \tag{4.4}$$

выполняются для некоторых констант A, $\beta > -1$ и β_0.

2) Носитель равновесной меры совпадает с исходным отрезком меры ортогональности:

$$\operatorname{supp} \mu_{w_n} = \Delta^* = \Delta. \tag{4.5}$$

В работе [18] условие **2)** дополнено условием:

2*) Если (4.5) не выполнено, то внешнее поле $\mathcal{Q}(x) = -\ln w_n$ должно быть выпуклым вниз на Δ, т.е.

$$\mathcal{Q}''(x) > 0, \qquad x \in \Delta. \tag{4.6}$$

Таким образом, мы будем требовать выполнение либо (4.5), либо (4.6).

Сравнивая переменный вес $\rho_{\mathbf{n},j}$ из (3.2) с переменным весом Тотика (4.1) и воспользовавшись асимптотиками (1.7), (1.9) и (1.14), мы имеем:

$$w_{\mathbf{n},j}^{2n}(x) = \prod_{i \neq j} \alpha_{\mathbf{n},i}\, \Phi_{\mathbf{n},i}(x) = \exp\left\{ -\sum_{i \neq j} n_i V_{\mu_{\mathbf{n},i}}(x) \right\}. \tag{4.7}$$

Следовательно, считая в показателе степени $n = |\mathbf{n}|$,

$$w_{\mathbf{n},j}^{2}(x) = \exp\left\{ -\sum_{i \neq j} \frac{n_i}{|\mathbf{n}|} V_{\mu_{\mathbf{n},i}}(x) \right\} = \exp\left\{ -\sum_{i \neq j} c_{\mathbf{n},i} V_{\mu_{\mathbf{n},i}}(x) \right\},$$

и внешнее поле в задаче равновесия (4.3) принимает вид

$$\mathcal{Q}_{\mathbf{n},j}(x) := -\ln w_{\mathbf{n},j}(x) = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} c_{\mathbf{n},i} V_{\mu_{\mathbf{n},i}}(x), \quad i,j = 1,\ldots,p. \tag{4.8}$$

Сразу отметим, что так как поле $\mathcal{Q}_{\mathbf{n},j}$ есть линейная комбинация с константами $c_{\mathbf{n},i} \geq 0$, потенциалов мер с носителями вне Δ_j, то оно на Δ_j выпукло вниз и условие (4.6) всегда выполнено. Также отметим, что в (4.4) имеем $\beta = -1/2$, а $\beta_0 = 1/2$.

Таким образом, рассматривая систему задач равновесия (4.3) во внешнем поле (4.8) при $j = 1,\ldots,p$ мы видим, что векторная мера $\{\mu_{\mathbf{n},j}\}_{j=1}^{p}$ является единственным решением $\mu_{\mathbf{n},j} := \mu_j$ векторной задачи равновесия Гончара–Рахманова (1.8) с параметрами $c_j = c_{\mathbf{n},j}$, причем для констант равновесия в системах (4.3), (4.8) и (1.8) имеем $2w_j = \widetilde{w}_{\mathbf{n},j}$.

Итак, для получения асимптотик многочленов Анжелеско $Q_{\mathbf{n},j}$, см. (3.2), в предположении наличия асимптотик их переменных весов (3.2) мы в (4.1) полагаем w_n^{2n} в виде (4.7), а функцию $u = u_j$ выбираем в виде

$$u_j^2(x) := \left(\prod_{i\neq j} F_i(x)\right)\rho_j(x), \quad i,j = 1,\ldots,p, \tag{4.9}$$

где $\{F_j\}_{j=1}^{p}$ – нормированные (2.4) функции Сеге – решения системы граничных задач (2.2). Они обладают свойствами: при $i \neq j$ $F_i \in H(\Delta_j)$ и $F_i \neq 0$ на Δ_j, а $\rho_j(x) \in S(\Delta_j)$, см. (2.1).

Теперь мы можем применить теоремы Тотика для реализации шагов **2** и **3** доказательства Теоремы 2.1.

Если в асимптотическом режиме (1.5) на выбранных нами переменных весах $\rho_{\mathbf{n},j}$, см. (4.1), (4.7), (4.9) при $j = 1,\ldots,p$, условие **2)**, см. (4.4), выполнено, то цели шагов **2** и **3** сразу достигаются с помощью асимптотических формул Тотика, см. [16, Теоремы 14.2 и 14.3].

Если же условие **2)** не выполнено, то мы можем воспользоваться условием **2*)**, см. (4.6), которое для наших переменных весов всегда выполняется.

При этом в качестве многочленов, имеющих требуемую асимптотику (шаг **2**), берем многочлены $P^*_{\mathbf{n},j}$, ортогональные относительно, органичения нашего переменного веса $\rho_{\mathbf{n},j}$ на отрезок $\Delta_j^* \subset \Delta_j : \rho^*_{\mathbf{n},j} := \rho_{\mathbf{n},j}\mid_{\Delta^*}$. Затем, этот многочлен $P^*_{\mathbf{n},j}$ используется в оценке $L^2_{\rho_j}(\Delta_j^*)$– нормы отклонения исходного ортогонального (на Δ_j, относительно $\rho_{\mathbf{n},j}$) многочлена $P_{\mathbf{n},j}$ от асимптотики многочлена $P^*_{\mathbf{n},j}$. В результате реализуется шаг **3** нашей схемы.

Приведем соответствующее утверждение (не требующее ограничения **2)** для наших $\rho_{\mathbf{n},j}$) в формулировке, адаптированной к нашим обозначениям, см. [18, Предложение 3.3, Следствие 3.1, Теорема 4.1].

Теорема 4.1. *Пусть многочлены* $\{P_{\mathbf{n},j}\}_{j=1}^{p}$, $\mathbf{n}=(n_1,\dots,n_p)$, $\deg P_{\mathbf{n},j}=n_j$, *ортогональны степеням*

$$\int\limits_{\Delta_j} P_{\mathbf{n},j}(x)\,x^m\,\rho_{\mathbf{n},j}(x)\,dx=0,\quad m=0,\dots,n_j-1, \tag{4.10}$$

на интервалах $\{\Delta_j\}$*:* $\Delta_i\cap\Delta_j=\emptyset$, $i\neq j$, *относительно переменных весов*

$$\rho_{\mathbf{n},j}(x):=w_{\mathbf{n},j}^{2n}(x)\,u_j^2(x),\quad j=1,\dots,p, \tag{4.11}$$

где $w_{\mathbf{n},j}^{2n}$ *и* u_j *определены в* (4.7) *и* (4.9).

Тогда в предельном режиме (1.5) *равномерно по* $u_j\in\mathcal{E}_j\Subset C(\Delta_j^*)$ *справедливы асимптотики:*

1. *На отрезках носителях равновесной меры* $\Delta_j^*\subseteq\Delta_j$*:*

$$\left\|\frac{P_{\mathbf{n},j}(x)}{|\alpha_{\mathbf{n},j}\,\Phi_{\mathbf{n},j}(x)|}-\left\{\frac{\Phi_{\mathbf{n},j}(x)}{|\Phi_{\mathbf{n},j}(x)|}F_j(x)+\overline{\frac{\Phi_{\mathbf{n},j}(x)}{|\Phi_{\mathbf{n},j}(x)|}F_j(x)}\right\}\right\|_{L^2_{\rho_j}(\Delta_j^*)}=o(1), \tag{4.12}$$

где $\alpha_{\mathbf{n},j}$, $\Phi_{\mathbf{n},j}$ *и* F_j *определены, соответственно, в* (1.10), (1.11), (2.2) *и* (2.4), *а* Δ_j^* *носитель равновесной меры в задаче* (4.3) *с внешним полем* $\mathcal{Q}=-\ln w_{\mathbf{n},j}$*;*

2. *Вне отрезков носителей равновесной меры* $\Delta_j^*\subseteq\Delta_j$*:*

$$\frac{P_{\mathbf{n},j}(z)}{\alpha_{\mathbf{n},j}\,\Phi_{\mathbf{n},j}(z)}\rightrightarrows F_j(z),\qquad z\in K\Subset\overline{\mathbb{C}}\setminus\Delta_j^*,\quad j=1,\dots,p\,. \tag{4.13}$$

Замечание. К рассуждениям (в конце предыдущей страницы) о подходе доказательства асимптотики (4.12) в случае, когда $\Delta_j\setminus\Delta_j^*\neq\varnothing$, добавим следующее. Важным моментом в этом подходе является доказательство стремления к нулю интеграла, определяющего следующую норму:

$$\left\|\frac{P_{\mathbf{n},j}(x)}{|\alpha_{\mathbf{n},j}\,\Phi_{\mathbf{n},j}(x)|}\right\|^2_{L_{2,u^2}(\Delta\setminus\Delta^*)}=o(1). \tag{4.14}$$

Аргумент, примененный в [18] (да и еще в [11]), состоял в том, что если оценить подынтегральное выражение главными членами асимптотики, см. (1.9), (1.14), то **внутри** множества $(\Delta\setminus\Delta^*)$, ввиду соотношения равновесия (1.8) наблюдается экспоненциальное стремление к нулю, что должно бы приводить к выполнению (4.14). Однако, как справедливо заметили нам С.А. Денисов и М.Л. Ятцелев, этого аргумента недостаточно, так как имеющаяся оценка не контролирует поведение последовательности подынтегральных функций в окрестности точки "сталкивания" , что требует дополнительного локального анализа и выполнения весам из (4.9) *равномерного условия Сеге.*

5. Неподвижные точки преобразований T и $\mathbf{T_n}$. Доказательство Теоремы 2.1

Отображение $\mathbf{T}$ было определено выше, см. (3.9). Остановимся подробнее на пространствах, в которых оно действует. Мы будем обозначать

$$\mathbf{f} = \{f_j\}_{j=1}^p \in H^2_\rho(\mathbf{\Omega}) : \quad f_j \in H^2_{\rho_j}(\Omega_j), \quad \Omega_j := \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta_j,$$

аналогично,

$$\mathbf{f} \in H_{\mathbf{\Delta}} : \quad f_j \in H(\Omega_j),$$

и

$$\mathbf{f} \in C_{\mathbf{\Delta}} : \quad f_j \in C\left(\bigsqcup_{j\neq i=1}^{p} \Delta_i\right), \quad j = 1, \dots, p. \tag{5.1}$$

Очевидно, имеем

$$H^2_\rho \subset H_{\mathbf{\Delta}} \subset C_{\mathbf{\Delta}}.$$

В введенных пространствах используем естественные нормы: в $C_{\mathbf{\Delta}}$ – max чебышевских норм координат $\mathbf{f}$, а в H^2_ρ, соответственно, L^2_ρ-норма. Обозначим конусы этих пространств с элементами, координаты f_j которых симметричны относительно $\mathbb{R}$ и не обращаются в нуль (положительны) на $\mathbb{R} \setminus \Delta_j$:

$$\widehat{H}^{2+}_\rho, \quad \widehat{H}^+_{\mathbf{\Delta}}, \quad \widehat{C}^+_{\mathbf{\Delta}}. \tag{5.2}$$

В конусе $\widehat{C}^+_{\mathbf{\Delta}}$ кроме естественной нормы можно ввести метрику

$$d(\mathbf{f}, \mathbf{g}) := \max_{j=1,\dots,p} \left\{ d_{C\left(\bigsqcup_{j\neq i=1}^{p} \Delta_i\right)}(f_j, g_j) \right\},$$

где

$$d_{C(X)}(f, g) := \max_{x\in X} \left| \ln \frac{f(x)}{g(x)} \right|, \quad f(x),\, g(x) > 0, \quad x \in X.$$

Конус $\widehat{C}^+_{\mathbf{\Delta}}$ – полон в метрике d, и его топологии, соответствующие норме и метрике, локально согласованы (см. [14, Замечания 1.1 и 1.2]).

Отображение $\mathbf{T} : \widehat{C}^+_{\mathbf{\Delta}} \to \widehat{H}^{2+}_\rho$ индуцирует отображение (см. [12, 13])

$$\mathbf{t} : \widehat{C}^+_{\mathbf{\Delta}} \to \mathrm{Harm}(\mathbf{\Omega}),$$

на векторах $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_p)$, где компоненты

$$\psi_j = \ln|f_j|, \quad f_j \in H^2_{\rho_j}, \quad j = 1, \dots, p, \tag{5.3}$$

гармонические в Ω_j функции с интегрируемыми граничными значениями, так что

$$\mathbf{t}\,\psi := (\ln|\mathbf{T}f_1|,\,\dots,\ln|\mathbf{T}f_p|)\,,$$

и по определению $\mathbf{T}$, см. (3.9),

$$\mathbf{t}\,\psi := -\left(\frac{1}{2}\mathbf{P}\psi+\beta\right), \tag{5.4}$$

где $\beta := (\beta_1,\dots,\beta_p)$ – вектор гармонических функций:

$$\beta_j \in \mathrm{Harm}(\Omega_j), \quad \beta_j = \ln\frac{\rho_j}{\mathring{\mu}'_{\Delta_j}} =: \ln\mathring{\rho}_j \quad \text{п.в. на}\ \ \Delta_j, \quad j\in\overline{1,p}, \tag{5.5}$$

а $\mathbf{P}$ – линейный оператор

$$\mathbf{P} := \begin{pmatrix} 0 & P_{12} & P_{13} & \dots & P_{1p}\\ P_{21} & 0 & P_{23} & \dots & P_{2p}\\ P_{31} & P_{32} & 0 & \dots & P_{3p}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots\\ P_{p1} & P_{p2} & P_{p3} & \dots & 0\end{pmatrix}, \tag{5.6}$$

такой, что $\quad P_{ij}:\mathrm{Harm}(\Omega_j)\to\mathrm{Harm}(\Omega_i), i\neq j,\, i,j=\in\overline{1,p},,$

$$P_{ij}\,\psi_j\in\mathrm{Harm}(\Omega_i): \quad P_{ij}\,\psi_j=\psi_j \quad \text{п.в. на}\ \ \Delta_i\,.$$

Как и оператор $\mathbf{T}$, преобразование $\mathbf{t}$ можно рассматривать на более широком пространстве

$$\mathbf{t}: C_{\mathbf{\Delta}}\to\mathrm{Harm}(\mathbf{\Omega}),$$

при этом

$$d\left(\mathbf{f}^{(1)},\mathbf{f}^{(2)}\right) = \left\|\psi^{(1)}-\psi^{(2)}\right\|_{C_{\mathbf{\Delta}}}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} d\left(\mathbf{Tf}^{(1)},\mathbf{Tf}^{(2)}\right) &= \left\|\mathbf{t}\psi^{(1)}-\mathbf{t}\psi^{(2)}\right\|_{C_{\mathbf{\Delta}}} = \frac{1}{2}\left\|\mathbf{P}\left(\psi^{(1)}-\psi^{(2)}\right)\right\| \\ &\le \frac{\|\mathbf{P}\|}{2}\left\|\psi^{(1)}-\psi^{(2)}\right\|_{C_{\mathbf{\Delta}}} = \frac{\|\mathbf{P}\|}{2}\,d\left(\mathbf{f}^{(1)},\mathbf{f}^{(2)}\right). \end{aligned} \tag{5.7}$$

Вспоминая определение пространства $C_{\mathbf{\Delta}}$, с учетом принципа максимума для гармонических функций, получаем

$$\|\mathbf{P}\psi\|_{C_{\mathbf{\Delta}}} = \max_{i\in\{\overline{1,p}\}}\left\|\sum_{i\neq j=1}^{p}P_{ij}\psi_j\right\|_{\Delta_i} \le (p-1)\max_{i\in\{\overline{1,p}\},\,j\in\{\overline{1,p}\}\setminus i}\|\psi_j\|_{\Delta_i}\le(p-1)\|\psi\|_{\mathbf{\Delta}}. \tag{5.8}$$

Таким образом, оценки (5.7), (5.8) обеспечивают компактность оператора $\mathbf{P}$, составляющие его в (5.6) операторы $P_{i,j}$ – интегральные, с ядром Пуассона. В свою очередь, из этих оценок при $p := 2$ следует, что $\mathbf{T}$ – сжатие с коэффициентом $\gamma = 1/2$.

Как мы уже отмечали выше, см. (3.10), известно, что неподвижная точка

$$\mathbf{t}\,\psi^{(\infty)} := \left(\ln|\mathbf{T}f_1^{(\infty)}|, \ldots, \ln|\mathbf{T}f_p^{(\infty)}|\right),$$

отображения (5.4) удовлетворяет неоднородной системе граничных задач

$$\psi = \mathbf{t}\psi = \mathbf{K}\psi - \frac{1}{2}\beta, \quad \mathbf{K} := -\frac{1}{2}\mathbf{P}, \tag{5.9}$$

которая имеет единственное решение для любой интегрируемой правой части, см. [8]. Откуда вытекает, что существует ограниченный обратный оператор

$$(\mathrm{I} - \mathbf{K})^{-1}: \quad C_{\boldsymbol{\Delta}} \to C_{\boldsymbol{\Delta}}, \quad \psi = \mathbf{K}\psi - \frac{1}{2}\beta = (\mathrm{I} - \mathbf{K})^{-1}\left(-\frac{1}{2}\beta\right). \tag{5.10}$$

Факт $\exists\,!$ решения (5.9) также непосредственно следует (по альтернативе Фредгольма для компактного оператора K) из тривиальности решения однородной задачи:

$$\tilde{\psi} = \mathbf{K}\tilde{\psi}. \tag{5.11}$$

Действительно, если мы на листах $\mathcal{R}^{(k)}$, $k \in \overline{1,p}$ римановой поверхности $\mathcal{R}(\boldsymbol{\Delta})$, см. (1.10), разместим значения $\tilde{\psi} = (\tilde{\psi}_1, \ldots, \tilde{\psi}_p)$ компонент решения (5.11), то, в соответствии с принципом симметрии Римана - Шварца эти функции гармонически продолжаются через отрезки $\boldsymbol{\Delta} := (\Delta_1, \ldots, \Delta_p)$ на оставшийся лист $\mathcal{R}^{(0)}$. Тем самым, они определяют на всей компактной римановой поверхности $\mathcal{R}(\boldsymbol{\Delta})$ гармоническую функцию, которая по теореме Лиувилля равна константе: $\tilde{\psi} = const$. В свою очередь, из принципа максимума модуля гармонических функций и определения $\mathbf{K} := -\frac{1}{2}\mathbf{P}$ следует, что $const = 0$.

Отметим одно преобразование неподвижной точки $\psi^{(\infty)}$ из (5.9):

$$\psi^{(\infty)} = \mathbf{K}\psi^{(\infty)} - \frac{1}{2}\beta \qquad \Rightarrow \qquad \left(\mathbf{K}\psi^{(\infty)}\right) = \mathbf{K}\left(\mathbf{K}\psi^{(\infty)}\right) - \frac{1}{2}\mathbf{K}\beta. \tag{5.12}$$

Обозначим $\mathbf{g} := \mathbf{K}\psi^{(\infty)}$ и с учетом (5.10) имеем:

$$\mathbf{g} := -\frac{1}{2}\mathbf{P}\left(\sum_{j=2}^{p}\psi_j^{(\infty)}\Big|_{\Delta_1}, \ldots, \sum_{j=1}^{p-1}\psi_j^{(\infty)}\Bigg|_{\Delta_p}\right)^T = \mathbf{K}\mathbf{g} - \frac{1}{2}\mathbf{K}\beta = (\mathbf{I}-\mathbf{K})^{-1}\left(-\frac{1}{2}\mathbf{K}\beta\right). \tag{5.13}$$

Тем самым, установлена связь решений неоднородных задач (5.9), (5.10) и (5.12), (5.13). Таким образом, шаг **1**, связанный с решением системы граничных задач (2.2) в бесконечномерных пространствах (конусах) (5.2), можно считать зафиксированным.

5.1. Доказательство для $p = 2$**.** Рассмотрим семейство ω_ε замкнутых окрестностей $\mathbf{f}^{(\infty)}$ в d-метрике, таких, что

$$d\left(\mathbf{f}^{(\infty)}, \mathbf{f}\right) \le \varepsilon, \quad \forall \mathbf{f} \in \omega_\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \le \varepsilon_0,$$

где ε_0 выбрано из условия локального согласования d-метрики и $C_{\mathbf{\Delta}}$-нормы. Это возможно, так как $\mathbf{f}^{(\infty)} \in \widehat{C}^+_{\mathbf{\Delta}}$.

Далее, пусть

$$\omega_{\varepsilon,\mathbf{n}} := \omega_\varepsilon \cap \widehat{H}^{\mathbf{n}+}.$$

Множество $\omega_{\varepsilon,\mathbf{n}}$ – компакт (замкнуто и ограничено). По теореме 4.1 (шаг **2**) $\omega_{\varepsilon,\mathbf{n}}$ – непусто. Более того, $\omega_{\varepsilon,\mathbf{n}}$ – выпукло. Действительно, $\omega_{\varepsilon,\mathbf{n}}$ состоит из вектор-функций, чьи компоненты имеют графики, лежащие в “трубке” с осью вдоль графиков $f_j^{(\infty)}$. Элементы $t\mathbf{f}^{(1)} + (1-t)\mathbf{f}^{(2)}$, где $\mathbf{f}^{(1)}, \mathbf{f}^{(2)} \in \omega_{\varepsilon,\mathbf{n}}$ и $t \in [0{,}1]$, сохраняют вид (3.5), и поточечная проверка показывает, что графики их компонент остаются зажатыми в “трубке”. Покажем, что $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ $\exists N_\varepsilon$: $\forall |\mathbf{n}| > N_\varepsilon$ справедливо

$$\mathbf{T_n}[\omega_{\varepsilon,\mathbf{n}}] \subset \omega_{\varepsilon,\mathbf{n}}\,. \tag{5.14}$$

Рассмотрим произвольную последовательность точек

$$\mathbf{f_n} \subset \omega_{\varepsilon,\mathbf{n}}\,.$$

Семейство функций $\{\mathbf{f_n}\}$ компактно, и для всех предельных подпоследовательностей $\{\mathbf{f_n}\}_{\mathbf{n}\in\Lambda}$ по Теореме 4.1 (шаг **3**) имеем

$$d(\mathbf{T_n f_n}, \mathbf{T f_n}) \to 0, \qquad |\mathbf{n}| \to \infty, \tag{5.15}$$

в асимптотическом режиме (1.5). Далее для проверки (5.14) рассмотрим

$$d(\mathbf{f}^{(\infty)}, \mathbf{T_n f_n}) \le d(\mathbf{f}^{(\infty)}, \mathbf{T f_n}) + d(\mathbf{T_n f_n}, \mathbf{T f_n}). \tag{5.16}$$

В случае $p = 2$, как уже отмечалось, см. (5.7), (5.8) $\mathbf{T}-$ *сжатие* в $d-$метрике с коэффициентом $\gamma = 1/2$, и мы имеем

$$d(\mathbf{f}^{(\infty)}, \mathbf{T f_n}) = d(\mathbf{T f}^{(\infty)}, \mathbf{T f_n}) < \gamma d(\mathbf{f}^{(\infty)}, \mathbf{f_n}) < \gamma\varepsilon.$$

Теперь, выбирая с помощью (5.15) N_ε:

$$d(\mathbf{T_n f_n}, \mathbf{T f_n}) < (1-\gamma)\varepsilon, \qquad \forall n > N_\varepsilon,$$

из (5.16) получаем (5.14), что, по теореме о неподвижной точке (Брауера, Лере, Шаудера, Тихонова см. [19]), доказывает теорему 2.1 (в рассмотренном случае).

5.2. Доказательство для $p \geq 2$. Увы, оценка (5.8) нормы опрератора $\mathbf{P}$ в общем случае не обеспечивает в (5.7) строгого сжатия (но оставляет липшицевскую непрерывность!). В свою очередь, неравенство треугольника в (5.16) становится «грубым» и не позволяет выполнить условия Теоремы о неподвижной точке.

С.А. Денисов предложил ход, позволяющий избежать неравенства (5.16), используя лишь Теорему Тотика (теорему 4.1) и $\exists\ (\mathrm{I}-\mathbf{K})^{-1}$, см. (5.10). Для этого, вместо доказательства сходимости неподвижных точек $\mathbf{T_n}$ в (3.7) к неподвижной точке $\mathbf{T}$ в (3.10), он переключился на сходимость в d-метрике «переменных» весов СОМов Анжелеско, с последующим (приводящим к цели) применением Теоремы Тотика. Приведем рассуждения Денисова.

Перепишем преобразования $\widetilde{\mathbf{T}}_\mathbf{n}$, $\mathbf{T_n}$ в более удобной форме для работы с d-метрикой. Для *monic* многочлена $\mathcal{P}_n(x)$, $\deg\mathcal{P}_n = n$, ортогонального степеням x^k относительно веса $\rho(x)$, мы будем использовать обозначение:

$$\mathcal{P}_n[\rho](x) \quad \Longleftrightarrow \quad \int\limits_{\Delta} \mathcal{P}_n(x)\, x^k \rho(x)\, dx = 0, \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

Теперь определенные в (3.4), (3.6) отображения запишутся

$$\Big(\widetilde{\mathbf{T}}_\mathbf{n} P_\mathbf{n}\Big)_j := \mathcal{P}_{n_j}\Big[\prod_{j\neq i=1}^{p} (P_\mathbf{n})_i\ \rho_j\Big], \quad j = 1, \ldots, p,$$

$$(\mathbf{T_n} P_\mathbf{n})_j := e^{n_j V_j}\, \mathcal{P}_{n_j}\Big[\exp\sum_{j\neq i=1}^{p} \{\ln (P_\mathbf{n})_i \mp n_i V_i\}\, \rho_j\Big].$$

Тем самым, неподвижная точка в (3.7) – единственное решение задачи

$$e^{nV_j}\, (P_\mathbf{n})_i = e^{n_j V_j} \mathcal{P}_{n_j}\Big[\exp\sum_{j\neq i=1}^{p} (-n_i V_i) \exp\sum_{j\neq i=1}^{p} \{\ln (P_\mathbf{n})_i + n_i V_i\}\, \rho_j\Big].$$

Обозначим (т.е. «переменные» веса перевели в конечномерное пространство):

$$g_{\mathbf{n},j} := \ln\Big(\prod_{j\neq i=1}^{p} (Q_\mathbf{n})_i\, e^{nV_i}\Big)\Big|_{\Delta_j} = \sum_{j\neq i=1}^{p} \{\ln(Q_\mathbf{n})_i + n_i V_i\}\,\Big|_{\Delta_j},$$

преобразуем в условие на неподвижную точку $\mathbf{g_n} := \{g_{n,j}\}_{j=1}^{p}$ оператора R_n:

$$g_{\mathbf{n},j} = \ln\Big(\prod_{j\neq i=1}^{p} e^{nV_i}\, \mathcal{P}_{n_j}\Big[\exp\Big\{\sum_{i\neq k=1}^{p} (-nV_k) + g_{\mathbf{n},i}\Big\}\rho_i\Big]\Big), \tag{5.17}$$

$$R_n\, \widetilde{g}_{n,j} := \ln\Big(\prod_{j\neq i=1}^{p} e^{nV_i}\, \mathcal{P}_{n_j}\Big[\rho_i \exp\Big\{\sum_{i\neq k=1}^{p} (-nV_k) + \widetilde{g}_{n,i}\Big\}\Big]\Big).$$

Далее подстраиваем этот оператор (действующий на векторах $\widetilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{n}}$ в окрестности $\mathbf{g}_{\mathbf{n}}$) под Теорему Тотика:

$$\widetilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{n}} = R_{\mathbf{n}}\,\widetilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{n}} \mp \mathbf{K}\left(\widetilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{n}} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\ln\mathring{\rho}_1\\ \vdots\\ \ln\mathring{\rho}_p\end{pmatrix}\right) =: \Xi_{\mathbf{n}}\,\widetilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{n}} + \mathbf{K}\left(\widetilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{n}} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\ln\mathring{\rho}_1\\ \vdots\\ \ln\mathring{\rho}_p\end{pmatrix}\right), \tag{5.18}$$

из которой следует, что

$$\Xi_{\mathbf{n}}(\widetilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{n}}) \rightrightarrows 0, \quad |\mathbf{n}| \to \infty, \tag{5.19}$$

равномерно по $\widetilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{n}}$ в окрестности неподвижной точки $\mathbf{g}_{\mathbf{n}}$. Таким образом, из (5.18) имеем

$$\Xi_{\mathbf{n}}(\mathbf{g}_{\mathbf{n}}) - \frac{1}{2}\mathbf{K}\begin{pmatrix}\ln\mathring{\rho}_1\\ \vdots\\ \ln\mathring{\rho}_p\end{pmatrix} = (\mathrm{I} - \mathbf{K})\mathbf{g}_{\mathbf{n}},$$

$$(\mathrm{I} - \mathbf{K})^{-1}\Xi_{\mathbf{n}}(\mathbf{g}_{\mathbf{n}}) - (\mathrm{I} - \mathbf{K})^{-1}\,\frac{1}{2}\mathbf{K}\begin{pmatrix}\ln\mathring{\rho}_1\\ \vdots\\ \ln\mathring{\rho}_p\end{pmatrix} = \mathbf{g}_{\mathbf{n}}.$$

Осталось применить (5.19) к первому члену полученного равенства и, сравнивая с (5.12), (5.13)

$$-\frac{1}{2}\mathbf{K}\begin{pmatrix}\ln\mathring{\rho}_1\\ \vdots\\ \ln\mathring{\rho}_p\end{pmatrix} = (\mathrm{I} - \mathbf{K})\mathbf{g} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{g} = \mathbf{K}\mathbf{g} - \frac{1}{2}\mathbf{K}\begin{pmatrix}\ln\mathring{\rho}_1\\ \vdots\\ \ln\mathring{\rho}_p\end{pmatrix},$$

заметить сходимость неподвижных точек $\mathbf{g}_{\mathbf{n}}$ к $\mathbf{g}$, что повторным применением Теоремы Тотика в итоге приводит к доказательству теоремы 2.1.

6. Заключительные замечания

В связи с недавним прогрессом в изучении спектральных задач для многомерного дискретного оператора Шредингера (многомерной матрицы Якоби) на графах-деревьях [5], [6], [7] возник интерес к современной ревизии и обобщении известных [11] результатов по асимптотике Сеге СОМов.

В этом направлении в 2021 вышла работа [18], в которой Теоремы Тотика об асимптотике Сеге адаптировались для приложений к асимптотике СОМов.

Осенью 2022 был написан текст, объясняющий схему Видома [15], примененную в [11], для получения асимптотики Сеге у СОМов относительно весов системы Анжелеско. Этот текст, слегка отредактированный и с добавленным пунктом 5.2, составляет содержание настоящего препринта.

Надо отметить, что в этом препринте нет деталей доказательства теоремы 2.1 (см., например, Замечание после формулировки теоремы 4.1), а обсуждаются лишь основные моменты применения схемы Видома для СОМов.

Список литературы

[1] Angelesko M. A. Sur deux extensions des fractions continues algebriques// C. r. **168** (1919), 262.

[2] Никишин Е. М. О системе марковских функций// Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика, (1979), № 4, 60–63.

[3] Калягин В. А. Об одном классе полиномов, определяемых двумя соотношениями ортогональности// Матем. сб. **110**(152):4(12) (1979), 609–627. English transl. Kalyagin V. A.. “On a class of polynomials defined by two orthogonality relations// Math. USSR–Sb. 38:4 (1981), 563–580.

[4] Van Assche W. Nearest neighbor recurrence relations for multiple orthogonal polynomials// J. Approx. Theory, 163:1427–1448, 2011.

[5] Aptekarev A.I., Denisov S.A., and Yattselev M.L. Self-adjoint Jacobi matrices on trees and multiple orthogonal polynomials// Trans. Amer. Math. Soc., 373(2), 875–917, 2020. https://doi.org/10.1090/tran/7959.

[6] Aptekarev A.I., Denisov S.A., and Yattselev M.L. Jacobi matrices on trees generated by Angelesco systems: asymptotics of coefficients and essential spectrum// Journal of Spectral Theory 11 (4), 1511-1597.

[7] Denisov S.A., Yattselev M.L. Spectral theory of Jacobi matrices on trees whose coefficients are generated by multiple orthogonality// Advances in Mathematics 396, 108-114, 2022.

[8] Аптекарев А.И., Лысов В.Г. Системы марковских функций, генерируемые графами, и асимптотика их аппроксимаций Эрмита–Паде// Матем. сб., 201:2 (2010), 29–78; English transl. Aptekarev A. I., Lysov V. G., Systems of Markov functions generated by graphs and the asymptotics of their Hermite-Pade approximants// Sb. Math., 201:2 (2010), 183–234.

[9] Зверович Э.И. Краевые задачи теории аналитических функций в гельдеровских классах на римановых поверхностях, УМН, 26:1 (1971), 113–179; English transl.: Zverovich E. I., Boundary value problems in the theory of analytic functions in Holder classes on Riemann surfaces, Russian Math. Surveys, 26:1 (1971), 117–192.

[10] Yattselev M. Strong asymptotics of Hermite-Pade approximants for Angelesco systems// Canad. J. Math., 68(5):1159–1200, 2016. http://dx.doi.org/10.4153/CJM-2015-043-3

[11] Аптекарев А. И. Асимптотика полиномов совместной ортогональности в случае Анджелеско// Матем. сб. **136**(178):1(5) (1988), 56–84. English transl. Aptekarev A. I. Asymptotics of simultaneously orthogonal polynomials in the Angelesco case// Math. USSR–Sb. 64:1 (1989), 57–84.

[12] Аптекарев А. И. Сильная асимптотика многочленов совместной ортогональности для систем Никишина// Матем. сб. **190**:5 (1999), 3–44. English transl. Aptekarev A. I. Strong asymptotics of multiply orthogonal polynomials for Nikishin systems// Sb. Math. 190:5 (1999), 631–669.

[13] Аптекарев А. И., Лопес Лагомасино Г., Роча И. А. Асимптотика отношения полиномов Эрмита–Паде// Матем. сб., 196:8 (2005), 3–20. English transl. Aptekarev A. I., Lopez Lagomasino G., Alvarez Rocha I. Ratio asymptotics of Hermite–Pade polynomials for Nikishin systems// Sb. Math., 196:8 (2005), 1089–1107.

[14] Гончар А. А., Рахманов Е. А. О сходимости совместных аппроксимаций Паде для систем функций марковского типа// Тр. МИАН СССР **157** (1981), 31—48.

[15] Widom H. Extremal polynomials associated with a system of curves in the complex plane// Adv. Math. **3** (1969), 127–232.

[16] Totik V. Weighted Approximation with Varying Weight. Lecture Notes in Mathematics, **1569**.– New York: Springer, 1994. – 121 pages.

[17] Totik V. Orthogonal polynomials with respect to varying weights// J. Comput. Appl. Math. **99**: 1-2 (1998), 373-–385.

[18] Аптекарев А.И. Слабые и сильные асимптотики ортогональных многочленов с «переменным» весом // Современная математика. Фундаментальные направления. - 2021. - Т. 67. - №3. - С. 427-441. doi: 10.22363/2413-3639-2021-67-3-427-441 English transl. Aptekarev A. Weak and Strong Asymptotics of Orthogonal Polynomials with Varying Weight //Journal of Mathematical Sciences with Springer Nature, Manuscript ID: 3a24aa51-396e-4e7e-9dbf-93ccce6ef512

[19] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики, т.1 Функциональный анализ, «Мир», Москва, 1977.

Alexander I. Aptekarev *(aptekaa@keldysh.ru)*
Keldysh Institute of Applied Mathematics,
Russian Academy of Science,
Miusskaya Pl.4, Moscow 125047, Russian Federation